

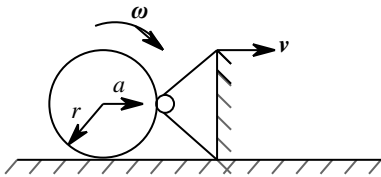
第 29 届复赛模拟赛题 第四套

满分 160 分

第一题 (20 分)

一个半径为 r 的圆环能在水平地面上做纯滚动，在圆环边缘固定有一个半径可以忽略的小滑轮，某时刻滑轮恰好处于水平位置。在距离滑轮 r 处有一墙高为 $2r$ 的墙，一根不可伸长的绳子从墙根连出，绕过滑轮，从墙顶处绕出（由几何条件可以算出来绳子绕出的是等腰直角三角形的两条边），某人在墙顶处以速度 v 匀速拉绳子，为了让绳子即不拉断，也不松弛，则此刻

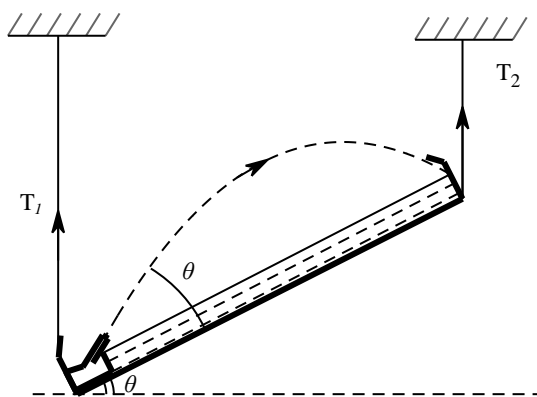
- ①圆环的角速度 ω 为多少？
- ②圆环中心相对地面加速度 a 为多少？



第二题（20分）

一个长度为 l 的扁平的水槽与水平夹角为 30° ，水槽的质量为 m ，在两端用细线将水槽吊起来。在水槽最下端有一个质量为 m 的喷水机，从水槽中抽水，以速度 v_0 将水沿着与水槽夹角为 $\theta = 30^\circ$ 的方向喷出，水则刚好能喷到水槽上端，水落回水槽后受到水槽底部阻力的影响，匀速流到水槽底端，形成稳定的水流。

- ①重力加速度为 g ，求出能将水刚好喷到水槽上端喷水机喷水的速度 v_0 。
- ②喷水出口的面积 S ，水密度为 ρ ，水槽中水下流速度为 v_1 ，为了保持平衡，两根绳上的拉力各为多少？（两根绳子保持竖直方向）

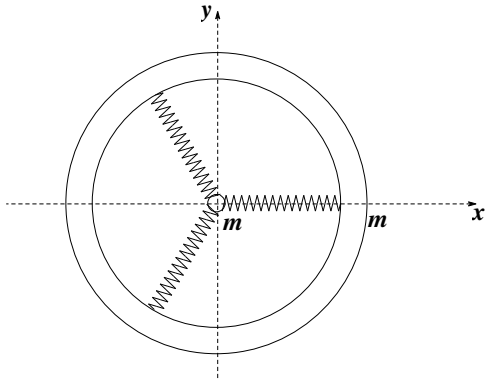


第三题（20分）

在光滑平面上放有一个质量为 m 的匀质圆环，内径为 r 。从圆环的三个三等分点上各连出一根轻质弹簧，原长几乎为 0，劲度系数为 k ，三根弹簧连到一个质量为 m 的质点上。

① 用一个恒力 F 沿着 x 方向作用于圆环，若 m 与 M 保持相对静止，则 m 相对圆心位移为多少？

② 初态圆环和质点保持静止，沿着某根弹簧方向给圆环一个冲量，使得速度为 $v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}r$ ，求之后圆环和质点的运动方程。

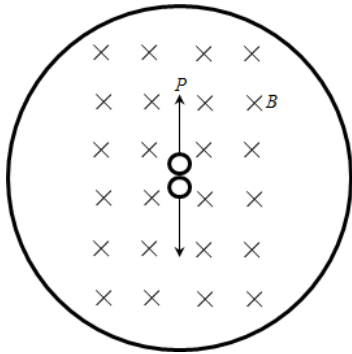


第四题（20分）

如图一个绝缘的刚性的固定圆筒，沿着轴向有匀强磁场 B 。有一个电中性的粒子静止在圆筒中心，粒子突然衰变成为两个带电量为 $\pm q$ 的粒子，粒子出射方向在平面内，动量大小为 P 。粒子之间发生碰撞时交换动量，不考虑静电作用，电量各自保持不变。粒子与圆筒之间的碰撞是完全弹性的，圆筒的半径满足 $R = \frac{P}{Bq}$

①当衰变的两个粒子质量比为 $m_1 : m_2 = 1:1$ 时，求从初态到两个粒子的运动状态第一次还原到初态经历的时间，并画出粒子轨迹。

②令 $m_1 : m_2 = 1:2$ 重做上一问。



第五题（20分）

非洲杀人湖

非洲有一个由火山口形成的湖泊，由于其特殊的地质结构而成为杀人湖。调查发现原因在于湖底溶有大量 CO_2 ，由于扰动 CO_2 大量集中涌至湖面，造成人畜窒息。为了简单起见，假设温度恒定为 T_0 时， CO_2 达到溶解平衡时气相中 CO_2 的分压 P 与液相中 CO_2 的摩尔浓度 C 满足 $P=\alpha C$ 。其中 P 被称为 CO_2 的饱和气压。湖的深度为 H ，水密度为 ρ 。（溶解气体后密度几乎不变）

①在湖底 CO_2 浓度恒定为 C_0 ，大气压为 P_0 ，假设只要水中压强小于 CO_2 的溶解平衡压强，就有 CO_2 逸出，计算出开始有 CO_2 逸出的深度 h 。（假设你算出的 $0 < h < H$ ）

②实际上在 h 的位置并不会会有 CO_2 逸出。由于涨落水中可能出现一些半径为 r 的小气泡，气泡中 CO_2 与溶液保持溶解平衡。（水蒸气的饱和蒸汽压可以忽略）液体的表面张力为 σ ，若外压过大则气泡被压回水中，否则气泡进一步长大，形成 CO_2 集中快速逸出，对人畜构成危险，计算出 CO_2 快出逸出的最大深度 h' （假设你算出的 $0 < h' < H$ ）

③某人插了一根管子到水底，不断向内鼓气，解决了杀人湖的问题，解释这个原理。

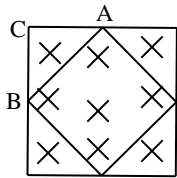
第六题（18分）

如图，用八根单位长度电阻为 r 的电阻线焊接成两个正方形（焊接点电阻为零）。大正方形边长为 l 。

在正方形区域中有垂直于纸面向内随时间均匀变化的磁场 $\frac{\Delta B}{\Delta t} = k$ 。

①求 AC、AB 导线上的电流

②求 AC 两点电势差 $U_A - U_C$ 和 AB 两点电势差 $U_A - U_B$ 。

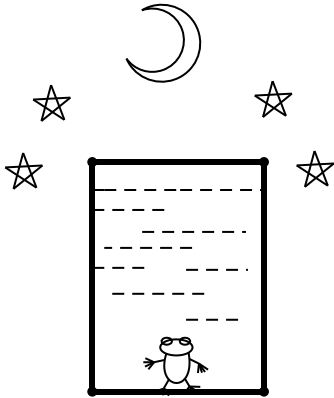


第七题 (20 分)

井底之蛙

在一个圆柱形的井底中心有一只青蛙。当水注满整个井的时候，青蛙刚好能看见全部天空，水的折射为 $n=1.33$ 。

- ①若此时月亮位于天顶，则青蛙看见的月亮和此时地上的人看到的月亮的大小之比是多少？
- ②当水漏掉一半的时候，青蛙看到的星星数目和此时地上的人看到的星星数目之比约为多少？（认为星星很多，均匀的分布在天空中）
- ③接上一问，青蛙的视野中，“天空”的边缘与“天空”的中心，星星的密度之比为多少？



第八题 (22 分)

两面平行放置的镜子 A、B 分别以 $0.6c$ 和 $0.8c$ 的速度相向运动，在地面参照系中某时刻两镜相距 l ，此时从 A 镜面向着 B 发出一束激光，在 A 镜参照系中，激光频率为 f_0 ，激光在两面镜子间来回反射。

- ① 在地面看来，当 A、B 间距变为 $\frac{l}{8}$ 时，激光走过的路程为多少？
- ② 从 A 镜为参照系，从激光发出到第一次被 A 镜面反射，经过了多长时间？
- ③ 以 A 镜为参照系，激光先被 B 反射，之后第一次被 A 镜面反射后的频率为多少？

