全国中学生物理竞赛复赛模拟试题第二套

第一题

【解】能量守恒有：

$$Mg(\sqrt{l^2+d^2-2\cos\theta ld}-\sqrt{l^2+R^2})-mgl(1-\sin\theta)=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Mv^2\cos^2\alpha$$

得：$v^2=\dfrac{Mg(\sqrt{l^2+d^2-2\cos\theta ld}-\sqrt{l^2+R^2})-mgl(1-\sin\theta)}{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}M\cos^2\alpha}$

其中$\cos^2\alpha=\sin^2(\theta+90^\circ)=\dfrac{\sin^2\theta d^2}{l^2+d^2-2\cos\theta ld}$

这是关于v^2与θ的方程我们有

$$a_\tau=\frac{1}{2l}\frac{\Delta v^2}{\Delta\theta}，\quad a_n=\frac{v^2}{l}$$

计算得：

$$\frac{\Delta v^2}{\Delta\theta}=\frac{2(\frac{m}{M}\sin\theta\frac{d}{s}+\cos\theta)(1+\frac{m}{M}\frac{\sin^2\theta d^2}{s^2})-4(\frac{s}{l}-\sqrt{1^2+\frac{d}{l^2}^2}-\frac{m}{M}+\frac{m}{M}\sin\theta)(\sin\theta\cos\theta\frac{d^2}{s^2}-2\sin^3\theta\frac{d^3l}{s^4})}{(\frac{m}{M}+\frac{\sin^2\theta d^2}{s^2})^2}gl$$

写成$\dfrac{\Delta v^2}{\Delta\theta}=Agl$其中所以$a_\tau=\dfrac{1}{2}Ag$，$a_n=Bg$

$$A=\frac{2(\frac{m}{M}\sin\theta\frac{d}{s}+\cos\theta)(1+\frac{m}{M}\frac{\sin^2\theta d^2}{s^2})-4(\frac{s}{l}-\sqrt{1^2+\frac{d}{l^2}^2}-\frac{m}{M}+\frac{m}{M}\sin\theta)(\sin\theta\cos\theta\frac{d^2}{s^2}-2\sin^3\theta\frac{d^3l}{s^4})}{(\frac{m}{M}+\frac{\sin^2\theta d^2}{s^2})^2}$$

$$B=2\frac{\sqrt{1+\frac{d}{l^2}^2-2\cos\theta\frac{d}{l}}-\sqrt{1+\frac{d^2}{l^2}}-\frac{m}{M}(1-\sin\theta)}{\frac{m}{M}+\cos^2\alpha}$$

$s=\sqrt{l^2+d^2-2\cos\theta ld}$

第二题

【解】以 O 为轴力矩平衡有 $Nl\sin\theta = fl\cos\theta + \frac{l}{2}\sin\theta mg$

竖直方向上受力平衡有 $N = mg + \frac{1}{3}Mg$

滑动临界条件有 $f = \mu N$

其中由几何关系有 $\tan\theta = \frac{d}{\sqrt{3l^2 - d^2}}$

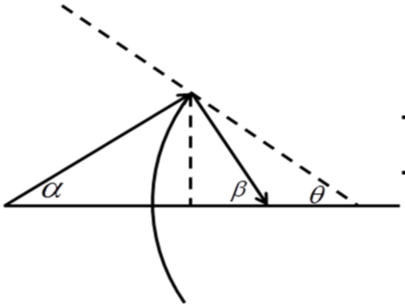
联立得 $M = \frac{\frac{1}{2}\tan\theta + \mu}{\tan\theta - \mu}m$

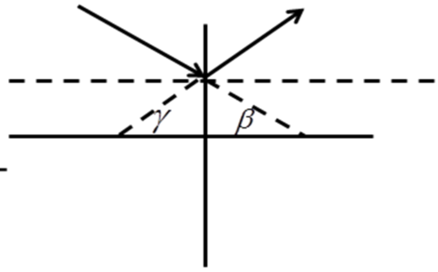
讨论：若 $\mu < \tan\theta$ 则上式成立，若 $\mu > \tan\theta$ 则自锁。

第三题

【解】画出光路图如下

从左往右入射：





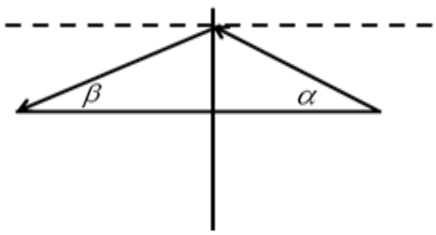
傍轴近似$\alpha=\dfrac{h}{u}$，$\beta=\dfrac{h}{v'}$，$\gamma=\dfrac{h}{-v}$，$\theta=\dfrac{h}{R}$

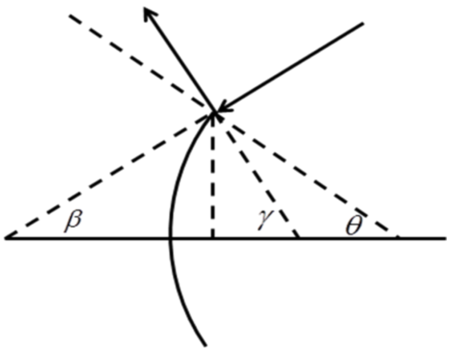
折射$\alpha+\theta=-n(\beta-\theta)$，$-n\beta=\gamma$

代入得$\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=-\dfrac{1-n}{R}$

$u\to\infty$得像方焦距$f_v=-\dfrac{1}{1-n}R$，$v\to\infty$得物方焦距$f_u=-\dfrac{1}{1-n}R$

从右往左入射：





傍轴近似$\alpha=\dfrac{h}{u}$，$\beta=\dfrac{h}{u'}$，$\gamma=\dfrac{h}{-v}$，$\theta=\dfrac{h}{R}$

折射$\alpha=-n\beta$，$-n(\beta+\theta)=\gamma-\theta$

代入有$\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=-\dfrac{1-n}{R}$

$u\to\infty$得像方焦距$f_v=-\dfrac{1}{1-n}R$，$v\to\infty$得物方焦距$f_u=-\dfrac{1}{1-n}R$

讨论：从左向右或从右往左入射成像公式相同，像距都为负，都是虚像。像方焦距物方焦距也都为负。

第四题

【解】（1）对桶：$\dfrac{GMm}{(R+h)^2}-F_{支}=m(\dfrac{2\pi}{T})^2(R+h)$

两端杆的力合成支持力 $F_{支}=N\theta$，$\theta=\dfrac{l}{h+R}$

代入得 $N=\dfrac{GMm}{(R+h)l}-m(\dfrac{2\pi}{T})^2\dfrac{(R+h)^2}{l}$

（2）对桶 $\dfrac{GMm}{(R+h)^2}-F'_{支}=m\omega^2(R+h)$

对任意物体 $m\omega^2(R+h)-\dfrac{GMm}{(R+h)^2}=mg$

同样有 $F_{支}=N\theta$，$\theta=\dfrac{l}{h+R}$

得 $N'=-mg\dfrac{h+R}{l}$

N'为负则桶与桶之间为拉力。

第五题

【解】

能量守恒 $m_\pi c^2=m'_u c^2+m'c^2$

动量守恒 $p_u=p_{中}$

能量动量关系 $(m'_u c^2)^2-(m_u c^2)^2=p_u^2$，$m'c^2=p_{中}c$

动能 $E_{ku}=m'_u c^2-m_u c^2$，$E_{k中}=m'c^2$

联立得：$E_{ku}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(m_\pi-m_u)^2}{m_\pi}$，$E_{k中}=\dfrac{1}{2}\dfrac{m_\pi^2-m_u^2}{m_\pi}c^2$

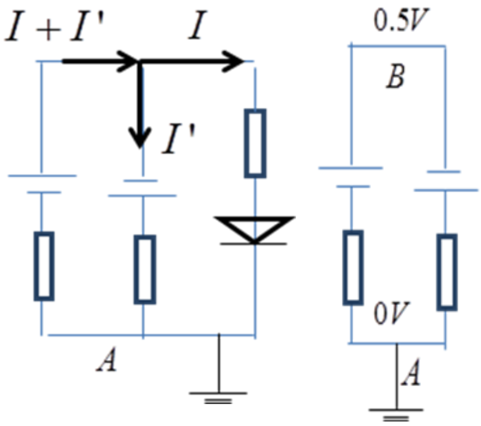
第六题

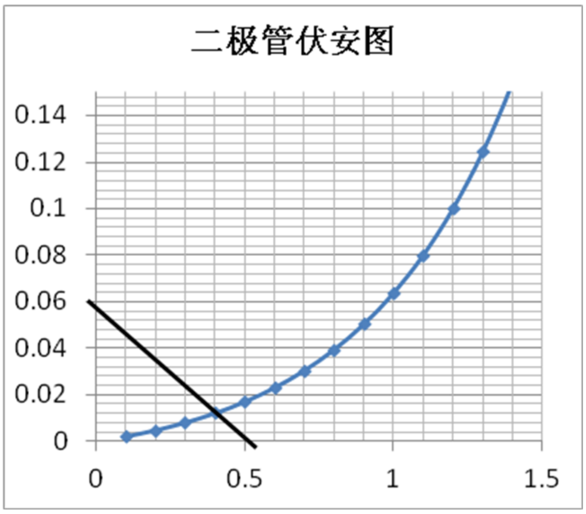
【解】先判断两个二极管有无电流。在没有二极管的情况下计算 A、B 点的电压，得左图，有 B 电电压高于 A 点电压，即左二极管没有电流通过，右二极管有电流。如右图列基尔霍夫方程组有

$5(I+I')+10I'=7.5$

$5(I+I')+5I+U=3$

解得 $I=-0.12U+0.06$





如图得 $I=0.012A$， $U=0.4V$， 代入得 $I'=0.496A$， $I'+I=0.508A$

每个电阻功率为 $P=i^2R$，将 i 与 R 代入即可。

第七题

【解】设 Δt 时间装上圆筒的光子数为 ΔN，

加速度 $ma=\dfrac{\Delta N}{\Delta t}\dfrac{h\upsilon}{c}$， 角加速度 $mr^2\beta=\dfrac{\Delta N}{\Delta t}\dfrac{h}{2\pi}$，

线性运动 $\dfrac{1}{2}at_n^2=x_n$， 旋转运动 $\dfrac{1}{2}\beta t_n^2=n\cdot 2\pi$，

螺距 $\Delta x=x_{n+1}-x_n$

代入得 $\Delta x=2\pi\dfrac{a}{\beta}=4\pi^2r^2\dfrac{\upsilon}{c}$