

**2010 年全国高中数学联合竞赛一试试题  
参考答案及评分标准 (A 卷)**

说明:

1. 评阅试卷时, 请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档; 其他各题的评阅, 请严格按照本评分标准的评分档次给分, 不要增加其他中间档次.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 解答题中第 9 小题 4 分为一个档次, 第 10、11 小题 5 分为一个档次, 不要增加其他中间档次.

一、填空题 (本题满分 64 分, 每小题 8 分)

1. 函数  $f(x) = \sqrt{x-5} - \sqrt{24-3x}$  的值域是  $[-3, \sqrt{3}]$ .

解: 易知  $f(x)$  的定义域是  $[5, 8]$ , 且  $f(x)$  在  $[5, 8]$  上是增函数, 从而可知  $f(x)$  的值域为  $[-3, \sqrt{3}]$ .

2. 已知函数  $y = (a \cos^2 x - 3) \sin x$  的最小值为  $-3$ , 则实数  $a$  的取值范围是  $-\frac{3}{2} \leq a \leq 12$ .

解: 令  $\sin x = t$ , 则原函数化为  $g(t) = (-at^2 + a - 3)t$ , 即

$$g(t) = -at^3 + (a-3)t.$$

$$\text{由 } -at^3 + (a-3)t \geq -3,$$

$$-at(t^2 - 1) - 3(t-1) \geq 0,$$

$$(t-1)(-at(t+1) - 3) \geq 0 \text{ 及 } t-1 \leq 0 \text{ 知}$$

$$-at(t+1) - 3 \leq 0 \text{ 即 } a(t^2 + t) \geq -3. \quad (1)$$

当  $t = 0, -1$  时 (1) 总成立;

对  $0 < t \leq 1, 0 < t^2 + t \leq 2$ ;

对  $-1 < t < 0, -\frac{1}{4} \leq t^2 + t < 0$ .

从而可知  $-\frac{3}{2} \leq a \leq 12$ .

3. 双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  的右半支与直线  $x = 100$  围成的区域内部 (不含边界) 整点 (纵横坐标均为整数的点) 的个数是 1790.

解: 由对称性知, 只要先考虑  $x$  轴上方的情况, 设  $y = k (k = 1, 2, \dots, 9)$  与双曲线右半支于  $A_k$ , 交直

线  $x = 100$  于  $B_k$ , 则线段  $A_k B_k$  内部的整点的个数为  $99 - k$ , 从而在  $x$  轴上方区域内部整点的个数为

$$\sum_{k=1}^9 (99 - k) = 99 \times 9 - 45 = 846.$$

又  $x$  轴上有 98 个整点, 所以所求整点的个数为  $2 \times 846 + 98 = 1790$ .

4. 已知  $\{a_n\}$  是公差不为 0 的等差数列,  $\{b_n\}$  是等比数列, 其中  $a_1 = 3, b_1 = 1, a_2 = b_2, 3a_5 = b_3$ ,

且存在常数  $\alpha, \beta$  使得对每一个正整数  $n$  都有  $a_n = \log_{\alpha} b_n + \beta$ , 则  $\alpha + \beta = \underline{\underline{\sqrt[3]{3} + 3}}$ .

解: 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d, \{b_n\}$  的公比为  $q$ , 则

$$3 + d = q, \quad (1)$$

$$3(3 + 4d) = q^2, \quad (2)$$

(1) 代入 (2) 得

$$9 + 12d = d^2 + 6d + 9, \text{ 求得 } d = 6, q = 9.$$

从而有  $3 + 6(n - 1) = \log_{\alpha} 9^{n-1} + \beta$  对一切正整数  $n$  都成立,

即  $6n - 3 = (n - 1)\log_{\alpha} 9 + \beta$  对一切正整数  $n$  都成立.

从而  $\log_{\alpha} 9 = 6, -3 = -\log_{\alpha} 9 + \beta$ ,

求得  $\alpha = \sqrt[3]{3}, \beta = 3, \alpha + \beta = \sqrt[3]{3} + 3$ .

5. 函数  $f(x) = a^{2x} + 3a^x - 2 (a > 0, a \neq 1)$  在区间  $x \in [-1, 1]$  上的最大值为 8, 则它在这个区间上

的最小值是  $\underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$ .

解: 令  $a^x = y$ , 则原函数化为  $g(y) = y^2 + 3y - 2$ ,  $g(y)$  在  $(-\frac{3}{2}, +\infty)$  上是递增的.

当  $0 < a < 1$  时,  $y \in [a, a^{-1}]$ ,

$$g(y)_{\max} = a^{-2} + 3a^{-1} - 2 = 8 \Rightarrow a^{-1} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2},$$

所以  $g(y)_{\min} = (\frac{1}{2})^2 + 3 \times \frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{4}$ ;

当  $a > 1$  时,  $y \in [a^{-1}, a]$ ,

$$g(y)_{\max} = a^2 + 3a - 2 = 8 \Rightarrow a = 2,$$

$$\text{所以 } g(y)_{\min} = 2^{-2} + 3 \times 2^{-1} - 2 = -\frac{1}{4}.$$

综上  $f(x)$  在  $x \in [-1, 1]$  上的最小值为  $-\frac{1}{4}$ .

6. 两人轮流投掷骰子，每人每次投掷两颗，第一个使两颗骰子点数和大于 6 者为胜，否则轮由另一人投掷. 先投掷人的获胜概率是  $\frac{84}{119}$ .

解：同时投掷两颗骰子点数和大于 6 的概率为  $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ ，从而先投掷人的获胜概率为

$$\begin{aligned} & \frac{7}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 \times \frac{7}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^4 \times \frac{7}{12} + \dots \\ &= \frac{7}{12} \times \frac{1}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{84}{119}. \end{aligned}$$

7. 正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的 9 条棱长都相等， $P$  是  $CC_1$  的中点，二面角  $B - A_1P - B_1 = \alpha$ ，则

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

解一：如图，以  $AB$  所在直线为  $x$  轴，线段  $AB$  中点  $O$  为原点， $OC$  所在直线为  $y$  轴，建立空间

直角坐标系. 设正三棱柱的棱长为 2，则  $B(1,0,0), B_1(1,0,2), A_1(-1,0,2), P(0, \sqrt{3}, 1)$ ，从而，

$$\overrightarrow{BA_1} = (-2, 0, 2), \overrightarrow{BP} = (-1, \sqrt{3}, 1), \overrightarrow{B_1A_1} = (-2, 0, 0), \overrightarrow{B_1P} = (-1, \sqrt{3}, -1).$$

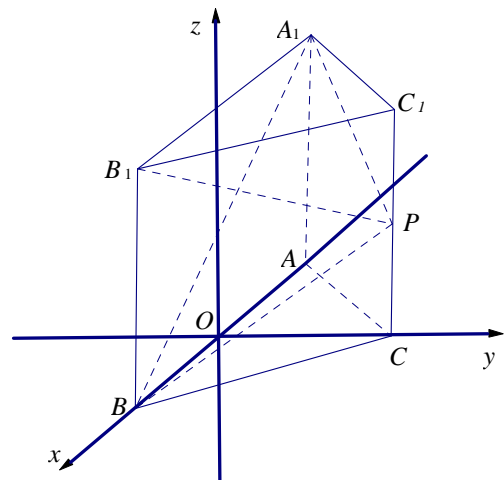
设分别与平面  $BA_1P$ 、平面  $B_1A_1P$  垂直的向量是  $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ ，则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BA_1} = -2x_1 + 2z_1 = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BP} = -x_1 + \sqrt{3}y_1 + z_1 = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{B_1A_1} = -2x_2 = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{B_1P} = -x_2 + \sqrt{3}y_2 - z_2 = 0, \end{cases}$$

由此可设  $\vec{m} = (1, 0, 1), \vec{n} = (0, 1, \sqrt{3})$ ，

$$\text{所以 } |\vec{m} \cdot \vec{n}| = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| |\cos \alpha|,$$

$$\text{即 } \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot 2 |\cos \alpha| \Rightarrow |\cos \alpha| = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$



所以  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$ .

解二：如图， $PC = PC_1, PA_1 = PB$  .

设  $A_1B$  与  $AB_1$  交于点  $O$ ，则

$$OA_1 = OB, OA = OB_1, A_1B \perp AB_1 .$$

因为  $PA = PB_1$ ，所以  $PO \perp AB_1$ ，

从而  $AB_1 \perp$  平面  $PA_1B$  .

过  $O$  在平面  $PA_1B$  上作  $OE \perp A_1P$ ，垂足为  $E$  .

连结  $B_1E$ ，则  $\angle B_1EO$  为二面角  $B - A_1P - B_1$  的平面角.

设  $AA_1 = 2$ ，则易求得

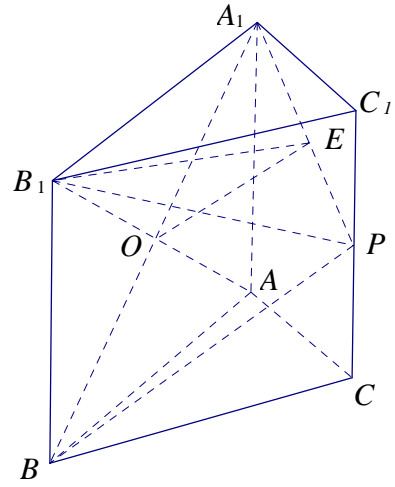
$$PB = PA_1 = \sqrt{5}, A_1O = B_1O = \sqrt{2}, PO = \sqrt{3} .$$

在直角  $\triangle PA_1O$  中， $A_1O \cdot PO = A_1P \cdot OE$ ，

$$\text{即 } \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5} \cdot OE, \therefore OE = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} .$$

$$\text{又 } B_1O = \sqrt{2}, \therefore B_1E = \sqrt{B_1O^2 + OE^2} = \sqrt{2 + \frac{6}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} .$$

$$\sin \alpha = \sin \angle B_1EO = \frac{B_1O}{B_1E} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4} .$$



8. 方程  $x + y + z = 2010$  满足  $x \leq y \leq z$  的正整数解  $(x, y, z)$  的个数是 336675 .

解：首先易知  $x + y + z = 2010$  的正整数解的个数为  $C_{2009}^2 = 2009 \times 1004$  .

把  $x + y + z = 2010$  满足  $x \leq y \leq z$  的正整数解分为三类：

- (1)  $x, y, z$  均相等的正整数解的个数显然为 1；
- (2)  $x, y, z$  中有且仅有 2 个相等的正整数解的个数，易知为 1003；
- (3) 设  $x, y, z$  两两均不相等的正整数解为  $k$  .

$$\text{易知 } 1 + 3 \times 1003 + 6k = 2009 \times 1004 ,$$

$$\begin{aligned}
6k &= 2009 \times 1004 - 3 \times 1003 - 1 \\
&= 2006 \times 1005 - 2009 + 3 \times 2 - 1 = 2006 \times 1005 - 2004, \\
k &= 1003 \times 335 - 334 = 335671.
\end{aligned}$$

从而满足  $x \leq y \leq z$  的正整数解的个数为

$$1 + 1003 + 335671 = 336675.$$

## 二、解答题 (本题满分 56 分)

9. (本小题满分 16 分) 已知函数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ), 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $|f'(x)| \leq 1$ , 试求  $a$  的最大值.

解一:  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} f'(0) = c, \\ f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}a + b + c, \\ f'(1) = 3a + 2b + c \end{cases} \text{ 得} \quad (4 \text{ 分})$$

$$3a = 2f'(0) + 2f'(1) - 4f'(\frac{1}{2}). \quad (8 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } 3|a| &= \left| 2f'(0) + 2f'(1) - 4f'(\frac{1}{2}) \right| \\
&\leq 2|f'(0)| + 2|f'(1)| + 4\left|f'(\frac{1}{2})\right| \\
&\leq 8, \\
a &\leq \frac{8}{3}. \quad (12 \text{ 分})
\end{aligned}$$

又易知当  $f(x) = \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + x + m$  ( $m$  为常数) 满足题设条件, 所以  $a$  最大值为  $\frac{8}{3}$ . (16 分)

解二:  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ .

设  $g(x) = f'(x) + 1$ , 则当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $0 \leq g(x) \leq 2$ .

设  $z = 2x - 1$ , 则  $x = \frac{z+1}{2}$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ .

$$h(z) = g\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{3a}{4}z^2 + \frac{3a+2b}{2}z + \frac{3a}{4} + b + c + 1. \quad (4 \text{ 分})$$

容易知道当  $-1 \leq z \leq 1$  时,  $0 \leq h(z) \leq 2, 0 \leq h(-z) \leq 2$ . (8 分)

从而当  $-1 \leq z \leq 1$  时,  $0 \leq \frac{h(z) + h(-z)}{2} \leq 2$ ,

$$\text{即 } 0 \leq \frac{3a}{4}z^2 + \frac{3a}{4} + b + c + 1 \leq 2,$$

从而  $\frac{3a}{4} + b + c + 1 \geq 0, \frac{3a}{4} z^2 \leq 2,$

由  $0 \leq z^2 \leq 1$  知  $a \leq \frac{8}{3}$ . (12分)

又易知当  $f(x) = \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + x + m$  ( $m$  为常数) 满足题设条件, 所以  $a$  最大值为  $\frac{8}{3}$ . (16分)

10. (本小题满分 20 分) 已知抛物线  $y^2 = 6x$  上的两个动点  $A(x_1, y_1)$  和  $B(x_2, y_2)$ , 其中  $x_1 \neq x_2$  且  $x_1 + x_2 = 4$ . 线段  $AB$  的垂直平分线与  $x$  轴交于点  $C$ , 求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

解一: 设线段  $AB$  的中点为  $M(x_0, y_0)$ , 则

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{6} - \frac{y_1^2}{6}} = \frac{6}{y_2 + y_1} = \frac{3}{y_0}.$$

线段  $AB$  的垂直平分线的方程是

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{3}(x - 2). \quad (1)$$

易知  $x = 5, y = 0$  是 (1) 的一个解, 所以线段  $AB$  的垂直平分线与  $x$  轴的交点  $C$  为定点, 且点

$C$  坐标为  $(5, 0)$ . (5分)

由 (1) 知直线  $AB$  的方程为

$$y - y_0 = \frac{3}{y_0}(x - 2), \text{ 即 } x = \frac{y_0}{3}(y - y_0) + 2. \quad (2)$$

(2) 代入  $y^2 = 6x$  得

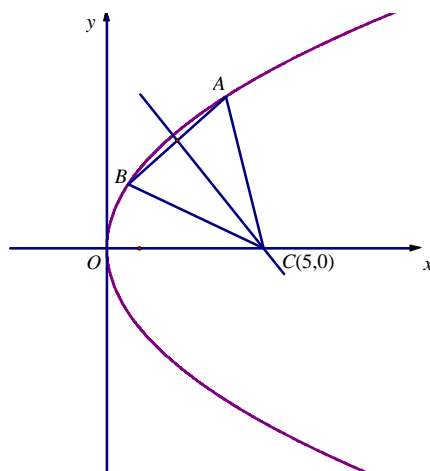
$$y^2 = 2y_0(y - y_0) + 12, \text{ 即 } y^2 - 2y_0y + 2y_0^2 - 12 = 0. \quad (3)$$

依题意,  $y_1, y_2$  是方程 (3) 的两个实根, 且  $y_1 \neq y_2$ , 所以

$$\Delta = 4y_0^2 - 4(2y_0^2 - 12) = -4y_0^2 + 48 > 0,$$

$$-2\sqrt{3} < y_0 < 2\sqrt{3}.$$

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(1 + \left(\frac{y_0}{3}\right)^2\right)(y_1 - y_2)^2} \\
&= \sqrt{\left(1 + \frac{y_0^2}{9}\right)[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2]} \\
&= \sqrt{\left(1 + \frac{y_0^2}{9}\right)(4y_0^2 - 4(2y_0^2 - 12))} \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{(9 + y_0^2)(12 - y_0^2)}.
\end{aligned}$$

定点  $C(5,0)$  到线段  $AB$  的距离

$$h = |CM| = \sqrt{(5-2)^2 + (0-y_0)^2} = \sqrt{9+y_0^2}. \quad (10 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}|AB| \cdot h = \frac{1}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)} \cdot \sqrt{9+y_0^2} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(9+y_0^2)(24-2y_0^2)(9+y_0^2)} \\
&\leq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{9+y_0^2+24-2y_0^2+9+y_0^2}{3}\right)^3} \\
&= \frac{14}{3}\sqrt{7}. \quad (15 \text{ 分})
\end{aligned}$$

当且仅当  $9+y_0^2 = 24-2y_0^2$ , 即  $y_0 = \pm\sqrt{5}$ ,  $A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3}, \sqrt{5}+\sqrt{7}\right), B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3}, \sqrt{5}-\sqrt{7}\right)$  或

$A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3}, -(\sqrt{5}+\sqrt{7})\right), B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3}, -\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$  时等号成立.

所以  $\triangle ABC$  面积的最大值为  $\frac{14}{3}\sqrt{7}$ . (20 分)

解二：同解一，线段  $AB$  的垂直平分线与  $x$  轴的交点  $C$  为定点，且点  $C$  坐标为  $(5,0)$ . (5 分)

设  $x_1 = t_1^2, x_2 = t_2^2, t_1 > t_2, t_1^2 + t_2^2 = 4$ , 则

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ t_1^2 & \sqrt{6}t_1 & 1 \\ t_2^2 & \sqrt{6}t_2 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}, \quad (10 \text{ 分})$$

$$S_{\triangle ABC}^2 = \left(\frac{1}{2}(5\sqrt{6}t_1 + \sqrt{6}t_1^2t_2 - \sqrt{6}t_1t_2^2 - 5\sqrt{6}t_2)\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}(t_1 - t_2)^2(t_1 t_2 + 5)^2 \\
&= \frac{3}{2}(4 - 2t_1 t_2)(t_1 t_2 + 5)(t_1 t_2 + 5) \\
&\leq \frac{3}{2}\left(\frac{14}{3}\right)^3, \\
S_{\triangle ABC} &\leq \frac{14}{3}\sqrt{7}, \tag{15分}
\end{aligned}$$

当且仅当  $(t_1 - t_2)^2 = t_1 t_2 + 5$  且  $t_1^2 + t_2^2 = 4$ ,

$$\text{即 } t_1 = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{6}}, t_2 = -\frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{6}}, A\left(\frac{6 + \sqrt{35}}{3}, \sqrt{5} + \sqrt{7}\right), B\left(\frac{6 - \sqrt{35}}{3}, \sqrt{5} - \sqrt{7}\right) \text{ 或}$$

$$A\left(\frac{6 + \sqrt{35}}{3}, -(\sqrt{5} + \sqrt{7})\right), B\left(\frac{6 - \sqrt{35}}{3}, -\sqrt{5} + \sqrt{7}\right) \text{ 时等号成立.}$$

所以  $\triangle ABC$  面积的最大值是  $\frac{14}{3}\sqrt{7}$ . (20分)

11. (本小题满分 20 分) 证明: 方程  $2x^3 + 5x - 2 = 0$  恰有一个实数根  $r$ , 且存在唯一的严格递增

正整数数列  $\{a_n\}$ , 使得  $\frac{2}{5} = r^{a_1} + r^{a_2} + r^{a_3} + \dots$ .

证明: 令  $f(x) = 2x^3 + 5x - 2$ , 则  $f'(x) = 6x^2 + 5 > 0$ , 所以  $f(x)$  是严格递增的. 又

$$f(0) = -2 < 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0, \text{ 故 } f(x) \text{ 有唯一实数根 } r \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{5分}$$

$$\text{所以 } 2r^3 + 5r - 2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5} &= \frac{r}{1 - r^3} \\
&= r + r^4 + r^7 + r^{10} + \dots.
\end{aligned}$$

故数列  $a_n = 3n - 2 (n = 1, 2, \dots)$  是满足题设要求的数列. (10分)

若存在两个不同的正整数数列  $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$  和  $b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots$  满足

$$r^{a_1} + r^{a_2} + r^{a_3} + \dots = r^{b_1} + r^{b_2} + r^{b_3} + \dots = \frac{2}{5},$$

去掉上面等式两边相同的项, 有

$$r^{s_1} + r^{s_2} + r^{s_3} + \dots = r^{t_1} + r^{t_2} + r^{t_3} + \dots,$$

这里  $s_1 < s_2 < s_3 < \dots, t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ , 所有的  $s_i$  与  $t_j$  都是不同的. (15分)

不妨设  $s_1 < t_1$ , 则



$$r^{s_1} < r^{s_1} + r^{s_2} + \cdots = r^{f_1} + r^{f_2} + \cdots,$$

$$1 < r^{f_1 - s_1} + r^{f_2 - s_1} + \cdots \leq r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r} - 1 < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1, \text{ 矛盾.}$$

故满足题设的数列是唯一的.

(20 分)

## 2010 年全国高中数学联合竞赛加试 试题参考答案及评分标准 (A 卷)

说明:

1. 评阅试卷时, 请严格按照本评分标准的评分档次给分.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 10 分为一个档次, 不要增加其他中间档次.

### 一、(本题满分 40 分)

如图, 锐角三角形  $ABC$  的外心为  $O$ ,  $K$  是边  $BC$  上一点 (不是边  $BC$  的中点),  $D$  是线段  $AK$  延长线上一点, 直线  $BD$  与  $AC$  交于点  $N$ , 直线  $CD$  与  $AB$  交于点  $M$ . 求证: 若  $OK \perp MN$ , 则  $A, B, D, C$  四点共圆.

**证明:** 用反证法. 若  $A, B, D, C$  不四点共圆, 设三角形  $ABC$  的外接圆与  $AD$  交于点  $E$ , 连接  $BE$  并延长交直线  $AN$  于点  $Q$ , 连接  $CE$  并延长交直线  $AM$  于点  $P$ , 连接  $PQ$ .

因为  $PK^2 = P$  的幂 (关于  $\odot O$ ) +  $K$  的幂 (关于  $\odot O$ )

$$= (PO^2 - r^2) + (KO^2 - r^2),$$

同理

$$QK^2 = (QO^2 - r^2) + (KO^2 - r^2),$$

所以

$$PO^2 - PK^2 = QO^2 - QK^2,$$

故

$$OK \perp PQ.$$

(10 分)

由题设,  $OK \perp MN$ , 所以  $PQ \parallel MN$ , 于是

$$\frac{AQ}{QN} = \frac{AP}{PM}. \quad \text{①}$$

由梅内劳斯 (Menelaus) 定理, 得

$$\frac{NB}{BD} \cdot \frac{DE}{EA} \cdot \frac{AQ}{QN} = 1, \quad \text{②}$$

$$\frac{MC}{CD} \cdot \frac{DE}{EA} \cdot \frac{AP}{PM} = 1. \quad \text{③}$$

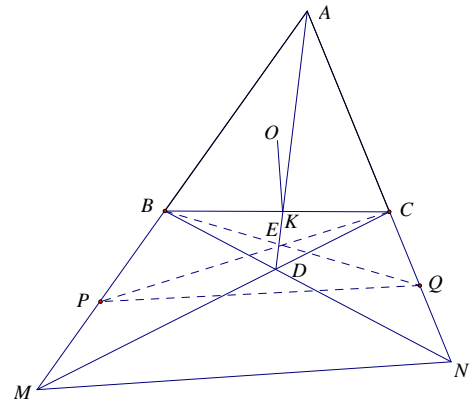
由①, ②, ③可得

$$\frac{NB}{BD} = \frac{MC}{CD}, \quad \text{(30 分)}$$

所以  $\frac{ND}{BD} = \frac{MD}{DC}$ , 故  $\triangle DMN \sim \triangle DCB$ , 于是  $\angle DMN = \angle DCB$ , 所以  $BC \parallel MN$ , 故  $OK \perp BC$ ,

即  $K$  为  $BC$  的中点, 矛盾! 从而  $A, B, D, C$  四点共圆.

(40 分)



注 1: “ $PK^2 = P$  的幂 (关于  $\odot O$ ) +  $K$  的幂 (关于  $\odot O$ )” 的证明: 延长  $PK$  至点  $F$ , 使得

$$PK \cdot KF = AK \cdot KE, \quad (4)$$

则  $P, E, F, A$  四点共圆, 故

$$\angle PFE = \angle PAE = \angle BCE,$$

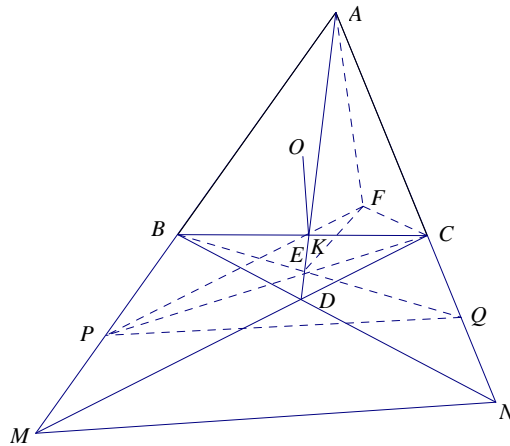
从而  $E, C, F, K$  四点共圆, 于是

$$PK \cdot PF = PE \cdot PC, \quad (5)$$

⑤-④, 得  $PK^2 = PE \cdot PC - AK \cdot KE$

$$= P \text{ 的幂 (关于 } \odot O) + K \text{ 的幂 (关于 } \odot O).$$

注 2: 若点  $E$  在线段  $AD$  的延长线上, 完全类似.



## 二、(本题满分 40 分)

设  $k$  是给定的正整数,  $r = k + \frac{1}{2}$ . 记  $f^{(1)}(r) = f(r) = r \lceil r \rceil$ ,  $f^{(l)}(r) = f(f^{(l-1)}(r))$ ,  $l \geq 2$ . 证明: 存在正整数  $m$ , 使得  $f^{(m)}(r)$  为一个整数. 这里,  $\lceil x \rceil$  表示不小于实数  $x$  的最小整数, 例如:  $\lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$ ,  $\lceil 1 \rceil = 1$ .

**证明:** 记  $v_2(n)$  表示正整数  $n$  所含的 2 的幂次. 则当  $m = v_2(k) + 1$  时,  $f^{(m)}(r)$  为整数.

下面我们对  $v_2(k) = v$  用数学归纳法.

当  $v = 0$  时,  $k$  为奇数,  $k + 1$  为偶数, 此时  $f(r) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \left\lceil k + \frac{1}{2} \right\rceil = \left(k + \frac{1}{2}\right) (k + 1)$  为整数. (10 分)

假设命题对  $v - 1 (v \geq 1)$  成立.

对于  $v \geq 1$ , 设  $k$  的二进制表示具有形式

$$k = 2^v + \alpha_{v+1} \cdot 2^{v+1} + \alpha_{v+2} \cdot 2^{v+2} + \dots,$$

这里,  $\alpha_i = 0$  或者  $1, i = v+1, v+2, \dots$ . (20 分)

$$\begin{aligned}
 \text{于是 } f(r) &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \left\lceil k + \frac{1}{2} \right\rceil = \left(k + \frac{1}{2}\right)(k+1) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{k}{2} + k^2 + k \\
 &= \frac{1}{2} + 2^{v-1} + (\alpha_{v+1} + 1) \cdot 2^v + (\alpha_{v+1} + \alpha_{v+2}) \cdot 2^{v+1} + \dots + 2^{2v} + \dots \\
 &= k' + \frac{1}{2}, \quad \text{①}
 \end{aligned}$$

这里  $k' = 2^{v-1} + (\alpha_{v+1} + 1) \cdot 2^v + (\alpha_{v+1} + \alpha_{v+2}) \cdot 2^{v+1} + \dots + 2^{2v} + \dots$ . 显然  $k'$  中所含的 2 的幂次为  $v-1$ . 故由归纳假设知,  $r' = k' + \frac{1}{2}$  经过  $f$  的  $v$  次迭代得到整数, 由①知,  $f^{(v+1)}(r)$  是一个整数, 这就完成了归纳证明. (40 分)

### 三、(本题满分 50 分)

给定整数  $n > 2$ , 设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_k \leq 1, k = 1, 2, \dots, n$ , 记

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

求证: 
$$\left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n A_k \right| < \frac{n-1}{2}.$$

证明: 由  $0 < a_k \leq 1$  知, 对  $1 \leq k \leq n-1$ , 有

$$0 < \sum_{i=1}^k a_i \leq k, \quad 0 < \sum_{i=k+1}^n a_i \leq n-k. \quad (10 \text{ 分})$$

注意到当  $x, y > 0$  时, 有  $|x-y| < \max\{x, y\}$ , 于是对  $1 \leq k \leq n-1$ , 有

$$\begin{aligned}
 |A_n - A_k| &= \left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right) \sum_{i=1}^k a_i + \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n a_i \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n a_i - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^k a_i \right| \\
 &< \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n a_i, \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^k a_i \right\} \\
 &\leq \max \left\{ \frac{1}{n}(n-k), \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right)k \right\}
 \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{k}{n}, \quad (30 \text{ 分})$$

故

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n A_k \right| &= \left| nA_n - \sum_{k=1}^n A_k \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} (A_n - A_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |A_n - A_k| \\ &< \sum_{k=1}^{n-1} \left( 1 - \frac{k}{n} \right) = \frac{n-1}{2}. \end{aligned} \quad (50 \text{ 分})$$

#### 四、(本题满分 50 分)

一种密码锁的密码设置是在正  $n$  边形  $A_1A_2 \cdots A_n$  的每个顶点处赋值 0 和 1 两个数中的一个, 同时在每个顶点处涂染红、蓝两种颜色之一, 使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同. 问: 该种密码锁共有多少种不同的密码设置?

**解:** 对于该种密码锁的一种密码设置, 如果相邻两个顶点上所赋值的数字不同, 在它们所在的边上标上  $a$ , 如果颜色不同, 则标上  $b$ , 如果数字和颜色都相同, 则标上  $c$ . 于是对于给定的点  $A_1$  上的设置 (共有 4 种), 按照边上的字母可以依次确定点  $A_2, A_3, \cdots, A_n$  上的设置. 为了使得最终回到  $A_1$  时的设置与初始时相同, 标有  $a$  和  $b$  的边都是偶数条. 所以这种密码锁的所有不同的密码设置方法数等于在边上标记  $a, b, c$ , 使得标有  $a$  和  $b$  的边都是偶数条的方法数的 4 倍. (20 分)

设标有  $a$  的边有  $2i$  条,  $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , 标有  $b$  的边有  $2j$  条,  $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n-2i}{2} \right\rfloor$ . 选取  $2i$

条边标记  $a$  的有  $C_n^{2i}$  种方法, 在余下的边中取出  $2j$  条边标记  $b$  的有  $C_{n-2i}^{2j}$  种方法, 其余的边标记  $c$ . 由乘法原理, 此时共有  $C_n^{2i} C_{n-2i}^{2j}$  种标记方法. 对  $i, j$  求和, 密码锁的所有不同的密码设置方法数为

$$4 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left( C_n^{2i} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-2i}{2} \right\rfloor} C_{n-2i}^{2j} \right). \quad \textcircled{1}$$

这里我们约定  $C_0^0 = 1$ . (30 分)

当  $n$  为奇数时,  $n-2i > 0$ , 此时

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2i}{2} \rfloor} C_{n-2i}^{2j} = 2^{n-2i-1}. \quad \textcircled{2}$$

代入①式中，得

$$\begin{aligned} & 4 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left( C_n^{2i} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2i}{2} \rfloor} C_{n-2i}^{2j} \right) = 4 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (C_n^{2i} 2^{n-2i-1}) = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (C_n^{2i} 2^{n-2i}) \\ & = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} (-1)^k = (2+1)^n + (2-1)^n \\ & = 3^n + 1. \end{aligned} \quad (40 \text{ 分})$$

当  $n$  为偶数时，若  $i < \frac{n}{2}$ ，则②式仍然成立；若  $i = \frac{n}{2}$ ，则正  $n$  边形的所有边都标记  $a$ ，此时只有一种标记方法。于是，当  $n$  为偶数时，所有不同的密码设置的方法数为

$$\begin{aligned} & 4 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left( C_n^{2i} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2i}{2} \rfloor} C_{n-2i}^{2j} \right) = 4 \times \left( 1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (C_n^{2i} 2^{n-2i-1}) \right) \\ & = 2 + 4 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (C_n^{2i} 2^{n-2i-1}) = 3^n + 3. \end{aligned}$$

综上所述，这种密码锁的所有不同的密码设置方法数是：当  $n$  为奇数时有  $3^n + 1$  种；当  $n$  为偶数时有  $3^n + 3$  种。 (50 分)