2017 欧洲女子数学奥林匹克

中图分类号:G424.79　　文献标识码:A　　文章编号:1005-6416(2017)10-0031-04

1. 在凸四边形 $ABCD$ 中,$\angle DAB=\angle BCD=90°$,$\angle ABC>\angle CDA$,$Q$、$R$ 分别为线段 BC、CD 上的点,直线 QR 与 AB、AD 分别交于点 P、S,且 $PQ=RS$. 设 M、N 分别为线段 BD、QR 的中点. 证明:A、M、N、C 四点共圆.

2. 设 k 为正整数. 假设可以用 k 种颜色对全体正整数染色,并存在函数 $f:\mathbf{Z}_+\to\mathbf{Z}_+$,满足:

(1)对同色的正整数 m、n(允许相同),均有 $f(m+n)=f(m)+f(n)$;

(2)存在正整数 m、n(允许相同),使得 $f(m+n)\neq f(m)+f(n)$.

求 k 的最小值.

3. 平面上有 2 017 条直线,其中,任意三条不共点. 一只蜗牛从某条直线上不为交点的一点任选一个方向出发,按照下述方法在直线上运动:蜗牛只在交叉点处转弯,且总是轮流左转和右转(首次转弯的方向可以任选);若未遇到交叉点,则蜗牛保持运动状态不变. 是否存在一条线段,使得蜗牛在一次运动中可以从两个方向穿过该线段?

4. 设 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ 为 $n(n\in\mathbf{Z}_+)$ 个正整数. 现有 t_n+1 名选手参加象棋比赛,任意两名选手之间至多下一盘棋. 证明:存在一种对局安排,使得下述两个条件同时满足:

(1)每名选手下棋的盘数均属于集合 $\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$;

(2)对每个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,存在一名选手恰下了 t_i 盘棋.

5. 设正整数 $n\geqslant 2$. 称 n 元数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为"昂贵数组"(数组中允许出现相同的数),当且仅当存在正整数 k,满足

$$(a_1+a_2)(a_2+a_3)\cdots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1)=2^{2k-1}.$$

(1)求一切正整数 $n\geqslant 2$,使得存在 n 元昂贵数组;

(2)证明:对任意正奇数 m,存在正整数 $n\geqslant 2$,使得 m 在某一 n 元昂贵数组中.

6. 在不等边锐角 $\triangle ABC$ 中,重心 G、外心 O 关于 BC、CA、AB 的对称点分别记为 G_1、G_2、G_3 和 O_1、O_2、O_3. 证明:$\triangle G_1G_2C$、$\triangle G_1G_3B$、$\triangle G_2G_3A$、$\triangle O_1O_2C$、$\triangle O_1O_3B$、$\triangle O_2O_3A$ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆有一个公共点.

参考答案

1. 如图 1.

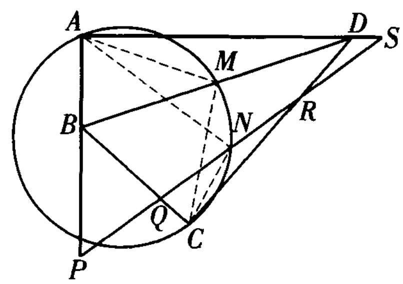

图 1

因为 N 也是线段 PS 的中点,所以,在 $\mathrm{Rt}\triangle PAS$、$\mathrm{Rt}\triangle CQR$ 中,分别有

$\angle ANP=2\angle ASP$,

$\angle CNQ=2\angle CRQ$.

则 $\angle ANC=\angle ANP+\angle CNQ$

$=2(\angle ASP+\angle CRQ)$

$=2(\angle RSD+\angle DRS)$

$=2\angle ADC$.

类似地,在 $\mathrm{Rt}\triangle BAD$、$\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中有

$\angle AMC=2\angle ADC$.

故 $\angle AMC=\angle ANC$.

从而,A、M、N、C 四点共圆.

2. k 的最小值为 3.

先构造 $k=3$ 的例子.

令 $f(n)=\begin{cases}2n, & n\equiv 0(\bmod 3);\\ n, & n\equiv 1,2(\bmod 3).\end{cases}$

则 $f(1)+f(2)=3\neq f(3)$ 满足条件(2).

同时,将模 3 余 0、1、2 的数分别染为三种不同颜色,于是,

(i)对任意 $x\equiv y\equiv 0(\bmod 3)$,有

$x+y\equiv 0(\bmod 3)$

$\Rightarrow f(x+y)=\frac{x+y}{3}=f(x)+f(y)$;

(ii)对任意 $x\equiv y\equiv 1(\bmod 3)$,有

$x+y\equiv 2(\bmod 3)$

$\Rightarrow f(x+y)=x+y=f(x)+f(y)$;

(iii)对任意 $x\equiv y\equiv 2(\bmod 3)$,有

$x+y\equiv 1(\bmod 3)$

$\Rightarrow f(x+y)=x+y=f(x)+f(y)$.

由此,条件(1)也满足.

从而,$k=3$ 满足题意.

再证明 $k=2$ 不成立.

仅需证明 $k=2$ 时,对一切满足条件(1)的函数 f 与染色方案,均有

$f(n)=nf(1)$(任意的 $n\in\mathbf{Z}_+$), ①

与条件(2)矛盾.

在条件(1)中取 $m=n$,则

$f(2n)=2f(n)$(任意的 $n\in\mathbf{Z}_+$). ②

接下来证明:

$f(3n)=3f(n)$(任意的 $n\in\mathbf{Z}_+$). ③

对任意正整数 n,由式②知

$f(2n)=2f(n)$, $f(4n)=4f(n)$,

$f(6n)=2f(3n)$.

若 n 与 $2n$ 同色,则

$f(3n)=f(2n)+f(n)=3f(n)$,

式③成立;

若 $2n$ 与 $4n$ 同色,则

$f(3n)=\frac{1}{2}f(6n)=\frac{1}{2}(f(4n)+f(2n))$

$=3f(n)$,

式③亦成立.

否则,$2n$ 与 n、$4n$ 均异色,故 n 与 $4n$ 同色.

此时,若 n 与 $3n$ 同色,则

$f(3n)=f(4n)-f(n)=3f(n)$,

式③成立;

若 n 与 $3n$ 异色,则 $2n$ 与 $3n$ 同色,

$f(3n)=f(4n)+f(n)-f(2n)=3f(n)$,

式③亦成立.

至此,式③得证.

假设命题①不成立. 则存在正整数 m,$f(m)\neq mf(1)$.

不妨取 m 最小,则由式②、③知 $m\geqslant 5$,且 m 为奇数. 否则,由 m 的最小性知

$f\left(\frac{m}{2}\right)=\frac{m}{2}f(1)$.

故 $f(m)=2f\left(\frac{m}{2}\right)=mf(1)$,矛盾.

考虑 $\frac{m-3}{2}<\frac{m+3}{2}<m$ 这三个数.

同样由 m 的最小性知

$f\left(\frac{m-3}{2}\right)=\frac{m-3}{2}f(1)$,

$f\left(\frac{m+3}{2}\right)=\frac{m+3}{2}f(1)$.

故 $\frac{m-3}{2}$、$\frac{m+3}{2}$ 异色. 否则,

$f(m)=f\left(\frac{m-3}{2}\right)+f\left(\frac{m+3}{2}\right)=mf(1)$,

矛盾.

因此,m 恰与 $\frac{m-3}{2}$、$\frac{m+3}{2}$ 中的一个同色.

设 m 与 $\frac{m+3p}{2}$($p\in\{-1,1\}$)同色.

注意到,$\frac{m+p}{2}<m$.

则 $f(m)+f\left(\frac{m+3p}{2}\right)=f\left(3\times\frac{m+p}{2}\right)$

$=3f\left(\frac{m+p}{2}\right)=\frac{3(m+p)}{2}f(1)$

$\Rightarrow f(m)=mf(1)$,

矛盾.

故命题①得证,即证明了 k 的最小值为 3.

3. 不存在这样的线段.

先证明一个引理.

引理 可以将直线分成的区域黑白二染色,使得相邻区域不同色(两个区域相邻当且仅当它们有公共边).

证明 对直线条数 n 用数学归纳法.

$n=1$ 的情形是平凡的.

假设命题对 n 成立. 考虑 $n+1$ 的情形.

先从 $n+1$ 条直线中删去某一条直线 l,则由归纳假设,其余 n 条直线分成的区域可以交替地黑白二染色. 再加入直线 l,并使直线 l 一侧的所有区域变色,而另一侧不变. 容易验证,此时相邻区域仍不同色.

引理得证.

不妨设蜗牛出发时左侧为白色区域,右侧为黑色区域.

在任意一个交叉点,若蜗牛左转,则其左侧仍为白色区域(说明右侧仍为黑色);若蜗牛右转,则其右侧仍为黑色区域(说明左侧仍为白色). 这表明,任意时刻蜗牛的左侧均为白色区域,右侧均为黑色区域.

因此,满足要求的线段不存在.

【注】题设中"轮流左转和右转"这一条件是多余的.

4. 记 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$.

命题用图论语言可等价地表述为:

存在 t_n+1 阶简单图 G 具有性质 $P(T)$: $\{\deg_G v \mid v\in V(G)\}=T$,其中,$\deg_G u$ 表示在图 G 中顶点 u 的度,$V(G)$ 表示 G 的顶点集.

对 $n=|T|$ 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,设 $T=\{t\}$,取图 G 为 $t+1$ 阶完全图 K_{t+1} 具有性质 $P(T)$.

假设命题对 $n-1$ 成立. 考虑 n 的情形.

设此时 T 有 $n\geqslant 2$ 个元素 $t_1<t_2<\cdots<t_n$.

令集合

$T'=\{t_n-t_{n-1},t_n-t_{n-2},\cdots,t_n-t_1\}$.

由归纳假设,存在 t_n-t_1+1 阶图 G' 具有性质 $P(T')$.

现将 t_1 个新顶点加入 $V(G')$,并令这些点的度为 0,则得到 t_n+1 阶图 G''.

下面证明:图 G'' 的补图 G 具有性质 $P(T)$.

事实上,对任意的 $t\in T\setminus\{t_n\}$,$t_n-t\in T'$,故存在 $v_0\in V(G'')$ 使得

$\deg_{G''}v_0=t_n-t$.

由补图的定义,知 $\deg_G v_0=t$.

对于 $t=t_n$,任取 t_1 个新顶点中的一个 u_0,则 $\deg_{G''}u_0=0$. 故 $\deg_G u_0=t_n$.

至此,命题对 n 也成立.

5. (1)所求 n 为一切大于 1 的奇数.

注意到,对于任意奇数 $n\geqslant 3$,n 元数组 $(1,1,\cdots,1)$ 均为昂贵数组.

下面证明:对于任意偶数 $n\geqslant 4$,若存在 n 元昂贵数组,则也存在 $n-2$ 元昂贵数组.

事实上,设 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 n 元昂贵数组. 不妨设 $a_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$.

易见,$a_{n-1}+a_n\leqslant 2a_n<2(a_n+a_1)$,

$a_n+a_1\leqslant 2a_n<2(a_{n-1}+a_n)$.

而由题意,知 $a_{n-1}+a_n$ 与 a_n+a_1 均为 2 的正整数次幂,故只能是

$a_{n-1}+a_n=a_n+a_1\triangleq 2^r(r\in\mathbf{Z}_+)$.

由上式知 $a_{n-1}=a_1$.

考虑 $n-2$ 元数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$.

$$\text{则}\left(\prod_{i=1}^{n-3}(a_i+a_{i+1})\right)(a_{n-2}+a_1)$$

$$=\frac{\left(\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\right)(a_n+a_1)}{(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1)}=2^{2(k-r)-1}. \quad ①$$

故 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-2})$ 为 $n-2$ 元昂贵数组.

由此,若存在偶数元昂贵数组,则必存在二元昂贵数组 (a_1,a_2),即

$(a_1+a_2)^2=2^{2k-1}$.

但式①右端不为完全平方数,矛盾.

因此,所求 n 为一切大于 1 的奇数.

【注】也可对 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 用数学归纳法证明.

(2)对 m 用数学归纳法.

显然,1 在三元昂贵数组 $(1,1,1)$ 中. 故小于 2 的所有正奇数均在某个昂贵数组中.

假设小于 $2^k(k\in\mathbf{Z}_+)$ 的所有正奇数均在某个昂贵数组中. 下面考虑 $(2^k,2^{k+1})$ 中的奇数.

对任意奇数 $s\in(2^k,2^{k+1})$,

$r=2^{k+1}-s\in(0,2^k)$

为奇数，则 r 在某个 n 元昂贵数组中，不妨设为 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},r)$.

由题意知

$$\left(\prod_{i=1}^{n-2}(a_i+a_{i+1})\right)(a_{n-1}+r)(r+a_1)$$
$$=2^{2l-1}(l\in\mathbf{Z}_+).$$

故 $\left(\prod_{i=1}^{n-2}(a_i+a_{i+1})\right)(a_{n-1}+r)(r+s)\cdot$
$(s+r)(r+a_1)$
$$=2^{2l-1}\times2^{2(k+1)}=2^{2(k+l+1)-1},$$

即 $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},r,s,r)$ 也为昂贵数组，且包含 s.

由此，小于 2^{k+1} 的所有正奇数也均在某个昂贵数组中.

命题得证.

6. 为叙述方便，记 $\triangle XYZ$ 的外接圆为 $\odot(XYZ)$；若无特殊说明，点 X 关于 BC、CA、AB 的对称点分别记为 X_1、X_2、X_3.

先证明一个引理.

引理 如图2，若 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，则 $\odot(P_1P_2C)$、$\odot(P_1P_3B)$、$\odot(P_2P_3A)$ 交于 $\odot(ABC)$ 上一点 T_P.

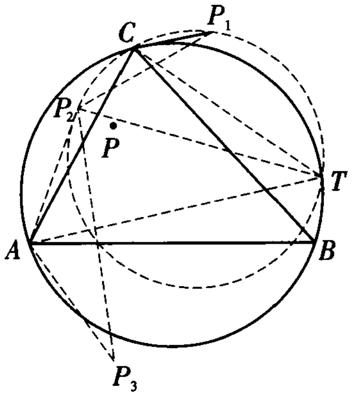

图2

证明 设 $\odot(P_1P_2C)$ 与 $\odot(ABC)$ 交于另一点 T（与点 C 不重合）（若两圆相切，则点 T 与 C 重合）.

下面仅需证明点 T 也在 $\odot(P_1P_3B)$、$\odot(P_2P_3A)$ 上.

由对称性知 $P_1C=P_2C$.

则 $\angle CTP_2=\angle CP_1P_2$

$=90°-\frac{1}{2}\angle P_2CP_1=90°-\angle ACB.$

类似地，$\angle AP_3P_2=90°-\angle BAC.$

故 $\angle P_2TA=\angle CTA-\angle CTP_2$

$=\angle CBA-(90°-\angle ACB)$

$=90°-\angle BAC=\angle P_2P_3A.$

从而，点 T 在 $\odot(P_2P_3A)$ 上.

类似地，点 T 在 $\odot(P_1P_3B)$ 上.

引理得证.

为叙述方便，对某一点 P，上述四圆所共点记为 T_P.

特别地，由上述证明，知 T_P 为 $\odot(ABC)$ 上满足 $\angle CT_PP_2=90°-\angle ACB$ 的唯一点. ①

如图3，设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

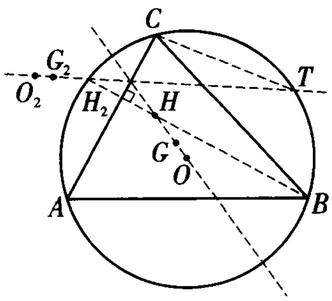

图3

则由熟知结论，知点 H_2 在 $\odot(ABC)$ 上.

而 G、O、H 三点共线（Euler 线），于是，由对称性，知 G_2、O_2、H_2 三点也共线.

设 G_2H_2 与 $\odot(ABC)$ 的另一个交点为 T（与 H_2 不重合），下面只需证明：T、T_G、T_O 三点重合.

事实上，

$\angle CTG_2=\angle CTO_2=\angle CTH_2$

$=\angle CBO_2=90°-\angle ACB.$

由结论①即得 T、T_G、T_O 三点重合.

由此，七圆共点于 T，命题得证.

【注】本题证明方法很多，读者可尝试利用 Euler 线 e 及其关于 BC、CA、AB 的对称直线 e_1、e_2、e_3 的性质证明（事实上，e_1、e_2、e_3 三线共点于 T），或利用复数计算.

（李朝晖　提供）