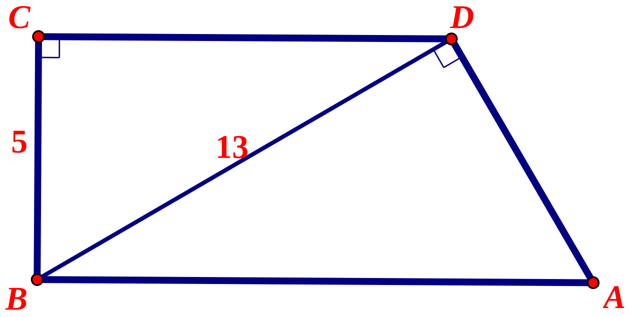
2011 年新知杯上海市初中数学竞赛参考答案

一、填空题（每题 10 分，共 80 分）

1、已知关于 x 的两个方程：$x^2-x+3m=0\cdots①$，$x^2+x+m=0\cdots②$，其中 $m\neq0$。若方程①有一个根是方程②的一个根的 3 倍，则实数 m 的值是________。

解：由题意设方程①、②分别有根 $3a,a$，则 $(3a)^2-(3a)+3m=0$，即 $3a^2-a+m=0$，且 $a^2+a+m=0$，相减可得 $2a^2-2a=0$，故 $a=0,1$，代入可得 $m=0$ 或 -2。

2、已知梯形 $ABCD$ 中 $AB\parallel CD$，$\angle ABC=90^\circ$，$BD\perp AD$，$BC=5,BD=13$，则梯形 $ABCD$ 的面积为________。



解：由勾股定理 $CD=12$，由于 $\angle BDC=\angle ABD$，故 $\Delta BDC\sim\Delta ABD$，相似比为 $\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{12}{13}$，由于 $S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}\times5\times12=30$，故 $S_{\Delta ADB}=\left(\dfrac{13}{12}\right)^2S_{\Delta BCD}$，所以

$$S_{ABCD}=\left[1+\left(\frac{13}{12}\right)^2\right]\times30=\frac{1565}{24}=65\frac{5}{24}。$$

3、从编号为 $1,2,3,4,5,6$ 的六张卡片中任意抽取三张，则抽出卡片编号都大于等于 2 的概率为________。

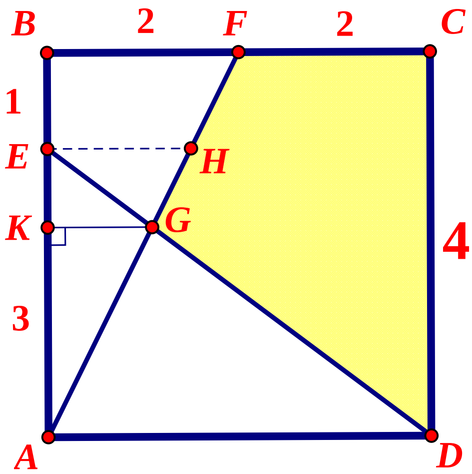
解：总共有 $C_6^3=20$ 种取法，三张编号都大于等于 2 的有 $C_5^3=10$ 种，故概率为 $\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$。

4、将 8 个数 $-7,-5,-3,-2,2,4,6,13$ 排列为 a,b,c,d,e,f,g,h，使得 $(a+b+c+d)^2+(e+f+g+h)^2$ 的值最小，则这个最小值为________。

解：设 $x=a+b+c+d$，$y=e+f+g+h$，则 $x+y=8$。$x^2+y^2=64-2xy$，因此要

求 xy 尽量大，当然就要求 $x,y\geq 0$，且尽量接近。由于无法凑出两个 4，因此 $13-5-3-2=3$，$2+4+6-7=5$ 为最佳，所以 $x^2+y^2=3^2+5^2=34$ 为最小值。

5、已知正方形 $ABCD$ 边长为 4，E,F 分别在 AB,BC 上，$AE=3,BF=2$，AF,DE 交于 G，则四边形 $DGFC$ 的面积为________。

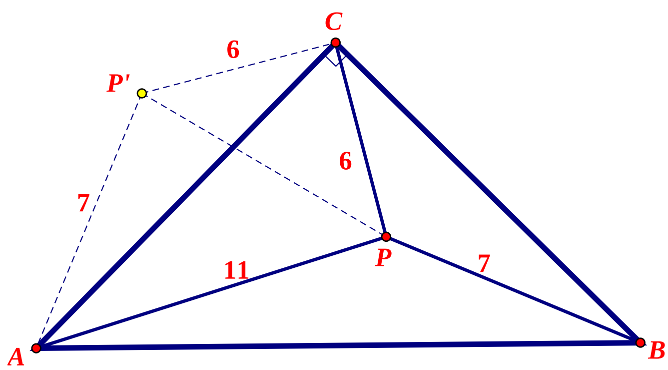


解：如图作 E,G 作 AB 的垂线 EH,GK。

则 $EH=\frac{AE}{AB}\times BF=\frac{3}{2}$。故 $\frac{HG}{GA}=\frac{EH}{AD}=\frac{3}{8}$，因此 $GK=\frac{8}{11}\times\frac{3}{2}=\frac{12}{11}$，所以 $S_{\Delta ABF}=4$，$S_{\Delta ADE}=6$，$S_{\Delta AGE}=\frac{18}{11}$。

因此 $S_{DGFC}=16-4-6+\frac{18}{11}=7\frac{7}{11}$。

6、在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，P 是 ΔABC 内一点，使得 $PA=11,PB=7,PC=6$，则 AC 边长为________。



解：如图，以 C 为中心将 P 顺时针旋转 90° 到 P'。则 $PP'=6\sqrt{2}$，因此 $AP^2=AP'^2+PP'^2$，故 $\angle AP'P=90^\circ$，因此 $\angle CP'A=135^\circ$，由余弦定理

$$AC=\sqrt{6^2+7^2-2\times 6\times 7\cos 135^\circ}$$
$$=\sqrt{85+42\sqrt{2}}$$

7、有 10 名象棋选手进行单循环赛，规定每场比赛胜方得 2 分，负方得 0 分，平局各得 1 分。比赛结束后发现每名选手得分各不相同，且第二名的得分是最后五名选手得分之和的 $\frac{4}{5}$，则第二名选手的得分是________。

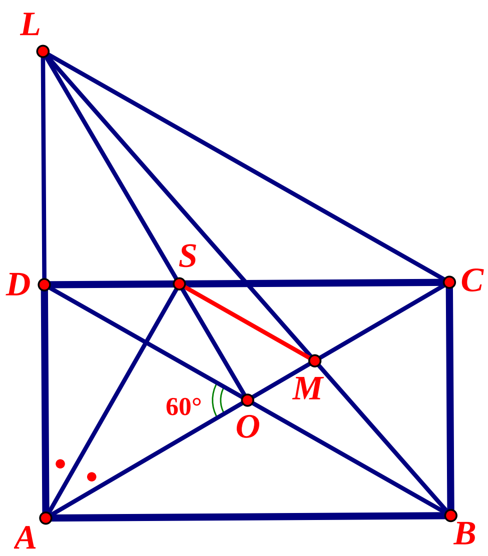
解：每名选手参加 9 场比赛，每场平均分为，因此平均分为 9 分。后五名选手之间的小循环有 $C_5^2=10$ 场比赛，因此后五名选手得分总值 $\geq 2C_5^2=20$，故第二名得分 ≥ 16。由于第一名最多得 18 分，所以第二名最多得 17，而他的得分是偶数，故实际得分 16。

8、已知 a,b,c,d 都是素数（可以相同），并且 $abcd$ 是35个连续正整数之和，则 $a+b+c+d$ 的最小值为________。

解：35个连续正整数之和为 $35x$（x 是正中间的那个数），因此 a,b,c,d 中有 $5,7$，不妨设 $a=5,b=7$，则 $x=cd$。由于中间数 $x\geq 18$，故 $cd\geq 18$，现在要求 $c+d$ 最小，故 $3\times 7,5\times 5$ 满足要求。因此 $a+b+c+d$ 的最小值为 $5+7+10=22$。

二、解答题（第 9、10 题每题 15 分；第 11、12 题每题 20 分，共 70 分）

9、如图，矩形 $ABCD$ 的对角线交于 O，已知 $\angle DAC=60°$，$\angle DAC$ 的平分线与 DC 交于 S，直线 OS,AD 相交于 L，直线 BL 与 AC 交于 M。求证：$SM\parallel LC$。



证明：不妨设 $AD=a$，由已知 ΔADO 是正三角形，因此 $\Delta ADS\cong\Delta AOS$，故 $AL=AC=2a$，所以 $LD=BC=a$，因此 $BCLD$ 是平行四边形，故 $BD\parallel LC$。

由于 $\dfrac{CM}{AM}=\dfrac{BC}{AL}=\dfrac{1}{2}$，$AC=2a$，所以 $CM=\dfrac{2a}{3}$，故 $OM=\dfrac{1}{3}a$。

由角平分线定理 $\dfrac{CS}{SD}=\dfrac{AC}{AD}=2=\dfrac{CM}{MO}$，因此 $SM\parallel DO$，故 $SM\parallel DB$，所以 $SM\parallel LC$。

10、求所有正整数组 $a\geq b\geq c\geq d\geq e\geq f$，使得 $a!=b!+c!+d!+e!+f!$。

解：由已知 $a!>b!$，故 $a>b$，因此也有 $b\leq a-1$。而 $a\cdot b!\leq a\cdot(a-1)!\leq a!\leq 5b!$，所以 $a\leq 5$。又因为 $a!\geq 5f!\geq 5$，所以 $a\geq 3$。

若 $a=3$，则 $b\leq 2$，又由于 $3!\leq 5b!$，故 $b\geq 2$，只能有 $b=2$，因此 $4=c!+d!+e!+f!$ 也只能有 $c=d=e=f=1$，得到一组解 $(a,b,c,d,e,f)=(3,2,1,1,1,1)$。

若 $a=4$，$4!=b!+c!+d!+e!+f!>4e!$，故 $e\leq 2$，所以 $b!+c!+d!+e!+f!\leq 3\times 3!+2\times 2!<4!=a!$，矛盾。

若 $a=5$，则 $b\le 4$，由于 $5!\le 5b!$，因此 $b=4$，并且等号成立。故只能有 $b=c=d=e=f=4$，得到一组解 $(a,b,c,d,e,f)=(5,4,4,4,4,4)$。

综上所述，$(a,b,c,d,e,f)=(3,2,1,1,1,1),(5,4,4,4,4,4)$ 是全部解。

11、①求证：存在整数 x,y，满足 $x^2+4xy+y^2=2022$。

②是否存在整数 x,y，满足 $x^2+4xy+y^2=2011$？请证明你的结论。

证明：① $x=43,y=1$ 满足 $x^2+4xy+y^2=2022$。

②由于 $x^2\equiv 0,1(\bmod 4)$，$y^2\equiv 0,1(\bmod 4)$，所以 $x^2+4xy+y^2\equiv 0,1,2(\bmod 4)$，由于 $2011\equiv 3(\bmod 4)$，所以不存在满足 $x^2+4xy+y^2=2011$ 的整数 x,y。

12、整数 $n>1$，它的所有不同的素因子为 $p_1,p_2,\dots,p_k$，对于每个 $1\le i\le k$，存在正整数 a_i 使得 $p_i^{a_i}\le n<p_i^{a_i+1}$。记 $p(n)=p_1^{a_1}+p_2^{a_2}+\dots+p_k^{a_k}$，例如 $p(100)=2^6+5^2=89$。

①试找出一个正整数 n，使得 $p(n)>n$；

②证明：存在无穷多个正整数 n，使得 $p(n)>\frac{11}{10}n$。

证明：由已知 $p_i^{a_i}>\frac{n}{p_i}$，因此 $p(n)>n\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_k}\right)$。

由于 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}>1.1$，因此只要 $n=2\times 3\times 5\times 7k=210k$，则 n 的素因子中就含有 $2,3,5,7$，所以 $p(n)>n\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_k}\right)\ge n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)>1.1n$。

综上所述，存在无穷多个正整数 n，使得 $p(n)>\frac{11}{10}n$。