奥林匹克解题宝典

数学

初二

责任编辑：刘永光
封面设计：高豪勇
责任技编：王建慧

奥林匹克数学解题宝典

初二

陈竞新 主编

黄培杰　陈　民 编写

出版发行：新世纪出版社
经　　销：新 华 书 店
印　　刷：广东新华印刷厂
厂　　址：广州市永福路 44 号
规　　格：787 毫米 × 1092 毫米　1/16　15.5 印张　310 千字
版　　次：2002 年 6 月第 1 版
印　　次：2002 年 6 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5405-2466-9/G·1603
定　　价：18.00 元

目　　录

第一讲　因式分解（一）

解题指要

因式分解是中学数学中的一种最重要的恒等变形，它常常是代数式化简、求值以及解方程的关键步骤之一. 因式分解常用的方法有提取公因式法、公式法、分组分解法、十字相乘法及求根法，除此以外还有一些方法和技巧对解决有关的问题有着重要的作用. 本讲主要介绍这些技巧和方法.

1. 公式法

常用公式：

(1) $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

(2) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

(3) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

(4) $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

(5) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

或 $=(a+b+c)[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)]$

(6) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2$

(7) 当 n 为奇数时，$(a+b)[a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+(-1)^{n-2}ab^{n-2}+b^{n-1}]=a^n+b^n$

(8) 当 n 为正整数时，$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$

2. 拆、添项法

在因式分解的过程中，有时不能直接提取公因式或应用公式求解，这时就要对所要分解的多项式进行适当的变形，比如将一个项拆成两个项或两个以上的项. 如何拆项和添项依赖于对题设代数式的特点的观察和分析，且拆项或添项后能进行提取公因式或用公式法求解.

3. 待定系数法

将要分解的多项式表示成另一种含有待定系数的新形式，得到一个恒等式，然后根据多项式恒等的性质，列出几个含有待定系数的方程组，解方程组就可以求出待定系数，或者通过这些方程得到某些系数之间所满足的关系的式子. 这种方法叫做待定系数法. 它的理论依据是多项式恒等定理：

若 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$

$= b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$，

那么　$a_n = b_n$，$a_{n-1} = b_{n-1}$，$a_{n-2} = b_{n-2}$，…，$a_1 = b_1$，$a_0 = b_0$.

4. 换元法

换元法就是把一个复杂的代数式中的某些部分看成一个整体，并用新的字母来代替它，使原式简化，便于观察和分解.

5. 主元法

在处理含有多个元素的数学问题时，可根据题目的特点，选择一个或几个元素作为主要元素，给予特殊的地位，从而得到较好的效果．这种方法称为主元法．

典型例题讲解

例一 多项式 $a^3-b^3+c^3+3abc$ 有因式（　　）．

A．$a+b+c$　　B．$a-b+c$

C．$a^2+b^2+c^2-bc+ca-ab$　　D．$bc-ca+ab$

解：选 B．直接运用前面的公式可得．

例二 分解因式 $(a-x)^3+(b-x)^3-(a+b-2x)^3$．

解法一：原式 $=(a-x)^3+(b-x)^3+(2x-a-b)^3=(a-x+b-x+2x-a-b)[(a-x)^2+(b-x)^2+(2x-a-b)^2-(a-x)\cdot(b-x)-(a-x)(2x-a-b)-(b-x)(2x-a-b)]+3(a-x)(b-x)(2x-a-b)=3(a-x)(b-x)(2x-a-b)$

解法二：原式 $=(a-x)^3+(b-x)^3-[(a-x)+(b-x)]^3=(a-x)^3+(b-x)^3-(a-x)^3-3(a-x)^2(b-x)-3(a-x)\cdot(b-x)^2-(b-x)^3$（然后提取公因式可得）．

例三 分解因式 $(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n)^2x^n$（$x\neq1$，$n$ 为正整数）．

分析：$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$．

解：原式 $=(\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x})^2-x^n$

$$=\frac{1-2x^{n+1}+x^{2n+2}-x^n(1-x)^2}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1-2x^{n+1}+x^{2n+2}-x^n+2x^{n+1}-x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{(1-x^n)(1-x^{n+2})}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

$$=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{n+1}).$$

例四 分解因式：

（1）$x^4+2x^3+3x^2+2x+1$；

（2）$2x^3+11x^2+17x+6$；

（3）a^5+a+1（提示：$a^5+a+1=a^5-a^2+a^2+a+1$）．

解：（1）
$$\begin{aligned}x^4+2x^3+3x^2+2x+1&=x^4+2x^2+1+2x^3+2x+x^2\\&=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)+x^2\\&=(x^2+x+1)^2\end{aligned}$$

（2）$2x^3+11x^2+17x+6=2x^3+x^2+10x^2+17x+6$

笔记栏

$$= x^2(2x+1)+(2x+1)+(5x+6)$$
$$=(2x+1))(x^2+5x+6)$$
$$=(2x+1)(x+2)(x+3)$$

(3) $a^5-a^2+a^2+a+1=a^2(a^3-1)+(a^2+a+1)$
$$=a^2(a-1)(a^2+a+1)+(a^2+a+1)$$
$$=(a^3-a^2+1)(a^2+a+1).$$

例五 分解因式 $2x^2+3xy-9y^2+14x-3y+20$.

分析：因为$2x^2+3xy-9y^2=(2x-3y)(x+3y)$，所以可设$2x^2+3xy-9y^2+14x-3y+20=(2x-3y+m)(x+3y+n)$.一般来说，分解多项式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ 时，如果其中 $Ax^2+Bxy+Cy^2=(ax+by)(cx+dy)$，则可设 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=(ax+bx+m)(cx+dy+n)$，其中 m、n 是待定系数.同理可设 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dz^2+Exy+Fyz=(ax+by+mz)(cx+dy+nz)$.

解：$\because 2x^2+3xy-9y^2=(2x-3y)(x+3y)$，于是设

原式$=(2x-3y+n)(x+3y+m)$

$\quad=2x^2+3xy-9y^2+(2m+n)x+(3n-3m)y+mn.$

列方程组$\begin{cases}2m+n=14,\\3n-3m=-3,\\mn=20.\end{cases}$ 解得 $m=5$，$n=4$.

$\therefore$原式$=(2x-3y+4)(x+3y+5)$.

例六 分解因式：

(1) $(x^2+x+1)(x^2+x+3)-15$;

(2) $(x+5)^4+(x+3)^4-82$.

分析：为了去括号后能抵消一些项，则应取 $x+5$ 与 $x+3$ 的平均数 $\frac{(x+5)+(x+3)}{2}=x+4=y$，原式可化为$(y+1)^4+(y-1)^4-82$.

解：(1) 令 $x^2+x=y$，

原式$=(y+1)(y+3)-15$

$\quad=y^2+4y-12$

$\quad=(y+6)(y-2)$.

$\therefore$原式$=(x^2+x+6)\ (x^2+x-2)$

$\quad=(x^2+x+6)\ (x+2)\ (x-1)$.

(2) 设$\frac{(x+5)+(x+3)}{2}=x+4=y$，

原式$=(y+1)^4+(y-1)^4-82$

$\quad=2y^4+12y^2-80$

$\quad=2(y^2+10)(y+2)(y-2)$

$\quad=2(x^2+8x+26)(x+6)(x+2)$.

例七 分解因式 $2a^2b^2+10a^2b-ab^2-4a^2-3b^2-5ab+2a-15b+6$.

分析：面对这个冗长的式子，可把 a 视为主元，原式$=2(b^2+5b-2)\ a^2-$

▶笔▶记▶栏

$(b^2+5b-2)a-3(b^2+5b-2)$.

解：以 a 为主元，按 a 的降幂排列可得

原式 $=2(b^2+5b-2)a^2-(b^2+5b-2)a-3(b^2+5b-2)$

$=(b^2+5b-2)(2a^2-a-3)$

$=(b^2+5b-2)(2a-3)(a+1)$.

1. 将下列多项式分解因式：

(1) $x^2-y^2+7x+y+12$;

(2) $x^2+3xy-4y^2+x+14y-6$;

(3) x^3-7x+6;

(4) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$.

2. 若 $x^2-4x+4+y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}=0$，求 $x+\frac{1}{y}$ 及 $x^2+\frac{1}{y^2}$ 的值.

3. 已知 $a+b+c=0$，$abc=-15$. 求 $a^3+b^3+c^3$ 的值.

4. 当 k 为何值时，$x^2+xy+ky^2-2x+11y-15$ 能分解成两个一次因式的乘积?

一、选择题：

1．已知 $a+b=5$，那么 $a^3+15ab+b^3$ 的值为(　　)．

A．5　　B．25　　C．75　　D．125

2．多项式 $a^3-b^3+c^3+3abc$ 有因式(　　)．

A．$a+b+c$　　B．$a-b+c$

C．$a^2+b^2+c^2-bc+ca-ab$　　D．$bc-ca+ab$

3．当 $x-y=1$ 时，$x^4-xy^3-x^3y-3x^3y+3xy^2+y^4$ 的值为(　　)．

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

4．要使多项式 $kx^2-2xy-3y^2+3x-5y+2$ 分解成两个一次因式的积，则 k 等于(　　)．

A．1　　B．2　　C．3　　D．非上述答案

二、填空题：

1．当 $m=$ ________ 时，多项式 $12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+m$ 可以分解成两个一次因式的积．

2．分解因式 $a^2+2b^2+3c^2+3ab+4ac+5bc=$ ________．

3．已知 x 是实数，并且 $x^3+2x^2+2x+1=0$，则 $x^{1998}+x^{1999}+x^{2000}$ 的值是________．

4．分解因式 $a^5+a+1=$ ________．

三、将下列多项式分解因式：

1．$x^2+2xy-3y^2+3x+y+2$；

2．$6x^2-7xy-3y^2-xz+7yz-2z^2$；

3．$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$；

4．$(x+1)^4+(x+3)^4-272$；

5．$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$；

6．$(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$．

四．解答题：

1． 证明：当 n 为正整数时，n^3-n 的值必是 6 的倍数．

2． 已知 $x=a+\frac{1}{a}$，$x^3-2x^2-3x+6=0$，求 $a^2+\frac{1}{a^2}+2$ 的值．

3． 证明：a^4+4 是一个合数（a 是整数，且 $|a|\neq 1$）．

4． 设 $x+\frac{1}{x}=-1$，求下列各式的值：

（1）$x^{3n}+\frac{1}{x^{3n}}$；　　（2）$x^{3n+1}+\frac{1}{x^{3n+1}}$．

第二讲　因式分解（二）

解题指要

本讲主要介绍综合除法与因式定理在因式分解中的应用．我们引进记号 $f(x)$、$g(x)$、…等表示一个关于 x 的一元多项式，如 $f(x)=3x^2+2x-1$、$g(x)=5x^4-2x^3+6x-4$ 等等．$f(1)$表示当 $x=1$ 时，代数式 $3x^2+2x-1$ 的值，如 $f(1)=3\times1^2+2\times1-1=4$．

1．综合除法

一元多项式除以一元多项式有一种简便的方法．

设多项式 $a_2x^2+a_1x+a_0$，求其除以 $x-a$ 的商式和余式．

用普通除法来计算（即用竖式法）：

$$
\begin{array}{r|llll}
 & a_2x & +(a_1+a_2a) & & \\
\cline{2-4}
x-a & a_2x^2 & +a_1x & +a_0 & \\
 & a_2x^2 & -a_2ax & & \\
\hline
 & & (a_1+a_2a)x & +a_0 & \\
 & & (a_1+a_2a)x-a(a_1+a_2a) & & \\
\cline{3-4}
 & & & a_0+(a_1+a_2a)a &
\end{array}
$$

所以，商式是：$a_2x+(a_1+a_2a)$，余式是：$a_0+(a_1+a_2a)a$．

这个过程只是在系数之间进行，于是可写成

$$
\begin{array}{ccc|c}
a_2 & a_1 & a_0 & a \\
 & a_2a & (a_1+a_2a)a & \\
\hline
a_2 & a_1+a_2a & \multicolumn{1}{|c}{a_0+(a_1+a_2a)a} &
\end{array}
$$

这里，第一行是被除式按降幂排列时各项的系数（如果有缺项必须用零补足）．计算时，先将第一行的第一个数 a_2 移到第三行的第一个位置；然后乘以 a 将乘积 a_2a 写在第二行第二个位置（第一个位置空着），再将 a_2a 加上第一行的第二个数，写在第三行的第二个位置上，这种算式进行的除法叫做综合除法．

2．因式定理

我们将 x 的一元 n 次方程多项式记为$f(x)$，即 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，并记当 $x=a$ 时，多项式 $f(x)$的值为 $f(a)$．

如多项式 $f(x)=3x^2-5x-2$，当 $=1$ 时，$f(x)$的值为 $f(1)=3\cdot1^2-5\cdot1-2=-4$．

余数定理　　**多项式 $f(x)$除以 $x-a$ 所得的余数等于$f(a)$．**

证明：因为 $f(a)-(a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1a+a_0)=0$，
所以

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a-(a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1a+a_0)+f(a)$$
$$=a_n(x^n-a^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-a^{n-1})+\cdots+a_1(x-a)+f(a).$$

由于

$x-a$ 能整除 x^n-a^n，$x-a$ 能整除 $x^{n-1}-a^{n-1}$，…，$x-a$ 能整除 $x-a$，
因此，$f(x)$除以 $x-a$ 所得的余数为$f(a)$.

作为余数定理的推论，我们有

因式定理　如果 $x=a$ 时，多项式 $f(x)$的值为零，即 $f(a)=0$，则 $f(x)$能被 $x-a$ 整除（即 $f(x)$含有因式 $x-a$）.

当 a_n，a_{n-1}，…，a_1，a_0 为整数时，多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 叫做整系数多项式.

设 p、q 为整数，如 $x-\frac{p}{q}$（$\frac{p}{q}$为既约分数）是整系数多项式 $f(x)$的因式，我们来看 p、q 应满足什么条件.

由 $f(\frac{p}{q})=0$，得 $a_n(\frac{p}{q})^n+a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1}+\cdots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0$，
即 $a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$.

由 p 能整除 $a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}$，而 p 不能整除 q^n，由此 q 能整除 a_0.

同理，q 能整除 a_n.

这说明，只有当整数 p、q（互质）分别为 a_0、a_n 的因子时，$qx-p$ 才有可能是整系数多项式$f(x)$的因式.

典型例题讲解

用分离系数法求多项式 $f(x)=3x^4+7x^3-15x-20$ 除以 $g(x)=x+2$ 的商式和余式.

解法一：

```
              3 + 1 - 2  - 11
1 + 2 ) 3 + 7 + 0 - 15 - 20
        3 + 6
        -------------------
            1 + 0
            1 + 2
        -------------------
              - 2 - 15
              - 2 -  4
              -------------
                  - 11 - 20
                  - 11 - 22
                  ---------
                          2
```

商式为：$3x^3+x^2-2x-11$，余式为：2.

笔记栏

这是用普通除法来计算，下面用综合除法来计算.

解法二：

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3 & +7 & +0 & -15 & -20 & -2 \\
 & -6 & -2 & 4 & -22 & \\
\hline
3 & 1 & -2 & -11 & \multicolumn{1}{|r}{2} &
\end{array}$$

商式为 $3x^3+x^2-2x-11$，余式为2.

例二 用综合除法计算：

(1) $(x^5-4x^3+x-2)\div(x-2)$；

(2) $(6x^4-5x^3-3x^2-x+4)\div(2x+1)$.

分析：如果除式是 $qx+p$ 的形式，就先把 $qx+p$ 化成 $q(x+\frac{p}{q})$ 的形式，再把 $x+\frac{p}{q}$ 作为除式做综合除法，然后把所得商式除以 q 就是所求的商式.

解：(1)

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & 0 & -4 & 0 & +1 & -2 & 2 \\
 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 & \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}$$

商式为：x^4+2x^3+1，余式为：0.

(2) 除式中一次项系数不为1，可将 $2x+1$ 改为 $2(x+\frac{1}{2})$，将被除式除以 $x+\frac{1}{2}$，再把所得的商式除以2即可.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6 & -5 & -3 & -1 & +4 & -\frac{1}{2} \\
 & -3 & +4 & -\frac{1}{2} & +\frac{3}{4} & \\
\hline
6 & -8 & +1 & -\frac{3}{2} & \multicolumn{1}{|r}{\frac{19}{4}} &
\end{array}$$

所以商式是：$3x^3-4x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$，余式是：$\frac{19}{4}$.

例三 求证：多项式 $f(x)=x^4-5x^3-7x^2+15x-4$ 有因式 $x-1$.

证明：$\because f(1)=1-5-7+15-4=0$，

由因式定理知 $f(x)$ 有因式 $x-1$.

例四 求 $g(x)=x^4-3x^2+2x-6$ 除以 $x+3$ 的余数.

分析：令 $x=-3$ 时，求 $g(x)$ 的值，可得要求的余数.

解：$\because g(-3)=42$，

由余数定理知，余数为42.

例五 求证 $a-b$ 是 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 的因式.

分析：可把多项式 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 看成是关于 a 的多项式、b、c 看成常数，再利用因式定理加以证明.

证明：设 $f(a)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$，

又 $f(b)=b^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(b-b)=0$，

故 $a-b$ 是 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 的因式.

例六 分解因式 $x^3-19x-30$.

解：$\because f(-2)=0$，含 $x+2$ 因式；$f(-3)=0$，又含 $x+3$ 因式；$f(5)=0$，又含 $x-5$ 因式.

$\therefore$ 原式 $=(x+2)(x+3)(x-5)$.

例七 分解因式 $2x^4-x^3-13x^2-x-15$.

分析：这个多项式属于最高项系数不为 1 的情况.

解：设 $f(x)=2x^4-x^3-13x^2-x-15$.

由因式定理可知 $f(x)$ 所有可能的因式为 $(x\pm1)$、$(x\pm3)$、$(x\pm5)$、$(x\pm15)$、$(2x\pm1)$、$(2x\pm3)$、$(2x\pm5)$、$(2x\pm15)$ 易知 $f(1)\neq0$，$f(-1)\neq0$，其余用综合除法尝试，只有

$$\begin{array}{ccccc|c}
2 & -1 & -13 & -1 & -15 & 3 \\
 & +6 & +15 & +6 & +15 & \\
\hline
2 & +5 & +2 & +5 & &
\end{array}$$

$\therefore 2x^4-x^3-13x^2-x-15$

$=(x-3)(2x^3+5x^2+2x+5)=(x-3)(2x+5)(x^2+1)$.

例八 已知多项式 $ax^3+bx^2-47x-15$ 可被 $3x+1$ 和 $2x-3$ 整除，求 a、b 的值.

分析：令 $x=-\frac{1}{3}$ 和 $x=\frac{3}{2}$.

解：由已知有 $f(-\frac{1}{3})=0$，$f(\frac{3}{2})=0$，即 $\begin{cases}-\frac{a}{27}+\frac{b}{9}+\frac{47}{3}-15=0,\\ \frac{27}{8}a+\frac{9}{4}b-\frac{141}{2}-15=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=24,\\ b=2.\end{cases}$

所以，原多项式为 $24x^3+2x^2-47x-15$.

因 $3x+1$ 与 $2x-3$ 是多项式的因式，由综合除法得

$$\begin{array}{cccc|c}
24 & +2 & -47 & -15 & -\frac{1}{3} \\
 & -8 & +2 & +15 & \\
\hline
24 & -6 & -45 & +0 & \frac{3}{2} \\
 & +36 & +45 & & \\
\hline
24 & +30 & +0 & &
\end{array}$$

所以，原式 $=(3x+1)(2x-3)(4x+5)$.

一、用综合除法计算以下各题：

1. $(4x^4-7x^2-7x+6)\div(x-\frac{3}{2})$

2. $(27x^3-10)\div(3x-2)$

3. $(3x^4-7x^3-11x^2+10x-4)\div(x^2+3x-2)$

二、分解因式：

1. x^3-6x^2+9x-4

2. $2x^4-x^3-6x^2-x+2$

三、m 为何值时，多项式 $f(x)=x^5-3x^4+8x^3+11x+m$ 能被 $x-1$ 整除？

四、不用除法，求证：多项式 $f(x)=2x^4+x^3-x^2-x-1$ 有因式 $x-1$ 和 $x+1$.

一、填空题：

1. 若多项式 $x^4+mx^3+nx-16$ 含有因式 $(x-1)$ 和 $(x-2)$，则 $mn=$________.

2. 设 $x^4-5x^3+2x^2+20x-24$ 能被 $x-a$ 整除，则 a 的值为________.

3. 若 y^2+my+2 除以 $y-1$ 得商 $f(y)$，余式为 r_1；若 y^2+my+2 除以 $y+1$ 得商 $g(y)$，余式为 r_2，且 $r_1=r_2$，则 $m=$________.

二、将下列多项式分解因式：

1. x^3+5x^2+3x-9

2. $x^4+3x^3-3x^2-11x-6$

3. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

4. $x^4+x^3+3x^2+x+6$

5. $x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3$

三、解答题：

1. 设 $f(x)=x^2+bx+c$（b、c 为整数），若 $f(x)$ 是 x^4+6x^2+25 及 $3x^4+4x^2+28x+5$ 的公因式，求 $f(1)$ 的值.

2. 一个整系数四次多项式 $f(x)$ 有四个不同的整数 a_1、a_2、a_3、a_4，使得 $f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=f(a_4)=1$. 求证：任何整数 β 都不能使 $f(\beta)=-1$.

第三讲　因式分解（三）

解题指要

这一讲我们学习对称式和轮换式的因式分解．

什么叫对称式？**在一个代数式中，任意两个字母互换，式子不变，这个代数式叫做关于这些字母的对称式．**

如：$a+b$，a^2+ab+b^2，$a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$ 是关于 a、b 的齐次对称多项式（即各项次数都相同的对称多项式）；$a+b+c$、$ab+bc+ca$、$a^3+b^3+c^3-3abc$ 是关于 a、b、c 的齐次对称多项式．对称多项式也有非齐次的，如 $a^3+b^3+c^3+ab+bc+ca$ 就是非齐次对称多项式．

因式分解中常用的齐次对称式的一般形式如下：

1．二元齐次对称式

二元一次：$L(a+b)$

二元二次：$L(a^2+b^2)+M(ab)$

二元三次：$L(a^3+b^3)+M(a^2b+ab^2)$

2．三元齐次对称式

三元一次：$L(a+b+c)$

三元二次：$L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)$

三元三次：$L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+N(abc)$（其中，$L$、$M$、$N$ 都是待定的系数）．

从对称式的定义可知：**两个对称式的和、差、积、商仍是对称式．**

什么叫轮换式呢？**在一个代数式中，把它所含的字母按某种顺序替换（如第一个字母换成第二个字母、第二个字母换成第三个字母，如此替换，最后一个字母换成第一个字母），式子不变，这个代数式叫做关于这些字母的轮换对称式，简称轮换式．**

如：$a^2b+b^2c+c^2a$，$(a-b)(b-c)(c-a)$等是关于 a、b、c 的齐次轮换多项式．轮换多项式也有非齐次的，如 $a^2b+b^2c+c^2a+a+b+c$ 是三次非齐次轮换式．

从定义可知，对称式都是轮换式，而轮换式不一定是对称式．二元的轮换式和对称式是同一概念；三元一次、二次齐次对称式与轮换式的形式是相同的．三元三次齐次轮换式的一般形式为：$L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+b^2c+c^2a)+N(ab^2+bc^2+ca^2)+P(abc)$（$L$、$M$、$N$、$P$ 为系数）．

两个轮换式的和、差、积、商仍是轮换式．

对称式和轮换式的因式分解常用到因式定理和待定系数法．因式定理的内容是：多项式 $f(x)$有因式$(x-a)$的充分必要条件是 $f(a)=0$．对于这样的多元多项式，可以先把某个字母看成主元，运用因式定理找到它的一个因式，再利用对称性得出同型的另外一些因式，对于存在的其他因式，可设出它的一般形式，再利用待定系数法确定这些因式．下面举例说明．

例4 分解因式：

(1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$;

(2) $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$;

(3) $a^3+b^3+c^3-3abc$.

分析：(1)、(2)、(3) 题均可以将其中一个字母视为主元.

解：(1) 式是关于 a、b、c 的三次轮换式，可把 a 看成主元，因此，设 $f(a)=$原式，

当 $a=b$ 时，$f(b)=b^2(b-c)+b^2(c-b)+c^2(b-b)=0$.

所以 $(a-b)$ 是原式的一个因式．由对称性知 $(b-c)$、$(c-a)$ 也是原式的因式，所以，

设 原式 $=k(a-b)(b-c)(c-a)$,

令 $a=1$，$b=0$，$c=-1$，得

$$1\times(0+1)+0\times(-1-1)+1\times(1-0)$$
$$=k(1-0)(0+1)(-1-1)$$
$$2=-2k$$

得 $k=-1$.

$\therefore$ 原式 $=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

注：此题也可先展开，再用分组分解法分解因式．做法如下：

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+c^2(a-b)$$
$$=(a^2b-ab^2)-(a^2c-b^2c)+c^2(a-b)$$
$$=ab(a-b)-c(a+b)(a-b)+c^2(a-b)$$
$$=(a-b)(ab-ac-bc+c^2)$$
$$=(a-b)[(ab-ac)-(bc-c^2)]$$
$$=(a-b)[a(b-c)-c(b-c)]$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

(2) 式是关于 a、b、c 的三次对称式．可把 a 看成主元，因此，设 $f(a)$ $=$原式，

当 $a=-b$ 时，$f(-b)=(-b^2+bc-cb)(-b+b+c)+b^2c=0$.

所以 $(a+b)$ 是原式的一个因式．由对称性知 $(b+c)$、$(c+a)$ 也是原式的因式，所以，

设 原式 $=k(a+b)(b+c)(c+a)$，令 $a=b=c=1$，代入上式，

得 $3\times3-1=8k$. $\therefore k=1$.

$\therefore$ 原式 $=(a+b)(b+c)(c+a)$.

(3) 式在上一讲的例子中见过，那是用配方法分解因式．由于它是三次对称式，所以我们可以用这一讲的方法分解因式.

笔记栏

设　$f(a)=$原式，当　$a=-(b+c)$时，

$$\begin{aligned}&f[-(b+c)]\\=&-(b+c)^3+b^3+c^3+3(b+c)bc\\=&-(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+b^3+c^3+3b^2c+3bc^2=0.\end{aligned}$$

所以$(a+b+c)$是原式的一个因式.

由对称性知，三次齐次对称式剩下的因式应是二次齐次对称式，其一般形式为 $L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)$. 所以，

设　原式$=(a+b+c)[L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)]$，

比较等式两边的 a^3 的系数知：$L=1$.

令　$a=b=c=1$，得 $M=-1$.

$\therefore$ 原式$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

小结：由以上三个题的分解方法可知，关键是先确定它的一个因式. 对关于 a、b、c 的多项式，确定一个因式的常用方法是：

令 $a=b$，若 $f(b)=0$，则它有因式$(a-b)(b-c)(c-a)$；

令 $a=-b$，若 $f(-b)=0$，则它有因式$(a+b)(b+c)(c+a)$；

令 $a=-(b+c)$，若 $f[-(b+c)]=0$，则它有因式$(a+b+c)$；

令 $a=b-c$，若 $f(b-c)=0$，则它有因式$(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)$；

令 $a=0$，若 $f(a)=0$，则它有因式 abc.

例二　分解因式：

(1) $xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)$；

(2) $(x+y+z)^4-(x+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$.

解：(1) 式是关于 x、y、z 的四次轮换式，可把 x 看成主元，因此，

设　$f(x)=$原式，当　$x=y$ 时，

$f(y)=y^2(y^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zy(z^2-y^2)=0$.

所以$(x-y)$是原式的一个因式. 由对称性知$(y-z)$、$(z-x)$也是原式的因式，因此，剩下的因式必为$(x+y+z)$的形式. 所以，

设　原式$=k(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$，

令　$x=0$，$y=1$，$z=2$，得　$0+2(1-4)+0=k(0+1+2)(0-1)(1-2)(2-0)$

$-6=6k$.

$\therefore k=-1$.

故　原式$=-(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$.

(2) 式是关于 x、y、z 的四次对称式，可把 x 看成主元，因此，设　$f(x)=$原式，当 $x=0$ 时，

$f(0)=(0+y+z)^4-(y+z)^4-(z+0)^4-(0+y)^4+0+y^4+z^4=0$.

所以 x 是原式的一个因式. 由对称性知 y、z 也是原式的因式，因此，剩下的因式必为$(x+y+z)$的形式. 所以，

设　原式$=kxyz(x+y+z)$，

笔记栏

令　$x=y=z=1$，得　　$3^4-2^4-2^4-2^4+3=3k$．

$\therefore k=12$．

故　原式 $=12xyz(x+y+z)$．

例三　分解因式：

(1) $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$；

(2) $(abc+bcd+cda+dab)^2-(ab-cd)(bc-ad)(ca-bd)$．

解：(1) 式是关于 x、y、z 的五次轮换式，可把 x 看成主元，因此，设 $f(x)=$ 原式，

当　$x=y$ 时，$f(y)=(y-z)^5+(z-y)^5+(y-y)^5=0$．

所以 $(x-y)$ 是原式的一个因式．由对称性知 $(y-z)$、$(z-x)$ 也是原式的因式，因此，剩下的因式应是 $L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)$ 的形式．所以，

设　原式 $=(x-y)(y-z)(z-x)[L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)]$，

令　$x=1$，$y=-1$，$z=0$，代入上式，得　$2L-M=15$．

令　$x=2$，$y=1$，$z=0$，代入上式，得　$5L+2M=15$．

解方程组 $\begin{cases}2L-M=15,\\5L+2M=15,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}L=5,\\M=-5.\end{cases}$

$\therefore$ 原式 $=5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$．

(2) 式是关于 a、b、c、d 的六次对称式．把 a 看成主元，

设　$f(a)=$ 原式，

当　$a=0$ 时，$f(0)=(bcd)^2-(-cd)(bc)(-bd)=0$．

所以 a 是原式的一个因式．由对称性知 b、c、d 也是原式的因式，因此，剩下的因式应是 $L(a^2+b^2+c^2+d^2)+M(ab+bc+cd+da+ac+bd)$ 的形式．所以，

设　原式 $=abcd[L(a^2+b^2+c^2+d^2)+M(ab+bc+cd+da+ac+bd)]$，

令　$a=b=c=d=1$，代入上式，得　$2L+3M=8$．

令　$a=b=c=1$，$d=2$，代入上式，得　$7L+9M=25$．

解方程组 $\begin{cases}2L+3M=8,\\7L+9M=25,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}L=1,\\M=2.\end{cases}$

$\therefore$ 原式 $=abcd[(a^2+b^2+c^2+d^2)+2(ab+bc+cd+da+ac+bd)]=abcd(a+b+c+d)^2$

例四　分解因式：$a^3(a+1)(b-c)+b^3(b+1)(c-a)+c^3(c+1)(a-b)$．

分析：可把 a 看作主元，应用主元法．

解：此式为五次非齐次轮换式，可把 a 看成主元，

设　$f(a)=$ 原式，当　$a=b$ 时，$f(b)=0$．

所以 $(a-b)$ 是原式的一个因式．由对称性知 $(b-c)$、$(c-a)$ 也是原式的因式，因此，剩下的因式应是二次非齐次对称式．由对称性可断定应是 $L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)+N(a+b+c)+P$ 的形式．

设　原式 $=(a-b)(b-c)(c-a)[L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)+N(a+b+c)+P]$，

笔记栏

令　$a=0$，$b=1$，$c=-1$，得 $2L-M+P=-1$.　①

令　$a=0$，$b=2$，$c=-2$，得 $8L-4M+P=-4$.　②

令　$a=0$，$b=1$，$c=2$，得 $5L+2M+3N+P=-10$.　③

令　$a=0$，$b=1$，$c=-2$，得 $5L-2M-N+P=-2$.　④

③+④×3 得　$5L-M+P=-4$.　⑤

解方程组 $\begin{cases}2L-M+P=-1,\\ 8L-4M+P=-4,\\ 5L-M+P=-4,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}L=-1,\\ M=-1,\\ P=0.\end{cases}$

把 $L=-1$、$M=-1$、$P=0$ 代入④，得 $N=-1$.

$\therefore$ 原式 $=-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+a+b+c)$.

例五　已知：$a+b+c=0$，且 a、b、c 互不相等. 求证：$\dfrac{a^2}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2}{2b^2+ac}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}=1$.

分析：利用已知条件 $a+b+c=0$. 将左边每个分式的分母进行变形可得：$2a^2+bc=(a-b)(a-c)$，$2b^2+ac=(b-a)(b-c)$，$2c^2+ab=(c-a)(c-b)$.

解：从条件入手，可将分母变形.

$\because a+b+c=0$，$\therefore a=-(b+c)$，$a^2=-a(b+c)$，$2a^2=a^2-a(b+c)$.

$\therefore 2a^2+bc=a^2-a(b+c)+bc=a^2-ab-ac+bc$

$=a(a-b)-c(a-b)=(a-b)(a-c)$.

同理　$2b^2+ac=(b-c)(b-a)$，$2c^2+ab=(c-a)(c-b)$.

$\therefore -\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$，

即　$\dfrac{a^2}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2}{2b^2+ca}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}=1$.

▶笔▶记▶栏

练习三

一、填空题：

1. 分解因式 $(x-y)x^6+(y-x)y^6$ 得____________.

2. 分解因式 $(a-b)^2-a^2+b^2$ 得____________.

3. 分解因式 $x(x-1)+y(y+1)-2xy$ 得____________.

4. 分解因式 $(c^2-b^2+d^2-a^2)^2-4(ab-cd)^2$ 得____________.

二、分解因式：

1. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$；

2. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$；

3. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-(a^3+b^3+c^3)-2abc$;

4. $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.

三、求证：$\dfrac{x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)}{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}=-\dfrac{1}{2}(y-z)(z-x)(x-y)$.

[redacted]

一、选择题：

1. $2^{48}-1$ 可以被 60 与 70 之间的两个数整除，这两个数是(　　).

A. 61，63　　B. 61，65　　C. 63，65　　D. 63，67

2. 若 $a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3=0$，则 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的值是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 3

3. 若 $a+b+c=0$，$a^3+b^3+c^3=0$，则 $a^{1999}+b^{1999}+c^{1999}$的值是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$的一个因式为(　　).

A. $(a+b)^2$　　B. $(a-b)^2$　　C. a^2+b^2　　D. a^2-b^2

二、填空题：

1. 分解因式　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=$________________.

2. 分解因式　$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)=$________________.

3. 分解因式　$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=$________________.

4. $\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{222\cdots2}_{n个}=(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)^2$.

三、解答题：

1. n 支足球队参加循环赛，每两支足球队之间都要进行比赛，在循环过程中，第一支球队胜 x_1 场，负 y_1 场；第二支球队胜 x_2 场，负 y_2 场；依此类推到第 n 支球队（不考虑平局）. 求证：$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$.

2. 已知：x^3+bx^2+cx+d 为整系数多项式，若 $bd+cd$ 为奇数．求证：这个多项式不能分解为两个整系数多项式之积．

3. 若 p、q 都是大于 5 的任意质数，求证：p^4-q^4 总能被 80 整除．

第四讲　整除性问题

解题指要

数论是一门古老的数学分支，它是研究数的性质、特别是研究整数性质的学科．整除问题是数论中最基本也是最重要的问题．用整除性解决问题时，往往需要一定的技巧．我们在本讲除了介绍一些基本方法外，主要是探讨如何灵活运用有关性质进行计算和证明，如何将一些实际问题通过分析化成与整除性质有关的问题来解决．

一．基本知识

1．整除的定义：设 a、b 为两整数，且 $b\neq 0$．b 除 a 所得商为 q，余数为 r，则有：$a=b\cdot q+r$（$0\leqslant r\leqslant b$）．若余数 $r=0$，则称 b 能整除 a，或称 a 能被 b 整除，记作 $b\mid a$，而 $a\nmid b$ 表示 b 不整除 a．

2．整除的性质：

（1）若 $c\mid b$，$b\mid a$，则 $c\mid a$；

（2）若 $b\mid a$，则 $bc\mid ac$；

（3）若 $c\mid a$，$c\mid b$，则 $c\mid(ma+nb)$（m、n 为整数）；

（4）若 $a+b=c+d$，a、b、c 均能被 e 整除，则 $e\mid d$；

（5）若 a、b 被 c 除的余数相同，则 $c\mid(a-b)$；

（6）若 $c\mid ab$，且 $(a,c)=1$，则 $c\mid b$；特别地，若 p 为质数，且 $p\mid ab$，则 $p\mid a$ 或 $p\mid b$ 两者必居其一；

（7）若 $b\mid a$，$c\mid a$，且 $(b,c)=1$，则 $bc\mid a$；

（8）任一整数被正整数 n 除，其余数必为 0，1，2，…，$n-1$ 中之一，这样可以把所有整数分成 n 类．

二、自然数的整除性的判别法

1．一个自然数的个位数字之和若能被 2（或 5）整除，则这个自然数必能被 2（或 5）整除．

2．一个自然数的各位数字之和若能被 3（或 9）整除，则这个自然数必能被 3（或 9）整除．

3．一个自然数的末两位数若能被 4（或 25）整除，则这个自然数必能被 4（或 25）整除．

4．一个自然数若能同时被 2、3 整除，则这个自然数必能被 6 整除．

5．一个自然数的个位数字以前的数字组成的数与个位数字的 2 倍的差若能被 7 整除，则这个自然数一定能被 7 整除．

6．一个自然数的末三位数若能被 8 整除，则这个自然数能被 8 整除．

7．一个自然数的奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差若能被 11 整除，则这个自然数必能被 11 整除．

8．一个自然数的奇位千进位的总和与偶位千进位的总和之差能被 7（或 11，或 13）整除，

则这个自然数必能被 7（或 11，或 13）整除.

典型例题讲解

例一 一个五位数$\overline{abcad}$，其中 $d-b=3$，试问 a、c 为何值时，这个五位数能被 11 整除？

分析：利用被 11 整除的判别法.

解：如果 11 能整除$\overline{abcad}$，那么$\overline{cad}-\overline{ab}$也一定能被 11 整除，即$(100c+10a+d)-(10a+d)=100c+d-b$ 能被 11 整除. 由于 $d-b=3$，所以要 $11 \mid \overline{c03}$，只需 $c=8$，且与 a 值无关.

所以五位数$\overline{abcad}$，其中 $d-b=3$，当 $c=8$ 时，能被 11 整除，且与 a 值无关.

例二 已知 $N=\overline{13xy45z}$能被 792 整除，求 N.

分析：$792=8\times9\times11$，且$(8,9,11)=1$，$\therefore 8 \mid N$，$9 \mid N$，$11 \mid N$.

解：$\because 792=8\times9\times11$，且$(8,9,11)=1$，$\therefore 8 \mid N$，$9 \mid N$，$11 \mid N$.

(1) $\because 8 \mid N$，$\therefore 8 \mid \overline{45z}$. $\therefore z=6$.

(2) $\because 9 \mid N$，$\therefore 9 \mid (1+3+x+y+4+5+6)$，

即 $9 \mid (19+x+y)$. 又 $0\leqslant x$，$y\leqslant 9$，$\therefore 0\leqslant x+y\leqslant 18$.

$\therefore x+y=8$ 或 $x+y=17$.

(3) $\because 11 \mid N$，

$\therefore 11 \mid [(1+x+4+6)-(3+y+5)]$，即 $11 \mid (x-y+3)$.

$\because -9\leqslant x-y\leqslant 9$，$\therefore x-y=8$ 或 $x-y=-3$.

由 (2)、(3) 得：

$\begin{cases}x+y=8,\\x-y=8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=8,\\x-y=-3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=17,\\x-y=8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=17,\\x-y=-3.\end{cases}$

例三 已知：一个整数 a 满足 $2\nmid a$，且 $3\nmid a$. 求证：$24 \mid a^2+23$.

证明：设 $a=6n+r$（n、r 均为整数，且 $0\leqslant r<6$）.

$\because 2\nmid a$，$3\nmid a$，$\therefore 6\nmid a$，$\therefore r\neq 0,2,3,4$. $\therefore r=1$ 或 5.

(1) 当 $r=1$，即 $a=6n+1$ 时，

$a^2+23=(6n+1)^2+23=36n^2+12n+24=12n(3n+1)+24$，

而 n 与 $3n+1$ 一奇一偶，

$\therefore 2 \mid n(3n+1)$. $\therefore 24 \mid (a^2+23)$.

(2) 当 $r=5$，即 $a=6n+5$ 时，$a^2+23=36n^2+60n+48=12n(3n+5)+48$，

而 n 与 $3n+5$ 也一奇一偶，

$\therefore 2 \mid m(3n+5)$. $\therefore 24 \mid (a^2+23)$.

综合 (1)，(2) 知，对满足条件的 n，有 $24 \mid a^2+23$.

例四 已知：两个三位数$\overline{abc}$与$\overline{def}$的和$\overline{abc}+\overline{def}$能被 37 整除. 证明：六位数$\overline{abcdef}$也能被 37 整除.

提示：$\overline{abcdef}=\overline{abc}\times1000+\overline{def}=\overline{abc}\times999+(\overline{abc}+\overline{def})$，而 $999=9\times111=9\times3\times37$.

笔记栏

例五 设 a、b、c 为直角三角形的三边长（a、b、c 为整数），证明：$30 \mid abc$.

分析：分三种情况讨论：至少有一个偶数，或是 3 的倍数，或不能被 5 整除.

证明：不妨设 a、b 为直角边，c 为斜边，则 $c^2 = a^2 + b^2$.

(1) 若 a、b 中至少有一个是偶数，则 $2 \mid ab$，否则 $a = 2k_1 - 1$，$b = 2k_2 - 1$（k_1、k_2 为自然数）.

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = (2k_1 - 1)^2 + (2k_2 - 1)^2 = 2(2k_1^2 + 2k_2^2 - 2k_1 - 2k_2 + 1)$.

$\therefore 2 \mid c^2$，$\therefore 2 \mid c$，$\therefore 2 \mid abc$.

(2) 若 a、c 中至少有一个是 3 的倍数，则 $3 \mid ac$，否则，$a = 3m \pm 1$，$c = 3n \pm 1$（m、n 为自然数），$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$，总有 $3 \mid (c + a)(c - a)$.

$\therefore 3 \mid b^2$. $\therefore 3 \mid b$. $\therefore 3 \mid abc$.

(3) 若 a、b、c 中任何一个都不能被 5 整除，则 a^2、b^2、c^2 被 5 除的余数只能是 1 或 4，而 $a^2 + b^2$ 被 5 除的余数只能为 0、2、3，$\therefore a^2 + b^2 \neq c^2$. 这与 $a^2 + b^2 = c^2$ 矛盾，$\therefore a$、b、c 至少有一个能被 5 整除，即 $5 \mid abc$. $\because 2 \mid abc$，$3 \mid abc$，$5 \mid abc$，且 $(2, 3, 5) = 1$，$\therefore 30 \mid abc$.

例六 用 1、2、3、4、5、6 组成一个六位数 $\overline{abcdef}$，其中不同的字母代表不同的数字. 如果 $2 \mid \overline{ab}$，$3 \mid \overline{abc}$，$4 \mid \overline{abcd}$，$5 \mid \overline{abcde}$，$6 \mid \overline{abcdef}$，求这个六位数.

解：a、b、c、d、e、f 分别表示 1、2、3、4、5、6 中的某一个自然数，不同的字母表示不同的自然数.

$\because 5 \mid \overline{abcde}$，$\therefore e = 5$.

从 $2 \mid \overline{ab}$，$4 \mid \overline{abcd}$，$6 \mid \overline{abcdef}$ 可知 b、d、f 均为偶数，取自于 2、4、6，a、c 取自于 1、3，$a + c = 4$.

$\because 3 \mid \overline{abc}$，$\therefore 3 \mid a + b + c$，可知 $3 \mid 4 + b$，b 只能是2.

$\because 4 \mid \overline{abcd}$，并且 $\overline{abcd} = \overline{ab} \times 100 + \overline{cd}$，

$\therefore 4 \mid \overline{cd}$，从 c、d 的选择范围可知 $\overline{cd}$ 可能的值为 16、36.

当 $c = 1$，$d = 6$ 时，$a = 3$，$f = 4$，这个六位数为 321654.

当 $c = 3$，$d = 6$ 时，$a = 1$，$f = 4$，这个六位数为 123654.

经验证知：321654、123654 均符合条件.

▶笔▶记▶栏

练习四

1．试证明：偶数的平方一定是 4 的倍数，奇数的平方被 8 除余1.

2. 已知 $11 \mid 2x+7y$，证明：$11 \mid 9x+4y$.

3. 证明：$3 \mid n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3$，其中 n 为自然数.

4. 试证明：找不到这样的整数 x、y，满足 $x^2-3y^2=17$.

5. 1234 除以某自然数，其商为 64，求除数和余数.

6. 任取一个能被 9 整除的 1962 位的数，它的各位数字之和记为 a，a 的各位数字之和记为 b，b 的各位数字之和记为 c，问：c 等于多少？

一、选择题：

1. 任意调换五位数 12345 各数位上数字的位置，所得的五位数中质数的个数是(　　).

A. 4　　B. 8　　C. 12　　D. 0

2. 两个质数 p、q 满足 $p+q=99$，则 $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$ 的值是(　　).

A. 9413　　B. $\frac{9413}{194}$　　C. $\frac{9413}{99}$　　D. $\frac{9413}{97}$

3. 从1、2、3、4、5、6、7、8、9中任取5个数，则

(1) 其中必有两数互质；

(2) 其中必有一数是另一数的倍数；

(3) 其中必有一数的两倍是另一数的倍数；

以上结论中，正确的个数为(　　).

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

4. 一个自然数的$\frac{1}{2}$是一个平方数，它的$\frac{1}{3}$是一个立方数，这个自然数是(　　).

A. 648　　B. 288　　C. 168　　D. 918

二、填空题：

1. 对于一个自然数 n，如果能找到自然数 a 和 b，使得 $n=a+b+ab$，则称 n 为一个"好数". 如$3=1+1+1\times1$，则3是一个"好数"，在1、2、3、…，99，100这100个自然数中，"好数"共有________个.

2. 不能用三个不相等的合数之和表示的最大奇数为________.

3. 若正整数 n 的所有正约数的乘积等于64，则 n 的值为________.

4. 一个数有21个正约数，另一个数有10个正约数，若它们的最大公约数等18，且除了2与3外，没有其他质因数，这个两位数是________与________.

三、解答题：

1. 设 a、b、c、d 是互不相等的整数，r 为整数，且$(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)=9$，证明：$a+b+c+d=4r$.

2. 证明：相继的两个正整数互质.

3. 已知：p 为正整数，p、$8p^2+1$ 都是质数. 证明：$8p^2-p+2$ 也是质数.

4. 四位数$\overline{abcd}$各位数字之和 $a+b+c+d$ 是一个完全平方数，颠倒数字顺序所成的数$\overline{dcba}$比原数大4995，求出所有这样的四位数.

第五讲　同余（一）

问题指要

下面先讲一个真实的故事.

1978 年的一天，中国著名数学家华罗庚和一群中学教师走出一幢大楼. 正走到他乘坐的小汽车旁，忽然，华老用手杖指着车牌对周围的教师说："我乘坐的车的车牌号可以被 7 整除，但不能被 11、13 整除." 大家一看，这车牌号是 3103219. 如此大的数，华老这么迅速就能得出结论？大家都非常惊讶. 华老向大家解释说："其实我是用了一个小窍门：先把 3103219 中两个 3 划去得 100219，再在所得的数的前 4 位数 1002 中减去 1001，最后乘下 119，这是一个很小的数，它能被 7 整除，但不能被 11、13 整除，那么原数也具有同样的性质. 其实华老用的窍门就是用了同余的概念：因为 $7\times11\times13=1001$，所以 300300 及 100100 都是 1001 的倍数，从 3103219 中减去这两个数所得的差 119 与原数除以 7、11、13 的余数相同，所以 119 就可判明原数除 7、11、13 的余数情况.

所谓同余，顾名思义，就是余数相同，即两个整数被同一个正整数除所得的余数相同. 因此，同余可以看作是对整数问题的进一步探讨，因而它和前面学过的整除的性质有着密切的联系. 现在我们给出同余的一般定义：

两个整数 a、b 被整数 m 除，如果余数相同，就称 a 和 b 关于模 m 同余，记作 $a\equiv b\pmod{m}$.

上面所给的同余的定义虽然直观易懂，但在具体问题中却不便运用和进行判断，实际使用的是上述定义的一个如下等价形式：$m\mid(a-b)\Leftrightarrow a\equiv b\pmod{m}$. 特别地，$a\equiv0\pmod{m}\Leftrightarrow m\mid a$.

根据同余的定义，可以得到下列性质：

（1）若 $a\equiv b\pmod{m}\equiv$，$b\equiv c\pmod{m}$，则 $a\equiv c\pmod{m}$.

（2）若 $a\equiv b\pmod{m}$，$c\equiv d\pmod{m}$，则 $a\pm c\equiv b\pm d\pmod{m}$.

（3）若 $a\equiv b\pmod{m}$，$c\equiv d\pmod{m}$，则 $ac\equiv bd\pmod{m}$.

（4）若 $a\equiv b\pmod{m}$，则 $a^n\equiv b^n\pmod{m}$.

（5）若 $ac\equiv bc\pmod{m}$，且 $(c,\ m)=1$，则 $a\equiv b\pmod{m}$.

从上面列出的同余的性质可以看出，同余具有一些与等式类似的性质. 如可以在同余式的两边加、减、乘、乘方运算；可用同一个整数去除同余式的两边，但要注意条件 $(c,\ m)=1$；也可以进行移项.

同余是数论中的重要概念，利用同余的定义和性质可以解决很多有趣的问题. 求余数是同余的基本问题，在这种问题中，先求出与 ±1 同余的数是一种基本的解题技巧.

例一 求 33 除 2^{1992}的余数.

解：先找与 $\pm 1(\bmod 33)$同余的数.

因为 $2^5=32\equiv -1(\bmod 33)$，所以 $2^{10}\equiv 1(\bmod 33)$.

所以 $2^{1992}=(2^{10})^{199}\cdot 2^2\equiv 1\cdot 2^2=4(\bmod 33)$.

所求余数是 4.

例二 今天是星期天，再过 2001^{2001}天是星期几?

分析：找出 2001^{2001}被 7 整除的余数.

解：$2001=285\times 7+6$，$\therefore 2001^{2001}=(285\times 7+6)^{2001}\equiv 6^{2001}\ (\bmod 7)$.

又$\because 6\equiv 6(\bmod)$，$6^2\equiv 1(\bmod 7)$，$6^3\equiv 6(\bmod 7)$，$6^4\equiv 1(\bmod 7)$，$6^5\equiv 6(\bmod 7)$，$6^6\equiv 1(\bmod 7)$，$6^7\equiv 6(\bmod 7)$，

$\therefore 6^{2001}\equiv 6(\bmod 7)$.

即 2001^{2001}被 7 除余数为 6，故 2001^{2001}天之后应为星期六.

例三 证明：对任意的自然数 n，$A=2903^n-803^n-464^n+261^n$ 能被 1897 整除.

分析：$\because 1897=7\times 721$，且$(7,271)=1$，故只需证明 $7\mid A$，$721\mid A$.

证明：$\because 2903\equiv 5(\bmod 7)$，$803\equiv 5(\bmod 7)$，$464\equiv 2(\bmod 7)$，$261\equiv 2(\bmod 7)$，

$\therefore A=2903^n-803^n-464^n+261^n\equiv 5^n-5^n-2^n+2^n\equiv 0(\bmod 7)$.

$\therefore 7\mid A$.

又$\because 2903\equiv 193(\bmod 271)$，$803\equiv 261(\bmod 271)$，$461\equiv 193(\bmod 271)$，

$\therefore A=2903^n-803^n-464^n+261^n\equiv 193^n-261^n-193^n+261^n\equiv 0(\bmod 271)$.

$\therefore 271\mid A$.

$\because (7,271)=1$，$\therefore A$ 能被 1897 整除.

例四 若 2836、4582、5164、6522 四个整数都被同一个正整数相除，所得的余数相同，但不为零，求除数和余数.

解：设除数为 m，余数为 r(m、r 为正整数，且 $r<m$)，则有$(4582-2836)\equiv 1746\equiv 0(\bmod m)$，$(6522-5164)\equiv 1358\equiv 0(\bmod m)$，

即 1746、1358 都能被 m 整除，因而 m 是 1746 和 1358 的公约数.

由于 $1746=2\times 3^2\times 97$，$1358=2\times 7\times 97$，$\therefore m$ 的可取值为 2、97、194.

当 $m=2$ 时，$r=0$，不符合题意，舍去；

当 $m=97$ 时，$r=23$；

当 $m=194$ 时，$r=120$.

例五 设 $N=4444^{4444}$的各位数码之和为 A，A 的各位数码之和为 B，B 的各位数码之和为 C，求 C.

解：因为任意正整数对模 9 与其数码之和同余，则 $N\equiv A\equiv B\equiv C(\bmod 9)$.

$\because 4444=9\times 493+7$，$\therefore 4444\equiv 7(\bmod 9)$.

又$\because 7^3\equiv 1 \pmod 9$，$4444=3\times 1481+1$，$\therefore 4444^{4444}\equiv 7^{4444}\equiv (7^3)^{1481}\times 7\equiv 7 \pmod 9$.

$\therefore N\equiv C\equiv 7 \pmod 9$.

又$\because N<(10^4)^{4444}<10^{20000}$，$\therefore A<9\times 20000=180000$，即 A 不超过六个数码.

$\therefore B<9\times 6=54$，而小于 54 的正整数中，数码和最大的是 49.

$\therefore C\leqslant 13$，而 $C\equiv 7 \pmod 9$.

$\therefore C=7$.

例六 一个正整数的个位数字是 7，如果把个位数字移到首位，所得到的新数是原数的 5 倍，求满足上述条件的最小正整数.

解：设所求的数为 $10x+7$（x 是正整数），根据题意得：

$7\times 10^n+x=5(10x+7)$，即 $x=\dfrac{10^n-5}{7}$（其中 n 为正整数），故 $7\mid(10^n-5)$，即 $10^n\equiv 5 \pmod 7$.

$\because 10\equiv 3 \pmod 7$，

$10^2\equiv 3^2\equiv 9\equiv 2 \pmod 7$，$10^3\equiv 10\times 10^2\equiv 3\times 2 \pmod 7$，

$10^4\equiv (10^2)^2\equiv 2^2\equiv 4 \pmod 7$，$10^5\equiv 10\times 10^4\equiv 3\times 4\equiv 12\equiv 5 \pmod 7$，

$\therefore$满足条件的正整数 n 的最小值是 5，此时 $x=14285$，即所求的最小正整数是 142857.

此题也可这样求解：由题意知：首位数字必为 1，列式：

$$\begin{array}{r}1\cdots E\,D\,C\,B\,A\,7\\ \times\qquad\qquad\quad 5\\ \hline 7\cdots\ E\,D\,C\,B\,A\end{array}$$

$\therefore A=5$，$B=8$，$C=2$，$D=4$，$E=1$.

$\therefore$所求的最小正整数为 142857.

例七 求证：$11\mid 10^{1991}+23^{1991}$.

证明：因为 $10\equiv -1 \pmod{11}$，所以 $10^{1991}\equiv -1 \pmod{11}$.

又因为 $23\equiv 1 \pmod{11}$，所以 $23^{1991}\equiv 1 \pmod{11}$，

$10^{1991}+23^{1991}\equiv -1+1=0 \pmod{11}$.

因此 $11\mid 10^{1991}+23^{1991}$.

一、填空题：

1. “五一”节是星期一，国庆节是星期________.
2. 71427 和 19 的积被 7 除，余数为________.
3. $5^{100}+2\times 3^{99}+1$ 被 8 除余数为________.
4. 已知 $a=\underbrace{20012001\cdots 2001}_{2001\text{个}2001}$，则 a 除以 13 所得的余数是________.
5. 如果两数被 3 除余 2，那么它们的积被 3 除的余数为________.

二、解答题：

1. 求 8 除 $7^{2n+1}-1$ 的余数.

2. 求 $2001^{2001\cdots2001}$ 的个位数字.

3. 证明：$7 \mid 3^{1990}+2^{1989}\times5^{1991}$.

4. 求 $1\times3\times5\times\cdots1989\times1991$ 的末三位数字.

专题训练五

一、填空题：

1. 被2除余1、被3除余2、被4除余3、被5除余4的最小正整数是_______.

2. 1994年的国庆节是星期六，则2000年的国庆节是星期_______.

3. 2^{1000}除以13余数是_______.

4. $(257^{33}+46)^{26}$被50除所得的余数为_______.

5. $1^4+2^4+3^4+\cdots+1990^4+1991^4$ 的个位数字是_______.

二、解答题：

1. 求证：$2222^{5555}+5555^{2222}$能被7整除.

2. 设 a、b 都是正整数，且 a 被7除的余数是2，b 被7除的余数是5，求 a^2+4b 和a^2-4b 被7除的余数.

3. 有一列数1，3，4，7，11，18，29，…（从第三个数开始，每个数恰好是它前面相邻两个数的和）.（1）求：第1993个数被7除的余数是几？（2）把以上数列按下述方法分组：{1}，{3，4}，{7，11，18}，…第 n 组中含有 n 个数，问：第1993组的各数之和被7除的余数是几？

4. 已知$\overline{abc}\cdot\overline{def}=\overline{g1031}$（$\overline{abc}$、$\overline{def}$均为三位数，$\overline{g1031}$为五位数），且 $a+b+c=10$，$d+e+f=8$，求 a、b、c、d、e、f、g 的值.

第六讲　同余（二）

解题指要

同学们已经学过一些同余的知识，不但要更好地运用同余性质解题，还要掌握一些技巧．

对于任意两个整数 a 和 b（$b\neq0$），必有惟一的整数 q 和惟一的非负整数 r，使得 $a=qb+r$ $(0\leqslant r<|b|)$．由此可知，一个整数 a 被正整数 b 除，所得余数 r 只能是 0，1，2，…，$b-1$ 中的一个，特别地，当 $r=0$ 时，a 被 b 整除．

对于固定的除数 b，全体整数能且仅能分为 b 个不同的类：bk，$bk+1$，$bk+2$，…，$bk+(b-1)$，对任何一个整数，必定属于且仅属于其中的一类，也就是说整数可以按剩余类进行分类．

典型例题讲解

例一　证明：任意平方数除以 8 的余数为 0、1、4（这是平方数的一个重要特征）．

证明：奇数可以表示为 $2k+1$，从而奇数的平方 $=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$．

因为两个连续整数 k、$k+1$ 中必有偶数，所以 $4k(k+1)$ 是 8 的倍数，从而，奇数的平方 $=8t+1\equiv1(\mathrm{mod}8)$，偶数的平方 $=(2k)^2=4k^2$　（k 为整数）．

（1）若 $k=$ 偶数 $=2t$　（t 为整数），则 $4k^2=16t^2\equiv0(\mathrm{mod}8)$．

（2）若 $k=$ 奇数 $=2t+1$，则 $4k^2=4(2t+1)^2=16(t^2+t)+4\equiv4(\mathrm{mod}8)$．

所以，平方数 $\equiv\begin{cases}0(\mathrm{mod}8),\\1(\mathrm{mod}8),\\4(\mathrm{mod}8).\end{cases}$

例二　求 1990^{1990} 除以 29 的余数．

解：$\because 1990^{1990}=(68\times29+18)^{1990}\equiv18^{1990}=(324)^{995}\equiv5^{995}=(3125)^{199}\equiv22^{199}=22(484)^{99}\equiv22(20)^{99}=22(8000)^{33}\equiv22(25)^{33}=22(15625)^{11}\equiv22(23)^{11}=506(529)^5\equiv13(7)^5\equiv4\times400\equiv5(\mathrm{mod}29)$，

$\therefore 1990^{1990}$ 除以 29 的余数是 5．

例三　证明：不定方程 $5x^2-6xy+7y^2=1995$ 无整数解．

分析：设方程有整数解，再利用整数的性质导出矛盾．

证明：设方程有整数解 m、n，则 $5x^2-6xy+7y^2=1995$ 可化为 $4m^2+(m-3n)^2-2n^2=1995$．由于 1995 为奇数，$4m^2-2n^2$ 为偶数，故 $m-3n$ 必为奇数．

▶笔▶记▶栏

(1) 若 n 为奇数，则 m 为偶数，有 $4m^2\equiv 0(\bmod 8)$，$(m-3n)^2\equiv 1(\bmod 8)$，$2n^2\equiv 2(\bmod 8)$，因此 $4m^2+(m-3n)^2-2n^2\equiv 0+1-2\equiv -1(\bmod 8)$. 但 $1995\equiv 3(\bmod 8)$，即是两边模 8 不同余，矛盾.

(2) 若 n 为偶数，则 m 为奇数，

有 $4m^2\equiv 4(\bmod 8)$，$(m-3n)^2\equiv 1(\bmod 8)$，$2n^2\equiv 0(\bmod 8)$，

因此 $4m^2+(m-3n)^2-2n^2\equiv 4+1-0\equiv 5(\bmod 8)$.

例四 求方程 $3^x+4^y=5^z$ 的所有正整数解.

解：设正整数 x、y、z 满足方程 $3^x+4^y=5^z$，则 $3^x+4^y=5^z\equiv 0+1^y\equiv 1(\bmod 3)$.

若 $z=2k+1(k\in\mathbf{N})$，则 $5^{2k+1}=5(25)^k\equiv 5\equiv 2(\bmod 3)$.

$\therefore z$ 是正偶数，$z=2k$.

若 $x=2m+1(m\in\mathbf{N})$，则 $3^{2m+1}=5^{2k}-4^y=25^k-4^y\equiv 1(\bmod 4)$，即 $3\cdot 9^m\equiv 1(\bmod 4)$.

而 $1\equiv 3(8+1)^m\equiv 3(\bmod 4)$，矛盾.

若 $y>2$，则 $5\equiv 1(\bmod 8)$，矛盾.

故 y 只能为 2，则 $k=1$，$z=2$，$x=2$.

即 $x=y=z=2$ 是方程的惟一解.

例五 把 1，2，3，…，64 这 64 个数任意排列为 a_1，a_2，…，a_{64}，计算出 $|a_1-a_2|$，$|a_3-a_4|$，…，$|a_{63}-a_{64}|$，再将这 32 个数任意排列为 b_1，b_2，…b_{32}，计算出 $|b_1-b_2|$，$|b_3-b_4|$，…，$|b_{31}-b_{32}|$，如此继续下去，最后得到一个数 x. 问：x 是奇数还是偶数？

分析：要判断 x 是奇数还是偶数，只要用 2 来除 x，看余数是 1 还是 0.

解：由于对任意整数 a 都有 $-a\equiv a(\bmod 2)$，$|a|\equiv a(\bmod 2)$，

$$\begin{aligned}\text{故 } b_1+b_2+\cdots+b_{32} &\equiv |a_1-a_2|+|a_3-a_4|+\cdots+|a_{63}-a_{64}|\\ &\equiv a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{63}-a_{64}\\ &\equiv (a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{63}+a_{64})(\bmod 2).\end{aligned}$$

这说明 $b_1+b_2+\cdots+b_{32}$ 与 $a_1+a_2+\cdots+a_{64}=1+2+\cdots+64$ 的奇偶性相同，即经过一次“运算”，所得之数的奇偶性并不改变. 故 $x\equiv a_1+a_2+\cdots+a_{64}=1+2+\cdots+64\equiv 0(\bmod 2)$，即 x 为偶数.

例六 某年级 8 个班约有 400 余人，在列队中，3 个一排多 2 个，5 个一排多 3 个，7 个一排又多 2 个，求该年级确切的人数.

解：设这个年级有 x 人，则 $x\equiv 2(\bmod 3)$， ①

$x\equiv 3(\bmod 5)$， ②

$x\equiv 2(\bmod 7)$. ③

由①与②得 $x=2$，5，8，…；$x=3$，8，…

故 $x=8+15k$，即 $x=8$，23，38，…

由③得 $x=2$，9，16，23，…

$\therefore x=23+105k_1$. $\therefore x\equiv 23(\bmod 105)$.

笔记栏

又∵该年级 8 个班约 400 余人，

∴$400 < x < 500$，即 $400 < 23 + 105k_1 < 500$，且 k_1 为整数.

∴$k_1 = 4$.　　∴$x = 443$.

答：该年级有学生 443 人.

练习六

一、填空题：

1. $1949^{1987^{2000}}$被 7 除的余数是________.
2. 今有数不详，以 5 累减之无剩，以 715 累减之剩 10，以 247 累减之剩 140，以 391 累减之剩 245，以 187 累减之剩 109. 那么总数是________.
3. 黑板上写有 1992 个数：1，2，3，…，1991，1992. 任意擦去若干个数，并加上被擦去的这些数的和被 7 除得到的余数. 经过若干次这样的变换后，黑板上只剩下两个数：1987，x. 那么 $x =$________.
4. 被 7 除余 2、被 5 除余 3、被 4 除余 1 的最小的正整数是________.
5. 把 1，2，…，81，这 81 个数任意排列为：a_1，a_2，…，a_{81}. 计算出：$|a_1 - a_2 + a_3|$，$|a_4 - a_5 + a_6|$，…，$|a_{79} - a_{80} + a_{81}|$；再将这 27 个数任意排列为 b_1，b_2，…，b_{27}，计算出：$|b_1 - b_2 + b_3|$，$|b_4 - b_5 + b_6|$，…，$|b_{25} - b_{26} + b_{27}|$. 如此下去，最后得到的一个数是________(填“奇数”或“偶数”).

二、解答题：

1. 求 1987^{2000}被 13 除的余数.

2. 证明：$1988 \mid (2000^n - 580^n + 76^n - 1496^n)$，其中 n 为任意正整数.

3. 4444^{4444}是一个很大的十进位数，它的各个数位上数字之和为 A，A 的各数位上数字之和为 B，B 的各数位上数字之和为 C，求 C.

4. 证明：不定方程 $3x^2 - 2xy + 6y^2 = 1987$ 无整数解.

[redacted]

1. 证明：$2222^{5555}+5555^{2222}$能被 7 整除.

2. 求 14^{1414}的末两位数.

3. 证明：如果 n 是大于 1 的正奇数，那么数 $2^{2n}(2^{2n+1}-1)$在十进制中的最后两位数是 28.

4. 证明：若整数 n 与 10 互质，则 n^{101}的末三位数字必定与原数的末三位数字相同.

5. 数$(\cdots(((7^7)^7)^7)^7\cdots)^7$中的指数 7 共有 100 个，问：这个数的末位数字是多少？末两位数字是多少？

6. 证明：$6n$ 位数被 7 整除，将最后的数码移到开头，这样得到的数也能被 7 整除.

第七讲　三角形（一）

解题指要

三角形是平面几何最基本、最重要的内容，它是以后学习平面几何知识的基础．三角形的有关知识、有关方法和有关技巧在初中数学竞赛中有着广泛的应用．

本讲主要介绍利用三角形三边关系定理、内角和定理、内外角关系定理、三角形内重要线段定理、全等三角形的性质和判定、等腰三角形及直角三角形的性质和判定（包括勾股定理及其逆定理）、三角形中位线定理等等来解决有关三角形的问题．

典型例题讲解

例一　周长为 30、各边长互不相等且都是整数的三角形有多少个？

解：设 $a<b<c$，则由 $\begin{cases} a+b=30-c, \\ a+b>c, \end{cases}$ 可得，$c<15$.

又 $c>\dfrac{30}{3}=10$，则 $10<c<15$.

又 c 为整数，于是 $c=11$，12，13，14.

当 $c=11$ 时，$b=10$，$a=9$.

当 $c=12$ 时，$b=11$，$a=7$；$b=10$，$a=8$.

当 $c=13$ 时，$b=12$，$a=5$；$b=11$，$a=6$；$b=10$，$a=7$；$b=9$，$a=8$.

当 $c=14$ 时，$b=13$，$a=3$；$b=12$，$a=4$；$b=11$，$a=5$；$b=10$，$a=6$；$b=9$，$a=7$.

故满足条件的三角形有 12 个．

例二　如图 7－1，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=3$，$AC=4$，AE 和 BD 分别是 BC 和 AC 边上的中线，且 $AE\perp BD$ 于 F，求 AB 的长．

分析：由于图中有两个中点，所以可考虑用三角形的中位线证明，由于此时图中出现了四个直角三角形，所以可以用勾股定理及方程求出 AB 的长．

解：连结 DE.

$\because AE$、BD 是中线，$\therefore DE \mathrel{\underset{=}{\parallel}} \dfrac{1}{2}AB$.

设　$AB=x$，则 $DE=\dfrac{1}{2}x$.

$\because AE\perp BD$ 于 F，

▶笔▶记▶栏

$\therefore EF^2 = BE^2 - BF^2 = DE^2 - DF^2$，　①

$AF^2 = AB^2 - BF^2 = AD^2 - DF^2$.　②

②－①得　$AB^2 - BE^2 = AD^2 - DE^2$.

$\because BE = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}$，$AD = \frac{1}{2}AC = 2$，

$\therefore x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2$，解得，$x^2 = 5$，$x = \sqrt{5}$.

即　$AB = \sqrt{5}$.

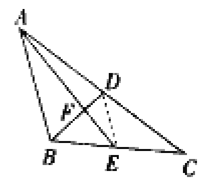


图 7－1

例三　如图 7－2，在四边形 $ABCD$ 中，$BC > BA$、$AD = CD$．BD 平分$\angle ABC$，求证：$\angle A + \angle C = 180°$.

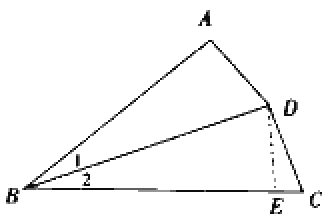


图 7－2

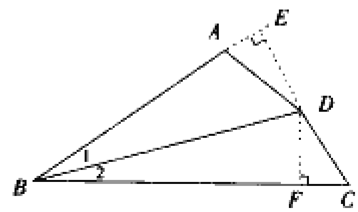


图 7－2a

证法一：如图 7－2，在 AE 上截取 $BE = AB$，连结 DE.

$\because AB = BE$，$\angle 1 = \angle 2$，$BD = BD$，$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD$.

$\therefore \angle A = \angle BED$，$AD = DE$.

$\because AD = CD$，$\therefore DE = DC$．$\therefore \angle C = \angle DEC$.

$\therefore \angle A + \angle C = \angle BED + \angle DEC = 180°$.

证法二：如图 7－2a，过 D 作 BA、BC 的垂线，E、F 分别为垂足.

$\because \angle 1 = \angle 2$，$\angle BED = \angle BFD$，$BD = BD$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BDE \cong \triangle \mathrm{Rt}BDF$．$\therefore DE = DF$.

$\because AD = DC$，$DE = DF$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADE \cong \mathrm{Rt}\triangle CDF$．$\therefore \angle EAD = \angle C$.

$\therefore \angle A + \angle C = \angle BAD + \angle EAD = 180°$.

例四　已知：如图 7－3，在$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D 为$\triangle ABC$ 内一点，且 $DC > DB$．求证：$\angle ADB > \angle ADC$.

分析：从基本定理“大角对大边，大边对大角”出发，问题是怎样把$\angle ADB$ 与$\angle ADC$ 放在有关的三角形中考察．把$\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转，使 AB 与 AC 重合.

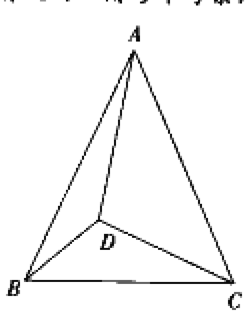


图 7－3

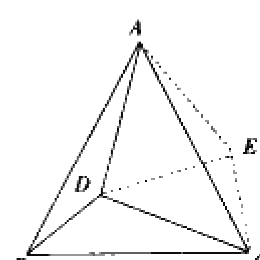


图 7　3a

▶笔▶记▶栏

证明：如图 7 - 3a，把$\triangle ABD$绕着点A逆时针旋转使得AB、AC重合，得到$\triangle ACE$，连结DE，则$\angle ADE=\angle AED$，$\angle ADB=\angle AEC$.

$\because BD<CD$，$\therefore CE<CD$.

$\therefore \angle CDE<\angle CED$.

$\therefore \angle CDE+\angle ADE<\angle CED+\angle AED$.

故　$\angle ADB>\angle ADC$.

例五　已知：如图 7 - 4，在$\triangle ABC$中，$\angle B$是锐角，且$\angle B=2\angle C$，$AD\perp BC$于D，E为BC中点．求证：$AB=2DE$.

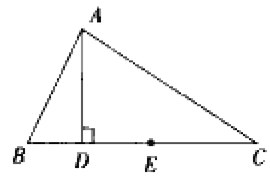


图 7 - 4

证法一：要证$AB=2DE$，只要证$\frac{1}{2}AB=DE$，可取AB中点F，连结DF，由于$DF=\frac{1}{2}AB$，所以只要证$DF=DE$.

如图 7 - 4a，取AB中点F，连结DF、EF.

$\because AD\perp BC$于D，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADB$中，$DF=\frac{1}{2}AB=BF$.

$\therefore \angle B=\angle 3$.

$\because E$为BC中点，$\therefore EF /\!/ AC$．$\therefore \angle 1=\angle C$.

$\because \angle B=2\angle C$，$\therefore \angle 3=2\angle C=2\angle 1$.

$\because \angle 3=\angle 1+\angle 2$，$\therefore \angle 1+\angle 2=2\angle 1$.

$\therefore \angle 2=\angle 1$．$\therefore DF=DE$，即　$\frac{1}{2}AB=DE$.

故　$AB=2DE$.

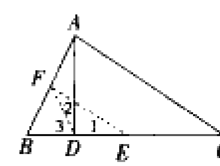


图 7 - 4a

证法二：要证$AB=2DE$，只要证$\frac{1}{2}AB=DE$；也可取AC中点P，连结EP．由于EP是中位线，所以$EP=\frac{1}{2}AB$．因此只要证$EP=DE$.

如图 7 - 4b，取AC中点P，连结EP、DP.

$\because E$为BC中点，$\therefore EP \mathrel{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AB$.

$\therefore \angle 3=\angle B$.

$\because \angle B=2\angle C$，$\angle 3=\angle 1+\angle 2$，$\therefore \angle 1+\angle 2=2\angle C$.

$\because AD\perp BC$于D，P为AC中点，$\therefore DP=\frac{1}{2}AC=PC$.

$\therefore \angle 1=\angle C$，$\angle 2=\angle C$，$\angle 1=\angle 2$.

因此　$PE=DE$，即　$\frac{1}{2}AB=DE$.

故　$AB=2DE$.

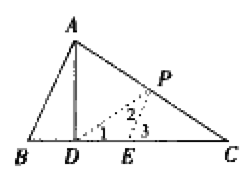


图 7 - 4b

证法三：由于$\angle B=2\angle C$，所以可延长CD至C'，使$BC'=AB$，再连结AC'．这样由等腰三角形性质可知D为CC'中点，又E为BC中点，这样DE就是以两个中点为端点的线段，可由此导出$AB=2DE$.

如图 7 - 4c，延长CB至C'，使$BC'=AB$，连结AC'.

$\therefore \angle 1=\angle C'$.

$\therefore \angle ABC=\angle 1+\angle C'=2\angle C'$.

$\because \angle ABC = 2\angle C$，$\therefore 2\angle C' = 2\angle C$，得$\angle C' = \angle C$.

$\therefore AC' = AC$.

$\because AD \perp BC$，$\therefore DC' = DC$.

$\because E$ 为 BC 中点，$\therefore BE = EC$.

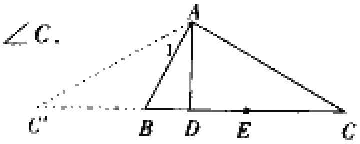


图 7－4c

$\therefore DE = DC - EC = DC' - BE = (DB + BC') - (BD + DE) = BC' - DE = AB - DE$.

例六 如图 7－5，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，E、F 是 BC、CD 边上的点，$\triangle CEF$ 的周长为 2，求$\angle EAF$ 的度数.

分析：把$\triangle AFD$ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$，不难得到$\triangle AEF \cong \triangle AFG$，$\angle EAF = 45°$.

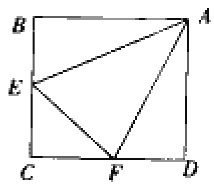


图 7－5

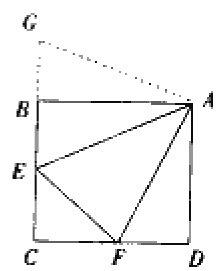


图 7－5a

解：如图 7－5a，把$\triangle AFD$ 绕着 A 点逆时针旋转 $90°$得到$\triangle AGB$.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$\therefore GC + CF = 2$.

$\because \triangle CFE$ 的周长为 2，$\therefore GE = EF$.

$\because AE = AE$，$AF = AG$，$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AEG$.

$\therefore \angle GAE = \angle EAF$.

$\because \angle GAF = \angle BAD = 90°$，$\therefore \angle EAF = 45°$.

例七 如图 7－6，P 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上的任意一点，作 $PE \perp CB$，垂足为 E，$PF \perp CD$，垂足为 F，求证：$AP \perp EF$.

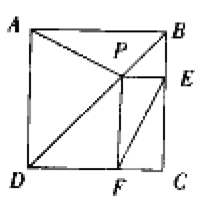


图 7－6

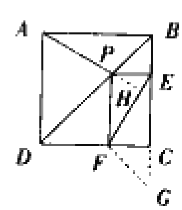


图 7－6a

证明：如图 7－6a，延长 EC 到 G，使 $CG = BE$，连结 FG.

$\because ABCD$ 是正方形，BD 是对角线，$PE \perp BC$，$PF \perp CD$，$\therefore BE = PE = CF = CG$.

$\because AB = EG$，$PB = FG$，$\angle ABP = \angle EGF$，$\therefore \triangle APB \cong \triangle EFG$.

$\therefore \angle BAP = \angle GEF$.

根据四点共圆的判定定理：A、H、E、B 四点共圆.

$\therefore \angle ABE + \angle AHE = 180°$，$\angle AHE = 90°$，$AH \perp EF$.

故 $AP \perp EF$.

笔记栏

练习七

一、填空题：

1．如图 7－7，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=$ ________度．

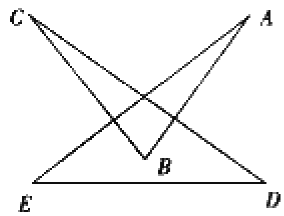


图 7－7

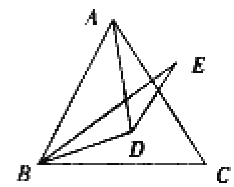


图 7－8

2．三角形三边 a、b、c 长都为整数，且 $a\leqslant b\leqslant c$，若 $b=3$，那么满足条件的三角形有________个．

3．在△ABC 中，$\angle A=80°$，点 D、E、F 分别在边 BC、AB、AC 上，且 $BD=BE$，$CD=CF$，那么$\angle EDF=$ ________．

4．点 D、E 是正△ABC 的边 BC、AC 上的点，且 $CD=AE$，AD、BE 相交于 P 点，$BQ\perp AD$．已知 $PE=1$，$PQ=3$，则 $AD=$ ________．

5．如图 7－8，D 是等边△ABC 内一点，$DB=DA$，$BE=BA$，$\angle DBE=\angle DBC$，则$\angle BED=$ ________．

二、解答题：

1．如图 7－9，$\angle A=56°$，$AB=AC$，$CD=BF$，$BD=CE$．求$\angle EDF$ 的度数．

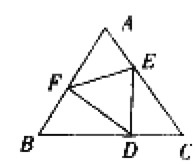


图 7－9

2．如图 7－10，BD 是等腰直角三角形 ABC 腰上的中线，$AF\perp BD$ 交 BD 于 F，延长 AF 交 BC 于 E，求证：$\angle ADB=\angle CDE$．

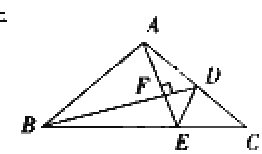


图 7－10

3．如图 7－11，在正方形 $ABCD$ 中，F 是 CD 边上的中点，$\angle EAF=\angle FAD$，E 在 BC 边上，求证：$AE=EC+CD$．

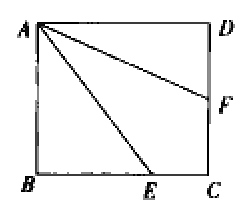


图 7－11

4. 如图 7－12，CD 是△ABC 的高，$BC=5$，$CD=4$，$\angle ACD=30°$，求 AB 的长.

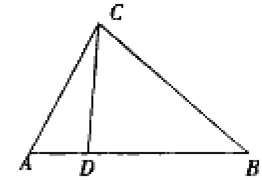


图 7－12

专题训练七

一、填空题：

1. 如图 7－13，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，BD 平分$\angle ABC$，交 AC 于 D，DE 为斜边 AB 的垂直平分线，且 $DE=1$cm，则 $AC=$ ________ cm.

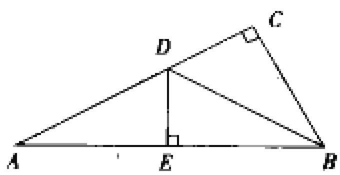


图 7－13

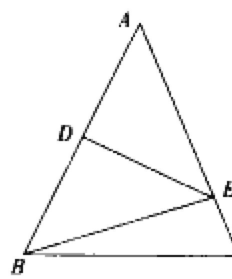


图 7－14

2. 如图 7－14，在△ABC 中，$AB=AC$，DE 为 AB 的中垂线，△BCE 的周长为 14cm，$BC=5$cm，那么 AB 的长为________ cm.

3. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle D=90°$，$\angle A=60°$，$AB=4$，$AD=5$，那么$\dfrac{BC}{CD}=$ ________.

4. 已知△ABC 中，高 AD 所在直线与高 DE 所在直线相交于 H，且 $BH=AC$，则$\angle ABC=$ ________.

5. 在 Rt△ABC 中，$\angle B=30°$，斜边 $AB=2$，则斜边 AB 上的高 $CD=$ ________.

二、选择题：

1. 若一个等腰三角形中两个角的比是 1:2，则这个等腰三角形的顶角是(　　).

A．90°　　B．36°　　C．90°或 60°　　D．不能确定

2. 等腰三角形有两条边长为 3cm 和 7cm，则周长为(　　).

A．13cm　　B．17cm　　C．13cm 或 17cm　　D．不能确定

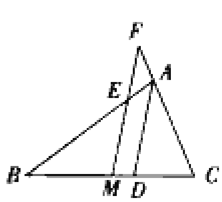


图 7－15

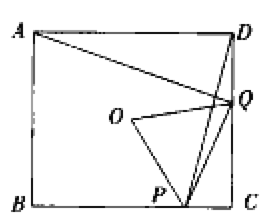


图 7－16

3. 如图 7－15，已知 AD 是△ABC 中$\angle BAC$ 的平分线，M 是 BC 的中点，$MF\parallel DA$ 交 CA 延长线

于 F，交 AB 于 E，则(　　)．

A．$BM=CD$　　B．$BE=AF$　　C．$CD=AF$　　D．$BE=CF$

4．如图 7－16，O 是正方形 $ABCD$ 的中心，Q 是 CD 上任意一点，$DP\perp AQ$，DP 交 BC 于 P，连 OP、OQ、PQ，则$\triangle POQ$ 为(　　)．

A．直角三角形　B．等边三角形　C．等腰三角形　　D．不能确定

三、解答题：

1．如图 7－17，在等腰$\triangle ABC$ 中，顶角$\angle A=100°$，$\angle B$ 的平分线交 AC 于 E，求证：$BC=AE+BE$．

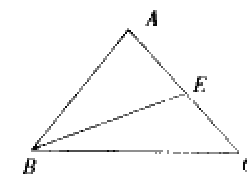


图 7－17

2．已知：AD 是$\triangle ABC$ 中$\angle BAC$ 的平分线，P 是 AD 上任一点，$AB>AC$，求证：$PB>PC$．

3．如图 7－18，已知 BD、CE 是$\triangle ABC$ 的高，且交于点 F，点 P 在 BD 的延长线上，$BP=AC$，点 Q 在 CE 上，$CQ=AB$．求证：(1) $AP=AQ$；(2) $AP\perp AQ$．

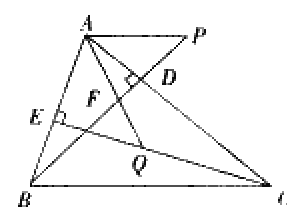


图 7－18

4．如图 7－19，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB=BC$，D、E 两点分别在 AB、BC 上，且 $BD=BE$，$DM\perp AE$ 交 AC 于 M，$BN\perp AE$ 交 AC 于 N．求证：$MN=NC$．

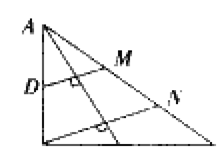


图 7－19

第八讲　三角形（二）

解题指要

1. 等腰三角形

等腰三角形是一种特殊的三角形，具有很多重要的性质，而这些性质为我们解题带来很多方法和途径．这里主要就一些常见题型与解法进行分析．

（1）等腰三角形是轴对称图形，底边上的高所在的直线是它的对称轴，对于某些含有（或隐含）等腰三角形条件的几何题，尝试作出其对称轴，巧用轴对称性质去寻求有关几何量的关系，容易找到解题途径．

（2）直角三角形斜边上的中线将这个直角三角形分成两个等腰三角形．

（3）等腰三解形顶角的平分线、底边上的中线与底边上的高三线合一，这在证明中很有用处．

2. 和差问题

结论是证明 $a+b=c$ 的问题叫做和差问题．它的一般处理方法如下：

（1）延长法：根据图形适当作出 $d=a+b$，然后证明 $c=d$．

（2）截取法：若 $c>b$，根据图形适当作出 $e=c-b$，然后证明 $a=e$．

典型例题讲解

例一　如图 8－1，在△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，BE 平分$\angle ABC$，$CE\perp BE$，求证：$CE=\frac{1}{2}BD$．

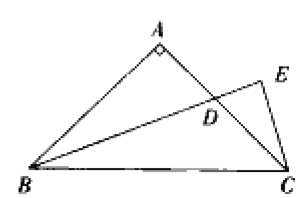


图 8－1

分析：由于 BD、CE 不在同一个三角形中，直接比较 BD、CE 有困难．延长 AB、EC 相交于 F，找到一对△ADB≌△AFC 及等腰三角形 BCF，从而可得 $BD=FC=2CE$．

证明：如图 8－1a，延长 CE 交 BA 的延长线于 F．

∵$\angle 1=\angle 2$，$\angle BEC=\angle BEF=90°$，$BE=BE$，

∴△BEC≌△BEF．

∴$BC=BF$，$CE=EF$（△BCF 是等腰三角形）．

∴$CE=\frac{1}{2}CF$．

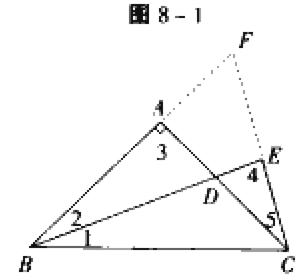


图 8－1a

▶笔▶记▶栏

又∵$\angle 2+\angle 3=90^\circ$，$\angle 4+\angle 5=90^\circ$，$\angle 3=\angle 4$，$\therefore\angle 2=\angle 5$，且 $AB=AC$.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AFC\cong\triangle\mathrm{Rt}\triangle ADB$. $\therefore CF=BD$.

故 $CE=\dfrac{1}{2}BD$.

例二 如图 8－2，$\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形．$\triangle BDC$ 是顶角$\angle BDC=120^\circ$的等腰三角形，以 D 为顶点作一个 60°的角，角的两边分别交 AB 于 M，交 AC 于 N，连结 MN，形成一个三角形 AMN，求证：$\triangle AMN$ 的周长等于 2.

证明：如图 8－2a，在 AC 的延长线上截取 $CM_1=BM$，连结 DM_1.

在 $\triangle BDM$ 与 $\triangle CDM_1$ 中，$DB=DC$，$BM=CM_1$，$\angle MBD=\angle M_1CD=90^\circ$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BDM\cong\mathrm{Rt}\triangle CDM_1$.

$\therefore MD=M_1D_1$，$\angle MDB=\angle M_1DC$.

$\therefore\angle MDM_1=120^\circ-\angle MDB+\angle M_1DC=120^\circ$．又$\angle MDN=90^\circ$，$\therefore\angle NDM_1=60^\circ$.

∵$MD=M_1D$，$\angle MDN=\angle M_1DN$，$DN=DN$，

$\therefore\triangle MDN\cong\triangle M_1DN$. $\therefore MN=NM_1$.

而 $NM_1=NC+CM_1=NC+BN=MN$，$\therefore\triangle AMN$ 的周长 $=AM+AN+MN=AM+BM+AN+CN=AB+AC=2$.

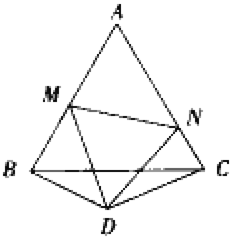


图 8－2

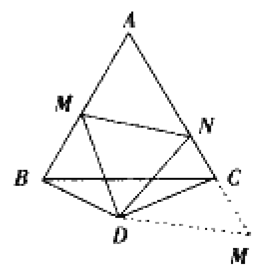


图 8－2a

例三 如图 8－3，等边三角形 ABC 中，E 为 AC 边的中点，D 在BC 的延长线上，且 $CD=EC$，以 ED 为一边作等边三角形 EDF，求证：$AF/\!/BC$.

分析：要证明 $AF/\!/BC$，可以利用$\angle ACB=\angle FAC$，为此要证明$\triangle AFE\cong\triangle CEB$，所需的三个条件仅知道 $AE=EC$，另外还需证明 $BE=FE$ 及 B、E、F 三点共线，即$\angle BEF=180^\circ$，再以 DE 为中介，利用等腰三角形来证明 $BE=EF$.

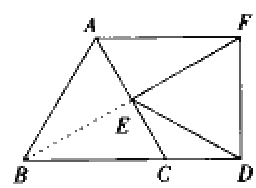


图 8－3

证明：连结 BE.

∵$\triangle ABC$ 是等边三角形，$AE=CE$，

$\therefore EBC=\dfrac{1}{2}\angle ABC=30^\circ$，$BE\perp AC$.

∵$CE=CD$，$\therefore\angle CDE+\angle CED=60^\circ$.

$\therefore\angle EBC=\angle CDE$. $\therefore BE=DE$.

又$\triangle DEF$ 为等边三角形，∵$DE=EF$，$\therefore BE=EF$．$\therefore\angle DEF=60^\circ$.

$\therefore\angle CEF=\angle CED+\angle DEF=30^\circ+60^\circ=90^\circ$.

又$\angle BEC=90^\circ$，$\therefore\angle BEF=\angle BEC+\angle CEF=180^\circ$.

$\therefore B$、E、F 三点在一条直线上．$\therefore\angle BEC=\angle FEA$.

又 $AE=CE$，$BE=FE$，$\therefore\triangle BEC\cong\triangle FEA$，$\angle EBC=\angle EFA$.

$\therefore AF/\!/BD$.

▶笔▶记▶栏

例四 已知：如图 8－4，在△ABC 中，$\angle A>90°$，BD、CE 分别为 AC、AB 上的高．F 为 BC 的中点．求证：$\angle FED=\angle FDE$．

分析：欲证$\angle FED=\angle FDE$，只需证 $DF=EF$．由于 DF、EF 分别是两个直角三角形 BCD 和 BCE 共同斜边上的中线，根据直角三角形的性质不难证得 $DF=EF$．

证明：∵ BD 为 AC 边上的高，∴$\angle BDC=\mathrm{Rt}\angle$．

又 F 为 BC 的中点，∴ $FD=\frac{1}{2}BC$．

同理 $EF=\frac{1}{2}BC$．

∴ $EF=FD$．

∴$\angle FED=\angle FDE$．

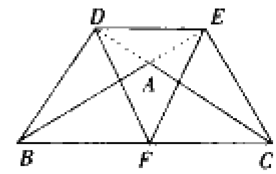


图 8－4

例五 如图 8－5，在△ABC 中，$\angle BAC=\angle BCA=50°$，$M$ 是此三角形内一点，且$\angle MAC=10°$，$\angle MCA=30°$，求$\angle BMC$ 的度数．

分析：作 $BH\perp AC$ 于 H，则 BH 是△ABC 的对称轴，延长 CM 交 BH 于 D，欲求$\angle BMC$，需求出$\angle BMD$ 或$\angle MBC$．连接 AD，由对称性可知$\angle DAC=\angle DCA=30°$，故有$\angle ADH=\angle CDH=60°$．所以$\angle ADB=\angle ADM=120°$．因为$\angle MAC=10°$，$\angle DAC=30°$，$\angle BAC=50°$，所以$\angle BAD=\angle MAD=20°$．由此可得直线 AD 是△ABM 的对称轴，于是有$\angle DMB=\angle DBM=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$，所以$\angle BMC=150°$．

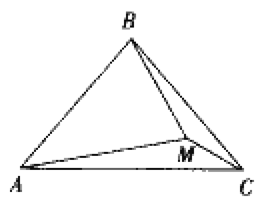


图 8－5

解：如图 8－5a，作 $BH\perp AC$ 于 H，延长 CM 交 BH 于 D，连结 AD．

∵ $AB=CB$，$BH\perp AC$，∴ BH 是△ABC 的对称轴．

∴$\angle DAC=\angle DCA=30°$，$\angle ADM=120°$．

∵ $BH\perp AC$，$\angle DAH=30°$，∴$\angle ADH=60°$，$\angle ADB=\angle ADM=120°$．

∵$\angle DAC=30°$，$\angle MAC=10°$，$\angle BAC=50°$，

∴$\angle BAD=\angle MAD=20°$．

∴ AD 是△ABM 的对称轴．

∴$\angle BMD=\angle MBD=30°$．

∴$\angle BMC=180°-30°=150°$．

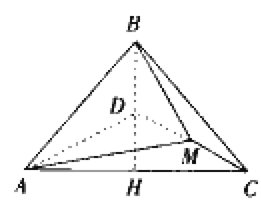


图 8－5a

例六 已知：如图 8－6，在正方形 $ABCD$ 中，P 是 BC 上一点，AQ 平分$\angle PAD$ 交 DC 于 Q．求证：$PA=PB+QD$．

分析：利用延长法，延长 PB 到 E，使 $BE=DQ$，连结 AE，则只需证 $PA=PE$，这一点由△ABE≌△ADQ 中可以推出．也可利用截取法，在 PA 上截取 $PM=PB$，连 BM 交 AD 于 N，证明 $AM=DQ$ 即可．

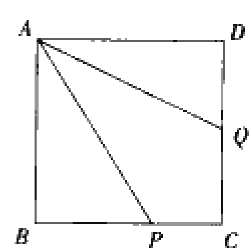


图 8－6

证法一：如图 8－6a，延长 PB 到 E，使 $BE=DQ$，连结 AE.

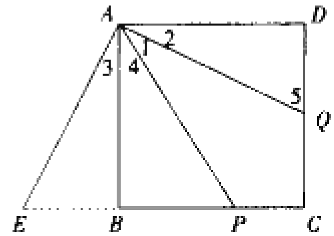


图 8－6a

∵正方形 $ABCD$，∴$\angle ABE=\angle D=90°$，$AB=AD$，$AB\parallel CD$.

∵ $BE=DQ$，$\angle ABE=\angle D$，$AB=AD$，∴ $\triangle ABE\cong\triangle ADQ$.

∴$\angle 3=\angle 2$，$\angle E=\angle 5$. ∵$\angle 5=\angle 1+\angle 4$，$\angle 1=\angle 2$，∴$\angle E=\angle 2+\angle 4=\angle 3+\angle 4$，∴ $PA=PE$.

∴$PA=PB+BE=PB+QD$.

说明：利用延长法，要根据图形和条件适当作出，如此题延长 BP 到 E，使 $PE=DQ$，则不行，原因是辅助线作出后与条件联系不密切. 此题还可延长 QD 到 F，使 $DF=PB$，连结 AF，读者可自己完成.

证法二：如图 8－6b，在 PA 上截取 $PM=PB$，连 BM，并延长交 AD 于 N，则$\angle 4=\angle PMB=\angle AMN$.

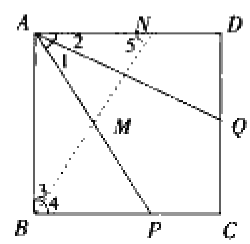


图 8－6b

∵正方形 $ABCD$，∴$AD\parallel BC$，$AD=AB$，$\angle BAD=\angle D=90°$.

∴$\angle 5=\angle 4=\angle AMN$. ∴$AM=AN$.

∵$\angle 1=\angle 2$，∴$AQ\perp BN$.

∵$\angle BAD=90°$，∴$\angle 2=\angle 3$.

∵$AD=AB$，$\angle D=\angle BAN$，∴$\triangle ADQ\cong\triangle BAN$.

∴$DQ=AN=AM$. ∴$PA=PM+AM=PB+QD$.

说明：利用截取法，也应根据图形和条件适当截取，如此题若在 AP 上截取 $AM=DQ$，则不行.

例七 已知：如图 8－7，在$\triangle ABC$ 中，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，P 是 DE 中点，$PM\perp BC$，$PR\perp AB$，$PQ\perp AC$. 求证：$PM=PR+PQ$.

分析：此题由 $PM\perp BC$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，想到作 $EE_1\perp BC$，$DD_1\perp BC$，从中可得到 $PM=\dfrac{1}{2}$（EE_1+DD_1），因此只需证 $PR+PQ=\dfrac{1}{2}$（EE_1+DD_1）. 由 P 为 DE 中点，想到利用三角形中位线，作 $EE_2\perp AC$，$DD_2\perp AB$ 后不难发现证题方法.

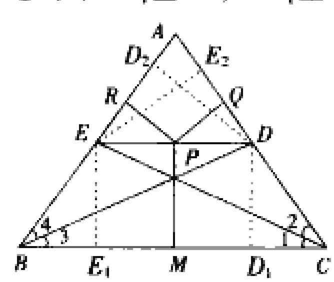


图 8－7

证明：作 $EE_1\perp BC$，$EE_2\perp AC$，$DD_1\perp BC$，$DD_2\perp AB$.

∵$\angle 1=\angle 2$，∴$EE_2=EE_2$.

同理 $DD_1=DD_2$.

∵$PM\perp BC$，∴$EE_1\parallel PM\parallel DD_1$.

∵$PD=PE$，∴$E_1M=MD_1$.

▶笔 ▶记 ▶栏

$\therefore PM = \frac{1}{2}(EE_1 + DD_1) = \frac{1}{2}(EE_2 + DD_2)$.

$\because PQ \perp AC$，$EE_2 \perp AC$，$\therefore PQ \parallel EE_2$.

$\therefore DQ = QE_2$. $\therefore PQ = \frac{1}{2}EE_2$.

同理　$PR = DD_2$.

$\therefore PQ + PR = \frac{1}{2}(EE_2 + DD_2) = PM$.

说明：①此题有条件$\angle 1 = \angle 2$时，作$EE_1 \perp BC$、$EE_2 \perp AC$，是常用辅助线．②线段和差问题中，若待证线段是一组平行线段或一组垂线段，并且题目中有中点（或隐藏有）条件时，常设法利用梯形中位线去解．

▶随▶记▶栏

例八　如图8－8，P是边长为1的等边$\triangle ABC$内的任意一点，设$t = PA + PB + PC$，求t的取值范围．

分析：利用三角形两边之和大于第三边的性质．

解：由$PA + PB > AB$，$PB + PC > BC$，$PC + PA > AC$，得$PA + PB + PC > 1.5$．过P作BC的平行线交AB、AC于M、N，则$\triangle AMN$是正三角形．由$\angle APM > \angle AMP$知$PA < AM$，则$PA + PB + PC < AM + MB + MP + PN + NC = AB + BC = 2$.

$\therefore 1.5 < t < 2$.

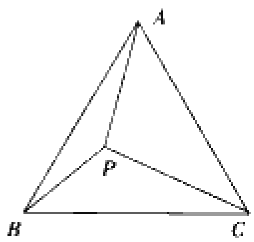


图8－8

练习八

一、选择题：

1．直角三角形的面积为S，斜边上的中线长为d，则这个三角形的周长为(　　)．

A．$\sqrt{d^2+S}+2d$　B．$\sqrt{d^2-S}-d$　C．$2(\sqrt{d^2+S}+d)$　D．$2\sqrt{d^2+S}+d$

2．若三角形中有一条边是另一条边的2倍，并且有一个角为30°，则这个三角形一定是(　　)．

A．直角三角形　B．锐角三角形　C．钝角三角形　D．以上结论均不对

3．直角三角形有一条边的长是11cm，另两条边的长也是自然数，则它的周长是(　　)．

A．100cm　B．121cm　C．132cm　D．144cm

4．如图8－9，等腰直角三角形ABC中，D为斜边AB的中点，P为AB上任一点，$PE \perp AC$于E，$PF \perp BC$于F，则$\angle EDF$为(　　)．

A．锐角　B．钝角　C．直角　D．不确定

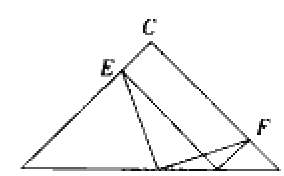


图8－9

二、填空题：

1．等腰三角形ABC中，一腰上的高线长为$\sqrt{3}$，这条高线与底边的夹角为60°，则$\triangle ABC$的面积是________．

2．已知$\triangle ABC$是等腰直角三角形，且$\angle BAC = 90°$，D点在$\triangle ABC$的外部且与A点在BC的同侧．若$AD = AC$，则$\angle BDC =$________．

3．等边$\triangle DEF$内接于等腰直角$\triangle ABC$（直角边的边长为a），且$EF \parallel$斜边AB，则$\triangle DEF$的面积是________．

4. 已知△ABC 为等腰三角形，由顶点 A 所引 BC 边上的高线恰好等于 BC 边长的一半，则∠BAC 的度数为 ______.

5. P 是等边△ABC 内一点，若 $PC=3$，$PB=5$，$PA=4$，则△ABC 的边长为________.

三、解答题：

1. 如图 8－10，在△ABC 中，∠C 为直角，∠$A=30°$，分别以 AB、AC 为边在△ABC 的外侧作正△ABE 与正△ACD，DE 与 AB 交于 F．求证：$EF=FD$．

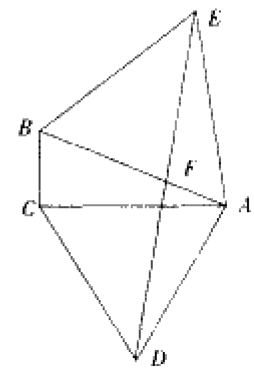


图 8－10

2. 已知：如图 8－11，$AB \parallel CD$，EF 为∠BEG 的平分线，H 为 EF 的中点．
求证：$GH \perp EF$．

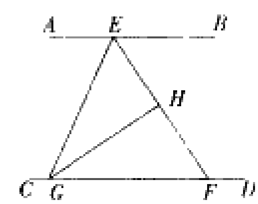


图 8－11

3. 已知：如图 8－12，在△ABC 中，∠C＝Rt∠，$AC=BC$，D 是 AB 的中点，E 为 BC 上任一点，$EP \perp CB$，$PF \perp AC$，E、F 为垂足．求证：△DEF 是等腰直角三角形．

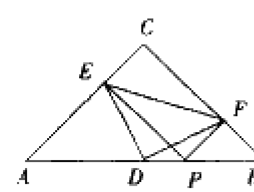


图 8－12

4. 已知：如图 8－13，在△ABC 中，$AB=AC$，∠$ABD=60°$，∠$ADB=90°-\dfrac{1}{2}$∠BDC．
求证：$AB=BD+DC$．
分析：利用延长法，延长 BD 到 E，使 $DE=DC$，连结 AE，只需证 $BE=AB$，这一点可由△ADE≌△ADC 中得到．

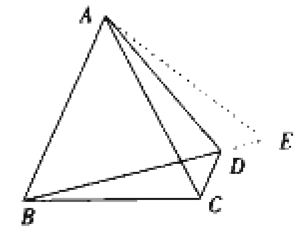


图 8-13

5. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，在这个三角形内取一点D，使$\angle ABD=30°$，且$BD=BA$．求证：$AD=CD$．

6. 已知：如图 8-14，$\triangle ABC$是等边三角形，$AE=CD$，$BQ\perp AD$于Q，BE交AD于点P．求证：$BP=2PQ$．

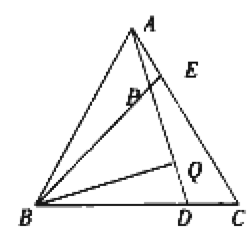


图 8-14

一、选择题：

1. 顶角为 120°、腰长为 6 的等腰三角形一腰中点到底边的距离是（　　）．

   A．3　　　B．1.5　　　C．6　　　D．以上都不对

2. 等腰三角形ABC中，一腰上的高为$\sqrt{3}$，这条高与底边的夹角是 60°，则三角形ABC的面积是（　　）．

   A．$\sqrt{3}$　　　B．$2\sqrt{3}$　　　C．2　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 若三角形ABC中，$AB=AC$，CE是边AB边上的中线，延长AB到D，使$BD=AB$，设$CE=x$，$CD=y$，则有（　　）．

   A．$y>2x$　　　B．$y<2x$　　　C．$y=2x$　　　D．以上情况均可能

4. 下列条件中，能得出三角形ABC是等腰三角形的条件有（　　）．

(1) A 的平分线垂直于 BC；　(2) BC 边上的中线垂直于 BC；

(3) AB 与 AC 边上的高相等.

A. 仅有 (1)、(2)　　B. 仅有 (2)、(3)

C. 仅有 (1)、(3)　　D. (1)、(2)、(3) 都可以

二、填空题：

1. 在△ABC 中，$AB = AC$，$BC = 7$cm，BD 是 AC 上的中线、分△ABC 周长为两部分，已知它们的差为 2cm，则等腰三角形的腰长是________.

2. 如图 8－15，$\angle A = 20°$，$AB = BC = CD = DE = EF$．则$\angle FEG =$________度.

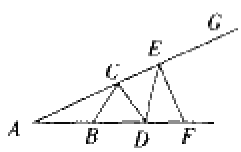


图 8－15

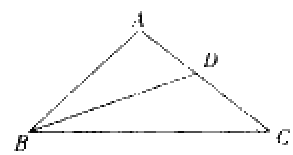


图 8－16

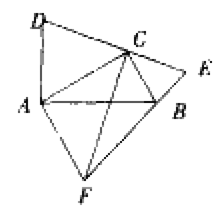


图 8－17

3. 如图 8－16，在△ABC 中，$AB = AC$，BD 平分$\angle ABC$ 交于 D，$\angle ABC = 40°$．若 $AD = a$，$BC = b$，则 $BD =$________.

4. 如图 8－17，在△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，$AD \perp AB$，$AD = AB$，$BE \perp DC$ 于 E，$AF \perp AC$ 交 EB 的延长线于 F，设$\angle ACF = \alpha$，则$\angle BCF =$________.

三、解答题：

1. P 为等边△ABC 所在平面内一点，要使△PAB、△PBC、△PCA 均为等腰三角形，那么这样的 P 点共有几个？怎样画出这样的点？画出图来.

2. 已知：如图 8－18，在 RtABC 中，$\angle BAC = 90°$，$AB = AC$，D 为△ABC 内一点，且$\angle ABD = 30°$，$BD = BA$．求证：$AD = CD$.

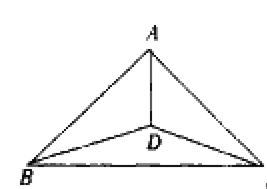


图 8－18

3. 已知：如图 8－19，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=100^\circ$，$\angle ABC$的平分线交AC于D．求证：$AD+BD=BC$．

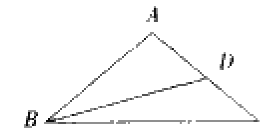


图 8－19

4. 当等腰三角形被一条直线分割成两个较小的等腰三角形时，原等腰三角形的顶点度数为多少？这条直线怎样画？讨论所有可能的解，并画出来．

5. 已知：$\triangle ABC$为正三角形，P是平面上任意一点．求证：$PA\leqslant PB+PC$．

6. 如图 8－20，在$\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\angle C=20^\circ$，M、N分别在AC、BC边上，且满足$\angle BAN=50^\circ$，$\angle ABM=60^\circ$，求$\angle NMB$的度数．

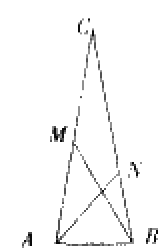


图 8－20

第九讲　分式（一）

解题指要

分式是有理式的一部分，与整式相比，它的概念与运算都更加复杂．分式的运算及证明技巧和方法十分丰富．

基本知识

1．分式的基本性质：$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$（其中 M 是不等于零的整式）．

2．分式的符号法则：分子、分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变．

3．比例的重要性质：

（1）如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$．

（2）如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$．（合比性质）

（3）如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（$b\pm d\neq 0$），那么$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$．（合分比性质）

（4）如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$，且 $b+d+\cdots+n\neq 0$，那么$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$．（等比性质）

4．倒数的性质：

（1）如果两个数互为倒数，那么这两个数的乘积为 1．

（2）如果两个数互为倒数，那么这两个数的同次幂仍互为倒数．

（3）如果两个正数互为倒数，那么这两个正数的和不小于 2，即 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$（$a>0$）．

一、分式的计算及证明

二、分式的证明

分式的证明有两类，一类是无约束条件的一般等式证明，另一类是条件等式的证明．后者在数学竞赛中尤为普通，证明的基本方法是对约束条件或欲证结论进行适当变形．

典型例题讲解

例一　已知 $2x>y>0$，设 $A=\frac{x}{y}$，$B=\frac{x+1}{y+2}$，试比较 A 与 B 的大小．

解：A、B 两式相减并通分得 $A-B=\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+2}=\frac{2x-y}{y(y+2)}$．

因为 $2x>y>0$，所以 $2x-y>0$，$y>0$，$y+2>0$．

所以 $A-B>0$，即 $A>B$．

例二 计算$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}+\dfrac{1}{a+b}$.

解：原式$=\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\dfrac{2a}{a^2-b^2}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\dfrac{4a^3}{a^4-b^4}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}=\dfrac{8a^7}{a^8-b^8}$.

例三 计算$\dfrac{(y-x)(z-x)}{(x-2y+z)(x+y-2z)}+\dfrac{(z-y)(x-y)}{(x+y-2z)(z+y-2x)}+\dfrac{(x-z)(y-z)}{(y+z-2x)(x-2y+z)}$.

分析：设 $x-y=a$，$y-z=b$，$z-x=c$，则

原式$=\dfrac{-ac}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{-ba}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{-cb}{(c-a)(a-b)}$.

解：$\because x-2y+z=(x-y)-(y-z)$，$x+y-2z=(y-z)-(z-x)$，$y+z-2x=(z-x)-(x-y)$，

设 $x-y=a$，$y-z=b$，$z-x=c$，则

原式$=\dfrac{-ac}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{-ba}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{-cb}{(c-a)(a-b)}$

$=-\dfrac{ac(c-a)+ab(a-b)+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=-\dfrac{ac^2-a^2c+a^2b-ab^2+b^2c-bc^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=-\dfrac{c^2(a-b)-c(a^2-b^2)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=-\dfrac{(a-b)(c^2-ca-cb+ab)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=1$.

例四 设$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$，求$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$的值.

分析：可设$\dfrac{x}{a}=m$，$\dfrac{y}{b}=n$，$\dfrac{z}{c}=p$.

解：设$\dfrac{x}{a}=m$，$\dfrac{y}{b}=n$，$\dfrac{z}{c}=p$，则 $m+n+p=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，且$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{mn+np+pm}{mnp}$.

$\because \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$，　$\therefore mn+np+pm=0$.

$\therefore \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=m^2+n^2+p^2=(m+n+p)^2-2(mn+np+pm)=1$.

例五 已知$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3$，求$\dfrac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值.

分析：从条件中无法解得 x、y 的具体值，观察$\dfrac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$可发现分子、

▶笔▶记▶栏

分母都可以化成 $x-y$、xy 的代数式，只要从已知条件中求得 $x-y$ 与 xy 的关系式，问题便解决了.

解：$\because \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3$，$\therefore y-x=3xy$，即 $x-y=-3xy$.

于是 $\dfrac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\dfrac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}=\dfrac{2\cdot(-3xy)+3xy}{-3xy-2xy}=\dfrac{-3xy}{-5xy}=\dfrac{3}{5}$.

例六 已知 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，求 $\dfrac{a^7+b^7}{c^7+d^7}-\dfrac{(a+b)^7}{(c+d)^7}$ 的值.

分析：在条件中遇到比例式或连等式，可考虑设辅助参数代换，从而使问题简化.

解：设 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$，则 $a=bk$，$c=dk$.

$$\therefore \frac{a^7+b^7}{c^7+d^7}-\frac{(a+b)^7}{(c+d)^7}=\frac{b^7k^7+b^7}{d^7k^7+d^7}-\frac{(bk+b)^7}{(dk+d)^7}=\frac{b^7(k^7+1)}{d^7(k^7+1)}-\frac{b^7(k+1)^7}{d^7(k+1)^7}=0$$

例七 已知：$abc=1$. 求证：$\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=1$.

分析：本题待证式左边各分母中的 1 都用 abc 代入，化简后为 $\dfrac{1}{bc+c+1}+\dfrac{1}{ca+c+1}+\dfrac{1}{ab+a+1}$，显然无济于事，注意到第一项代入后与第二项分母相同，可考虑设法将第三项分母也化为 $bc+b+1$，利用分式的基本性质，分子、分母同乘以 b，即可.

证明：$\because abc=1$，

$$\begin{aligned}\therefore \text{左边}&=\frac{a}{ab+a+abc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{abc+bc+b}\\&=\frac{1}{bc+b+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{bc+b+1}\\&=1=\text{右边，证毕.}\end{aligned}$$

例八 已知：a、b、c、x、y、z 都是实数，且满足条件：$a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2=ax+by+cz$. 求证：$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

证明：$\because a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2=ax+by+cz$，

$\therefore a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2=2(ax+by+cz)$.

$\therefore (a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=0$.

$\because (a-x)^2\geqslant 0,(b-y)^2\geqslant 0,(c-z)^2\geqslant 0$,

$\therefore a=x,b=y,c=z$.

$\because a$、b、c 均不为 0，$\therefore \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=1$.

例九 已知：$x_1x_2\cdots x_n=1$，n 为任意自然数. 求证：

$$\frac{x_1}{1+x_1+x_1x_2+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}}+\frac{x_2}{1+x_2+x_2x_3+\cdots+x_2x_3\cdots x_n}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_n+x_nx_1+\cdots+x_nx_1\cdots x_{n-2}}=1.$$

▶笔 ▶记 ▶栏

证明：给欲证等式左边各项的分子、分母分别同乘以 1、x_1、x_1x_2、…、$x_1x_2\cdots x_{n-1}$得：

$$\text{左边}=\frac{x_1}{1+x_1+x_1x_2+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}}+\frac{x_1x_2}{x_1+x_1x_2+x_2x_3\cdots x_{n-1}x_1+1}+\cdots+\frac{x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n}{1+x_1+x_1x_2+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}}=\frac{1+x_1+x_1x_2+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}}{1+x_1+x_1x_2+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}}=1=\text{右边}.$$

一、填空题：

1. 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$，则分式$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$的值等于________.

2. 已知 $a+b+c=0$，则 $a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=$________.

3. 当 $x=2$ 时，$\frac{(x^2-4)^2}{x^3+8}+\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+4}-\frac{2x-1}{2x^2+x-1}$的值等于________.

4. 设 x、y、z 为有理数，且 $x+y+z\neq0$，并有$\frac{x}{y+z}=a$，$\frac{y}{x+z}=b$，$\frac{z}{x+y}=c$，则$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$的值为________.

5. 若$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，则$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=$________.

二、解答题：

1. 求证：$\frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)}=\frac{xy-z^2}{(z+x)(z+y)}$.

2. 已知：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. 求证：$\frac{1}{a^{1995}}+\frac{1}{b^{1995}}+\frac{1}{c^{1995}}=\frac{1}{a^{1995}+b^{1995}+c^{1995}}=\frac{1}{(a+b+c)^{1995}}$.

3. 已知：$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$. 求证：$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2002}+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2002}+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2002}=3$.

4. 求值：

(1) 设 $a=\frac{x}{y+z}$，$b=\frac{y}{z+x}$，$c=\frac{z}{x+y}$，且 $x+y+z\neq 0$，求$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}$的值.

(2) 已知 $abc\neq 0$，且$\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}$，求$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$的值.

(3) 已知$\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{5}$，求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值.

(4) 设 $abc=1$，求$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$的值.

5. 求$\frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdots(38^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdots(40^4+4)}$的值.

[redacted]

一、选择题：

1. 已知 $a+b+c=0$，则 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$ 的值为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D. -1

2. 已知$\frac{xy}{x+y}=1$，$\frac{yz}{y+z}=2$，$\frac{zx}{z+x}=3$，则 x 的值为(　　).

A. 1　　B. $\frac{12}{5}$　　C. $\frac{5}{12}$　　D. -1

3. 已知 $a+x^2=1996$，$b+x^2=1997$，$c+x^2=1998$，且 $abc=24$，则$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=$(　　).

A. $\frac{49}{15}$　　B. $-\frac{49}{15}$　　C. $\frac{15}{49}$　　D. $\frac{1}{8}$

4．已知$\frac{a_2+a_3+a_4}{a_1}=\frac{a_1+a_3+a_4}{a_2}=\frac{a_1+a_2+a_4}{a_3}=\frac{a_1+a_2+a_3}{a_4}=K$，则 K 值为(　　)．

A．3　　B．-3　　C．-1　　D．3 或 -1

5．已知 $a+b+c=abc\neq0$，则$\frac{(1-b^2)(1-c^2)}{bc}+\frac{(1-a^2)(1-c^2)}{ac}+\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{ab}=$(　　)．

A．4　　B．-4　　C．4 或 -4　　D．0

6．已知$\frac{x}{x^2-x+1}=7$，则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=$(　　)．

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{49}{15}$　　C．$\frac{15}{49}$　　D．$-\frac{15}{49}$

二、填空题：

1．已知 $x=\frac{2y+3}{3y-2}$，则$(3x-2)(3y-2)=$________．

2．已知 $a+b+c=0$，$a+2b+3c=0$，且 $abc\neq0$，则$\frac{ab+bc+ca}{b^2}=$________．

3．已知 $abc=1$，则$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=$________．

4．已知$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$（其中 $a\neq b\neq C\neq0$），则 $x+y+z=$________．

5．若 $3a^2+ab-2b^2=0$（$a\neq0$，$b\neq0$），则$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-\frac{a^2+b^2}{ab}=$________．

三、解答题：

1．(1) 设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（a、b、c、d 均为正数），求证：$\frac{a^{2001}+b^{2001}}{c^{2001}+d^{2001}}+\frac{(a+b)^{2001}}{(c+d)^{2001}}$．

(2) 对任何自然数 n，求证：$\frac{21n+4}{14n+3}$不可约．

(3) 设 x、y、z 为互不相等的三数，求证：$\left(\frac{1}{y-z}\right)^2+\left(\frac{1}{z-x}\right)^2+\left(\frac{1}{x-y}\right)^2=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2$．

2．化简：$\frac{1}{x(x+a)}+\frac{1}{(x+a)(x+2a)}+\frac{1}{(x+2a)(x+3a)}+\frac{1}{(x+3a)(x+4a)}$.

3．实数 a 与 b 满足等式$\frac{a^2b^2}{b^4-2b^4}=1$，求$\frac{a^2-b^2}{19a^2+96b^2}$的值.

4．已知 a、b、c 为实数，且$\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$，$\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{4}$，$\frac{ca}{c+a}=\frac{1}{5}$，求$\frac{abc}{ab+bc+ca}$的值.

5．如果 $t>0$，$a<b$，试比较$\frac{a+bt}{1+t}$与 a、b 的大小.

6．已知：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，求证：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

7．设 a、b、c 都不为零，且 $a+b+c=2$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$．证明：$a$、$b$、$c$ 中至少有一个等于 2.

第十讲　分式（二）

解题指要

与通分相反，有时我们要将一个分式表示成几个分式（或整式）的代数和，这种恒等变形称为分式的分解变形．

在一定条件下将一个真分式表示成若干个真分式的代数和的恒等变形叫做将分式化为部分分式．一般来说，如果原分式的分母可以分解成两两互质的一次因式的积的形式：$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，那么化为部分分式后 n 个分式的分母分别是 $(x-a_1)$，$(x-a_2)$，$\cdots(x-a_n)$，分子为常数．可以用待定系数法确定部分分式的分子．这种变形在高等数学中有很多应用．

[illegible]

例一　设 n 为正整数，求证：$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}<\frac{1}{2}$．

证明：令 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{A}{2k-1}-\frac{B}{2k+1}$．　　①

通分，得 $\frac{A}{2k-1}-\frac{B}{2k+1}=\frac{2(A-B)k+(A+B)}{(2k-1)(2k+1)}$．　　②

比较①和②两式，得 $A-B=0$，且 $A+B=1$，即 $A=B=\frac{1}{2}$．

$\therefore \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})$．

$\therefore \frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}\times\frac{2n}{2n+1}<\frac{1}{2}$．

例二　将分式 $\frac{11x^2-23x}{2x^3-x^2-18x+9}$ 化为最简部分分式．

解：因为 $2x^3-x^2-18x+9=(2x-1)(x+3)(x-3)$，可设 $\frac{11x^2-23x}{2x^3-x^2-18x+9}$ $=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-3}$．

由此得 $11x^2-23x=A(x+3)(x-3)+B(2x-1)(x-3)+C(2x-1)(x+3)$．

▶笔▶记▶栏

在上式中依次取 $x=\frac{1}{2}$，$x=-3$，$x=3$ 得 $A=1$，$B=4$，$C=1$. 所以：原式

$=\frac{1}{2x-1}+\frac{4}{x+3}+\frac{1}{x-3}$.

例三 将分式 $\frac{x^2+2x+3}{(x+2)^3}$ 化为部分分式.

解：令 $\frac{x^2+2x+3}{(x+2)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3}$，有

$$
\begin{aligned}
x^2+2x+3&=A(x+2)^2+B(x+2)+C\\
&=Ax^2+(4A+B)x+4A+2B+C.
\end{aligned}
$$

比较系数，得 $\begin{cases}A=1,\\4A+B=2,\\4A+2B+C=3.\end{cases}$

解得 $A=1$，$B=-2$，$C=3$.

所以 $\frac{x^2+2x+3}{(x+2)^3}=\frac{1}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{3}{(x+2)^3}$.

例四 设 $y=\frac{x^2+x+2}{x^2+x+1}$，当 x 取任意实数时，求 y 的取值范围.

解：$y=\frac{x^2+x+2}{x^2+x+1}=1+\frac{1}{x^2+x+1}=1+\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$.

因为 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$，所以 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$. 所以 $1<y\leqslant 1+\frac{1}{\frac{3}{4}}$，

即 $1<y\leqslant\frac{7}{3}$.

例五 化简 $\frac{1}{x^2-7x+10}+\frac{1}{x^2-x-2}+\frac{1}{x^2+5x+4}+\frac{1}{x^2+11x+28}$.

解：$\frac{1}{x^2-7x+10}=\frac{1}{(x-5)(x-2)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-2})$，

$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1})$，

$\frac{1}{x^2+5x+4}=\frac{1}{(x+4)(x+1)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4})$，

$\frac{1}{x^2+11x+28}=\frac{1}{(x+7)(x+4)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7})$，

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{3}(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7})\\
&=\frac{1}{3}(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+7})=\frac{4}{(x-5)(x+7)}.
\end{aligned}
$$

例六 把分式 $\frac{4x^3-x^2-3x+3}{(x+2)(x-1)^3}$ 化成分子中不含 x 的若干个分式的代数和.

分析：化分式 $\frac{4x^3-x^2-3x+3}{(x+2)(x-1)^3}$ 为部分分式可设：$\frac{4x^3-x^2-3x+3}{(x+2)(x-1)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx^2+Cx+D}{(x-1)^3}$. 要使 $\frac{Bx^2+Cx+D}{(x-1)^3}$ 的分子中不含 x，可把分母为 $(x-1)^3$ 的分式分

▶笔▶记▶栏

折成分母为$(x-1)$、$(x-1)^2$、$(x-1)^3$的三个部分分式，它们的分子便都不含x了.（为什么?）

解：设$\dfrac{4x^3-x^2-3x+3}{(x+2)(x-1)^3}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{(x-1)^3}$，则有恒等式$4x^3-x^2-3x+3=A(x-1)^3+B(x+2)(x-1)^2+C(x+2)(x-1)+D(x+2)$.

令$x=1$，得$4-1-3+3=D(1+2)$，$\therefore D=1$.

令$x=-2$，得$-36+9=A(-2-1)^3$，$\therefore A=1$.

令$x=0$，得$3=A(-1)+2B-2C+2D$，

$\therefore B-C=1$.　　　　①

令$x=-1$，得$-5+6=-8A+4B+2C+D$，

$\therefore 2B-C=4$.　　　　②

由①、②得，$B=3$，$C=2$.

$\therefore$原式$=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^3}$.

例七　证明：$\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}$.

证明：左边$=\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{b-c}-\dfrac{1}{b-a}+\dfrac{1}{c-a}-\dfrac{1}{c-b}$

$=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}=$右边，

$\therefore \dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}$.

一、填空题：

1. 化简$\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{2x}{a^2+x^2}-\dfrac{4x^3}{a^4+x^4}-\dfrac{8x^7}{a^8-x^8}=$________.

2. $\dfrac{1}{(a-2)(a-1)}+\dfrac{1}{(a-1)a}+\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}=$________.

3. $\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}=$________.

4. 化简$\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}=$________.

5. 计算$\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}+\dfrac{1}{x^2+7x+12}+\dfrac{1}{x^2+9x+20}+\dfrac{1}{x^2+11x+30}\right)(x^2+7x+6)=$________.

二、解答题：

1. 化下列分式为部分分式：

(1) $\dfrac{3x+7}{(x-1)(x-2)}$；　　　　(2) $\dfrac{6x^2-x-3}{x^3-x}$；

(3) $\dfrac{2}{(x-4)(x-5)(x-6)}$;　　(4) $\dfrac{6x^2+16x+18}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

(5) $\dfrac{4x^2-x+4}{x^3+1}$.

2. 把分式$\dfrac{x^2+2}{(x-1)^3}$化成若干个分子中不含 x 的分式的代数和.

3. 把分式$\dfrac{x^2-1}{(x-2)(x-3)}$化成整式和部分分式的和.

4. 把分式$\dfrac{x^3+5x^2-2x+2}{x^3-1}$化成整式和部分分式的和.

一、选择题:

1. 已知$\dfrac{x^2+2xy+2y-1}{x^2-1}\cdot\dfrac{y^2-1}{2y^2+xy+y+x-1}\div\dfrac{y-1}{x-1}$等于一个固定值，则这个值是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

2. 解方程$\dfrac{x^2-3a^2}{2a|-x|}=-1$，得 $x=$(　　).

A. $\pm a$　　B. $\pm a$，$\pm 3a$　　C. 0，$\pm a$　　D. 0，$\pm a$，$\pm 3a$

3. 已知实数 x、y、z 满足 $x+y=5$，$z^2=xy+y-9$，则 $x+2y+3z$ 的值为(　　).

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

4. 若 a、$b>0$，且 $a+b=1$，则$(1+\dfrac{1}{a})(1+\dfrac{1}{b})$的最小值是(　　).

A. 5　　B. 9　　C. 11　　D. 不存在

二、填空题:

1. 解方程$\dfrac{1}{x^2+11x-8}+\dfrac{1}{x^2+2x-8}+\dfrac{1}{x^2-13x-8}=0$，得________.

2. 若$\sqrt{a-1}+(ab-2)^2=0$，那么$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{(a+1)(b+1)}+\cdots+\dfrac{1}{(a+1999)(b+1999)}$的值是________.

3. 方程$\dfrac{a-x^2}{(a-x)^2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a^3-ax(2a-x)}$的正数解 x 为________. 当解为正数时，a 应为

______.

4. 两台打麦机，先用第一台打了一半，然后用第二台打剩下的，共9天打完，如果两台一起打，4天可以打完. 每一台打麦机单独打完所有的麦子各需 ______ 天.

三、解答题：

1. 已知：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，求证：$\frac{1}{a^{2001}}+\frac{1}{b^{2001}}+\frac{1}{c^{2001}}=\frac{1}{a^{2001}+b^{2001}+c^{2001}}$.

2. 解方程 $\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=a, \\ xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{a}. \end{cases}$

3. 设有 n 个实数 x_1，x_2，…，x_n，其中每一个不是 $+1$ 就是 -1，且 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0$. 试证：$n$ 是4的倍数.

4. 求证：$\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_n)}=\frac{a_2+a_3+\cdots a_n}{a_1(a_1+a_2+\cdots+a_n)}$.

第十一讲　条件等式

条件等式的证明和求解的基本方法是对约束条件或待证等式进行适当变形，运用代数式对称、轮换性质、有关非负数的性质及比较法、消元法和换元法等．除此以外，还要善于寻找代数式与代数式、条件与结论之间的联系．

例一　若$\frac{y+z}{ay+bz}=\frac{z+x}{az+bx}=\frac{x+y}{ax+by}=m$，求证：$m=\frac{2}{a+b}$．

证明：$\because \frac{y+z}{ay+bz}=\frac{z+x}{az+bx}=\frac{x+y}{ax+by}=m$，

$\therefore y+z=m(ay+bz)$，

于是$(1-am)y=(bm-1)z$．

同理$(1-am)z=(bm-1)x$，$(1-am)x=(bm-1)y$．

将上面三式左右分别相乘得$(1-am)^3=(bm-1)^3$，$\therefore 1-am=bm-1$．

故$(a+b)\ m=2$．$\therefore m=\frac{2}{a+b}$．

例二　若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，证明：$a=-b$或$b=-c$或$c=-a$．

分析：先将$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$两边乘以$abc(a+b+c)$．

证明：将已知等式两边乘以$abc(a+b+c)$得　$(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$．

进而有$(a+b+c)(ab+bc)+ca(a+c)=0$，　$(c+a)(a+b)\ (b+c)=0$．

于是$c+a=0$或$a+b=0$或$b+c=0$，

即$c=-a$或$a=-b$或$b=-c$．

例三　设a、b、c、d均为正数，且$a^5=b^4$，$c^3=d^2$，$c-a=19$，试求$d-b$．

解：$\because a^5=b^4$，$\therefore a=(\frac{b}{a})^4$．$\therefore \frac{b}{a}$是正整数．

设$\frac{b}{a}=t$，则$a=t^4$，$b=t^5$．类似地，$c=m^2$，$d=m^3$．

$\therefore c-a=m^2-t^4=(m+t^2)(m-t^2)=19$．

▶笔▶记▶栏

19 是质数，故 $m+t^2=19$，$m-t^2=1$. $\therefore m=10$，$t=3$. $\therefore d-b=m^2-t^5=10^3-3^5=757$.

说明：该题通过代换 $\frac{b}{a}=t$，$\frac{c}{d}=m$，变分式为整式. 使题设条件的联系更具体、直观.

例四 已知：a、b、c、d 满足 $a+b=c+d$，$a^3+b^3=c^3+d^3$. 求证：$a^{2001}+b^{2001}=c^{2001}+d^{2001}$.

分析：由对称性知 $a=b=c=d$ 满足条件，推导过程中要充分考虑两个已知条件如何联系.

证明：$\because a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，$c^3+d^3=(c+d)(c^2-cd+d^2)$，

$\therefore (a+b)(a^2-ab+b^2)=(c+d)(c^2-cd+d^2)$.

分类讨论：

(1) 若 $a+b=c+d=0$.

由 $a=-b \Rightarrow a^{2001}=-b^{2001}$，$a^{2001}+b^{2001}=0$.

同理，$c^{2001}+d^{2001}=0$，故所证等式成立.

(2) 若 $a+b=c+d\neq 0$ 时，则 $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$.

$\therefore ab=cd$. 于是 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(c+d)^2-4cd=(c-d)^2$.

$\therefore a-b=\pm(c-d)$.

当 $a-b=c-d$ 时，$a=b=c=d$.

当 $a-b=-(c-d)$ 时，$a=b=c=d$.

$\therefore a^{2001}+b^{2001}=c^{2001}+d^{2001}$.

例五 已知 n 是自然数，且 $M=n^3-8n^2-12n+144$ 是一个质数，求 M 的值.

解：$n^3-8n^2-12n+144$

$=n^3+64-8n^2-12n+80$

$=(n+4)(n^2-4n+16)-4(2n-5)(n+4)$

$=(n+4)(n^2-12n+36)=(n+4)(n-6)^2$.

因 n 是自然数，$n+4\geqslant 5$，M 是质数，所以只有 $(n-6)^2=1$，则 $n=5$ 或 $n=7$，当 $n=5$ 时，$M=9$ 是合数，不符合题意. 当 $n=7$ 时，$M=11$ 是质数，故 M 的值是 11.

例六 已知 $abc=1$，$a+b+c=2$，$a^2+b^2+c^2=3$，求 $\frac{1}{ab+c-1}+\frac{1}{bc+a-1}+\frac{1}{ca+b-1}$ 的值.

解：由 $a+b+c=2$，则 $c-1=1-a-b$.

所以 $ab+c-1=ab+1-a-b=(a-1)(b-1)$.

同理 $bc+a-1=(b-c)(c-1)$，$ca+b-1=(c-1)(a-1)$，

则原式 $=\frac{1}{(a-1)(b-1)}+\frac{1}{(b-1)(c-1)}+\frac{1}{(c-1)(a-1)}$

$=\frac{a+b+c-3}{(a-1)(b-1)(c-1)}$.

速记栏

又因$(a+b+c)^2=4$，$a^2+b^2+c^2=3$，所以$ab+bc+ca=\frac{1}{2}$，

$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=1-\frac{1}{2}+2-1$
$=\frac{3}{2}$.

所以$\frac{1}{ab+c-1}+\frac{1}{bc+a-1}+\frac{1}{ca+b-1}=\frac{2-3}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}$.

例七 已知a、b、c为实数，且$\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$，$\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{4}$，$\frac{ca}{c+a}=\frac{1}{5}$，求$\frac{abc}{ab+bc+ca}$的值.

解：由条件可知，a、b、c均不为零，取倒数得

$$\begin{cases}\dfrac{a+b}{ab}=3,\\ \dfrac{b+c}{bc}=4,\\ \dfrac{c+a}{ca}=5,\end{cases}\quad 即\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=3, & ①\\ \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=4, & ②\\ \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=5, & ③\end{cases}$$

①+②+③ 得$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$.

所以$\frac{1}{a}=2$，$\frac{1}{b}=1$，$\frac{1}{c}=3$，即$a=\frac{1}{2}$，$b=1$，$c=\frac{1}{3}$. 代入得所求的值为$\frac{1}{6}$.

例八 已知：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. 求证：$\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7+b^7+c^7}$.

证明：$\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，$\therefore bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)=abc$，

即$(a+b+c)(bc+ca)+ab(a+b)=0$.

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)=0$.

$\therefore a=-b$，$b=-c$，$c=-a$，三者中至少有一个成立，代入待证式两边，等式显然成立.

1. 设$a=\frac{x}{y+z}$，$b=\frac{y}{z+x}$，$c=\frac{z}{x+y}$，求证：$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=1$.

2. 已知：$a+b+c=0$，且 a、b、c 互不相等，求证：$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1$.

3. 若 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$. 证明：$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1}+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1}=1$.

4. 若 $c=a+b\neq 0$，求证：$\frac{a^3-b^3}{a^3+c^3}=\frac{a-b}{a+c}$.

5. (1) 已知：$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{p+q}$，求证：$\frac{q}{p}-\frac{p}{q}=1$.

(2) 已知：$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{q-p}$，求证：$\frac{q}{p}+\frac{p}{q}=3$.

6. 已知：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. 求证：$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=\frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}}$.

7. 若 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{x+y+z-3}$，证明：$x+y$、$y+z$、$z+x$ 中至少有一个等于 2.

8. 已知：$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$，求证：$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}=\frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2}$.

一、选择题：

1. 已知 $a+b+c=0$，那么 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$的值为(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 3　　D. -3

2. 已知在△ABC 中，$a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=0$（a、b、c 是三边长），那么$\frac{b}{a+c}$等于(　　).

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 已知 $a+b+c=0$，那么$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}$的值是(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

4. 已知$\frac{b}{a+b}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c}$，则 $(a+b):(b+c):(c+a)$ 的结果是(　　).

A. 3:5:4　　B. 3:6:5　　C. 5:7:6　　D. 5:8:7

二、填空题：

1. 已知 a、b、c 是不为零的实数，且 $a^2+b^2+c^2=1$，$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$，则 $a+b+c=$________.

2. 已知$\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$，那么$\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{x+2-\sqrt{x^2+4x}}=$________.

3. 若$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$，则$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=$________.

4. 若$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，则$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=$________.

三、解答题：

1. 已知：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，求证：$\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7+b^7+c^7}$.

2. 若$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$($a_1$，$a_2$，…，$a_n$，$b_1$，$b_2$，…，$b_n$ 都是正数)，求证：$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}=\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)}$.

3. 若$\frac{y+z}{ay+bz}=\frac{z+x}{az+bx}=\frac{x+y}{ax+by}$，求证：$a=b$ 或 $x=y=z$.

4. 已知实数 a、b 满足$\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$，求$\frac{a^2-b^2}{18a^2+84b^2}$的值.

5. 若 $x+\frac{9}{y}=3$，$y+\frac{9}{z}=3$，求 $z+\frac{9}{x}$的值.

6. 当 $x=2a$，$y=2b$ 时，x^2+xy-y^2 的值是 1；当 $x=3a+5b$，$y=5a+8b$ 时，x^2+xy-y^2 的值是多少?

第十二讲　尺规作图

解题指要

尺规作图是借助已学过的定理，通过构思作出图来．同学们不仅要知识掌握得牢固，推理严谨，还需要有较强的动手能力．

1．作图题一般应先“审题”，弄清题中的已知条件和求作的图形，画出草图，标上字母进行分析，找出作图方法；然后按照题目的要求结合草图写出已知、求作；再认真画出求作的图形，并写出作法．一般情况下证明步骤可以省略不写．

2．作一般三角形需要三个独立条件（其中至少应包含一条线段），最简单的5个三角形作图问题的条件与判定三角形全等的条件相同．

3．比较复杂的三角形作图问题，大都归结为首先作出最简单的5个三角形之一（通常称为奠基三角形），并在此基础上完成全部作图．

典型例题讲解

例一　已知三角形的两边及其中一边上的中线，作三角形．

已知：线段 b、c、m．求作：$\triangle ABC$，使 $AC=b$，$AB=c$，AC 边上的中线 $BD=m$．

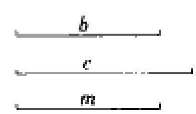


图 12－1

分析：假设$\triangle ABC$已经作出，并且 $AC=b$，$AB=c$，BD 是中线，且 $BD=m$，则 $AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}b$，于是$\triangle ABD$已具备“边、边、边”的条件，可以先作出．再以$\triangle ABD$为基础，延长 AD 到 C，使 $DC=AD$，连结 BC 即可得所求三角形．

作法：（1）作$\triangle ABD$，使 $AB=c$，$BD=m$，$AD=\frac{1}{2}b$．

（2）延长 AD 到 C，使 $DC=AD$．

（3）连结 BC．

则$\triangle ABC$为所求作三角形，如图 12－1a．

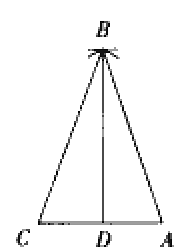


图 12－1a

例二　已知一边和这边上的中线和高，作三角形．

已知：线段 a、m、h．求作：$\triangle ABC$，使 $BC=a$，BC 边上的中线 $AM=m$，高 $AH=h$．

分析：假设$\triangle ABC$已经作出，并且 $BC=a$，AM 是中线，AH 是高，且 $AM=m$，$AH=h$，于是 Rt$\triangle AMH$ 已经具备“斜边、直角边”的条件，可以先作出．

在△AMH 的基础上分别延长 MH、HM，就能作出△ABC.

作法：(1) 平分线段 a.

(2) 作 Rt△AMH，使∠$AHM=90°$，$AM=m$，$AH=h$.

(3) 在线段 HM 的延长线上截取 $MB=\frac{1}{2}a$，在射线 MH 上截取 $MC=\frac{1}{2}a$.

(4) 连结 AB、AC.

则△ABC 为所求作的三角形（如图 12－2a).

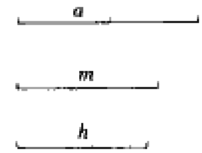


图 12－2

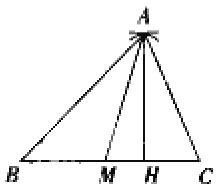


图 12－2a

例三 已知斜边及两直角边的差，求作直角三角形.

已知：线段 c、n. 求作：△ABC，使∠C＝Rt∠，$AB=c$，$BC-AC=n$.

分析：假设△ABC 已作出，并且 $AB=c$，D 是 BC 上一点，$BD=BC-AC=n$，连结 AD，于是 $DC=AC$，因为∠$C=90°$，所以，∠ADC＝∠$DAC=45°$，∠$ADB=135°$. 可以先作出△ADB 中，$AB=c$，$BD=n$，∠$ADB=135°$.

作法：(1) 作△ABD，使∠$ADB=135°$，$BD=n$，$AB=c$.

(2) 过 A 作 $AC\perp BD$，交 BD 的延长线于 C，则△ABC 为所求的直角三角形，如图 12－3a.

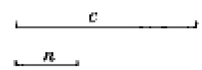


图 12－3

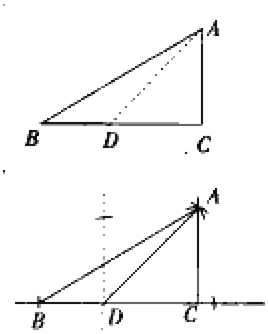


图 12－3a

例四 已知底边与一腰的和及一底角，作等腰三角形.

已知：线段 l，∠α（如图 12－4). 求作：△ABC，使 $AB=AC$，且 $AB+BC=l$，∠B＝∠α.

分析：假设△ABC 已作出，并且 $AB=AC$，$AB+BC=l$，∠B＝∠α，延长 BC 到 D，使 $CD=AC$，连结 AD，则 $BD=l$，∠D＝∠$CAD=\frac{1}{2}$∠$ABC=\frac{1}{2}$∠α.

于是△ABD 已经具备"角、边、角"的条件，可以先作出.

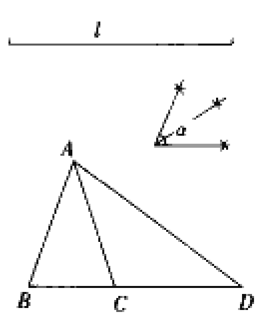


图 12－4

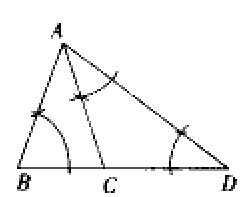


图 12－4a

作法：(1) 作△ABD，使 $BD=l$，∠$B=\alpha$，∠$D=\frac{1}{2}$∠α.

(2) 以 A 为顶点，AD 为一边，在∠BAD 内作∠$DAC=\frac{1}{2}$∠α，AC 交 BD

▶笔▶记▶栏

于点 C.

则$\triangle ABC$为所求作三角形，如图 12－4a.

例五 作图：在直线 MN 上找一点 C，使 C 到点 A、点 B 的距离的和为最短（如图 12－5）

分析：利用对称性及三角形两边之和大于第三边的性质，考虑作图.

取 A 关于 MN 的对称点 A'，连 $A'B$ 交 MN 于 C 即为所求.

图 12－5

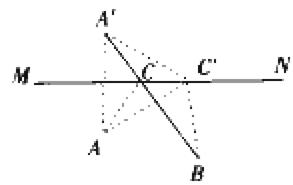


图 12－5a

证明：如图 12－5a，在直线上取任意一点 C'（C' 与 C 不重合），连结 $A'C'$、BC'、AC、AC'，可证 $A'C = AC$，$A'C' = AC'$. 在$\triangle A'BC'$中，$A'C' + BC' > A'B$，即 $AC' + BC' > AC + CB$，

$\therefore C$ 为所求的点.

1. 按下列条件作三角形 ABC，已知：

（1）b、h_a、m_a；　（2）α、h_a、c；　（3）a、α、h_a；　（4）a、m_a、h_c.

（h_a 为 a 边上的高，m_a 为 a 边上的中线，h_c 为 c 边上的高，α 为$\angle A$）

2. 按下列条件作直角三角形，已知：

（1）一条直角边和斜边上的高；

（2）一条直角边和这边上的中线；

（3）一条直角边以及斜边与另一直角边的差；

（4）斜边上的中线和高.

3. 按下列条件作等腰三角形，已知：

（1）一腰与一腰上的高；

（2）底边上的中线和顶角；

（3）底边与腰上的高.

4．已知一边、另一边上的高和中线，求作三角形.

[redacted]

1．已知一直角边和与它相邻的一个锐角，求作直角三角形.

2．已知两边及其中一边上的中线，求作三角形.

3．已知两边和其中一边上的高，求作三角形.

4．已知两角及其中一角对边上的高，求作三角形.

5．已知：两条对角线的长为 m、n 及两对角线所夹角 α．求作：平行四边形.

6. 已知：两边的长为 a、b 及夹角 α. 求作：平行四边形.

7. 已知：一边 a 及两对角线的夹角 α. 求作：矩形.

8. 已知：两条对角线的长 m、n. 求作：菱形.

9. 已知：对角线的长 c. 求作：正方形.

10. 已知线段 a、b、c，且 $a+b>2c$，$b-a<2c$. 求作一个三角形，使其两边长分别等于 a、b，且第三边上的中线长等于 c.

11. 已知：线段 a、b、c、d、m，求作：四边形 $ABCD$，使 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，$AC=m$.

图 12－6

12. 已知两底和两条对角线的长. 求作梯形.

13. 已知四边形 $ABCD$ 中，$AB = 2\text{cm}$，$BC = 2\text{cm}$，$CD = 1\text{cm}$，$\angle ABC = 90°$，$\angle BCD = 135°$，画出此四边形，并求 AD 的长.

14. 如图 12－7，河的两岸成平行线，要在河上造一座桥，使桥垂直于河岸. 问桥址选于何处，才能使河对岸 A、B 两地间的路程最短？

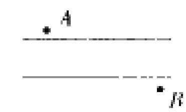


图 12－7

第十三讲　勾股定理

解题精要

勾股定理：在直角三角形中，两直角边为 a、b，其斜边为 c，则有 $a^2+b^2=c^2$. 反之亦成立.

勾股定理及其逆定理把直角三角形的几何性质和代数式 $a^2+b^2=c^2$ 联系起来，在实际计算中起着重要的作用.

典型例题讲解

例一　如图 13－1，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$ 于 D，$\angle A=45^\circ$，$BD=2$，$DC=3$，求 AD 的长.

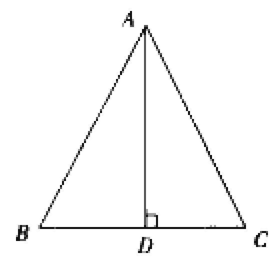


图 13－1

解：作 $\triangle AEB\cong\triangle ADB$，$\triangle AFC\cong\triangle ADC$，延长 EB、FC 相交于 H，如图 13－1，易证 $\angle EAF=90^\circ$，$AE=AF$.

$\therefore$ 四边形 $AEHF$ 是正方形.

设 $CH=x$，则 $BH=x+1$.

在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中，根据勾股定理，得 $BH^2+CH^2=BC^2$，即 $(x+1)^2+x^2=5^2$.

整理得 $x^2+x-12=0$，解得：$x=-4$（舍去），$x=3$.

$\therefore AD=AE=x+3=6$.

例二　一个直角三角形的三边长均为正整数，已知它的一条直角边长是 1997，问：另一条直角边长是多少？

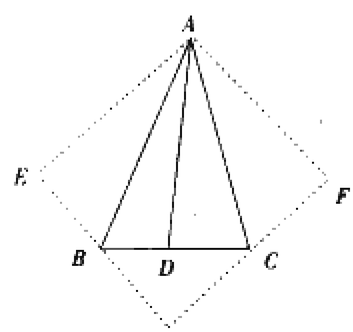


图 13－1a

解：设另一直角边长为 x，斜边为 y，则 $y^2-x^2=1997^2$，即 $(y+x)(y-x)=1997^2$.

由于 x、y 均为自然数，1997 为质数，$y+x>y-x$，

所以 $\begin{cases} y+x=1997^2, \\ y-x=1. \end{cases}$ 解得 $x=1994004$.

例三　周长为 6、面积为整数的直角三角形是否存在？若不存在，请给出证明；若存在，请求出有几个.

解：设直角三角形的斜边为 c、两直角边分别为 a、b，面积为 S，

▶笔▶记▶栏

则$\begin{cases} a \leqslant b < c < a+b, & ① \\ a+b+c=6, & ② \\ a^2+b^2=c^2, & ③ \\ S=\dfrac{1}{2}ab \quad \text{为整数}. & ④ \end{cases}$

由①、②得 $2<c<3$.　⑤

又由②有 $(a+b)^2=(6-c)^2$.

即 $a^2+2ab+b^2=36-12c+c^2$.

把③、④代入上式，得 $3c=9-S$，⑥

即 $6<3c<9$，而 S 为整数.

$\therefore 3c$ 亦为整数，从而 $3c=7$ 或 8.

若 $3c=7$，则 $S=2$. 代入②、④，得$\begin{cases} a+b=\dfrac{11}{3}, \\ ab=4. \end{cases}$

此方程组无解，这种情况不可能.

若 $3c=8$，则 $S=1$. 此时$\begin{cases} a+b=\dfrac{10}{3}, \\ ab=2. \end{cases}$解此方程组得 $a=\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$，$b=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$，

而 $c=\dfrac{8}{3}$，以这三个数为边长可构成一直角三角形($a^2+b^2=c^2$).

因此，这样的直角三角形存在，且只有一个.

例四　D 为等腰直角三角形 ABC 的斜边 BC 上的一点，求证：$BC^2+CD^2=2AD^2$.

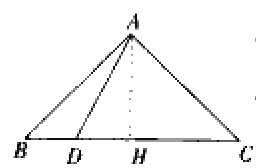


图 13－2

分析：由于所证结论中含有线段的平方，故联想到勾股定理，考虑作 $AH \perp BC$ 于 H，利用 $BH=CH=AH$，$AH^2+DH^2=AD^2$，可证得.

证明：作 $AH \perp BC$，垂足为 H，由$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，得 $BH=CH=AH$，

$$\begin{aligned}
\text{因而 } BD^2+CD^2 &= (BH-DH)^2+(CH+DH)^2 \\
&= BH^2-2BH \cdot DH+DH^2+CH^2+2CH \cdot CH+DH^2 \\
&= BH^2+CH^2+2DH^2 \\
&= 2AH^2+2DH^2 \\
&= 2AD^2.
\end{aligned}$$

例五　已知长方形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，E、F 分别在 AB、BC 上，且 $BE=BF=1$，求 F 到 DE 的距离.

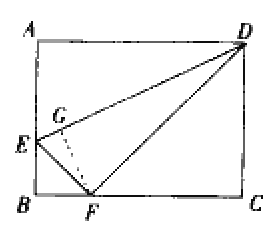


图 13－3

分析：求点到直线的距离即求点到直线的垂线段的长. 过 F 作 $FG \perp DE$，垂足为 G，要求的是 FG 的长. 因为$\triangle ADE$、$\triangle BEF$ 和$\triangle CDF$ 都是直角三角形，且各三角形的两直角边都已知，故可求出$\triangle DEF$ 三边的长分别是 $\sqrt{20}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{18}$. 显然满足勾股定理逆定理的条件，所以$\triangle DEF$ 是

▶笔▶记▶栏

直角三角形，FG 为斜边上的高，很容易求得.

解：作 $FG \perp DE$，G 为垂足.

在 Rt△ADE 中，$DE=\sqrt{AE^2+AD^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$，

在 Rt△BEF 中，$EF=\sqrt{BE^2+BF^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

在 Rt△CDF 中，$DE=\sqrt{CD^2+CF^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$，

$\because EF^2+DF^2=2+18=20=DE^2$，$\therefore$ △DEF 为 Rt△，且 $\angle DEF=90°$．$\therefore DE\cdot FG=EF\cdot DF$，即 $\sqrt{20}FG=\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$.

$\therefore FG=\dfrac{6}{2\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$.

答：F 到 DE 的距离是 $\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$.

例六 如图 13－4，已知点 O 是矩形 $ABCD$ 内一点，且 $OA=1$，$OB=3$，$OC=4$，求 OD 的长.

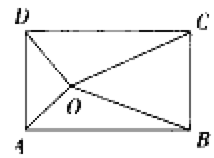


图 13－4

解：过 O 作 $EF\perp AD$ 于 E，交 BC 于 F，过 O 作 $GH\perp DC$ 于 G，交 AB 于 H.

$$\left.\begin{array}{l}\text{设 } CF=x,\ FB=y,\ AH=s,\ HB=t \Rightarrow OG=x,\ DG=s\\ \text{由勾股定理可知：} OC^2-CF^2=OB^2-BF^2\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow 4^2-x^2=3^2-y^2\Rightarrow x^2-y^2=7\\ \text{同理：}1^2-s^2=3^2-t^2\Rightarrow t^2-s^2=8\end{array}\right\}\Rightarrow (t^2+y^2)-(x^2+s^2)=1\\ \text{又由勾股定理可知：} OH^2+HB^2=OB^2\Rightarrow y^2+t^2=9\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow x^2+s^2=8\\ OD^2=x^2s^2\end{array}\right\}\Rightarrow OD^2=8\Rightarrow OD=2\sqrt{2}.$$

例七 如图 13－5，一个圆柱体的高为 20cm，底面半径为 6.7cm．如果一只蚂蚁要自圆柱体下底面的 A 点，沿圆柱形曲面爬到与 A 相对的上底面 B 点，求爬行的最短路线的长度.

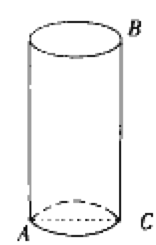


图 13－5

解：蚂蚁自 A 点出发，沿圆柱体的曲面爬到 B 点，要在曲面上比较路线的长短十分困难，而在平面上找两点间的最短线路是容易的，因而我们假想把这个圆柱体沿 BC 剪开摊平（如图 13－5a），此时 A、B 间的最短路线即为线段 AB 的长度.

由勾股定理得　$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{21^2+20^2}=29\text{cm}$.

故蚂蚁所爬的最短距离约为 29cm.

说明：解决此类求最短路线的问题，常将空间的曲面展开成平面，然后利用勾股定理等进行求解.

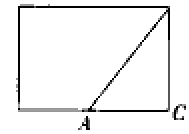


图 13－5a

1. 已知：如图 13－6，在直角三形 ABC 中，$\angle C=90°$，CD 为 AB 边上的高. 求证：$CD^2=AD\cdot DB$.

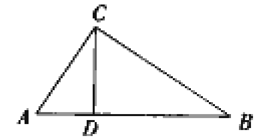


图 13－6

2. 已知：如图 13－7，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$，$DE\perp AC$，$DF\perp CB$. 求证：$CD^3=AB\cdot AE\cdot BF$.

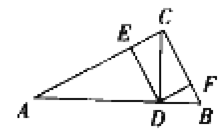


图 13－7

3. 如图 13－8，将一长方形纸片折叠起来，使其对角重合，若其长为 a，宽为 b，其不重合部分的面积是多少？

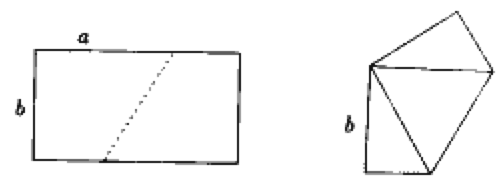


图 13－8

4. 如图 13－9，P 为等边三角形 ABC 内一点，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$. 求这个三角形的面积 S.

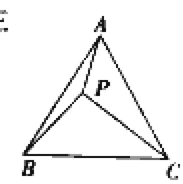


图 13－9

5. 已知：在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$. 求证：$AC+BD=AB+CD+2AD\cdot BC$.

6. 如图 13－10，一个圆锥的侧面展开图为一个扇形，已知 $AV=2$，$\angle BVB'=60°$，有一只蚂蚁从 A 点出发，沿着圆锥的侧面爬行回到 A，求这只蚂蚁爬行的最短路程.

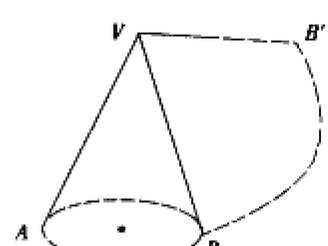


图 13－10

一、填空题：

1．矩形 $ABCD$ 内的点 P 使 PA、PB、PC 的长分别为 3、4、5，则 $PD =$ ________.

2．直角三角形有一条直角边的长是 11，另外两边的长也是自然数，那么它的周长是________.

3．在$\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 2$，BC 边上有 100 个不同的点 P_1、P_2，…，P_{100}，记作 $MI = API^2 + BPI \cdot PIC$（$i = 1, 2, \cdots 100$），则 $m_1 + m_2 + \cdots + m_{100} =$ ________.

4．在$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A$ 和$\angle B$ 的平分线相交于点 P，又 $PE \perp AB$ 于点 E，若 $BC = 2$，$AC = 3$，则 $AE \cdot EB =$ ________.

二、解答题：

1．已知直角三角形的两直角边长分别为 l 厘米、m 厘米，斜边为 h 厘米，且 l、m、n 均为正整数，l 为质数，证明：$2(l + m + 1)$ 是完全平方数.

2．如图 13－11，四边形 $ABCD$ 中，$AB = 6\text{cm}$，$BC = 8\text{cm}$，$CD = 24\text{cm}$，$DA = 26\text{cm}$，且$\angle ABC = 90°$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

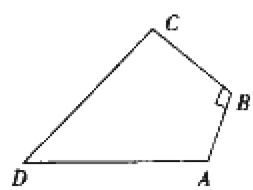


图 13－11

3．如图 13－12，已知$\angle A = \angle B$，AA_1、PP_1、BB_1 均垂直于 A_1B_1，$AA_1 = 17$，$PP_1 = 16$，$BB_1 = 20$，$A_1B_1 = 12$，求 $AP + PB$ 的值.

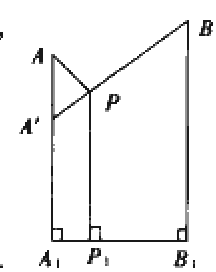


图 13－12

4．直角三角形三边的长都是正整数，其中有一条直角边的长是 21，求此直角三角形的周长的最小值.

5．M 是边长为 1 的正方形 $ABCD$ 内一点，若 $MA^2 - MB^2 = \frac{1}{2}$，$\angle CMD = 90°$，求$\angle MCD$.

第十四讲　极端性原理

解题指要

为了解决某个问题，先考察某些极端情况，如最大（小）距离，最大（小）面积，最长（短）边，最大（小）值，图形的极限位置，临界位置等等，从极端状况研究中得到启发，并由此获得解决所研究问题的方法，我们称这种解题方法为极端性原理.

典型例题讲解

例一 把 1600 颗花生分给 100 只猴子，求证：不管怎样分，至少有 4 只猴子得到的花生一样多.

分析：这是存在性的问题．如何抓"极端"呢？抓 100 只猴子每 3 只分得的花生一样多时，花生的最少数量.

证明：设第 1 组 3 只猴子分得 0 颗，第 2 组 3 只猴子分得 1 颗，…，第 33 组的 3 只猴子分得 32 颗，要 4 只猴子得到花生不一样多，则花生最少要 $3\times0+3\times1+\cdots+3\times32+33=1617$．这与题设相矛盾，故至少有 4 只猴子得到的花生一样多.

例二 在 $n\times n$ 的正方形棋盘上按下面规则放置棋子：每个小格最多放一枚，若某一小格没有放置，则该格所在的行和列放的棋子之和不得少于 n 枚．求证：在该棋盘上放置的棋子总数 $\geqslant\frac{n^2}{2}$.

证明：设 n 行 n 列中放棋子数量少的为第 i 行，棋子数为 k 枚，则其余 $(n-1)$ 行和 n 列的棋子数 $\geqslant k$．在第 i 行上，放有棋子的有 k 列，未放棋子的有 $(n-k)$ 列．放有棋子的 k 列中，每一列放的棋子数不少于 k 枚，该 k 列的棋子总和不少于 $k\times k=k^2$ 枚，未放棋子的 $(n-k)$ 列中，每列的棋子数不少于 $n-k$ 枚，该 $(n-k)$ 列的棋子数的和不少于 $(n-k)\cdot(n-k)=(n-k)^2$ 枚．故棋盘上的棋子数不少于 $k^2+(n-k)^2$ 枚．与 $\frac{1}{2}n^2$ 比较，作差得 $k^2+(n-k)^2-\frac{1}{2}n^2=\frac{1}{2}(n-2k)^2\geqslant0$．$\therefore$ 棋子总数 $\geqslant k^2+(n-k)^2\geqslant\frac{1}{2}n^2$．当各行各列的最少数为 $\frac{1}{2}n$ 时，棋盘的棋子数最少，最少数为 $\frac{1}{2}n^2$ 枚.

例三 证明：方程 $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$ 不存在正整数解 (x,y,z,u).

证明：假设这个方程有正整数解 x，y，z，u．考虑 x 与 y 的平方和 x^2+y^2，

▶笔▶记▶栏

由于 x^2+y^2 是正整数，则在所有的 x^2+y^2 中必有一个最小的，我们考虑使 x^2+y^2 最小的那组正整数解 (x, y, z, u).

由于 x^2+y^2 是 3 的倍数，则 x 和 y 必都能被 3 整除（否则，若 x 和 y 只有一个能被 3 整除时，x^2+y^2 被 3 除余 1；若 x 和 y 都不能被 3 整除时，x^2+y^2 被 3 除余 2，与 x^2+y^2 是 3 的倍数矛盾）.

于是可设 $x=3m$，$y=3n$. 其中 m 和 n 都是正整数，从而有

$$9m^2+9n^2=3(z^2+u^2).$$

$$z^2+u^2=3(m^2+n^2).$$

此时，z，u，x，y 也是方程的一组解，而由已知方程可知 $z^2+u^2<x^2+y^2$. 这与 x^2+y^2 为最小相矛盾.

所以方程不存在正整数解.

在这里，我们把 x^2+y^2 中一定有最小者这种极端情况为出发点，结合反证法，引出矛盾.

例四 证明：任意面积为 1 的凸多边形能被面积为 2 的矩形所覆盖.

证明：设 AB 是多边形的最长对角线（或是最长的边），过点 A 和 B 引直线 a、b，与线段 AB 垂直，如果 P 是多边形的顶点，则 $AP\leqslant AB$，$PB\leqslant AB$. 因此，多边形位于由直线 a 和 b 所构成的带子内部，作平行于 AB 的两条直线 KN 和 LM，使它分别经过凸多边形的“顶点”（设为 C、D），且能使多边形位于它们的各一旁，它们与直线 a 和 b 构成矩形 $KLMN$，如图 14－1. 此时，

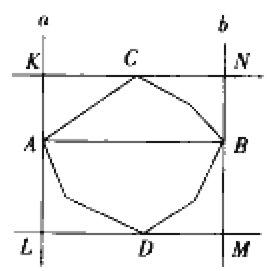


图 14－1

$S_{KLMN}=2S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle ABD}=2S_{四边形ACBD}$.

但四边形 $ABCD$ 包含在面积为 1 的多边形内，故 $S_{KLMN}\leqslant 2$.

说明：*此例运用极端原理，再结合构造法从而找到解题的突破口，化不规则为规则，化难为易.*

例五 平面上有 n 个点，其中任意三点所成的三角形的面积都小于 1，试证存在一个面积小于 4 的三角形包含这 n 个点.

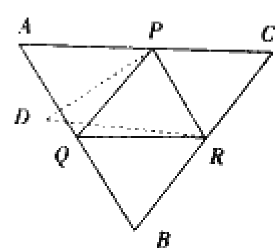


图 14－2

证明：这 n 个点可组成的三角形的数目是有限的，故其中必有一个面积最大的三角形，设其为 $\triangle PQR$（如图 14－2）. 过 $\triangle PQR$ 的三个顶点分别作其对边的平行线，得到一个三角形 ABC，则 $\triangle ABC$ 包含了这 n 个点.

事实上，若 $\triangle ABC$ 的外部还有这 n 个点中的一个点 D，则显然有 $S_{\triangle PDR}>S_{\triangle PQR}$，这与 $S_{\triangle PQR}$ 最大矛盾.

显然，$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle PQR}<4$，故 $\triangle ABC$ 合乎条件.

例六 用百分制记分，得分为整数，求证：

（1）若 201 人的总分为 9999，则至少有 3 人的分数相同；

（2）若 201 人的总分为 10101 分，则至少有 3 人的分数相同；

（3）若 201 人的总分为 10000 分，且已知无 3 人的分数相同，则必有 1 人 100 分，2 人 0 分；

（4）若 201 人的总分为 10100 分，且已知无 3 人的分数相同，则必有 1 人 0 分，2 人 100 分.

证明：在无 3 人得分相同的前提下，201 人总分最少的情形是：0 分、1 分、…、99 分各有 2 人得，100 分 1 人得，这时总分为 $2\times(0+1+2+\cdots+99)+100=10000$.

总分最多的情形是：100 分、99 分、…、1 分各有 2 人得，0 分 1 人得，这时总分为

$$2\times(1+2+\cdots+100)+0=10100.$$

（1）若无 3 人得分相同，则得分最少为 10000，而现在总分为 9999，由于 $9999<10000$，矛盾，故必有 3 人得分相同.

（2）若无 3 人得分相同，则得分最多为 10100，而现在总分为 10101，而 $10101>10100$，矛盾，故必有 3 人得分相同.

（3）总分为 10000 分恰为无 3 人得分相同时 201 人的总分的最小值，而达到这最小值的情形是惟一的，故必有 1 人 100 分，2 人 0 分.

（4）总分为 10100 分恰为无 3 人得分相同时 201 人的总分的最大值，而达到这最大值的情形是惟一的，故必有 1 人 0 分，2 人 100 分.

例七 已知：如图 14－3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A>90°$，$AD\perp BC$．求证：$AC+AB<AD+BC$.

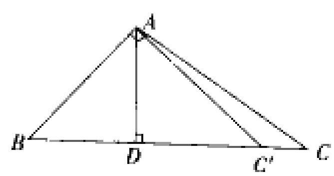


图 14－3

证明：考虑把直角看做是钝角的极端情形.

从 A 点引 AC' 交 BC 于 C'，使 $\angle BAC'=90°$．于是 $BC'^2=AB^2+AC'^2$，$BC'\cdot AD=AB\cdot AC'$，

$\therefore BC'^2+2BC'\cdot AD+AD^2>AB^2+2AB\cdot AC'+AC'^2$，

即 $(BC'\cdot AD)^2>(AB\cdot AC')^2$.

$\therefore BC'+AD>AB+AC'$.

又 $AC'+C'C>AC$，两式相加得 $BC+AD>AB+AC$.

例八 由 n 段硬棒绞连，结成一个平面多边形 $A\cdots DC\cdots B$，$n>4$，试证：存在三个连结点，使此三点间折线段拉直后，成为一个三角形.

证明：如图 14－4，设 n 段线段中最长的是 $AB=a$，除 AB 外的另 $n-1$ 条折线段拉直后的总长度的等分点为 M.

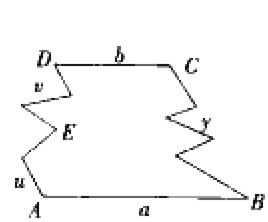


图 14－4

若 M 恰是连结点之一，则把折线 MA 和 MB 分别拉直后，$MA=MB$，$\triangle MBA$ 是等腰三角形.

若点 M 在硬棒上，不妨设在 CD 上，$CD=b$，如果 A、B、C 三点或 A、B、D 三点满足条件即可，否则，A、B、C 或 A、B、D 三点都不满足条件，设折线（不含点 B、C）AB 总长为 $x>0$，折线（不含 A、

▶笔▶记▶栏

D）BC 总长为 $y>0$，得 $x+b \geqslant a+y$，且 $y+b \geqslant a+x \Rightarrow b \geqslant a$．又 a 最长，$\therefore a \geqslant b$，于是 $a=b \Rightarrow x \geqslant y$，且 $y \geqslant x \Rightarrow x=y$．这时拉直后的四边形 $ABCD$ 是平行四边形．注意到 $n>4$ 或 $n \geqslant 5$，表明除 A、B、C、D 外还至少有一个结点，设它为 E．

不妨设点 E 在折线 AD 上，再设 AE（不含点 D）的总长度为 u、DE（不含点 A）的总长度为 v，则 B、C、E 满足条件，否则，拉直折线段 BC、CE 和 EB 不能成三角形的话，则有 $y+b+v \leqslant u+a$，且 $y+a+u \leqslant b+v \Rightarrow y \leqslant 0$．这与 $y>0$ 矛盾．

命题得证．

1．把 27 颗糖果按照任意方式分给 8 个小孩，证明：一定至少有两个小孩分得同样多的糖果．

2．平面上给出 2000 个点，任意三个点不共线，证明：存在三个点构成的三角形．使其余的 1997 个点均在该三角形的外部．

3．在平面上有 n 个点，其中任意三点可构成面积不超过 1 的三角形．证明：这些点一定可以被面积不超过 4 的三角形覆盖．

4．平面上有 1996 个点，它们中任两点之间的距离不大于 1，任三点成钝角三角形．求证：这 1996 个点在一个直径为 1 的圆内．

5．平面上给出 997 个点，将连结每两点的线段的中点染成红色．（1）证明：至少有 1991 个红点；（2）能否找到恰有 1991 个红点的 997 个点？

6．平面上放了有限多个圆，假设它们所盖住的面积为 1（它们可能是彼此相交的），试证：一定可以从这组圆中去掉若干个圆，使得余下的圆互不相交，而且它们可盖住的面积不小于 $\frac{1}{9}$．

专题训练十四 [illegible]

1. 设 P 是一正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内任一点，证明：必存在两个顶点 A_i、A_j，使 $(1-\frac{2}{n})180^\circ \leqslant \angle A_iPA_j < 180^\circ$.

2. 在平面上任给 $2n$ 个点，其中任三点不共线，并且把其中 n 个点涂成红色，n 个点涂成蓝色. 求证：可找到两两不共点的 n 条直线段，其中每条线段的两端点均为异色点.

3. 在 $n\times n$ 的正方形表格中，写上非负整数，如果在某一行和某一列的交汇处的数是 0，那么该行和该列上所填各数之和不小于 n. 证明：表中所有数的和不小于 $\frac{1}{2}n^2$.

4. 设有 $2n\times 2n$ 的正方形方格棋盘，在其中任意的 $3n$ 个方格中放一枚棋子，求证：可以选出 n 行和 n 列，使得 $3n$ 枚棋子都在这 n 行和 n 列中.

5. 一批货物分成大小不同的许多包，其中每包连皮重量不超过 350 千克，这批货物连皮总重量为 13500 千克. 现在要用一辆载重量为 1500 千克的汽车来运这批货物，假如每次都能满载的话，那么分 9 次就可以运完，可是货物必须成包地装到车上去，因此不一定每次都能满载. 证明：有一个办法至多分 11 次就可把这批货物全部运完.

6. 证明：不定方程 $x^2+y^2+z^2=2^nxyz$ 没有不全为零的正整数解 x、y、z、n.

第十五讲　综合能力测试

一、选择题：

1. 12345^2-2345^2 等于一个个位不为零的整数与 10^n 的积，其中 n 等于(　　).

A. 6　　　B. 5　　　C. 4　　　D. 3

2. 在△ABC 中，$AB=AC$、$\angle C=30°$，D 为 BC 上一点，且 $DA\perp BA$，若 $BC=24$，则 AD 的值为(　　).

A. 4　　　B. 6　　　C. 8　　　D. 12

3. n 是自然数，定义 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$，若 $x=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}$，那么(　　).

A. $x<1$　　　B. $x=1$　　　C. $x>1$　　　D. 当 n 充分大时，可有 $x>1$

4. 下列给出 5 个恒等变形式：

(1) $2x-2y+4=2(x-y)+4$；　　(2) $a^4-16=(a^2+4)(a^2-4)$；

(3) $\frac{1}{9}-a+\frac{9}{4}a^2=(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}a)^2$；　　(4) $2a(a+b)(a-b)-8a=2a(a^2-b^2-4)$；

(5) $a^2b+ab^2=a^2b^2(\frac{1}{b}+\frac{1}{a})$.

其中属于因式分解的是(　　).

A. 都是　　B. 仅(2)、(3)、(5)　　C. 仅(3)、(4)、(5)　　D. 仅(3)、(4)

5. 方程 $px+q=333$ 的解是 1，且 p、q 为质数，$p<q$，那么 p 的值为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 7　　D. 13

6. 四边形四条边长分别是 a、b、c、d，若 $a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$，则此四边形一定是(　　).

A. 正方形　　B. 菱形　　C. 矩形　　D. 非特殊四边形

7. 设 $W=7321\times7322\times7323\times7324+1$，则 W 是(　　).

A. 一个平方数　　B. 一个质数　　C. 一个立方数　　D. 一个偶数

8. 如图 15－1，BE、CF 分别为 $\angle ABD$、$\angle ACD$ 的平分线，BE 与 CF 交于 G，若 $\angle BDC=140°$，$\angle BGC=110°$，则 $\angle A$ 的值为(　　).

A. 70°　　B. 80°　　C. 75°　　D. 85°

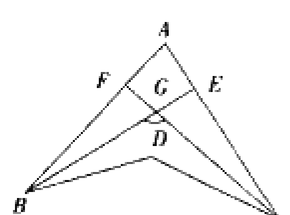


图 15－1

二、填空题：

1. 恒等式 $\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$ 中，$A=$ ________，$B=$ ________，$C=$ ________.

2. 如图 15－2，已知 E 为矩形 $ABCD$ 内的一点，作▱$ABFE$，A'、B'、C'、D' 分别为 EB、BF、FC、CE 的中点，若 $S_{矩形ABCD}=1$，则 $S_{矩形A'B'C'D'}=$ ________.

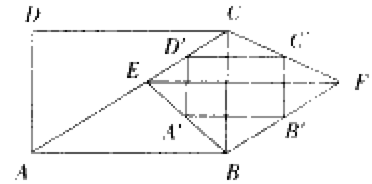


图 15－2

3. 在矩形 $ABCD$ 的邻边 BC、DC 上有 P、Q 两点，使△ABP、△PCQ、△ADQ 的面积分别为 2cm^2、3cm^2、4cm^2，则矩形的面积为 ____.

4. 如果实数 x、y 满足 $2x^2-6xy+9y^2-4x+4=0$，则 ${}^{x}y=$ ________.

5. 在△ABC 中，已知 $\angle A=60°$，E、F、G 分别为 AB、AC、BC 的中点，自 E、F 分别向△ABC 外作 $EP\perp AB$，$EP=\dfrac{1}{2}AB$，作 $FQ\perp AC$，$FQ=\dfrac{1}{2}AC$，若 GP 的长为 1，则 PQ 的长是 ________.

6. 设 x、y、z 是实数，且 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$，则 $\dfrac{xy+1}{z^2+1}\cdot\dfrac{yz+1}{x^2+1}\cdot\dfrac{zx+1}{y^2+1}$ 的值为 ________.

7. 四个同样大小的六角螺母如图 15－3 排列．每个螺母的面积都是 6，则△ABC 的面积为 ________.

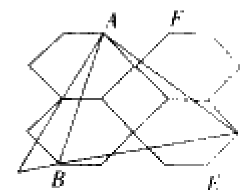


图 15－3

8. 若△ABC 中，$AB=AC$，P 为△ABC 内的一点，$PC>PB$，则 $\angle APB$ ________ $\angle APC$（填 >、< 或 =）.

三、解答题：

1. 货轮上卸下若干只箱子，其总重量为 10 吨，每只箱子的重量不超过 1 吨，为了保证能把这些箱子一次运走，问：至少需要多少辆载重 3 吨的汽车？

2. 如图 15－4，过四边形 $ABCD$ 的两边 AD、BC 延长线交点 P 作线段 EF，使 $EP=PF$．求证：不论 EF 的长度与位置如何，线段 AE、BF 的中点连线恒过某一定点．

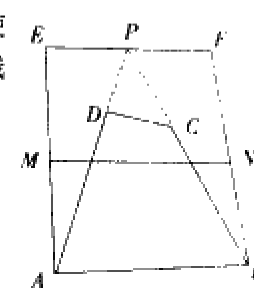


图 15－4

3. 直线上分布着 1990 个点．标出以这些点为端点的一切可能的线段的中点．试求至少可以得出多少个互不重合的点．

第十六讲　四边形（一）

解题指要

四边形与三角形有着密切的联系，因为四边形的一条对角线可以把它分成两个三角形，因此，解决这一类问题往往转化为三角形问题来解决，同时应注意灵活运用有关四边形的性质.

典型例题讲解

例一　如图 16－1a，它是根据四边形的不稳定性制作的边长为 14cm 的可活动的菱形衣架. 如图 16－1b，若墙上钉子间的距离 $AB=BC=14\sqrt{3}$cm，求∠1 的度数.

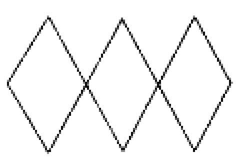


图 16－1a

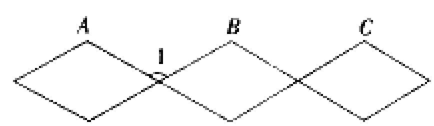


图 16－1b

解：如图 16－1c，连结 AB.

∵菱形的边长为 14cm，$AB=14\sqrt{3}$cm，

$$\therefore \cos\angle 1=\frac{14^2+14^2-(14\sqrt{3})^2}{2\times 14\times 14}=-\frac{1}{2}.$$

∴∠1＝120°.

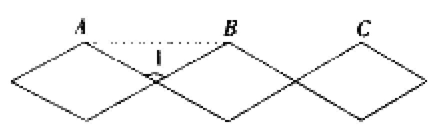


图 16－1c

例二　已知矩形 $ABCD$，有任一点 P，求证：$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.

分析：应根据 P 点的位置去分类证明.

证明一：如图 16－2，当 P 点为矩形 $ABCD$ 内任一点时，过 P 作 $EF\perp BC$ 交 BC 于 F，交 AD 于 E.

在 Rt△AEP 和 Rt△PFC 中，

$$\begin{aligned}PA^2+PC^2&=PE^2+AE^2+PF^2+FC^2\\&=PE^2+BF^2+PF^2+DE^2\\&=PB^2+PD^2.\end{aligned}$$

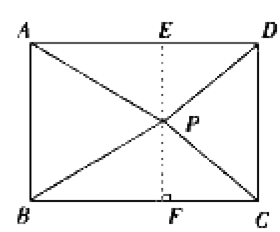


图 16－2

证明二：如图 16－2a，当 P 点为 AD 上任一点时，过 P 作 $PE\perp BC$ 于 E.

在 Rt△PEB 和 Rt△PEC 中，

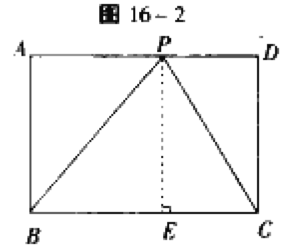


图 16－2a

▶笔▶记▶栏

$PE^2+BE^2=PB^2$，$PE^2+EC^2=PC^2$，

即　$PE^2+PA^2=PB^2$，　　　　①

　　$PE^2+PD^2=PC^2$．　　　　②

②－①得　$PD^2-PA^2=PC^2-PB^2$．

$\therefore PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$．

证明三：如图 16－2b，当 P 点在矩形 $ABCD$ 外时，过 P 作 $PE\perp BC$ 于 E 交 AD 于 F，则 $PF\perp AD$．

$\therefore PA^2+PC^2=PF^2+AF^2+PE^2+CE^2=PD^2-FD^2+PB^2-BE^2+AF^2+CE^2=PD^2+PB^2$．

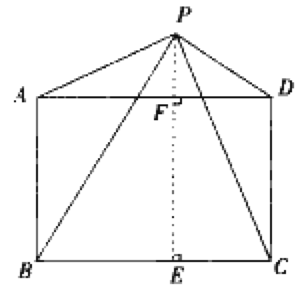


图 16－2b

例三　如图 16－3，已知正方形 $ABCD$ 外接于边长为 a 的正方形 $EFGH$，问：正方形 $ABCD$ 的面积与正方形$EFGH$的面积有何关系？

解：设正方形 $ABCD$ 的边长为 b，$BF=x$，$BG=y$，

$\because \angle BFG+\angle BGF=90°$，$\angle BGF+\angle CGH=90°$，

$\therefore \angle BFG=\angle CGH$．

$\because FG=GH$，$\therefore \text{Rt}\triangle BGF\cong \text{Rt}\triangle CHG$．

$\therefore BF=CG$，$BG=CH$．

于是　$x+y=b$，　　　　①

$S_{\triangle BGF}=\dfrac{1}{4}(b^2-a^2)=\dfrac{1}{2}xy$，

即　$xy=\dfrac{b^2-a^2}{2}$．　　　　②

$\therefore x$、y 为方程 $t^2-bt+\dfrac{b^2-a^2}{2}=0$ 的两根．

$\therefore \Delta\geqslant 0$，

即　$(-b)^2-4\times\dfrac{b^2-a^2}{2}\geqslant 0$．整理得　$b^2\leqslant 2a^2$．

$\because a<b$，且 a、b 都为正数，$\therefore \dfrac{b^2}{a^2}\leqslant 2$，

即　$\dfrac{S_{\text{正方形}ABCD}}{S_{\text{正方形}EFGH}}\leqslant 2$．

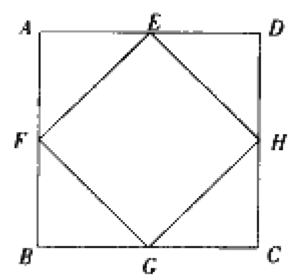


图 16－3

例四　如图 16－4，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 上一点，F 是对角线 AC 上的一点，且 $BE=\sqrt{2}AF$．求证：$\triangle DEF$ 是等腰直角三角形．

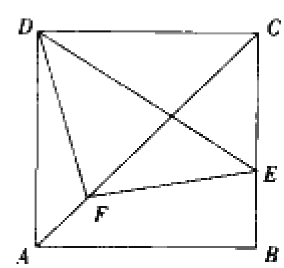


图 16－4

证明：如图 16－4a，过 F 作 $MN\parallel AB$，分别交 BC、AD 于 M、N，连结 BF．

$\because AD\parallel BC$，$\angle BAD=90°$，$\therefore$ 四边形 $ABMN$ 是矩形．

$\therefore \angle BMF=\angle ANF=90°$，$BM=AN$．

$\therefore$ 又$\angle DAC=45°$，

$\therefore \triangle ANF$ 为等腰直角三角形，$AN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AF$．

$\because BE=\sqrt{2}AF$，$BM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AF$，$\therefore M$ 为 BE 的中点．

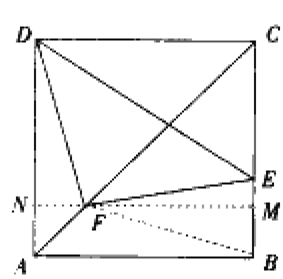


图 16－4a

▶笔▶记▶栏

$\therefore BF = EF$.

又 $\angle BAC = \angle DAC = 45°$，$AB = AD$，$AF = AF$，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ADF$，$BF = DF$，则 $EF = DF$，

又 $EM = FN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AF$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle EMF \cong \mathrm{Rt}\triangle FND$.

$\therefore \angle DFN = \angle FEM$，即　$\angle DFN + \angle EFM = 90°$.

$\therefore \angle DFE = 90°$.

$\therefore \triangle DEF$ 是等腰直角三角形.

例五　已知：$0 < a < 1$，$0 < b < 1$.

求证：$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{(1-a)^2+b^2} + \sqrt{a^2+(1-b)^2} + \sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2} \geqslant 2\sqrt{2}$.

分析：本题是一道代数题，直接证明比较困难，观察其形式可借助正方形、直角三角形来解决，即所谓“代数题几何解”.

证明：如图 16－5，作边长为 1 的正方形 $ABCD$，分别在 AB、AD 上截取 $AE = a$，$AG = b$，过 E、G 分别作 AD、AB 的平行线交 CD、BC 于 F、H，EF 与 GH 交于点 O，连结 AC、BD，则有 $AC = BD = \sqrt{2}$，于是有

$OA = \sqrt{a^2+b^2}$，$OB = \sqrt{(1-a)^2+b^2}$，

$OC = \sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}$，$OD = \sqrt{a^2+(1-b)^2}$.

$\because OA + OC \geqslant AC$，$OB + OD \geqslant BD$，

$\therefore \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{(1-a)^2+b^2} + \sqrt{a^2+(1-b)^2} + \sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2} \geqslant 2\sqrt{2}$.

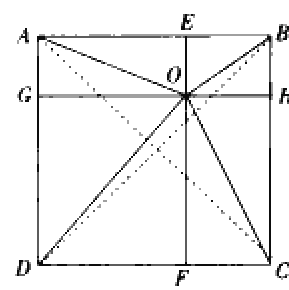


图 16－5

▶速▶记▶栏

例六　有一张矩形纸片 $ABCD$，$AB = a$，$BC = ka$，将纸片折叠一次，使顶点 A 和 C 重合，若不重合的面积为 $\sqrt{13}a^2$，求 k 的值.

分析：按 $k = 1$，$k > 1$，$k < 1$ 进行分类讨论.

解：当 $k = 1$ 时，四边形 $ABCD$ 为正方形，折叠后不重合部分的面积为 0，于是 $k \neq 1$. 当 $k < 1$ 时，折叠时应沿 AC 的中垂线折叠. 设垂直平分线交 AB 和 CD 于 E、F，连 EC、AF（如图 16－6）.

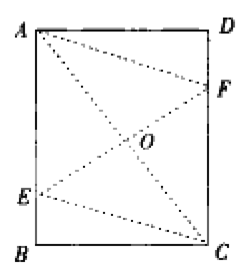


图 16－6

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore OE = OF$，$AF = AE$，即四边形 $AFCE$ 为菱形.

$\because S_{\triangle ADF} = S_{\triangle BCE}$，$S_{\triangle ADF} + S_{\triangle BCE} = \sqrt{13}a^2$，

$\therefore 2S_{\triangle ADF} = \sqrt{13}a^2$，即　$AD \cdot DF = \sqrt{13}a^2$.

$\therefore DF = \dfrac{\sqrt{13}a}{k}$.

$\because k < 1$，$\therefore DF > a > DC$，这不可能.

当 $k > 1$ 时（如图 16－6a），四边形 $AECF$ 也为菱形.

$\because S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDF} = \sqrt{13}a^2$，$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CDF}$，

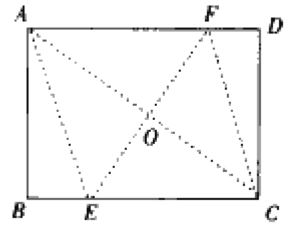


图 16－6a

$\therefore 2S_{\triangle AEF}=\sqrt{13}a^2$，即 $AB\cdot BE=\sqrt{13}a^2$.

$\therefore BE=\sqrt{13}a$.

又 $\because AE=EC=BC-BE=ka-\sqrt{13}a=(k-\sqrt{13})a$.

$\therefore a^2+(\sqrt{13}a)^2=[(k-\sqrt{13})a]^2$.

$\therefore k=\sqrt{13}+\sqrt{14}$.

例七 用直线将边长为 1 的正方形分成 $ABEF$、$BCGE$、$GEFD$ 三个四边形．求证：存在属于同一四边形的两点，它们的距离不小于$\frac{\sqrt{17}}{4}$.

分析：可以利用直角三角形计算 BF、BC、FG 的范围，根据要证明的结论，可以分三种情况进行讨论．

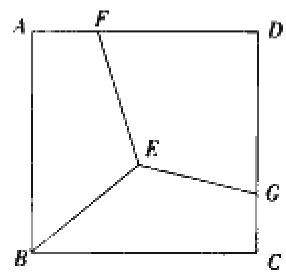


图 16－7

证明：①若 $AF\geqslant\frac{1}{4}$，则 $BF=\sqrt{AB^2+AF^2}\geqslant\sqrt{1+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{17}}{4}$，故在四边形 $ABEF$ 中可以找到两点，它们的距离不小于$\frac{\sqrt{17}}{4}$.

②若 $CG\geqslant\frac{1}{4}$，则 $BG\geqslant\sqrt{1+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{17}}{4}$，故在四边形 $BCGE$ 中同样有两点，它们的距离不小于$\frac{\sqrt{17}}{4}$.

③若 $AF<\frac{1}{4}$且 $CG<\frac{1}{4}$，则 $DF>\frac{3}{4}$，$DG>\frac{3}{4}$，故 $FG=\sqrt{(\frac{3}{4})^2+(\frac{3}{4})^2}>\frac{3\sqrt{2}}{4}>\frac{\sqrt{17}}{4}$．因此在四边形 $FEGD$ 中有两点，它们的距离不小于$\frac{\sqrt{17}}{4}$．于是本题得证．

练习十六

一、选择题：

1．一个三角形与一个正方形的面积相等，而三角形底边长是正方形边长的 4 倍，则三角形的高与正方形的边长之比为(　　)．

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

2．正方形 $ABCD$ 中，E 是 CD 上一点，F 是 BC 上一点，且 $EF=BF+DE$，则$\angle EAF$ 的度数是(　　)．

A．30°　　B．60°　　C．45°　　D．小于 60°

3．如图 16－8，把菱形 $ABCD$ 沿着对角线 AC 的方向移动到 $A'B'C'D'$ 的位置，它们的重叠部分的面积是菱形 $ABCD$ 的面积的$\frac{1}{2}$，若 $AC=\sqrt{2}$，则菱形移动的距离 AA' 是(　　)．

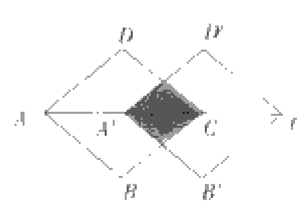


图 16－8

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}-1$

4. 梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$\angle B=40°$，$\angle C=50°$，E、M、F、N 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，且 $EF=a$，$MN=b$，则 BC 为(　　).

A. $a+b$　　B. $a+2b$　　C. $2a+b$　　D. $2a-b$

5. 任意一个四边形的对角线之和与周长的关系永远是(　　).

A. 大于周长　　B. 大于周长的一半而小于周长

C. 等于周长　　D. 小于周长的一半

二、填空题:

1. 一个多边形的每个内角都为钝角，则这个多边形有________个，边数最小的一个是________边形.

2. 如图 16－9，已知正方形 $OEFG$ 的一个顶点与正方形 $ABCD$ 的对角线的交点 O 重合，且正方形 $ABCD$、$OEFG$ 的边长都是 $a$cm，则图形中重合部分的面积是________.

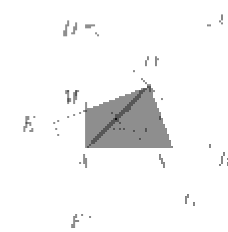


图 16－9

3. 如图 16－10，已知梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$\angle A=$ Rt$\angle$，E 为 CD 的中点，$BE=13$，梯形 $ABCD$ 的面积为 120，那么 $AB+BC+DA=$________.

4. 如图 16－11，在梯形 $ABCD$ 中，$AB // DC$，中位线 $EF=7$cm，对角线 $AC \perp BD$，$\angle BDC=30°$，则梯形的高 $AH=$________.

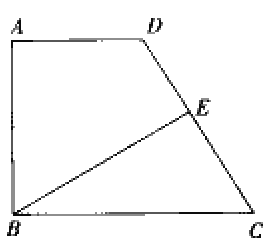


图 16－10

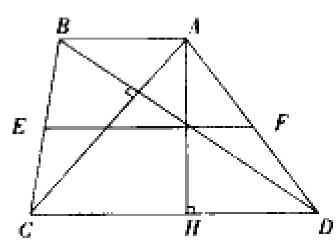


图 16－11

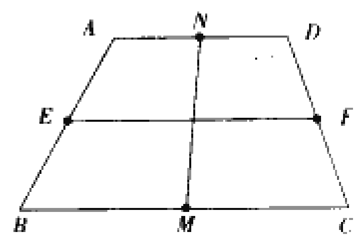


图 16－12

5. 如图 16－12，在梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$\angle B=30°$，$\angle C=60°$，E、M、F、N 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点，若 $BC=7$，$MN=3$，则 EF 的长为________.

三、解答题:

1. 有一个矩形花圃如图 16－13，现要种植四种植物，同种植物种在一起且所占的地方大小一样，请设计五种方案.

图 16－13

2. 如图 16－14，两组平行线相交，请问共组成多少个平行四边形？

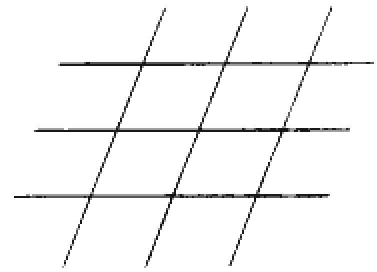


图 16－14

3. 在平面上有且只有四个点，这四个点有一个独特的性质：每两点之间的距离有且只有两种长度，例如（如图 16－15 所示）正方形 $ABCD$，有 $AB=BC=CD=DA\neq AC=BD$．请画出具有这种独特性质的另外五种不同的图形，并标明相等的线段．

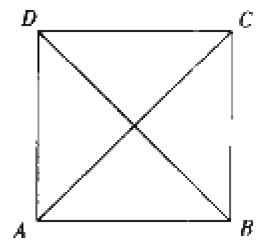


图 16－15

4. 如图 16－16，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E、F、G、H 分别在 AB、BC、CD、DA 上，且 $AE=BF=CG=DH$．

（1）求证：四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形；

（2）设 $\frac{AB}{AE}=k$，当 k 为何值时，正方形 $A'B'C'D'$ 的面积是正方形 $ABCD$ 的面积的 $\frac{1}{5}$？

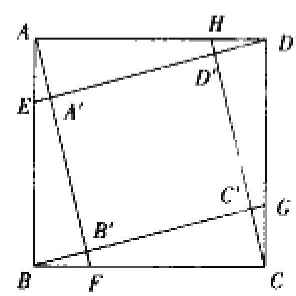


图 16－16

一、选择题：

1. 一个凸 n 边形的内角和小于 2001°，那么 n 的最大值是（　　）．

A．11　　B．12　　C．13　　D．14

2. 若等腰梯形的大底等于对角线，且小底等于其高，则小底与大底之比为（　　）．

A．1:2　　B．2:3　　C．3:4　　D．3:5

3. 如图 16－17，已知边长为 b 的正方形 $ABCD$，E 为 AD 的中点，P 为 CE 的中点，F 为 BP 的中点，则△BFD 的面积为（　　）．

A. $\frac{1}{64}b^2$　　B. $\frac{1}{32}b^2$　　C. $\frac{1}{16}b^2$　　D. $\frac{1}{8}b^2$

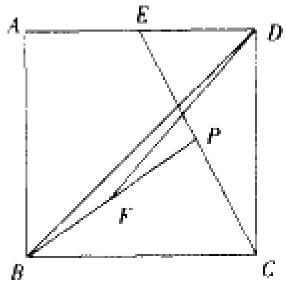


图 16－17

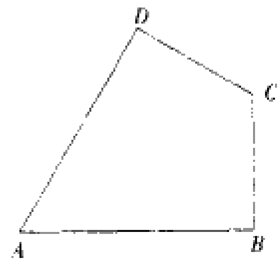


图 16－18

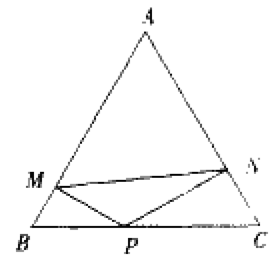


图 16－19

4. 如图 16－18，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle D=90°$，$\angle A=60°$，$AB=4$，$AD=5$，则：$\frac{BC}{CD}=$（　　）．

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{5}{4}$

5. 如图 16－19，$\triangle ABC$ 为等边三角形，P 是 BC 上任意一点，$PM\perp AB$，$PN\perp AC$，连 MN，并记$\triangle MAN$ 的周长为 L，四边形 $BCNM$ 的周长为 S，则 L 与 S 的大小关系为（　　）．

A. $S>L$　　B. $S=L$　　C. $S<L$　　D. 不一定

二、填空题：

1. 如图 16－20，已知 $S_{四边形ABFF}=S$，$AD=2$，$BD=4$，$\angle ACB=45°$，则 $S_{四边形DBCE}=$________．

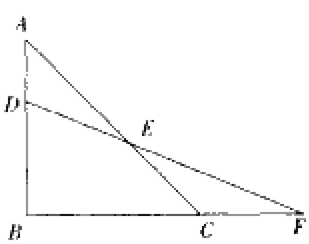


图 16－20

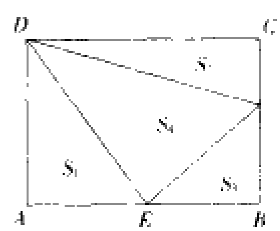


图 16－21

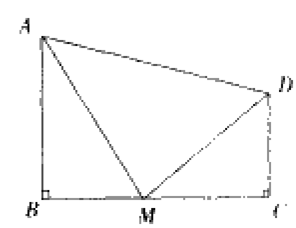


图 16－22

2. 如图 16－21，矩形 $ABCD$ 的长为 a，宽为 b，若 $S_1=S_2=\frac{1}{2}(S_3+S_4)$，则 $S_4=$________．

3. 一个正 m 边形恰好被正 n 边形围住（无重叠、无间隙），若 $m=10$，则 $n=$________．

4. 如图 16－22，点 M 在四边形 $ABCD$ 的边 BC 上，$AM=DM$，$\angle AMB=75°$，$\angle DMC=45°$，且 $AB\perp BC$，$DC\perp BC$，则 AB 与 BC 的关系为________．

5. 正方形 $ABCD$ 所在平面上有一点 P，使$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$ 都是等腰三角形，于是具有这样的性质的点 P 共有________个．

三、解答题：

1. 如图 16－23，在凸四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=2\sqrt{3}$，$CD=3$，$DA=1$．在四边形 $ABCD$ 变化为各种凸四边形的过程中，线段 BD 的变化范围是什么？B 到 DC 的距离的变化范围是什么？

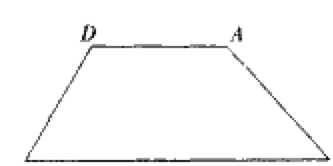


图 16－23

2. 用大小为 1×1、2×2、3×3 的瓷砖铺一个 23×23 的正方形地面.

(1) 请设计一种方案，只用一块 1×1 的正方形瓷砖及若干块 2×2、3×3 的正方形瓷砖铺满地面；

(2) 要铺满该地面，不用 1×1 的正方形瓷砖行吗?

(3) 在正中央铺 9 块 1×1 的瓷砖，其余用 2×2、3×3 的能铺满吗?

3. 如图 16－24，在▱$ABCD$ 的每条边上依次取点 K、L、M、N. 若四边形 $KLMN$ 的面积等于▱$ABCD$ 的面积的一半，则四边形 $KLMN$ 中至少有一条对角线平行于▱$ABCD$ 的边. 试证之.

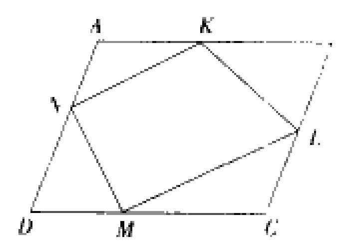


图 16－24

第十七讲　四边形（二）

[redacted]

四边形在日常生活中有着广泛的应用．在解决有关四边形的问题时，不仅要注意四边形的性质，还要联系实际；此外，若四边形有中点出现，则可以与有关三角形的中线、三角形、梯形的中位线紧密联系起来，恰当地添加辅助线，构造有关的图形．

[redacted]

例一　有一块矩形地面，现要铺地砖，要求顶点聚在一起，且地砖与地砖之间不留空隙．问：

（1）能用正 n 边形地砖铺吗？有几种正 n 边形地砖可用？为什么？

（2）请画出另外两种不用正多边形地砖铺地的草图．

分析：铺正 n 边形地砖，只要使它的每个内角的度数能整除 $360°$ 即可．

解：（1）正 n 边形的每个内角为 $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$，则 $360° = k\cdot\frac{n-2}{n}\cdot 180°$，

$\therefore k=\frac{2n}{n-2}=2+\frac{4}{n-2}$．

$\because k$ 为正整数，$\therefore n$ 只可能取 3、4、6．

因此，我们能用正多边形地砖铺地，且只有正三角形、正四边形、正六边形的地砖可以用．

（2）如图 17－1 所示（作为参考，因其方案有很多）．

图 17－1

例二　如图 17－2，设 a、b、c 分别是等腰梯形 $ABCD$ 的上底、下底和腰的长，m 为对角线的长．求证：$m^2=c^2+ab$．

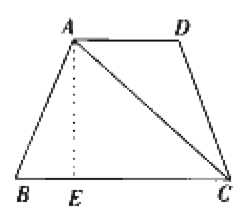


图 17－2

分析：构造直角三角形，利用勾股定理便可证得．

证明：作 $AE\perp CD$ 于 E．

▶笔▶记▶栏

$\because AE^2 = AD^2 - DE^2 = c^2 - (\dfrac{b-a}{2})^2$，$AC^2 = AE^2 + CE^2 = AE^2 + (\dfrac{b+a}{2})^2 = m^2$，

$\therefore m^2 = c^2 - \dfrac{b^2-2ab+a^2}{4} + \dfrac{b^2+2ab+a^2}{4} = c^2 + ab$.

例三 如图 17－3，以$\triangle ABC$的 AB、AC 为边各向外作正方形 $ABDE$、$ACFG$，M 是 DF 的中点、$MN \perp BC$ 于 N．求证：$MN = \dfrac{1}{2}BC$.

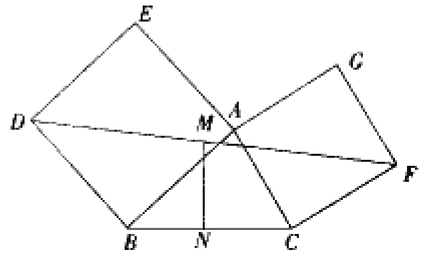


图 17－3

分析：由 M 是中点及要证明的结论可以考虑梯形的中位线.

证明：如图 17－3a，分别过 A、D、F 作 $AH \perp BC$ 于 H，$DL \perp BC$ 于 L，$PF \perp BC$ 于 P.

$\because MN$ 是梯形 $DLPF$ 的中位线，

$\therefore MN = \dfrac{1}{2}(PF + DL)$.

$\because AB = BD$，$\angle ABH + \angle BAH = \angle ABH + \angle DBL = 90°$，

$\therefore \angle BAH = \angle DBL$．$\therefore \text{Rt}\triangle ABH \cong \text{Rt}\triangle BDL$，$BH = DL$.

同理可证 $\text{Rt}\triangle ACH \cong \text{Rt}\triangle FCP$，$CH = PF$.

$\therefore BC = BH + CH = DL + PF$．故 $MN = \dfrac{1}{2}BC$.

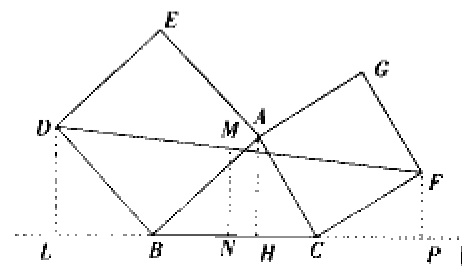


图 17－3a

▶笔 ▶记 ▶栏

例四 用正方形的地砖不重叠、无间隙铺满一块长方形地面，若选用边长为 $x$cm 规格的地砖恰需要 n 块；若选用边长为 $y$cm 规格的地砖，则要比前刚好多用 62 块．已知 x、y、n 都是整数，且 $(x, y) = 1$，试问：这块地有多少平方米？

分析：不管怎样铺，这块地的面积不变，可利用面积不变建立 x、y、n 的等式.

解：设 S 为这块地面的面积.

$\because S = nx^2 = (n+62)y^2$，$\therefore n(x^2 - y^2) = 62y^2$.

$\because x > y$，$(x, y) = 1$，$\therefore (x^2, y^2) = 1$，$(x^2 - y^2, y^2) = 1$.

$\therefore x^2 - y^2 \mid 62$，$\because 62 = 2 \times 31$，$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$，

$\therefore \begin{cases} x + y = 31, \\ x - y = 1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x + y = 31, \\ x - y = 2. \end{cases}$

解得 $x = 16$，$y = 15$．此时 $n = \dfrac{62y^2}{x^2 - y^2} = 450$.

$\therefore S = nx^2 = 450 \times 16^2 = 11.52$（平方米）.

答：这块长方形地面的面积为 11.52 平方米.

例五 如图 17-4，已知线段 AB 的中点为 M，从 AB 上任一点 C 向直线 AB 的一侧引线段 CD，CD 的中点为 N，BD 的中点为 P，MN 的中点为 Q．求证：直线 PQ 平分线段 AC．

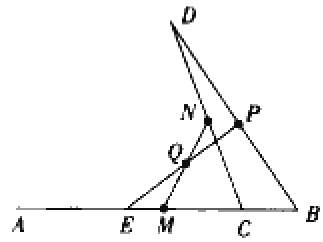


图 17-4

分析：本题的条件有四个中点，于是可以从构造三角形或梯形的中位线入手．

证明：如图 17-4a 连结 AD、PN、MP、EN．

$\because N$、P 分别是 DC、DB 的中点，$\therefore PN /\!/ BC$，即 $PN /\!/ EM$．

$\therefore \angle NPE = \angle QEM$，$\angle PNQ = \angle QME$．

又 $\because NQ = QM$，$\therefore \triangle NQP \cong \triangle MQE$．

$\therefore PN \mathrel{\underline{/\!/}} ME$．

$\therefore$ 四边形 $PNEM$ 为平行四边形．$\therefore PM \mathrel{\underline{/\!/}} NE$．

$\because P$、M 分别为 DB、AB 的中点，

$\therefore PM \mathrel{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}DA$，即 $NE /\!/ \frac{1}{2}DA$．

$\therefore E$ 为 AC 的中点，即 PQ 平分线段 AC．

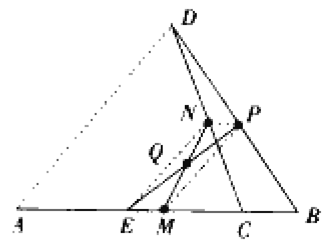


图 17-4a

例六 如图 17-5，把单位正方形 $ABCD$ 的每边 n（$n \neq 1$）等分，连接每个顶点和与相对顶点最邻近的一个分点，这样在正方形内部做出一个小正方形．如果小正方形面积是原正方形面积的 $\frac{1}{a}$，求：(1) n 的最小值；(2) 当 $a = 2113$ 时 n 的值．

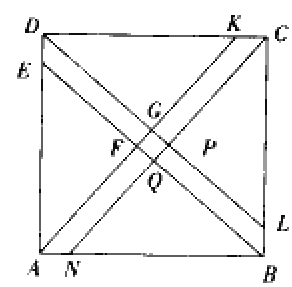


图 17-5

分析：设法求出中间正方形的边长．

解：如图 17-5a，过 D 的最邻近分点 E 作 $EH /\!/ AK$ 交 DL 于 H，则 $\mathrm{Rt}\triangle DEH \backsim \mathrm{Rt}\triangle DAK$．

$$\therefore \frac{DE}{AK} = \frac{EH}{AD}.$$

$$\because AD = 1,\ \therefore EH = \frac{DE}{AK} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + (\frac{n-1}{n})^2}}.$$

又 $S_{小正方形} = EH^2 = \frac{1}{2n^2 - 2n + 1}$，

$\therefore 2n^2 - 2n + 1 = a$．

解得 $n = \frac{1 \pm \sqrt{2a-1}}{2}$．

则当 $a = 5$ 时，n 的最小值为 2．

当 $a = 2113$ 时，$n = 33$．

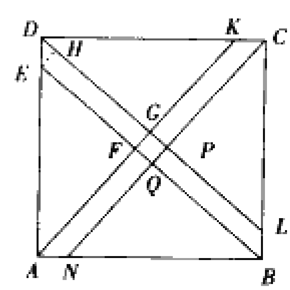


图 17-5a

▶随▶记▶栏

练习十七

一、选择题：

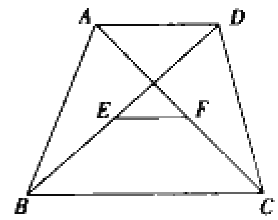


图 17－6

1．如图 17－6，在梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$、E、F 分别是对角线 BD、AC 的中点，若 $AD=6\text{cm}$，$BC=18\text{cm}$，则 EF 的长为(　　)．

A．8cm　　B．7cm　　C．6cm　　D．5cm

2．正方形 $ABCD$ 的边长为 3，E 是边 AB 上的点，$AE=1$，O 是 DE 的中点，过 O 作直线分别交 AD、BC 于 M、N，且 $MN=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，则(　　)．

A．$\angle MOD=\angle DEB$　　B．$\angle MOD=\angle AED$

C．$\angle MOD=90°$　　D．$\angle MOD\neq 90°$

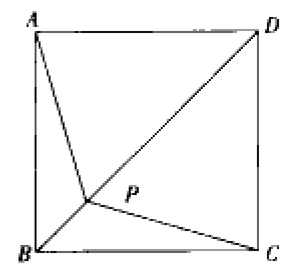


图 17－7

3．如图 17－7，已知 P 是边长为 1 的正方形 $ABCD$ 内的一点，且 $S_{\triangle APB}=\dfrac{2}{5}$，则 $S_{\triangle PDC}=$(　　)．

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{1}{10}$

二、填空题：

1．如图 17－8，把长为 8cm 的长方形纸片对折，按图中的虚线剪去一个梯形并打开，则打开后梯形的中位线长为__________．

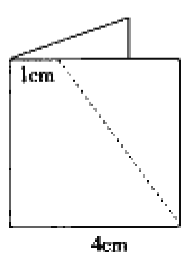


图 17－8

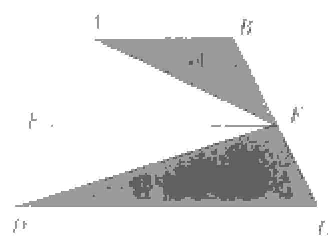


图 17－9

2．如图 17－9，梯形 $ABCD$ 的中位线 EF 的长为 8cm，高为 5cm，则图中阴影部分的面积为__________．

3．长方形 $ABCD$ 中，M 是 AD 边的中点，N 是 DC 边的中点，AN 与 MC 交于点 P，若 $\angle MCB=\angle NBC+33°$，则 $\angle MPA$ 的度数是__________．

三、解答题：

1．如图 17－10，已知以 $\triangle ABC$ 的三边为边，分别作三个等边三角形 $\triangle ABD$、$\triangle BCE$、$\triangle ACF$．

（1）求证：四边形 $ADEF$ 是平行四边形；

（2）试问：$\triangle ABC$ 的变化对四边形 $ADEF$ 有何影响？

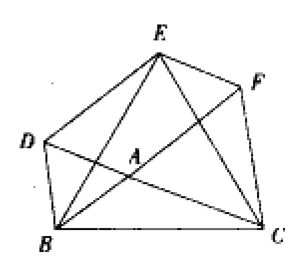


图 17－10

2．小明要用一张正方形的纸剪出一个正三角形，请你帮他设计一下，若有一个单位正方形，能通过折纸得到60°、45°、30°、15°的角吗？能否得到长为$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$的线段呢？

3．如图17－11，在△*ABC*中，*AB*＝*AC*，*M*为底边上任意一点，过点*M*作*BA*的平行线*MP*交*CA*于*P*，作*CA*的平行线*MQ*交*BA*于*Q*．

（1）求证：四边形*APMQ*的周长是一个定值；

（2）若*M'*在底边*BC*的延长线上，四边形*AP'M'Q'*有与（1）类似的结论吗？为什么？

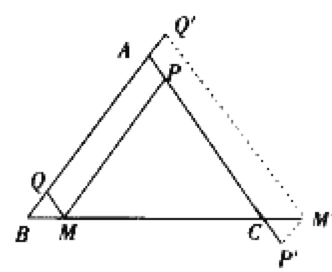


图 17－11

一、选择题：

1．如图17－12，已知*A*为*DE*的中点，设△*DBC*、△*ABC*、△*EBC*的面积分别为S_1、S_2、S_3，则S_1、S_2、S_3之间的关系式为（　　）．

A．$S_2=\frac{3}{2}(S_1+S_3)$　　B．$S_2=\frac{1}{2}(S_3-S_1)$

C．$S_2=\frac{1}{2}(S_1+S_3)$　　D．$S_2=\frac{3}{2}(S_3-S_1)$

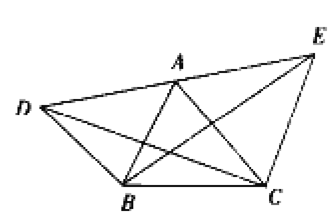


图 17－12

2．如图 17－13，$\triangle AOB$ 和 $\triangle A_1OB_1$ 是顶角为 $100°$ 的两个等腰三角形，K、L、M 分别是 AB、BB_1、B_1A_1 的中点，则 $\angle KLM=$(　　)．

A．$100°$　　B．$90°$　　C．$80°$　　D．$60°$

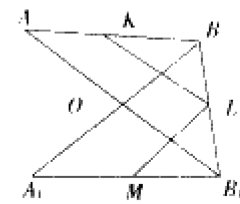


图 17－13

3．如图 17－14，在▱$ABCD$ 中，$\angle ABC=75°$，$AF\perp BC$ 于 F，AF 交 BD 于 E，若 $DE=2AB$，则 $\angle AED$ 的度数为(　　)．

A．$60°$　　B．$65°$　　C．$70°$　　D．$75°$

二、填空题：

1．某宾馆在装修时，要在大厅内的主楼梯上铺地毯，已知主楼梯宽 3 米，其剖面如图 17－15 所示，于是要购买地毯_______平方米．

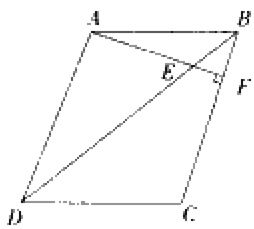


图 17－14

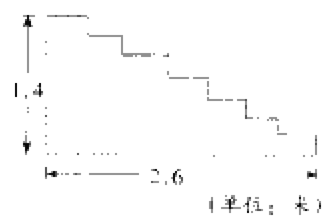


图 17－15

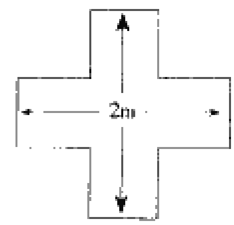


图 17－16

2．如图 17－16，做一个红十字会的大型“+”字标志，需要木条________m．

3．已知点 M 是▱$ABCD$ 内一点，连 AM、BM、CM、DM，则所构成的四个三角形的面积分别是 $\sqrt{2}m$、$\sqrt{2}m^2$、$\sqrt{2}m^3$、$\sqrt{2}m^4$（$m>0$），则定点 M 的位置是_______．

三、解答题：

1．如图 17－18，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=5\angle ACB$，BD 与 $\angle A$ 的平分线垂直于 H，$DE\perp BC$．求证：若 M 是 BC 的中点，则 $EM=\frac{1}{2}BD$．

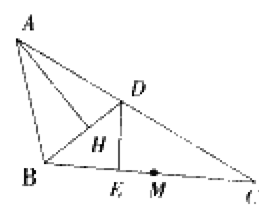


图 17－18

2．如图 17－19，E 为▱$ABCD$ 对角线的交点，a、b、c、d、e 分别为 A、B、C、D、E 各点到直线 MN 的距离．求证：$a+b+c+d=4e$．

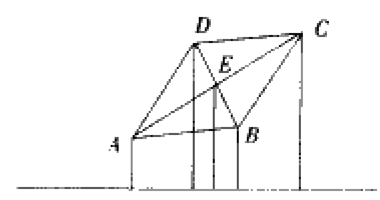


图 17－19

3. 如图 17－20，▱$ABCD$ 外有一条直线 MN，过 A、B、C、D 四点分别作 $AA_1 \perp MN$ 于 A_1，$DD_1 \perp MN$ 于 D_1，$BB_1 \perp MN$ 于 B_1，$CC_1 \perp MN$ 于 C_1。

(1) 求证：$AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$；

(2) 随着直线 MN 位置的变化，则（1）的结论有何变化？为什么？

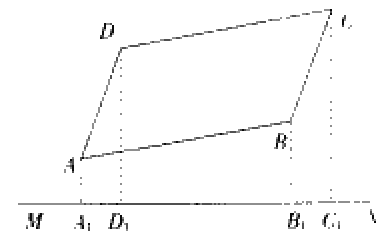


图 17－20

4. 如图 17－21，已知 K 和 M 分别是凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 CD 的中点，L 和 N 在其另外两边上，且 $KLMN$ 为矩形，设 $S_{四边形ABCD} = S$，$S_{矩形KNML} = S_1$，问：（1）S 与 S_1 有何关系？为什么？（2）任意一个凸四边形一定有内接平行四边形吗？其面积与原四边形有何关系？

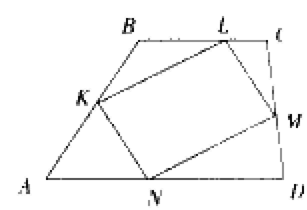


图 17－21

5. 如图 17－22，A、B 为两定点，O 为一动点，在 AB 所在平面上异于 O 点的一侧取 A' 点和 B' 点，使 $\angle OAA' = \angle OBB' = 90°$，且 $BB' = OB$，$AA' = OA$，设 $A'B'$ 的中点为 O'，试问：当 O 点在该平面上移动时，$A'B'$ 的中点 O' 的位置将怎样变化？

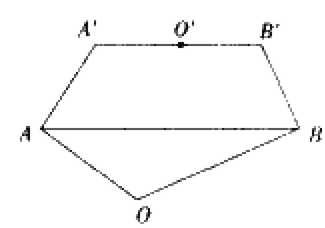


图 17－22

第十八讲　几何变换（一）

解题指要

在解决平面几何问题时，我们往往要借助数学思想方法，即变换和构造的思想方法，而几何变换是一种比较重要的思想方法．

所谓几何变换，就是几何图形在平面上满足某种条件的运动，即把一个图形 F_1 变换成另一个几何图形 F_2 的方法．而平移、对称、旋转都是常见的几何变换．

下面将介绍平移变换在几何解题中的作用．

一、什么叫平移变换

将图形 F 上的每一点按同一方向作等距移动，得到新图形 F_1，这种变换称之为平移变换．如图 18－1 所示．

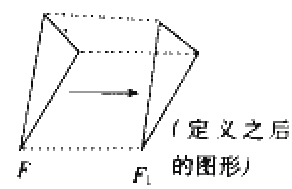


图 18－1

二、平移变换的作用与方法

平称变换常表现为作平行线，将分散的条件和结论集中到一个或几个三角形或其他规则的图形中，从而利用图形的性质和已知条件达到解决问题的目的．

三、平移变换的性质

平移变换前后的对应线段相等且平行，对应角的两边分别平行且方向一致；两个图形为全等形．

典型例题讲解

例1　如图 18－2，凸六边形 $ABCDEF$ 中，$AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，$CD \parallel AF$，其各对边之差相等，即 $BC - EF = ED - AB = AF - CD > 0$．求证：六边形 $ABCDEF$ 的各角相等．

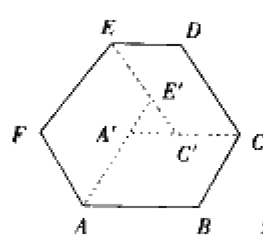


图 18－2

分析：通过平移，将各对边之差相等的分散条件集中，得$\triangle A'C'E'$为正三角形．

证明：过 A 点作 $AE' \underline{\parallel} FE$，过 C 点作 $CA' \underline{\parallel} AB$，过 E 点作 $EC' \underline{\parallel} DC$，由条件得$\triangle A'C'E'$为正三角形．

于是可得$\angle FEC' = \angle AE'C' = 60°$，$\angle EC'C = 120°$，$\angle DEC' = 60°$，$\therefore \angle FED = 120°$．同理可得$\angle EDC = \angle DCB = \angle CBA = \angle BAF = \angle AFE = 120°$．$\therefore$ 六边形 $ABCDEF$ 各角相等．

▶笔▶记▶栏

例2　如图 18－3，在$\triangle ABC$ 中，BE 平分$\angle ABC$，CD 平分$\angle ACB$，P 是 DE 的中点，过 P 点向 AB、BC、CA 作垂线，垂足分别为 M、Q、N．求证：$PQ = PM$

$+PN$.

证明：如图 18 - 3a，过 D、E 分别作 $DK\perp BC$，$DF\perp AC$ 于 K、F，$EG\perp BC$、$EH\perp AB$ 于 G、H.

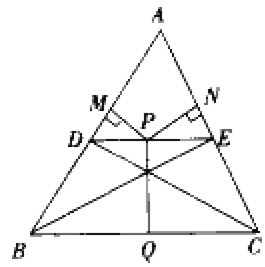


图 18 - 3

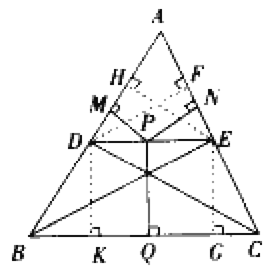


图 18 - 3a

$\because PM\perp AB$，$PN\perp AC$，$\therefore PM/\!/HE$，$PN/\!/DF$.

又 $\because DP=PE$，$\therefore EN=NF$，$DM=MH$.

$\therefore PM \underline{\measuredangle} \frac{1}{2}HE$，$PN \underline{\measuredangle} \frac{1}{2}DF$.

又 $\because BE$、CD 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$，

$\therefore DF=DK$，$EH=EG$. $\therefore PN=\frac{1}{2}DK$，$PM=\frac{1}{2}EG$.

$\because DK$、PQ、EG 分别垂直 BC，$\therefore DK/\!/PQ/\!/EG$.

$\therefore KQ=QG$. $\therefore PQ=\frac{1}{2}(DK+EG)=\frac{1}{2}DK+EG$.

即 $PQ=PM+PN$.

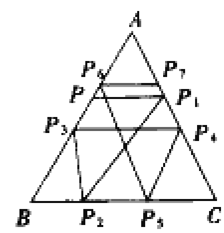


图 18 - 4

例3 如图 18 - 4，$\triangle ABC$ 的周长为 2001cm，一只小蚂蚁位于 AB 上的 P 点（A、B 除外），小蚂蚁首先由点 P 沿平行于 BC 的方向跑到 AC 边上的点 P_1，再由点 P_1 沿平行于 AB 的方向跑到 BC 边上的点 P_2，再由点 P_2 沿平行于 AC 的方向跑到 AB 边上的点 P_3，再由 P_3 沿平行于 BC 的方向跑……此后按上述规律一直跑下去. 问：小蚂蚁能否返回到 P？如果能再回到点 P，至少要跑多少路程？

解：(1) 若点 P 即为 AB 中点，易得 P_3 即与 P 重合，此时小蚂蚁跑的路程为 $\triangle ABC$ 的三条中位线长度之和，即 $\frac{2001}{2}$ (cm).

(2) 若点 P 不为 AB 的中点，则由小蚂蚁跑的规律可知：$P_1P_2/\!/AB$，$P_2P_3/\!/CA$，$P_3P_4/\!/BC$，$P_4P_5/\!/AB$，$PP_1/\!/BC$，$P_5P_6/\!/CA$，$P_6P_7/\!/BC$.

$\therefore\triangle P_3P_2B$ 可由 $\triangle AP_1P$ 通过平移得到，$\triangle P_4CP_5$ 可由 $\triangle P_3P_2B$ 通过平移得到，$\triangle AP_7P_6$ 可由 $\triangle P_4CP_5$ 通过平移得到.

$\therefore\triangle AP_1P\cong\triangle P_3P_2B\cong\triangle P_4CP_5\cong\triangle AP_7P_6$.

故 $AP=AP_6$，$AP_1=AP_7$.

即 P_6 与 P 重合，P_7 与 P_1 重合.

$\therefore$ 小蚂蚁最多经过 6 次转向，就回到了点 P. 此时，小蚂蚁跑的路程为：

$PP_1+P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4+P_5P=BP_2+AP_3+AP_1+CP_2+BP_3+CP_1=AB+BC+CA=2001$ (cm).

例四 如图 18－5，四边形 $ABCD$ 中，若 $AD=BC$，又 M、N 分别是 AB、DC 的中点，延长 AD、MN、BC 分别交于 E、F．求证：$\angle DEN=\angle NFC$．

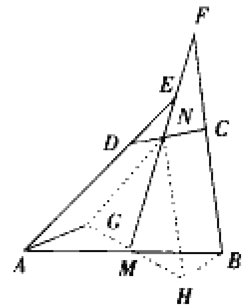


图 18－5

分析：为使两角集中起来，使条件也集中起来，可以考虑平移，转证：$\angle GNM=\angle HNM$．

证明：将线段 AD 和 BC 分别平移到 NG 和 NH 的位置，连结 AG、BH、GH，则四边形 $ADNG$ 和四边形 $BCNH$ 都为平行四边形．

$\therefore DN \underline{\parallel} AG$，$CN \underline{\parallel} BH$．

$\because DN=CN$，$\therefore AG \underline{\parallel} HB$．

$\therefore AGBH$ 也是平行四边形．

$\because M$ 是 BA 的中点，$\therefore GH$ 必过点 M，且以 M 为中点．

$\because AD=BC$，$GN=DA$，$HN=BC$，$\therefore GN=HN$．$\therefore \triangle GNH$ 是等腰三角形，NM 是底边上的中线．

$\therefore \angle GNM=\angle HNM$．

但 $\angle GNM=\angle DEN$，$\angle HNM=\angle CFN$，

$\therefore \angle DEN=\angle CFN$．

笔记栏

练习十八

一、选择题：

1．梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，M、N 分别是 AD、BC 的中点，设四边形 $ABMN$ 与四边形 $MNCD$ 的面积分别为 S_1、S_2，则 S_1 与 S_2 的大小关系是(　　)．

A．$S_1=S_2$　　B．$S_1>S_2$　　C．$S_1<S_2$　　D．无法确定

2．$\triangle ABC$ 中，若 $AB=6$，$AC=4$，则 BC 边上中线 AD 的长满足(　　)．

A．$AD<5$　　B．$1<AD<5$　　C．$AD>1$　　D．$2<AD<8$

3．如图 18－6，在直角梯形 $ABCD$ 中，底边 $AB=3$，$CD=8$，$AD\perp AB$，且 $AD=12$，则 A 到 BC 的距离为(　　)．

A．12　　B．13　　C．10　　D．$\dfrac{12\times 21}{3}$

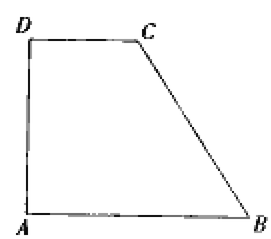


图 18－6

二、填空题：

1．如图 18－7，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle B=30^\circ$，$\angle C=60^\circ$，M、N 分别为 BC、DA 的中点，已知 $BC=7$，$MN=3$，则梯形 $ABCD$ 的中位线为________．

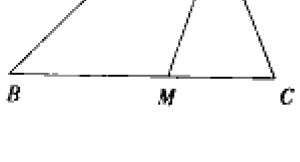


图 18－7

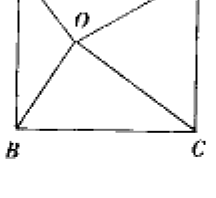


图 18－8

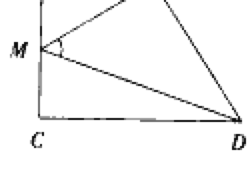


图 18－9

图 18－10

2. 如图 18－8，点 O 是矩形 $ABCD$ 内任一点，点 O 到点 A、B、C 的距离分别为 4、3、2，则点 O 到点 D 的距离是________.

3. 如图 18－9，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle C=90°$，$AB \parallel CD$，$BM=CM$，$DM \perp AM$，$AB=2$，$CD=4$，则 $AD=$________.

4. 如图 18－10，在一条河的两岸 l_1、l_2 旁分别有 A、B 两个村庄，现要设计一条道路，并在河上架起垂直于河岸的一座桥，用来连结 A、B 两个村庄，设计路线应当为________，桥应架在________点的位置，才能使从 A 到 B 所走的路程最短.

5. 如图 18－11，梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，已知 $AD+BC=3$，$AC=\sqrt{3}$，$BD=\sqrt{6}$，则梯形 $ABCD$ 的面积为________.

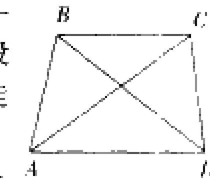


图 18－11

三、解答题：

1. 如图 18－12，已知△ABC 中，$AB=AC$，点 E、F 分别在 AB、AC 上，且 $AE=CF$．求证：$EF \geqslant \frac{1}{2}BC$.

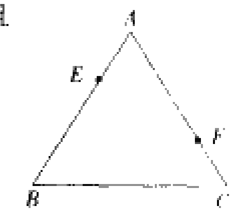


图 18－12

2. 如图 18－13，已知：$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$EF=FG$．求证：$AB=BC$．若 l_4 的位置变化，同样有 $E'F'=F'G'$，此时 AB 与 BC 的大小关系又怎样呢？由此你能得出什么结论？若 $\frac{EF}{FG}=\frac{2}{3}$，请问 $\frac{AB}{BC}=?$

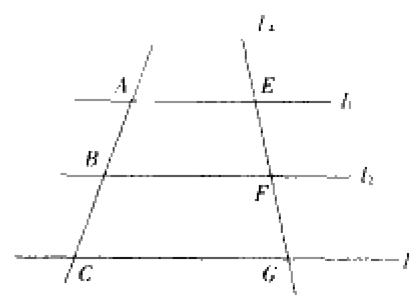


图 18－13

3. 如图 18－14，已知 D 是△ABC 中 BC 边上的中点，过 D 作 $DE \perp DF$，分别交 AB 于 E，交 AC 于 F．试比较 $BE+CF$ 与 EF 的大小关系.

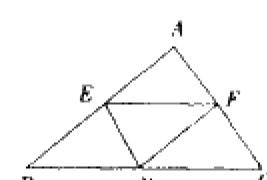


图 18－14

一、选择题：

1．如图 18－15，A、B 是两盏路灯，它们离电线 l 的距离分别是 4 米、8 米，CD 为 5 米，若由 l 上一点分别向 A、B 连电线，则最短为(　　)．

A．11 米　　B．12 米　　C．13 米　　D．8 米

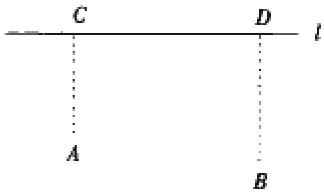


图 18－15

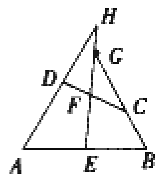


图 18－16

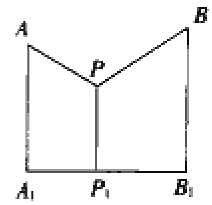


图 18－17

2．如图 18－16，四边形 $ABCD$ 中，$AD > BC$，E、F 分别是 AB、CD 的中点，AD、BC 的延长线分别与 EF 的延长线交于 H、G，则(　　)．

A．$\angle AHE > \angle BGE$　　B．$\angle AHE < \angle BGE$

C．$\angle AHE = \angle BGE$　　D．$\angle AHE$ 与 $\angle BGE$ 的大小关系不确定

3．如图 18－17，已知 $\angle A = \angle B$，AA_1、PP_1、BB_1 均垂直于 A_1B_1，$AA_1 = 17$，$PP_1 = 16$，$BB_1 = 20$，$A_1B_1 = 12$，则 $PA + PB$ 等于(　　)．

A．12　　B．13　　C．14　　D．15

二、填空题：

1．如图 18－18，在△ABC 中，AE 是$\angle BAC$ 的外角平分线，D 是 AE 上任意一点，则 $AB + AC$ 与 $BD + DC$ 的大小关系是__________．

2．如图 18－19，在正方形 $ABCD$ 中，E 在 BC 上，$BE = 3$，$CE = 2$，P 在 BD 上，则 PE 和 PC 的长度之和最小可达到__________．

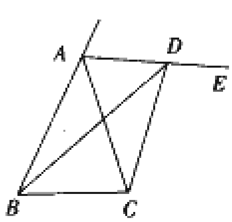


图 18－18

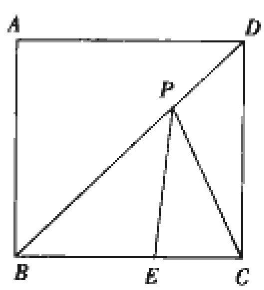


图 18－19

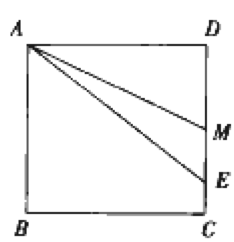


图 18－20

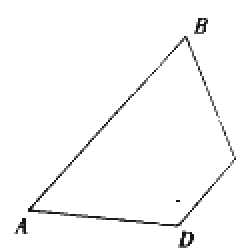


图 18－21

3．如图 18－20，在正方形 $ABCD$ 中，M 是 CD 的中点，E 是 CD 上一点，且$\angle BAE = 2\angle DAM$，则 $BC + CE - AE =$__________．

4．如图 18－21，$AB /\!/ CD$，$\angle D = 2\angle B$，若 $AD = 12$，$CD = 7$，则 $AB =$__________．

三、解答题：

1．用长为 1、4、4、5 的线段为边作一个梯形，求其中面积最小的那个梯形的两条对角线之和．

2. 设 AT 是$\triangle ABC$ 的内角$\angle BAC$ 的平分线，M 是 BC 的中点，$ME \parallel AT$ 交 AC（或其延长线）于 E，交 AB 的延长线（或 AB）于 D. 求证：$BD = CE$.

3. 如图 18－22，$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 其各边交成六边形 $DEFGHK$，且 $EF \parallel KH$，$GH \parallel DE$，$FG \parallel KD$，$KH - EF = FG - KD = DE - GH > 0$. 求证：$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 均为正三角形.

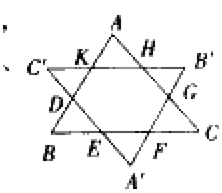


图 18－22

第十九讲　几何变换（二）

专题指要

上一讲我们已经介绍了平移变换．这一讲我们将介绍另外两种几何变换．

一、对称变换

1．概念：对称变换又叫做反射变换，它是指两个图形与一条直线的关系．对称变换包括中心对称和轴对称．若图形 F 上每一点都关于定点 O 的对称点所组成的图形 F_1，则 F 与 F_1 是关于 O 中心对称；将图形在平面内绕某直线 l 翻折 $180°$而得到图形 F_1，则 F 与 F_1 关于直线 l 轴对称，如图 19－1 所示．

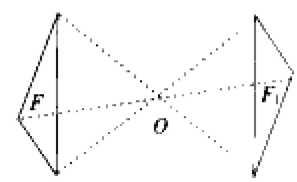


图 19－1

2．性质：如图 19－2．

（1）对称的两个图形为全等形．

（2）F 与 F_1 每对对称点的连线被对称轴垂直平分或对称中心平分．

（3）对称线段或其延长线若相交，则交点在对称轴上．

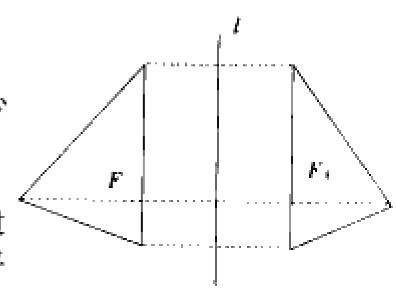


图 19－2

3．解题策略及作用：当条件出现了中点、中线时，常通过“倍长中线”进行中心对称变换；当条件出现了等腰三角形、角平分线、垂线或要求出折线长时，可通过轴对称变换，以“补齐”图形、“聚集”条件．

二、旋转变换

1．概念：将平面图形 F 绕某一定点 O 旋转一个定角 β 得到新图形 F_1，这样的变换称为旋转变换，定点 O 为旋转中心，β 为旋转角，如图 19－3 所示．

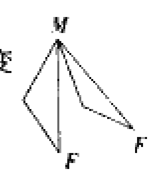


图 19－3

2．性质：如图 19－3．

（1）F 与 F_1 为全等形．

（2）对应点到旋转中心的距离相等，对应线段的交角等于旋转角．

3．三个要点：（1）对谁旋转；（2）认准旋转中心；（3）确定旋转角．

在解题时，根据不同的条件选用有关的变换，可化难为易、化繁为简．

典型例题讲解

例1　如图 19－4，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，D 是 $\triangle ABC$ 内一点，$AD=AC$，$\angle CAD=30°$．求证：$BD=CD$．

分析：可以作 A 点关于 CD 的对称点 A'.

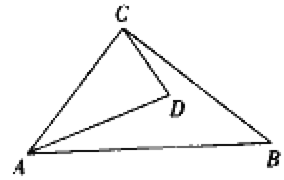


图 19－4

证明：如图 19－4a，作 A 点关于 CD 的对称点 A'，连结 $A'C$、$A'D$、$A'B$.

因 CD 是 AA' 的对称轴，所以 $AC=A'C$，$AD=A'D$.

又因 $AD=AC$，所以四边形 $ADA'C$ 是菱形，$\angle CA'D=\angle CAD=30^\circ$，$\angle ACA'=150^\circ$.

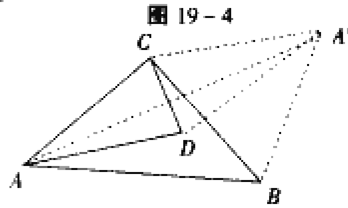


图 19－4a

因$\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore \angle A'CB=60^\circ$．因 $AC=BC$，所以 $A'C=BC$.

$\triangle A'CB$ 为等边三角形.

所以 $A'B=A'C=A'D$，$\angle BA'D=60^\circ-\angle CA'D=30^\circ$.

所以$\triangle CA'D\cong\triangle BA'D$.

故 $BD=CD$.

例二 如图 19－5，在等腰$\triangle ABC$ 中，顶角$\angle A=100^\circ$，作$\angle B$ 的平分线交 AC 于 E．求证：$AE+BE=BC$.

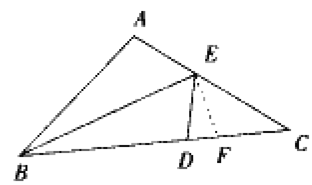


图 19－5

分析：因为 BE 是$\angle B$ 的平分线，于是可作 A 关于 BE 的对称点 D.

证明：作点 A 关于 BE 的对称点 D.

$\because BE$ 是$\angle B$ 的平分线，$\therefore D$ 必在 BC 上，且 $DE=AE$.

在 BC 上取 $BF=BE$.

$\because \angle A=100^\circ$，$\therefore \angle B=\angle C=40^\circ$．$\therefore \angle ABE=\angle CBE=20^\circ$.

由等腰$\triangle BEF$ 知$\angle BEF=\angle BFE=80^\circ$.

又$\angle AEB=60^\circ$，$\therefore \angle CEF=180^\circ-60^\circ-80^\circ=40^\circ$.

$\therefore \triangle FEC$ 是等腰三角形．$\therefore CF=EF$.

又$\because \angle FDE=\angle DBE+\angle BED=20^\circ+60^\circ=80^\circ$，

$\therefore \angle EDF=\angle EFD$．$\therefore DE=FE$，即 $CF=FE=ED$.

于是　$BC=BF+CF=BE+DE=BE+AE$.

例三 如图 19－6，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于 D，AF 平分$\angle CAB$ 交 CD 于 E，交 CB 于 F，且 $EG\parallel AB$ 交 CB 于 G．问：CF 与 GB 的大小关系如何？

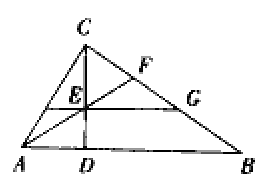


图 19－6

分析：将$\triangle ACF$ 作关于角平分线 AF 的对称变换，从而构造全等三角形.

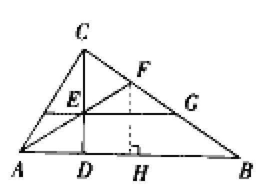


图 19－6a

解：如图 19－6a，作 $FH\perp AB$ 于 H，由 AF 平分$\angle CAB$，$\angle ACF=\angle AHF$，可知$\triangle ACF\cong\triangle AHF$，$\therefore CF=HF$.

$\because CD\perp AB$ 于 D，故$\angle CFA=90^\circ-\angle CAF=90^\circ-\angle FAD=\angle AED=\angle CEF$，

$\therefore CE=CF$，即 $CE=HF$．由 $EG\parallel AB$，知$\angle EGC=\angle HBF$．在$\triangle EGC$ 与$\triangle HBF$ 中，有$\angle CEG=\angle FHB$，$\angle EGC=\angle HBF$，$CE=FH$，

$\therefore \triangle EGC\cong\triangle HBF$，$CG=BF$.

$\therefore CF = CG - FG = FB - FG = GB$.

例四 如图 19-7，点 P 是正方形 $ABCD$ 内一点，若 $PA=1$，$PB=2$，$PC=3$，求：(1) $\angle APB$ 的度数；(2) 正方形的边长.

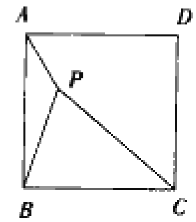


图 19-7

分析：条件较分散，可通过将$\triangle APB$ 绕 B 点旋转 $90°$把条件集中起来.

解：(1) 将$\triangle APB$ 绕 B 点旋转 $90°$得$\triangle CQB$，连 PQ、AC，则$\triangle CQB \cong \triangle APB$.

$\because \angle PBQ = 90°$，$PB = QB = 2$，

$\therefore \angle PQB = \angle BPQ = 45°$，$PQ = 2\sqrt{2}$.

在$\triangle PQC$ 中，$CP=3$，$CQ = AP = 1$，$PQ = 2\sqrt{2}$.

$\therefore PC^2 = CQ^2 + PQ^2$. $\therefore \angle PQC = 90°$.

$\therefore \angle APB = \angle CQB = \angle PQB + \angle PQC = 135°$.

(2) 由 (1) 得$\angle APB + \angle BPQ = 135° + 45° = 180°$，

$\therefore A$、P、Q 三点共线.

$\therefore AQ = AP + PQ = 1 + 2\sqrt{2}$.

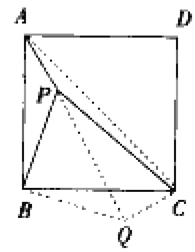


图 19-7a

在 Rt$\triangle AQC$ 中，$AC = \sqrt{AQ^2 + CQ^2} = \sqrt{(1+2\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{10+4\sqrt{2}}$.

$\therefore AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

例五 如图 19-8，在凸四边形中，$\angle ABC = 30°$、$\angle ADC = 60°$，$AD = AC$. 证明：$BD^2 = AB^2 + BC^2$.

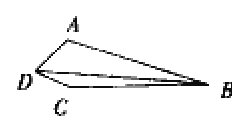


图 19-8

分析：要证明的结论类似勾股定理的形式，由于 $AD = DC$，可以将$\triangle BCD$ 绕 C 点旋转 $60°$，从而将 BD、AB、BC 集中到一个三角形中.

证明：如图 19-8a，作 $BE \perp AB$，使 $BE = BC$，连接 AC、AE.

$\therefore AE^2 = AB^2 + BE^2 = AB^2 + BC^2$.

$\because \angle ABC = 30°$，$BE \perp AB$，$\therefore \angle CBE = 60°$.

$\because BE = BC$，$\therefore \triangle BCE$ 为等边三角形，$CE = BC$，$\angle BCE = 60°$.

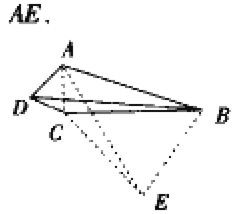


图 19-8a

$\because DC = DA$，$\angle ADC = 60°$，$\therefore \triangle ADC$ 为等边三角形，$\angle DCA = 60°$，$DC = AC$.

$\because \angle DCA + \angle ACB = 60° + \angle ACB = \angle ECB + \angle ACB$.

$\therefore \angle DCB = \angle ACE$.

$\because DC = AC$，$\angle DCB = \angle ACE$，$BC = EC$.

$\therefore \triangle DCB \cong \triangle ACE$，$BD = AE$.

$\therefore BD^2 = AB^2 + BC^2$.

例六 已知正方形 $ABCD$ 内一点 E 到 A、B、C 三点的距离之和的最小值为$\sqrt{2}+\sqrt{6}$，求此正方形的边长.

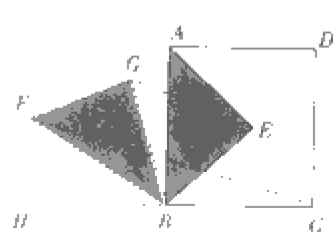


图 19-9

▶笔 ▶记 ▶栏

解：如图 19－9，将△ABE 绕 B 点旋转 60°，得△FBG，连 GE．由于∠EBG ＝60°，$BE=BG$，故△BEG 是等边三角形，$GE=EB$．

∴ $FC \leqslant FG+GE+EC=EA+EB+EC$．

这里，F、C 为定点，FC 为定长，故当 E 落在 FC 上时，FC 便为 $EA+EB+EC$ 的最小值，因而 $FC=\sqrt{2}+\sqrt{6}$．

作 $FH \perp BC$ 交 CB 延长线于 H．由于∠$ABF=60°$，故∠$FBH=30°$．

设 $BC=x$，则 $FB=x$，$FH=\dfrac{x}{2}$，$HB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，

在 Rt△FHC 中，$FC^2=FH^2+HC^2$，即$(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2$，

即　$42+\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})x^2$，

得　$x=2$．

故正方形的边长为 2．

▶笔▶记▶栏

练习十九 [illegible]

一、选择题：

1．将两个全等三角形用各种不同的方法拼成四边形，其中平行四边形的个数是(　　)．

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

2．如图 19－10，矩形纸片的长 $AD=12$cm，宽 $AB=4$cm，将其折叠，使点 D 与点 B 重合，那么折叠后 DE 的长和折痕 EF 的长分别为(　　)．

A．4cm，$\sqrt{10}$cm　　B．4cm，$2\sqrt{3}$cm　　C．5cm，$\sqrt{10}$cm　　D．$\dfrac{20}{3}$cm，$\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$cm

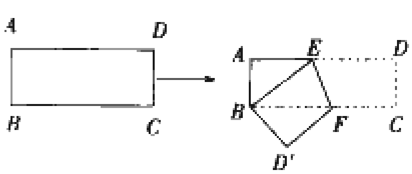


图 19－10

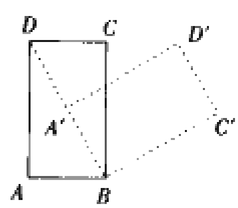


图 19－11

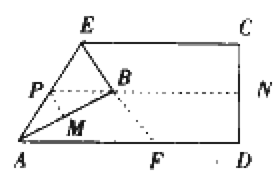


图 19－12

3．如图 19－11，矩形 $ABCD$ 中，长 $AD=\sqrt{5}$，宽 $AB=1$，B 为中心，按顺时针方向转动到 $A'B'C'D'$ 的位置（A' 点在对角线 BD 上），则图形扫过的部位面积为(　　)．

A．$\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi$　　B．$\sqrt{5}+\pi$　　C．$\sqrt{3}+\pi$　　D．$2\sqrt{5}$

4．如图 19－12，把矩形 $ABCD$ 对折，设折痕为 MN，再把 B 点叠在折痕线上，得到 Rt△ABE，沿着 EB 折叠，所得到的△EAF 是(　　)．

A．等腰三角形　　B．等边三角形　　C．等腰直角三角形　　D．直角三角形

二、填空题：

1．如图 19－13，若折叠长方形的一边 AD，使点 D 落在 BC 边的点 F 处，已知 $AB=8$cm，$BC=10$cm，则 $EC=$________．

2．如图 19－14，△ABC 是直角三角形，BC 是斜边，将△ABP 绕点 A 逆时针旋转后，能与△ACP' 重合，如果 $AP=4$，那么 PP' 的长等于________．

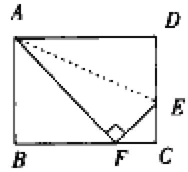


图 19－13

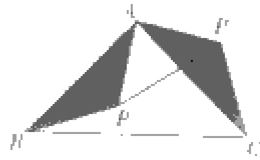


图 19－14

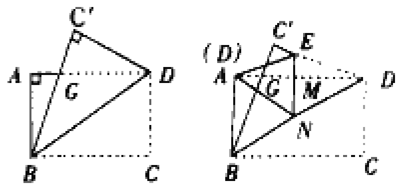


图 19－15

3. 把一张宽为 3、长为 4 的矩形纸片 $ABCD$，先沿对角线 BD 对折，使点 C 落在点 C' 的位置，BC' 交 AD 于 G，再折叠一次，使点 D 与点 A 重合，得折痕 EN，EN 交 AD 于点 M，如图 19－15 所示，则 ME 的长为________．

三、解答题：

1. 如图 19－16，点 A 是$\angle MON$ 内任一点．求作：$\triangle ABC$，使 B 在 OM 上，C 在 ON 上，且使$\triangle ABC$ 周长最小．

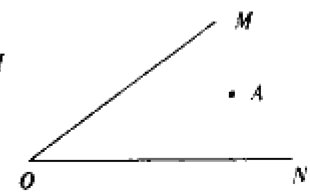


图 19－16

2. 如图 19－17，点 O 是等边三角形 ABC 内的一点，$\angle AOB = 110°$、$\angle BOC = 135°$．试问：
   (1) 以 OA、OB、OC 为边能否构成一个三角形？若能，请求出该三角形各内角的度数；若不能，请说明理由．
   (2) 若$\angle AOB$ 的大小保持不变，那么当$\angle BOC$ 等于多少度时，以 OA、OB、OC 为边的三角形是一个直角三角形？

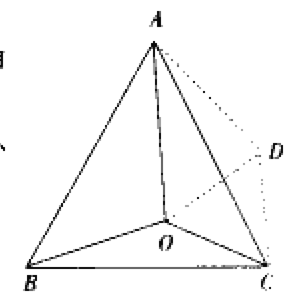


图 19－17

3. 如图 19－18，$\triangle ABC$ 中，$AB = 3$、$AC = 2$，以 BC 为边的$\triangle BCP$ 是等边三角形，求 AP 的最大值和最小值．

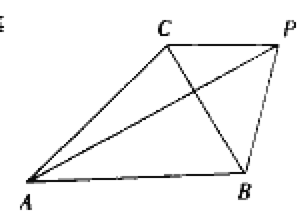


图 19－18

4. 试证：凸四边形的面积不大于对边乘积之和的一半．

阶梯练十九

一、选择题：

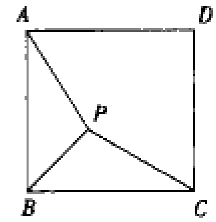


图 19－19

1．如图 19－19，P 是正方形内一点，若 $PA=a$，$PB=2a$，$PC=3a$，$a>0$，则 $\angle APB$ 的度数为(　　)．

A．$120°$　　B．$135°$　　C．$145°$　　D．$150°$

2．如图 19－20，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=120°$，P 是 $\triangle ABC$ 内一点，若记 $x=PA+PB+PC$，$y=AB+AC$，则(　　)．

A．$x<y$　　B．$x>y$　　C．$x=y$　　D．x 与 y 不能确定

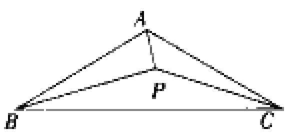


图 19－20

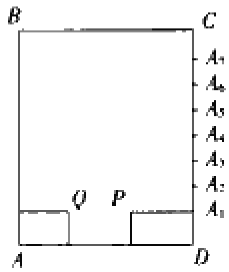


图 19－21

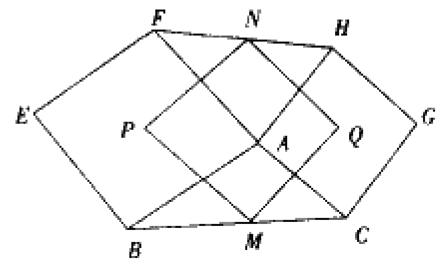


图 19－22

3．如图 19－21，在一个 4×8 的球台上有两个小球 P 和 Q，若小球 P 依次经过球台边 AB、BC、CD 和 DA 反弹后刚好击中小球 Q，则小球 P 击出时的瞄准点是 CD 上的（图中 A_1，A_2，A_3，…，A_7 为 CD 的 8 等分点）(　　)．

A．A_4　　B．A_3　　C．A_2　　D．A_5

4．正方形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 有共同的中心 O，则 AA_1 与 BB_1 的位置关系是(　　)．

A．相交　　B．平行　　C．垂直　　D．不确定

5．如图 19－22，在 $\triangle ABC$ 的外侧作正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$，M 和 N 各是 BC、FH 的中点，P、Q 各是所作的两个正方形的中心，则四边形 $MQNP$ 是(　　)．

A．平行四边形　B．矩形　　C．正方形　　D．不能确定

二、填空题：

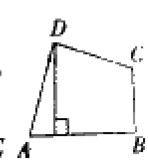


图 19－23

1．如图 19－23，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=DC$，$\angle ADC=\angle ABC=90°$，$DE\perp AB$ 于 E，若四边形 $ABCD$ 的面积为 16，则 DE 的长为________．

2．如图 19－24，已知 $AC=BC$，$\angle C=90°$，$\angle A$ 的平分线 AD 交 BC 于 D，过 B 作 $BE\perp AD$ 于 E，则 BE 与 $\frac{1}{2}AD$ 的大小关系为________．

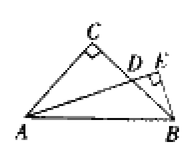


图 19－24

3．在等腰直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，D 为斜边上任一点，则 $BD^2+DC^2=$________AD^2．

4．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=2$，一动点 D 到它的各顶点距离之和的最小值为 $\sqrt{7}$，则它的两条直角边的长为________．

5．M 是正 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle AMB=100°$，$\angle BMC=140°$，则 AM、BM、CM 可以构成一个三角形，这个三角形的内角分别为________．

三、解答题：

1．如图 19－25，设 A、B、C 是平面上的三个点，当△ABC 的三个内角都小于 $120°$，且 $\angle APB=\angle BPC=\angle APC$ 时，则有 $PA+PB+PC$ 的值最小．由此请你编拟一个实际问题的题目出来．

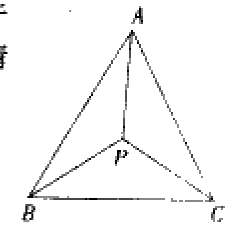


图 19－25

2．在△ABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别记为 a、b、c，若 $b<\frac{1}{2}(a+c)$，求证：$\angle B<60°$．

3．如图 19－26，已知凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADB=\angle ABC=105°$，$\angle DAB=\angle DCB=45°$，若点 A 到直线 BD 的距离为 1001，求 CD 的长．

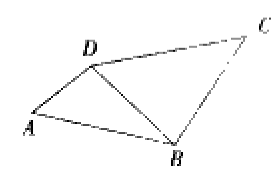


图 19－26

4．如图 19－27，地面上有不在同一直线上的 A、B、C 三点，一只青蛙位于地面异于 A、B、C 的 P 点，第一步青蛙从 P 点跳到 P 关于 A 的对称点 P_1，第二步青蛙从 P_1 点跳到 P_1 关于 B 的对称点 P_2，第三步从 P_2 点跳到 P_2 关于 C 的对称点 P_3，第四步从 P_3 点跳到 P_3 关于 A 的对称点 P_4，……依此跳法类推．问：青蛙跳完第 2001 步，落在地面的何位置上？

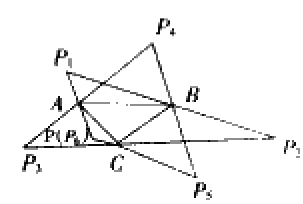


图 19－27

5. 如图 19－28，在正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 内取一点 P，由 A_1 向 A_2P 引垂线 l_1，由 A_2 向 A_3P 引垂线 l_2，由 A_3 向 A_4P 引垂线 l_3，由 A_4 向 A_1P 引垂线 l_4。试证：直线 l_1、l_2、l_3、l_4 相交于一点。

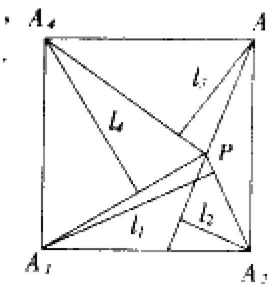


图 19－28

6. 已知：如图 19－29，$\triangle ABC$ 中，D 是 AB 的中点，点 E、F 分别在 AC、BC 上。求证：$S_{\triangle DEF} \leqslant S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDF}$。

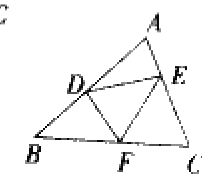


图 19－29

第二十讲　根式（一）

解题精要

根式在数学竞赛中也是比较常见的，它的涉及面较广．根式的性质是根式的运算以及等式的恒等变形的基础，因此对根式的探求有很大的必要性．

一、根式

1．根式的概念

式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式，其中 n 为根指数（$n>1$ 的整数），a 为被开方数，当 n 为偶数时，a 必须为非负数，即 $a\geqslant 0$ 根式才有意义；当 n 为奇数时，a 为任意实数．特别地，式子$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）为二次根式．

2．根式的性质

（1）$(\sqrt[n]{a})^n=a$．

（2）当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$．

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\ -a\ (a<0).\end{cases}$

（3）$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$（$a\geqslant 0$）．

（4）$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$．

（5）$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$．

（6）$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$；$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$（$a\geqslant 0$）．

（7）$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$（$a>0$，$b>0$，$a^2-b$ 为完全平方数）．

（8）若 $a>b>0$，则$\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$，反之亦然．

二、指数式

1．有理指数幂的定义

$a^n=\underbrace{a\cdots a}_{n个a}$，规定：$a^0=1$（$a\neq 0$），$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$（$a\neq 0$，$n$ 为正整数）．

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$（$m$、$n$ 均为正整数，且 $n>1$）．

$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（$a\neq 0$，$m$、$n$ 均为正整数，且 $n>1$）．

2．有理指数幂的运算法则

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；$(ab)^m=a^m\cdot b^n$；

$(a^m)^n=a^{mn}$；$a^m\div a^n=a^{m-n}$.

解题时，应注意根式中有意义的相关字母的取值范围，善于发掘隐含条件，同时应注意有关性质的正用与逆用.

典型例题讲解

例一 化简$\sqrt{x^2}+\sqrt{(2-x)^2}+\sqrt{(x+3)^2}$.

分析：由根式的性质转化为带有绝对值的代数式，然后进行分段讨论.

解：用零点区方法可得：原式$=|x|+|x-2|+|x+3|$.

当$x\leqslant-3$时，原式$=-x+2-x-x-3=-3x-1$；

当$-3<x\leqslant0$时，原式$=-x+2-x+x+3=-x+5$；

当$0<x\leqslant2$时，原式$=x+2-x+x+3=x+5$；

当$x>2$时，原式$=x+x-2+x+3=3x+1$.

例二 设$a\neq b$，根式$\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}$有意义，试化简之.

分析：由于该根式有意义，于是必有$ab\geqslant0$，于是可分两种情况进行讨论：即（1）$a>0$，$b\geqslant0$；（2）$a<0$，$b\leqslant0$.

解：由于根式$\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}$有意义，所以$ab\geqslant0$. 可分两种情况讨论：

（1）当$a>0$，$b\geqslant0$时，$\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}=\sqrt{-a+2\sqrt{ab}-b}=\sqrt{-(a-2\sqrt{ab}+b)}=\sqrt{-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$.

只有当$a=b$时，上式才有意义，而这与条件中$a\neq b$矛盾.

∴ 此种情况不成立.

（2）当$a<0$，$b\leqslant0$时，$\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}=\sqrt{-a+2\sqrt{ab}-b}=\sqrt{(\sqrt{-a})^2+2\sqrt{(-a)(-b)}+(\sqrt{-b})^2}=\sqrt{(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2}=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$.

综上所述，$\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$.

例三 已知a、b是实数，且$(\sqrt{1+a^2}+a)(\sqrt{1+b^2}+b)=1$. 问：$a$、$b$之间有何关系？为什么？

分析：本题不知从何入手时，可以采用特殊值法，即用$a=0$、1、2代入得$b=0$、-1、-2. 于是猜想$a+b=0$，从原式入手进行根式的变形，使得有$a+b=0$即可.

解：$\because\sqrt{1+b^2}+b=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}+a}=\sqrt{1+a^2}-a$，

$\therefore\sqrt{1+b^2}+a=\sqrt{1+a^2}-b$.

两边平方得$1+b^2+a^2+2a\sqrt{1+b^2}=1+a^2+b^2-2b\sqrt{1+a^2}$，即$a\sqrt{1+b^2}=-b\sqrt{1+a^2}$.

两边再平方得$a^2+a^2b^2=b^2+a^2b^2$，即$a^2=b^2$.

$\therefore a+b=0$或$a-b=0$.

▶笔 ▶记 ▶栏

当 $a-b=0$ 时，代入原式可得 $a=b=0$.

$\therefore$ 当 $a+b=0$ 时，原式子成立.

例四 如果 $a+b+\left|\sqrt{c-1}-1\right|=4\sqrt{a-2}+2\sqrt{b+1}-4$，求 $[\sqrt{a}+(3b)^n-\sqrt{3c}]^{2001}$ 的值.

分析：观察条件式子的特点，配方化成 $A^2+B^2+C^2=0$ 的形式，利用非负性可得 $A=0$，$B=0$，$C=0$，从而求出 a、b、c 的值.

解：由条件可得 $a-2+b+1+\left|\sqrt{c-1}-1\right|-4\sqrt{a-2}-2\sqrt{b+1}+5=0$，

$(\sqrt{a-2}-2)^2+(\sqrt{b+1}-1)^2+\left|\sqrt{c-1}-1\right|=0$.

$\therefore \sqrt{a-2}=2$，$\sqrt{b+1}=1$，$\sqrt{c-1}=1$.

解得：$a=6$，$b=0$，$c=2$.

$\therefore [\sqrt{a}+(3b)^n-\sqrt{3c}]^{2001}=(\sqrt{6}-\sqrt{6})^{2001}=0$.

例五 若 $d=a^2+b^2+c^2$，其中 a、b 是相继的两个自然数，且 $c=ab$. 求证：$\sqrt{d}$ 是奇数. 证明：设 $b=a+1$，则 $c=ab=a(a+1)$.

$\because$ $d=a^2+b^2+c^2$，

$\therefore$ $\sqrt{d}=\sqrt{a^2+(a+1)^2+a^2(a+1)^2}=\sqrt{[a(a+1)]^2+a^2+a^2+2a+1}=\sqrt{[a(a+1)]^2+(2a^2+2a)+1}=\sqrt{[a(a+1)]^2+2a(a+1)+1}$

$=\sqrt{[a(a+1)+1]^2}=a(a+1)+1$.

$\because$ $a(a+1)$ 是两个相继自然数的积，

$\therefore$ $a(a+1)$ 是偶数，因此 $a(a+1)+1$ 是奇数，即 $\sqrt{d}$ 是奇数.

例六 当 $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 时，求代数式 $x^4-9x^2+\sqrt{2}x+1$ 的值.

解：$\because$ $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$\therefore$ $x^2=5-2\sqrt{6}$，$x^2-5=-2\sqrt{6}$.

两边平方，得 $(x^2-5)^2=(-2\sqrt{6})^2$.

展开并整理，得 $x^4-10x^2+1=0$，

$$x^4-9x^2+\sqrt{2}x+1=x^4-10x^2+1+x^2+\sqrt{2}x$$
$$=(x^4-10x^2+1)+x(x+\sqrt{2}). \quad ①$$

由 $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，可得 $x+\sqrt{2}=\sqrt{3}$.

把 $x^4-10x^2+1=0$ 及 $x+\sqrt{2}=\sqrt{3}$ 代入①式，得 $x^4-9x^2+\sqrt{2}x+1=0+x\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-\sqrt{6}$.

例七 若 a 为实数，试确定 $\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$ 的所有可能值.

解：设 $y=\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$. ①

(1) 设 $a\geqslant 0$ 时，$y\geqslant 0$，①式两边平方，得

$y^2=2a^2+2-2\sqrt{a^4+a^2+1}$， ②

即 $2a^2+2-y^2=2\sqrt{a^4+a^2+1}$. ③

再平方，得 $y^4-4y^2-4(y^2-1)a^2=0$. ④

从而 $a^2=\dfrac{y^2(y^2-4)}{4(y^2-1)}\geqslant 0$. ⑤

▶笔▶记▶栏

由②知　$y^2<2a^2+2-2\sqrt{a^4}=2$.

由⑤知　$y^2<1$. $\therefore 0\leqslant y<1$，即$\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$的变化范围是$0\leqslant\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}<1$.

反过来，对于$[0,1)$中的每一个y值，由⑤式可以定出a，并且此时$2a^2+2-y^2>0$，故可由⑤式逆推出②式和①式，因而在$a\geqslant0$时，$\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$的变化范围在$[0,1)$.

(2) $a<0$时，同上面的推理，可知$\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$的变化范围在$[-1,0)$.

综合(1)、(2)可知$\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$的变化范围为$(-1,1)$，也就是说，对于实数$a$，式子$\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$的所有可能的值在$(-1,1)$内可以取得.

笔记栏

练习二十

一、选择题：

1. 化简$(a-4)\sqrt{\frac{1}{4-a}}$，所得结果是(　　).

A. $\sqrt{a-4}$　　B. $\sqrt{4-a}$　　C. $-\sqrt{a-4}$　　D. $-\sqrt{4-a}$

2. 一个自然数的算术平方根为x $(x>1)$，则与此相邻的两个自然数的算术平方根为(　　).

A. $x-1$，$x+1$　　B. $\sqrt{x-1}$，$\sqrt{x+1}$　　C. $\sqrt{x^2-1}$，$\sqrt{x^2+1}$　　D. x^2-1，x^2+1

3. $\frac{1}{1+\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{1-\sqrt[4]{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$的值为(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

4. 计算$\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^{-1}$可得(　　).

A. $\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}+1)$　　B. $\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1)$　　C. $\sqrt[3]{2}-1$　　D. $\sqrt[3]{2}+1$

5. 设a、b、c为三角形三边的长，则$\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}+\sqrt{(c-a-b)^2}$为(　　).

A. 0　　B. $a+b+c$　　C. $2(a+b+c)$　　D. 以上都不对

6. 已知$x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，则代数式$3x^2-10x^2y^2+3y^2$的值为(　　).

A. 284　　B. 280　　C. 304　　D. $4\sqrt{6}-384$

二、填空题：

1. 已知$a^{2x}=\sqrt{2}+1$ $(a>0)$，则$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=$______.

2. 已知$a+b=6$，$ab=4$，则$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$______.

3. 化简：$\frac{\sqrt{x^2-4x+x}}{x-2}+\frac{|x-1|}{x-1}$（$1<x<2$）$=$ ______

4. 化简：$\frac{2a^2}{3b}\sqrt{\frac{b^3}{a^4}-\frac{b^2}{a^4}}=$ ______.

5. 若$\sqrt{2}x>\sqrt{3}x+1$，则$\sqrt[3]{(x+2)^3}-\sqrt{(x+3)^2}=$ ______.

6. 若 $a>0$，$\frac{a}{b}<0$，则$\sqrt{(b-a-4)^2}-\sqrt{(a-b+1)^2}=$ ______.

三、解答题：

1. 计算下列各题：

（1）$\sqrt{a^2b\sqrt{ab^2\sqrt{a}}}$；

（2）$[a^{\frac{1}{2}}b^{-2}(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})^3]^2$；

（3）$8x^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{y^{-\frac{1}{3}}x\cdot\sqrt[4]{y^{\frac{4}{3}}}}$；

（4）$\left(\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$；

（5）$[a^{-\frac{3}{2}}b(ab^{-2})^{\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}]^2$；

（6）$\frac{(a^{\frac{2}{3}}b^{-1})^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{ab^5}}$；

（7）$\left(\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)\cdot\frac{x\sqrt{x}-1}{x-1}\div(x+\sqrt{x}+x\sqrt{x})$；

（8）$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$；

(9) 若 $e^x=\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{3}}}$，求$\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{e^x+e^{-x}}$的值；

(10) 已知$\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$，求$\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$的值；

(11) $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.

2. 解答下列各题：

(1) 若实数$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$的整数部分为 a、小数部分为 $1-b$，求$\frac{a+b}{a-b}$的值.

(2) 设 a 与 b 是两个不相等的有理数，试判断实数$\frac{a+\sqrt{2}}{b+\sqrt{2}}$是有理数还是无理数，并说明理由.

(3) 若长度分别为 a、b、c 的三条线段可以构成三角形，则$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$是否能够构成三角形？a^2、b^2、c^2 呢？$\sqrt[3]{a}$、$\sqrt[3]{b}$、$\sqrt[3]{c}$呢？

(4) 比较$\sqrt{3}-\sqrt{2}$与$\sqrt{2}-1$的大小，$\sqrt{4}-\sqrt{3}$与$\sqrt{3}-\sqrt{2}$的大小，$\sqrt{5}-\sqrt{4}$与$\sqrt{4}-\sqrt{3}$的大小，从而比较$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$与$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$的大小.

一、选择题：

1. 设 $x=\frac{1}{2}(2001^{\frac{1}{n}}-2001^{-\frac{1}{n}})$（其中 n 为正整数），则$(x-\sqrt{1+x^2})^n$ 的值是(　　).

A. $(-1)^n 2001^{-1}$　　B. 2001^{-1}　　C. -2001^{-1}　　D. $(-1)^n 2001$

2. 如果最简根式$\sqrt[3x+y]{2x-y}$与$\sqrt[y+6]{4x+y-2}$是同次根式，且 y 是偶数，则 y 的所有可能值之和是(　　).

A. 0　　B. 2　　C. 4　　D. 6

3. 在实数范围内，代数式$\left|\,|\sqrt{-(x-6)^2}-1|-2\right|$的值为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 1　　D. 不能确定

二、填空题：

1. 已知实数 a 满足$|2001-a|+\sqrt{a-2002}=a$，则 $a-2001^2=$________.

2. 已知实数 x、y 满足$y=\frac{\sqrt{x^2-y}+\sqrt{y-x^2}+3}{x-3}$，则 $3x+8y=$________.

3. 观察下列等式：$\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$，$\sqrt[3]{3\frac{3}{26}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{26}}$，$\sqrt[3]{4\frac{4}{63}}=4\sqrt[3]{\frac{4}{63}}$，…，于是可得出一般的规律是________.

三、解答题：

1. 观察下列各式，挖掘其隐含条件，并解答：

(1) 化简：$(\sqrt{a})^2+\sqrt{a^2}$；

(2) 化 $x\sqrt{\frac{y}{x}}\,(y<0)$为最简根式；

(3) 把$(y-1)\sqrt{-\frac{1}{y-1}}$根号外的因式移到根号内；

(4) 已知$\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}$，求$\sqrt{x^2+4x}$的值.

2. 化简：$\dfrac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$.

3. 化简：$\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

4. 化简：$\dfrac{5+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

5. 设正数 a_1，a_2，…，a_n 满足 $a_{k+1}=a_k+b$，其中常数 $b>0$，$1\leqslant k\leqslant n-1$，$n$ 是大于等于 2 的自然数，求 $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$ 的值.

6. 已知：$ax^3=by^3=cz^3$，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$．求证：$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

7. 已知 89、12、3 三个数，进行如下运算：取其中任意两个数求其和再除以$\sqrt{2}$，同时求其差再除以$\sqrt{2}$．试问：能否经过若干次上述运算，得到 90、10、14 三个数？为什么？

第二十一讲　根式（二）

解题指要

上一讲我们主要介绍根式以及指数式的有关性质．这一讲主要介绍根式的应用．

一、关于 $a\pm2\sqrt{b}$ 的算术平方根的求法

关于 $a\pm2\sqrt{b}$ 的算术平方根的求法，可以考虑用配方法，即找到 x、y，使得 $x+y=a$，$xy=b$，于是可得 $a\pm2\sqrt{b}=(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2$，这是比较好的方法．另外，也可以考虑套用公式：$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a+2\sqrt{a^2-b}}\pm\sqrt{a-2\sqrt{a^2-b}}\right)$．这样的复合根式对根式的化简及变形起很大的作用．

二、共轭根式

对于根式 $x=a+\sqrt{b}$，$y=a-\sqrt{b}$，则称之为互为共轭根式，容易证明得 $x+y=2a$，$xy=a^2-b$，这在根式的运算中也起很大的作用．

三、有理化因式

常见的有理化因式有下面几种形式：

①对于 $\sqrt[m]{a^n}$（$m>n$），有理化因式为 $\sqrt[m]{a^{m-n}}$；

②对于 $a\pm\sqrt{b}$，有理化因式为 $a\mp\sqrt{b}$；

③对于 $m\sqrt{a}\pm n\sqrt{b}$，有理化因式为 $m\sqrt{a}\mp n\sqrt{b}$；

④对于 $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$，有理化因式为 $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$．

对于根式的化简与求值问题涉及的内容很广泛，在数学竞赛中常常见到．在解题的过程中，有时可以用分母有理化，有时可以根据根式的特点先从其倒数入手，有时还用到分解、分拆、换元、整体代换等解题技巧．于是，我们在解题时应仔细观察题目的结构特点和内在规律，妙用有关的性质，寻求解题的捷径．

[illegible]

例一　求 $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$ 的值．

分析：若先将大根号内的式子配成完全平方，然后再开方，这样处理太繁．这个问题采用换元的方法较为简单．

解：设 $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=A$．

两边平方得　$4+\sqrt{7}+4-\sqrt{7}-6=A^2$．

即　$A^2=2$．$\therefore A=\pm\sqrt{2}$．

▶笔▶记▶栏

例二 化简：$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

分析：应先找分母有理化因式.

解：原式 $=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}][(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$.

例三 设 $x=\sqrt{5+\sqrt{5}}$，$y=\sqrt{5-\sqrt{5}}$，求 x^6+y^6 的值.

分析：因为 $x^2=5+\sqrt{5}$，$y^2=5-\sqrt{5}$，利用共轭根式则可求得.

解：$\because$ $x^2=5+\sqrt{5}$，$y^2=5-\sqrt{5}$，$\therefore$ $x^2+y^2=10$，$x^2y^2=20$.

$\therefore$ $x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^4+y^4-x^2y^2)=(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3x^2y^2]$

$=10\times(100-60)=400$.

例四 设 $x=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，$y=\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$（$n$ 为正整数），当 n 为何值时，代数式 $19x^2+123xy+19y^2$ 的值为 1985?

分析：$xy=1$，$x+y=4n+2$.

解：由题意得：$xy=1$，$x+y=4n+2$.

$\because$ $19x^2+123xy+19y^2=19(x+y)^2+85xy=19(x+y)^2+85$,

$\therefore$ $19(4n+2)^2+85=1985$.

又 $\because n>0$，$\therefore$ $4n+2=10$，即 $n=2$.

例五 化简：

(1) $\sqrt{10+8\sqrt{3+\sqrt{8}}}$；

(2) $\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})}$.

分析：考虑配成完全平方的形式.

解：(1) 原式 $=\sqrt{10+8\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}}=\sqrt{10+8(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{18+2\sqrt{32}}=4+\sqrt{2}$.

(2) 令原式 $=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$，两边平方得 $13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35}=x+y+z-2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$.

$$\therefore \begin{cases} x+y+z=13, \\ xy=5, \\ yz=35, \\ xz=7. \end{cases} \quad 解得 \quad x=1,\ y=5,\ z=7.$$

$\therefore$ 原式 $=1+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

例六 设 $x>0$，$y>0$，记 $M=\dfrac{4^x+4^{-x}-2}{4^x+4^{-x}+2}$，$N=\dfrac{4^y+4^{-y}-2}{4^y+4^{-y}+2}$，$P=\dfrac{4^{x+y}+4^{-(x+y)}-2}{4^{x+y}+4^{-(x+y)}+2}$. 求证：$\sqrt{P}=\dfrac{\sqrt{M}+\sqrt{N}}{1+\sqrt{MN}}$.

分析：对上述的分子、分母配成完全平方式.

证明：$\because$ $x>0$，$\therefore 2^x>2^{-x}$.

▶笔▶记▶栏

∴ $\sqrt{M}=\sqrt{\left(\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}\right)^2}=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$，$\sqrt{N}=\dfrac{2^y-2^{-y}}{2^y+2^{-y}}$，$\sqrt{P}=\dfrac{2^{x+y}-2^{-(x+y)}}{2^{x+y}+2^{-(x+y)}}$

∴ $\dfrac{\sqrt{M}+\sqrt{N}}{1+\sqrt{MN}}=\dfrac{2[2^{x+y}-2^{-(x+y)}]}{2[2^{x+y}+2^{-(x+y)}]}=\sqrt{P}$.

例七 求不超过$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$的最大整数.

分析：可以通过近似计算求得结果，但较繁琐，于是可以借助有理化因式.

解：设 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，则 $x+y=2\sqrt{3}$，$xy=1$.

∴ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10$.

$x^6+y^6=(x^2+y^2)^3-3(xy)^2[x^2+y^2]=970$，

即 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6=970$.

又∵ $0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<1$，∴$0<(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6<1$. ∴ $969<(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6<970$.

∴ 其最大整数是 969.

例八 设 $x=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2001}}$，试确定 x 的取值范围.

分析：利用$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

解：∵ $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$，

∴ $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

∴ $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-1)$，$2(\sqrt{4}-\sqrt{3})<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$，

$2(\sqrt{2002}-\sqrt{2001})<\dfrac{1}{\sqrt{2001}}<2(\sqrt{2001}-\sqrt{2000})$.

∴ $86<x<89$.

▶笔▶记▶栏

一、选择题：

1. 计算$\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$的值为(　　).

A. 1　　B. $\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 5

2. 已知$\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}<x<\dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，则满足不等式的整数 x 的个数是(　　).

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

3. 已知：$x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，则$\dfrac{x^2-1}{x+1}-\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x}$的值为(　　).

A. $-1-2\sqrt{3}$　　B. -1　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. 3

4. 若 $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，则 $2x^2-3xy+5y^2=$(　　).

A. 340　　B. $340-\sqrt{6}$　　C. $340-60\sqrt{6}$　　D. $343+140\sqrt{6}$

二、填空题：

1．已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2$，则 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=$________．

2．计算：$\left(\frac{b}{a}\right)^{1989}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{1990}\cdot a^{1991}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{1992}=$________．

3．设 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$，则 $\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}=$________．

三、解答题：

1．化简：

（1）$\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\div\frac{\sqrt{b}}{a-b}$；

（2）$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{14}-\sqrt{15}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$；

（3）$\frac{3\sqrt{15}-\sqrt{10}-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-\sqrt{2}+18}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$；

（4）$\frac{\sqrt{11}+5\sqrt{7}+4\sqrt{6}}{7+\sqrt{77}+\sqrt{66}+\sqrt{42}}$．

2．设 $\frac{\sqrt{33}-5}{2}=x$，求 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+12$ 的值．

3．若 $\sqrt{39-\sqrt{432}}$ 的小数部分为 a．求证：$\sqrt{39-\sqrt{432}}=2a+\frac{1}{a}$．

4. 已知$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$，试证：$(a+b+c)^3=27abc$.

5. 设 $a^4+4pa^3-4qa-1=0$，$a^3+3pa^2-q=0$. 求证：$\sqrt[3]{(p+q)^2}+\sqrt[3]{(p-q)^2}=1$.

6. 实数 x、y 满足$(\sqrt{x^2+2001}-x)(\sqrt{y^2+2001}-y)=2001$，求 $100^{10x}\cdot 10^{20y}$的值.

[redacted]

一、选择题：

1. 计算：$\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)$可得(　　).

A. $\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}+1)$　　B. $\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1)$　　C. $\sqrt[3]{2}-1$　　D. $\sqrt[3]{2}+1$

2. 如果 $a=3^{55}$，$b=4^{44}$、$c=6^{33}$，$d=7^{22}$，则 a、b、c、d 从小到大的顺序为(　　).

A. $a<b<c<d$　　B. $a<b<d<c$　　C. $d<c<a<b$　　D. $a<d<b<c$

3. 若 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$，且 a 和 b 均为正数，则代数式$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$的值为(　　).

A. $a+b$　　B. $a-b$　　C. $b-a$　　D. $a-b$ 或 $b-a$

4. 若 $[a]$ 表示实数 a 的整数部分，则式子$\left[\frac{1}{\sqrt{16-6\sqrt{7}}}\right]$的值为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题：

1. 计算：$\left(\frac{7}{3}\right)^{1000}\sqrt{\frac{3^{2000}+15^{2000}}{7^{2000}+35^{2000}}}=$____________.

2. 已知 $a=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}$，则$\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^3}=$____________.

3．计算：$\frac{\sqrt{1997}}{(\sqrt{1997}-\sqrt{1999})(\sqrt{1997}-\sqrt{2001})}+\frac{\sqrt{1999}}{(\sqrt{1997}-\sqrt{2001})(\sqrt{1999}-\sqrt{1997})}+\frac{\sqrt{2001}}{(\sqrt{2001}-\sqrt{1997})(\sqrt{2001}-\sqrt{1999})}=$________．

三、解答题：

1．化简：

（1）$\frac{5}{4-\sqrt{11}}-\frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}-\frac{2}{3+\sqrt{7}}$；

（2）$(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+2)\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$；

（3）$\sqrt[3]{a+\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}$；

（4）$\sqrt{1998\times1999\times2000\times2001+1}$．

2．求满足等式$\sqrt{x^2+y^2+4}=x+y+2$的整数 x、y．

3．解方程组$\begin{cases}x\sqrt{yz}+y\sqrt{xz}=39-xy,\\ y\sqrt{xz}+z\sqrt{xy}=52-yz,\\ z\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}=78-zx.\end{cases}$

4．求$\underbrace{\sqrt{2001+\sqrt{2001+\sqrt{2001+\cdots+\sqrt{2001}}}}}_{2001\text{个}2001}$的整数部分．

5．设$2000x^3=2001y^3=2002z^3$，$xyz>0$，且$\sqrt[3]{2000x^2+2001y^2+2002z^2}=\sqrt[3]{2000}+\sqrt[3]{2001}+\sqrt[3]{2002}$，求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的值．

6．若$x>0$，求$\frac{\sqrt{1+x^2+x^4}-\sqrt{1+x^4}}{x}$的最大值．

7．若$a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$，求$a^2+\sqrt{a^4+a+1}$的值．

第二十二讲　几何不等式

[illegible]

在数学竞赛中，经常要用到以下的几何不等关系定理：

1. 在三角形中，任何两边之和大于第三边，任何两边之差小于第三边.
2. 在同一个三角形中，大边对大角，小边对小角；反之亦然.
3. 在两边对应相等的两个三角形中，第三边大，所对的角大；反之亦然.
4. 直角三角形的斜边大于直角边.
5. 三角形的外角大于任何一个和它不相邻的内角.
6. 三角形内任一点到两顶点的距离之和，小于另一顶点到这两顶点的距离之和.

在解题时，通常的做法是：

1. 找出适当的图形，直接使用定理.
2. 如果没有直接合适的图形．可以添加辅助线，从而构造合适的图形.
3. 若直接比较有困难时，可将图形的位置作适当的移动.
4. 若直接比较大小不明显时，可借助不等式的性质．如：

欲证 $a>b$，可找一个 c，证 $a>c$，$c>b$，这是利用传递性.

欲证 $a>b$，可改证 $a-b>0$．这是利用求差法.

欲证 $a>b$，可变形 $a=a_1+a_2$，$b=b_1+b_2$，改证 $a_1>b_1$，$a_2>b_2$.

5. 有时直接证原问题难以人手时，不妨先考察该问题的某种特例去探索解决问题的途径．下面将以例子说明有关证题的思路及途径.

典型例题讲解

例一　设△ABC 中的∠A、∠B、∠C 中最小者为 θ．试问：在△ABC 的边上是否存在一点 D，使线段 AD 把△ABC 分成两个等腰三角形？其与 θ 有何关系？

分析：从特殊入手，即对∠ADC 进行分类讨论.

解：(1) 若∠$ADC=90°$，要使△ABD 和△ADC 为等腰三角形，则∠$BAC=90°$，∠$B=$∠$C=45°$，则 $\theta=45°$，可存在一点 D 满足要求.

(2) 若∠$ADC>90°$，要使△ADC 为等腰三角形，必有 $AD=CD$．在△ABD 中有如下几种情况：

①若 $AB=AD$，则有∠$BAC>$∠$DAC=$∠C，∠$B=$∠$ADB=2$∠C，∴ $\theta=$∠C.

∵∠$BAC=180°-3\theta>\theta$，∴ $\theta<45°$.

笔记栏

②若 $BD=AD$，此时$\angle BAC=90^\circ$，$\angle B+\angle C=90^\circ$.

$\because \angle ADC>90^\circ$，$\therefore \angle B>\angle C$．$\therefore \theta=\angle C$.

$\therefore 2\theta<90^\circ$．$\therefore \theta<45^\circ$.

③若 $AB=BD$，设$\angle C=\beta$，则$\angle A=3\beta$，

$\angle B=180^\circ-4\beta$．于是 θ 为$\angle B$ 与$\angle C$ 中较小者.

又 $180^\circ-4\beta=\beta$ 时，$\beta=36^\circ$．$\therefore \theta\leqslant 36^\circ$.

(3) 若$\angle ADC<90^\circ$，此时$\angle ADB>90^\circ$，与②同.

综上所述，当 $0^\circ<\theta\leqslant 45^\circ$时，在 BC 上存在一点 D 满足要求.

例二 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别是 a、b、c．设 p、q 均为正实数，且 $a=\sqrt{pq+p^2}$，$b=\sqrt{pq+q^2}$，$c=p+q$．若 $p>q$，能否确定$\angle A$、$\angle B$ 的大小关系呢?

分析：先判断$\triangle ABC$ 的形状，从而由$\angle A$、$\angle B$ 的正弦大小得出有关结论.

解：$\because a^2+b^2=pq+p^2+pq+q^2=(p+q)^2=c^2$，

$\therefore \angle C=90^\circ$，$\therefore \angle A+\angle B=90^\circ$．$\therefore \angle A$、$\angle B$ 均为锐角.

又$\because p>q>0$，$\therefore p+q>0$.

$\therefore (p+q)\cdot p>(p+q)\cdot q$，即 $p^2+pq>q^2+pq$.

$\therefore \sqrt{p^2+pq}>\sqrt{q^2+pq}$.

$\therefore \dfrac{\sqrt{p^2+pq}}{p+q}>\dfrac{\sqrt{q^2+pq}}{p+q}$，即 $\sin A>\sin B$．$\therefore \angle A>\angle B$.

▶随▶记▶栏

例三 设点 P 是边长为 1 的等边$\triangle ABC$ 内任意一点．求证：$\dfrac{3}{2}<PA+PB+PC<2$.

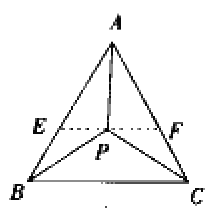


图 22-1

分析：过点 P 作 $EF\parallel BC$，利用正三角形和边角的关系证明.

证明：如图 22-1，过点 P 作 BC 的平行线交 AB、AC 于 E、F，$\angle AEF=\angle AFE=60^\circ$，$\triangle AEF$ 为等边三角形.

$\because \angle EAP<\angle BAC=60^\circ$，$\therefore \angle APE>60^\circ$.

$\because \angle APE>\angle AEP$，$\therefore AE>AP$.

故 $\begin{cases} AE>AP, \\ BE+EP>BP, \\ CF+FP>PC. \end{cases}$

$\therefore AE+BE+EP+CF+FP>AP+PB+PC$.

又$\because AF=EF$，$\therefore AB+AC>PA+PB+PC$，

即 $PA+PB+PC<2$.

又$\because \begin{cases} PA+PB>AB, \\ PA+PC>AC, \\ PB+PC>BC, \end{cases}$ $\therefore 2(PA+PB+PC)>AB+AC+BC=3$，

即 $PA+PB+PC>\dfrac{3}{2}$，$\therefore \dfrac{3}{2}<PA+PB+PC<2$.

例四 已知：在△ABC 中，$\angle BAC=120°$，点 P 是△ABC 内一点．求证：$PA+PB+PC>AB+AC$．

分析：可通过有关的变换，使 $AB+AC$ 刚好为一条线段，利用两点之间线段最短便可得证．

证明：延长 BA 到 D，使得 $AD=AC$，连结 CD，

$\because \angle BAC=120°$，$\therefore \angle CAD=60°$．

$\therefore$ △ACD 是等边三角形，即 $AC=AD=CD$．

如图 22－2，作$\angle DCE=\angle ACP$、$CE=CP$、连结 DE、EP，则△$CDE\cong$△CAP，$\therefore DE=AP$．

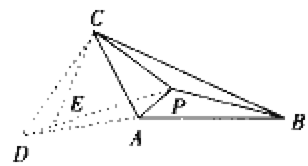


图 22－2

又$\because \angle DCA=60°$，$\angle DCE=\angle ACP$，$\therefore \angle ECP=60°$．

$\therefore$ △CPE 也是等边三角形，即 $CP=EP$．

$\because PA+PC+PB=DE+PE+PB>DA+AB$．

$\therefore PA+PB+PC>AB+AC$．

例五 设△ABC 的三内角度数为 α、β、γ，其相应的边长为 a、b、c，求证：$\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\geqslant 60°$．

分析：当 $a\geqslant b$ 时，$\alpha\geqslant\beta$；相反 $a\leqslant\beta$．即总有 $(a-b)(\alpha-\beta)\geqslant 0$．同理 $(b-c)(\beta-\gamma)\geqslant 0$，$(c-a)(\gamma-\alpha)\geqslant 0$，利用此关系便可得证．

证明：当 $a\geqslant b$ 时，$\alpha\geqslant\beta$；当 $a\leqslant b$ 时，$\alpha\leqslant\beta$．故总有 $(a-b)(\alpha-\beta)\geqslant 0$．同理 $(b-c)(\beta-\gamma)\geqslant 0$，$(c-a)(\gamma-\alpha)\geqslant 0$．

$\therefore a\alpha+b\beta\geqslant a\beta+b\alpha$，$b\beta+c\gamma\geqslant b\gamma+c\beta$，$c\gamma+a\alpha\geqslant c\alpha+a\gamma$．

将三式相加，得 $2(a\alpha+b\beta+c\gamma)\geqslant a(\beta+\gamma)+b(\alpha+\gamma)+c(\alpha+\beta)$．

而 $a(\beta+\gamma)+b(\alpha+\gamma)+c(\alpha+\beta)=a(180°-\alpha)+b(180°-\beta)+c(180°-\gamma)=180°(a+b+c)-(a\alpha+b\beta+c\gamma)$，

$\therefore 3(a\alpha+b\beta+c\gamma)\geqslant 180°(a+b+c)$．

$\therefore \dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\geqslant 60°$．

例六 设 a、b、c 为正实数，求证：$\sqrt{2}(a+b+c)<\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}<2(a+b+c)$．

分析：本题为代数题，但可以利用图形中的不等关系．以 $a+b+c$ 为边作正方形，便可得证．

证明：以 $a+b+c$ 为边作正方形，如图 22－3，

则 $AB=\sqrt{2}(a+b+c)$，$BD=\sqrt{a^2+c^2}$，$DE=\sqrt{b^2+c^2}$，$EA=\sqrt{a^2+b^2}$．

$\because AB<BD+DE+EA$，$<BC+AC$，

$\therefore \sqrt{2}(a+b+c)<\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}<2(a+b+c)$．

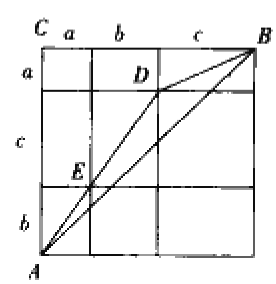


图 22－3

笔记栏

练习与思考

一、选择题：

1. 已知线段 a、b、c 且 $c<b<a$，则下列条件能组成三角形的是(　　).

A. $a+b>c$　　B. $a+c>b$　　C. $a-b<c$　　D. $b-c<a$

2. 在 Rt△ABC 中，c 为斜边，a、b 为直角边，则 $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$的值为(　　).

A. 正　　B. 负　　C. 零　　D. 不能确定

3. 如图 22－4，△ABC 为等边三角形，P 是 BC 上任意一点，$PD\perp AB$，$PE\perp AC$，连结 DE，记△ADE 的周长为 L，四边形 $BDEC$ 的周长为 S，则 L 与 S 的关系为(　　).

A. $S>L$　　B. $S=L$　　C. $L>S$　　D. 不能确定

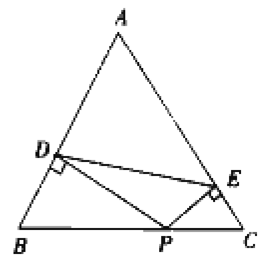


图 22－4

二、填空题：

1. 若在△ABC 中，用 h_a、h_b、h_c 分别表示 a、b、c 边上的高，则 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}$ 与 $\frac{1}{h_c}$ 的关系为__________.

2. 四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=4$，$CD=7$，则能够围成四边形第四边 AD 的取值范围是__________.

3. CD 是 Rt△ABC 的斜边 AB 上的高，则 $AB+CD$ 与 $AC+BC$ 的关系为__________.

三、解答题：

1. 如图 22－5，在△ABC 中，AD 平分∠BAC 交 BC 于 D，$AB>AC$.

求证：$BD>DC$.

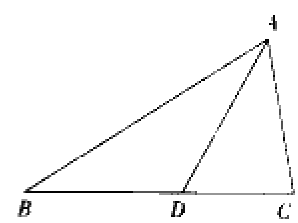


图 22－5

2. P 为正三角形 ABC 内任一点，$AB=a$、$PA=x$、$PB=y$、$PC=z$，求证：$x+y+z<2a$.

3. 已知 a、b、c、d 是正实数，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{b^2+d^2}+\sqrt{a^2+c^2}>\sqrt{2}\,(a+b+c+d)$.

4. 在$\triangle ABC$中，已知h_a、h_b、h_c分别是三角形三边a、b、c上的高．求证：$\dfrac{1}{2}<\dfrac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1$．

5. 已知P是边长为1的等边三角形内任意一点，设P点到三个顶点的距离之和为l，求证：$\sqrt{3}\leqslant l<2$．

[illegible]

一、选择题：

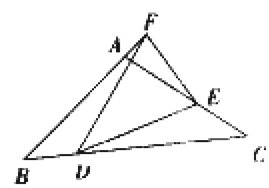


图 22－6

1. 如图22－6，在$\triangle ABC$中，BC是最大边，$AB=AC$，$CD=BF$，$BD=CE$，则$\angle DEF$的取值范围是(　　)．

   A．$0^\circ<\angle DEF<45^\circ$　　B．$45^\circ<\angle DEF<60^\circ$

   C．$60^\circ\leqslant\angle DEF<\angle 90^\circ$　　D．以上都不对

2. 设O为$\triangle ABC$内任意一点，$OA+OB+OC=S_1$，$AB+BC+AC=S_2$，则无论$\triangle ABC$是怎样的三角形，总有(　　)．

   A．$S_2<2S_1$，且$S_1\leqslant S_2$　　B．$S_2\geqslant 2S_1$，且$S_1<S_2$

   C．$S_2<2S_1$，且$S_1<S_2$　　D．$S_2\geqslant 2S_1$，且$S_1\leqslant S_2$

二、填空题：

1. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$为最大角，P、Q分别是AB和AC边上的点，连PQ，则PQ与BC的关系为______________．
2. 边长为整数且周长为100的等腰三角形有________个．
3. 已知三角形的三条边长均为正整数，其中有一条边长是4，但它不是最短边，这样不同的三角形个数共有________个．
4. 三边长均为整数，且最大边长为11的三角形共有________个．

三、解答题：

1. 不等边$\triangle ABC$的两条高的长度分别为4和12．若第三条高的长也为整数，试求它的长．

2. a、b、c 是直角三角形的三条边，且它们的平方都是大于 20 的自然数．它们的平方中有一个含有奇数个正约数，另两个都恰有三个正约数．求满足上述条件的最小的一组数．

3. 设△ABC 的面积 $S=1$，试分别在边 BC、CA、AB 上依次找一点 E、F、G，使得△EFG 的面积 S' 适合 $\frac{1}{4}<S'<\frac{1}{3}$．

4. 试问：三角形两边上的高的和与这两边的和有何关系？

5. 同一平面内，任何三点不共线．试证：可从四点中选出三点，这三点组成的三角形中至少有一个内角不大于 45°．

6. 如图 22－7，若 a、b、c、x、y、z 为正实数，△LMN 为正三角形且边长为 k，$PL=a$、$PM=x$、$MQ=C$、$QN=z$、$NR=b$、$RL=y$．求证：$ay+bz+cx<k^2$．

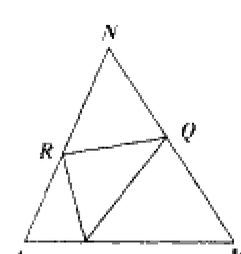


图 22－7

7. 已知△ABC 的三边 a、b、c 满足下列关系：

(1) $a^2-a-2b-2c=0$,

(2) $a+2b-2c+3=0$.

试确定此三角形中哪条边最大．

8. (1) 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle A\leqslant 30°$，求证：$\frac{BC}{AB}\leqslant\frac{1}{2}$；(2) 设$P$是$\triangle ABC$内一点，$P$和三边上的每一点连起来，都得到一条线段，设$l$、$m$是这些线段中的最大者和最小者，求证：$\frac{m}{l}\leqslant\frac{1}{2}$.

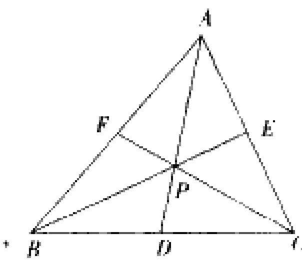


图 22-8

9. 如图 22-8，已知$\triangle ABC$内任一点P，求证：$\frac{AP}{PD}$、$\frac{BP}{PE}$、$\frac{CP}{PF}$三者之中，至少有一个不大于2，也有一个不小于2.

第二十三讲　$[x]$和$\{x\}$的应用

[redacted]

在数学竞赛中常出现一类含有符号$[x]$与$\{x\}$的题目，下面介绍有关$[x]$与$\{x\}$的意义和性质及其在解题中的技巧和方法.

一、概念

设x为一实数，则不大于x的最大整数用$[x]$表示，称之为x的整数部分，有人称$[x]$为地板．一般地，当$n\leqslant x<n+1$，n为整数时，$[x]=n$．于是对于任何实数x，都有$0\leqslant x-[x]<1$．用$\{x\}$表示$x-[x]$，即$\{x\}=x-[x]$，把$\{x\}$称之为x的小数部分．一般地，当$n\leqslant x<n+1$时，$\{x\}=x-n$，其几何意义是$[x]$与x之间的距离.

二、$[x]$、$\{x\}$的性质

1. $[x]$是一个整数，$\{x\}$是0或正的纯小数.
2. 对任何实数x，都有$x=[x]+\{x\}$.
3. 对任意实数x，$x-1<[x]\leqslant x<[x]+1$.
4. 若n为整数，则$[x+n]=[x]+n$，$\{x+n\}=\{x\}$.
5. $[-x]=\begin{cases}-[x] & (x\text{为整数}),\\ -[x]-1 & (x\text{不是整数}).\end{cases}$
6. 若x、y为任何实数，则当$x=y$时，$[x]=[y]$；当$x<y$时，$[x]\leqslant[y]$；当$[x]<[y]$时，$x<y$.
7. 若x、y为任何实数，则$[x]+[y]\leqslant[x+y]$；$\{x\}+\{y\}\geqslant\{x+y\}$；$[xy]\geqslant[x][y]$.
8. 若n为自然数，则$\left[\dfrac{x}{n}\right]=\left[\dfrac{[x]}{n}\right]$.
9. 若x、y为任何实数，则$[x]-[y]=[x-y]$或$[x]-[y]=[x-y]+1$.

以上性质可以根据定义证明得到，请读者自己证明并在解题时灵活运用．$[x]$和$\{x\}$与方程、函数等都有密切的联系，应用领域也较广，下面只介绍这一类方程的解题技巧，其常用的方法有：定义法、性质法和分类讨论法.

[redacted]

例一　计算：$\left[\dfrac{-1}{2001}\right]+\left[\dfrac{-2}{2001}\right]+\cdots+\left[\dfrac{-2000}{2001}\right]+\left[\dfrac{-2001}{2001}\right]$.

分析：根据定义可得.

解：原式$=\underbrace{-1+(-1)+\cdots+(-1)+(-1)}_{2001\text{个}-1}=-2001$.

例二 设 $a=\left[\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}\right]$，$b=\left\{\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}\right\}$，求 $a^2+(1+\sqrt{7})ab$ 的值．

分析：先计算 a 与 b 的值，然后代入可得．

解：$\because \dfrac{1}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}=2+\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$，

$2<\sqrt{7}<3$，$0<\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}<1$，

$\therefore a=2$，$b=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$．

$\therefore a^2+(1+\sqrt{7})ab=4+(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)=10$．

例三 设 $M=10\times\dfrac{2000^{2001}+2001^{2002}}{2000^{2000}+2001^{2001}}$，求 M 的整数部分．

分析：分子加上 2000^{2000} 再减去 2000^{2000} 之后进行恒等变形．

解：
$$
\begin{aligned}
M&=10\times\frac{2000^{2001}+2001^{2002}+2000^{2000}-2000^{2000}}{2000^{2000}+2001^{2001}}\\
&=10\times\frac{2000^{2000}\cdot 2001+2001^{2002}-2000^{2000}}{2000^{2000}+2001^{2001}}\\
&=10\times\left(2001-\frac{2000^{2000}}{2000^{2000}+2001^{2001}}\right)\\
&=20010-\frac{2000^{2000}\times 10}{2000^{2000}+2001^{2001}}.
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 其整数部分为 20009．

例四 解方程 $-[x]+2x=\dfrac{16}{5}$．（用定义法及性质法解）．

分析：由定义可知 $x=[x]+\{x\}$，于是可将任意的实数 x 转化为讨论在 $0\leqslant\{x\}<1$ 时的问题．这种方法即为用定义法解此类方程．利用 $x-1<[x]\leqslant x$ 代入或 $[x]\leqslant x<[x]+1$ 代入可解方程，这种方法即为用性质法解此类方程．

解法一：由原方程可得 $[x]=2x-\dfrac{16}{5}$，且 $x=[x]+\beta$，其中 $0\leqslant\beta<1$．于是可得 $\beta=\dfrac{16}{5}-x$．

$\therefore 0\leqslant\dfrac{16}{5}-x<1$．解得 $2.2<x\leqslant 3.2$．

$\therefore [x]=2$ 或 3．

当 $[x]=2$ 时，解得 $x=2.6$，当 $[x]=3$ 时，解得 $x=3\dfrac{1}{10}$．

解法二：$\because x=\dfrac{1}{2}[x]+\dfrac{8}{5}$，$\therefore [x]\leqslant\dfrac{1}{2}[x]+\dfrac{8}{5}<[x]+1$．

$\therefore 1.2\leqslant[x]\leqslant 3.2$．

$\therefore [x]=2$ 或 $[x]=3$．以下同解法一．

另一种形式：$\because x-1<[x]\leqslant x$，且 $[x]=2x-\dfrac{16}{5}$，

$\therefore x-1<2x-\dfrac{16}{5}\leqslant x$．

解得 $2.2<x\leqslant 3.2$．以下同解法一．

▶笔▶记▶栏

例五 试讨论方程$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$的实数解的情况.

分析：可用分类讨论法讨论其解的情况．令$x=[x]+\beta\ (0\leqslant\beta<1)$.

解：设$x=[x]+\beta\ (0\leqslant\beta<1)$，则$[2\beta]+[4\beta]+[8\beta]+[16\beta]+[32\beta]=12345-63[x]$.

又$\because 0\leqslant 2\beta<2$，$0\leqslant 4\beta<4$，$0\leqslant 8\beta<8$，$0\leqslant 16\beta<16$，$0\leqslant 32\beta<32$，$\therefore 0\leqslant[2\beta]\leqslant 1$，$0\leqslant[4\beta]\leqslant 3$，$0\leqslant[8\beta]\leqslant 7$，$0\leqslant[16\beta]\leqslant 15$，$0\leqslant[32\beta]\leqslant 31$.

$\therefore 0\leqslant 12345-63[x]\leqslant 1+3+7+15+31=57$.

即 $12345-57\leqslant 63[x]\leqslant 12345$.

$\therefore 195.047\cdots\leqslant[x]\leqslant 195.952\cdots$

$\therefore$原方程无实数解.

例六 解不等式：$x<[x]\{x\}+1$.

分析：令$x=[x]+\{x\}$，则代入可得.

解：令$x=[x]+\{x\}$，则$[x]+\{x\}<[x]\{x\}+1$.

$\therefore([x]-1)(\{x\}-1)>0$.

$\because \{x\}-1<0$，$\therefore[x]-1<0$．$\therefore$原不等式的解集为$x<1$.

例七 方程$ax+b[x]=c\ (a>0,\ b>0)$最多有多少个解？

分析：设$x=[x]+\beta$.

解：设$x=[x]+\beta$．$(0\leqslant\beta<1)$，则$(a+b)[x]=c-a\beta$.

$\therefore[x]=\dfrac{c-a\beta}{a+b}$.

$\because a>0$，$b>0$，$\therefore\dfrac{c-a}{a+b}<[x]\leqslant\dfrac{c}{a+b}$.

$\because\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{c-a}{a+b}=\dfrac{a}{a+b}<1$，

$\therefore$若在$\dfrac{c-a}{a+b}<x\leqslant\dfrac{c}{a+b}$上有整数，则只有一个，这个整数就是$[x]$，这时原方程有一个解；

若在$\dfrac{c-a}{a+b}<x\leqslant\dfrac{c}{a+b}$上没有整数，则$[x]=0$，于是原方程至多只有一个解.

一、选择题：

1．下列命题中，正确命题的个数是(　　).

(1) 当$x>y$时，$[x]>[y]$；　　(2) 当$x>y$时，$\{x\}>\{y\}$；

(3) $[x+y]>[x]+[y]$；　　(4) $\{x+y\}>\{x\}+\{y\}$.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

2．设n是正整数，$Z=(n+1)^2+n-[\sqrt{(n+1)^2+n+1}]$，则有(　　).

A．$Z>0$　　B．$Z<0$　　C．$Z=0$　　D．上述三种情况都有可能

二、填空题：

1. $8.01\times1.24+8.02\times1.23+8.03\times1.22$ 的整数部分为________.

2. 若 $x=43.26$，则$[x]=$________，$\{x\}=$________；若 $x=-43.26$，则$[x]=$________，$\{x\}=$________.

3. 若$[x]=-2$，$\{x\}=0.74$，则 $x=$________.

4. $\sqrt{11}$的整数部分和小数部分为________.

三、解答题：

1. 求下列各式的值：

(1) $[(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2]$；

(2) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2000}}\right]$.

2. 求 $2\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$的整数部分及小数部分.

3. 解下列方程：

(1) $8[3x]-5[2x]=3$；

(2) $3x+5[x]-50=0$；

(3) $[x]+\left[\frac{1}{x}\right]=3$.

4. 试问$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$与$[2x]$的大小关系怎样？

一、选择题：

1. 设 n 为自然数，$\sqrt{n}$为无理数，$[\sqrt{n}]=a$，$\{\sqrt{n}\}=b$，且 $a^3-9ab+b^3=0$，则 $n=($　　$)$.

　A. 3　　　　B. 6　　　　C. 8　　　　D. 9

2. 若$\begin{cases} y=2[x]+3, \\ y=3[x-2]+5, \end{cases}$且 x 不是整数，则 $x+y$ 是(　　).

　A. 一个整数　　　　B. 在 4 与 5 之间

　C. 在 -4 与 4 之间　　　　D. 在 15 与 16 之间

二、填空题：

1. 满足$[-1.77x]=[-1.77]x$ 的自然数 x 为_________.

2. 若$[1.9x]=10$，则自然数 x 为_________.

3. 方程 $x+2\{x\}=3[x]$的解为_________.

4. 从 200 到 600 的整数中是 7 的倍数的个数为_________.

三、解答题：

1. 计算：$[1]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{2001}]$.

2. 解答下列各题：

(1) 求不超过 2001 且为 7 的倍数的正整数的个数.

(2) 求不超过 2001 且不是 7 的倍数的正整数的个数.

(3) 求不超过 2001，且既不是 7 的倍数，也不是 13 的倍数的正整数的个数.

(4) 求不超过 24 的质数的个数.

3. 在数 $N=1\times2\times3\times\cdots\times999\times1000$ 的末尾有多少个连续的零?

4. 若 n 为自然数，设 $S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，求 $[S]$.

5. 解方程:

(1) $\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$;　　(2) $[x]-2\{x\}=1$;　　(3) $3[x]-2\{x\}=9$.

6. 乘积 $1000\times1001\times1002\times\cdots\times1999$ 中含有多少个 11 的因子?

7. 已知 $A=\frac{11\times77+12\times78+13\times79+14\times80}{11\times76+12\times77+13\times78+14\times79}$，求 $[100A]$.

8. 若 $x\geqslant1$，$y>0$，求证：$\left[\frac{y}{x}\right]\leqslant\frac{[y]}{[x]}$.

第二十四讲　整除性的综合应用

解题指要

前面我们已经介绍了有关整除的性质，这一讲主要介绍整式的整除问题、余式定理及有关整除性的综合应用，这些都是整数理论中最基本、最常见的问题，也是各级数学竞赛较关注的问题．

在解答这类问题时，我们可以用整数的多项式的表示法解题．对于不定方程的整数解的问题、应考虑有关整除、整数的性质．对于多项式的整除，有时可转化为特殊的整除问题．

典型例题讲解

例一　对于多项式$\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}x$，对任意整数 x，所对应的值是否都是整数？

分析：只要能证到 $6 \mid x^3+5x$，则问题可以解决．

解：显然 $2 \mid x^3+5x$．

若 $x=3k$，则 $3 \mid x^3+5x$．

若 $x=3k+1$，$\because x^3+5x=x(x^2+5)=(3k+1)[(3k+1)^2+5]$

$=(3k+1)(3m+6)=3(3k+1)(m+2)$，

$\therefore 3 \mid x^3+5x$．

若 $x=3k+2$，同样有 $3 \mid x^3+5x$，

$\because (2,3)=1$，$\therefore 6 \mid x^3+5x$．

$\therefore$对任意的整数 x，其对应的值都为整数．

例二　今天是星期二，设 $N=\underbrace{111\cdots1}_{2001个}$，于是再过 N 天后是星期几？

分析：只要能算$\underbrace{111\cdots1}_{2001个}\div 7$余数是多少，则可知．但由于 N 太大，于是可先设法从 N 中减去 7 的倍数．

解：$\because 111111=7\times15873=7A_1$，$\underbrace{11\cdots1}_{2\times6个}=111111000000+111111=7A_2$，$\underbrace{11\cdots1}_{3\times6个}=7A_3$，

$\because 2001=6\times333+3$，$\therefore N=7A+111$．

又$\because 111\div7=15\times7+6$，$\therefore N=7M+6$．

$\therefore$再过 N 天后是星期一．

笔记栏

例三 求方程 $x^2-5x+xy-5y-8=0$ 的正整数解.

分析：把原方程左边的 $x^2-5x+xy-5y$ 分解得 $(x-5)(x+y)$. 由于要求其整数解，于是可从整数理论入手.

解：原方程可变形为

$x^2-5x+xy-5y=8$,

$x^2-(5-y)x-5y=8$,

$(x-5)(x+y)=8$,

$\because 8=1\times8=(-1)\times(-8)=2\times4=(-2)\times(-4)$,

$\therefore$ 原方程可化为以下八个方程组 $\begin{cases}x-5=1,\\x+y=8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-5=-1,\\x+y=-8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-5=8,\\x+y=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-5=-8,\\x+y=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-5=2,\\x+y=4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-5=-2,\\x+y=-4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-5=4,\\x+y=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-5=-4,\\x+y=-2.\end{cases}$

解这八个方程组知，只有第一个方程组的解满足题意.

$\therefore$ 原方程的整数解为 $\begin{cases}x=6,\\y=2.\end{cases}$

例四 求方程 $x^2-17=2y^2$ 的质数对 (x,y).

分析：因为质数均是整数，故本题也即是求方程的整数解，可从奇偶性去考虑求解.

解：因为方程右边 $2y^2$ 是偶数，左边 17 为奇数，所以 x^2 必为奇数，故 x 为奇数.

令 $x=2m+1$，则 $x^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=4(m^2+m)+1$.

令 $m^2+m=n(m、n)$，故原方程变形为 $4n-16=2y^2$,

$y^2=2n-8=2(n-4)$,

$\therefore y^2$ 为偶数，y 必为偶数.

又 $\because y$ 是质数，$\therefore y=2$.

把 $y=2$ 代入原方程得，$x=5$.

$\therefore$ 满足原方程的质数对是 $(5,2)$.

例五 某校在“希望工程”捐款活动中，甲班的 m 个男生和 11 个女生的捐款总数与乙班的 9 个男生和 n 个女生的捐款总数相等，都是 $(mn+9m+11n+145)$ 元，已知每人捐款数相等，且都是整数元，求每人的捐款数.

分析：该题也是整数的应用问题，可以设每人捐款数为 x 元，列出不定方程，再利用整除的性质.

解：设每个人捐款 x 元，根据题意得

$mx+11x=mn+9m+11n+145$, ①

$(n+9)x=mn+9m+11n+145$, ②

由①得 $x=n+\dfrac{9m+145}{m+11}=n+9+\dfrac{46}{m+11}$.

▶笔▶记▶栏

由于 x 是整数，故应有 $m+11 \mid 46$.

由②得 $x=m+11+\dfrac{46}{n+9}$.

$\therefore n+9 \mid 46$.

又 $m+11=n+9 \geqslant 11$，$\therefore m+11=n+9=46$，或 $m+11=n+9=23$.

当 $m+11=n+9=46$ 时，每人捐款数为 $x=46+1=47$ 元；

当 $m+11=n+9=23$ 时，每人捐款数为 $x=23+2=25$ 元.

例六 已知一个七位自然数 $\overline{62xy427}$ 能被 99 整除．求 $250x+123y+1009$.

分析：因为 $99=9\times 11$，$(9,11)=1$，所以根据被 9、11 整除的数的特征便可求出 x、y 的值.

解：$\because 99 \mid \overline{62xy427}$，$\therefore 9 \mid \overline{62xy427}$，$11 \mid \overline{62xy427}$.

$\therefore 9 \mid 6+2+x+y+4+2+7$，即 $9 \mid 21+x+y$.

又 $\because 0 \leqslant x+y \leqslant 18$，$\therefore x+y=6$、15.

又 $\because 11 \mid 13+x-y$，$-9 \leqslant x-y \leqslant 9$　$\therefore x-y=-2$ 或 $x-y=-9$.

解得 $x=2$，$y=4$.

$\therefore 250x+123y+1009=250\times 2+123\times 4+1009=2001$.

例七 是否存在这样的正整数 x、y，满足等式 $\dfrac{x^2-y^2}{2}=2001$？

分析：此题实质是问方程 $x^2-y^2=2\times 2001$ 有没有正整数解.

解：原方程变形为 $x^2-y^2=2\times 2001$，即 $(x+y)(x-y)=2\times 2001$.

因为 2×2001 为偶数，故 $x+y$、$x-y$ 至少有一个是偶数，于是 x、y 要么同为奇，要么同为偶．若 x、y 同为偶数，可设 $x=2p$，$y=2q$.

则 $(x-y)(x+y)=4(p-q)(p+q)=2\times 2001$.

$\therefore 2(p-q)(p+q)=2001$，而 $2 \nmid 2001$.

若 x、y 同为奇数，可设 $m=2p+1$，$n=2q+1$.

同理可得 $2(p-q)(p+q+1)=2001$.

综上所述，不存在 x、y 的正整数使该等式成立.

练习二十四

一、选择题：

1. 已知 n 是偶数，m 是奇数，方程组 $\begin{cases} x-200y=n \\ 11x+27y=m \end{cases}$ 的解 $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$ 是整数，则(　　).

A．p、q 都是偶数　　B．p、q 都是奇数

C．p 是偶数，q 是奇数　　D．p 是奇数，q 是偶数

2. 若 x、y 为任意整数，则 x^3+y^3 除以 9 的余数可能是(　　).

A．0，1，3，7，8　　B．0，1，2，4，8　　C．0，1，2，7，8　　D．0，1，2，6，7

3. 当 n 是自然数时，n^2-n+1 与 n^2+n-1 (　　).

A．可能有公因数 2 和 3

B．可能有公因数 2，但一定无公因数 3

C．可能有公因数 3，但一定无公因数 2

D．2 和 3 都一定不是它们的公因数

二、填空题：

1．整式 $6x^2-ax+c$ 能被 x^2-4x+3 整除，则 $a=$ ________，$c=$ ________．

2．多项式 $x^4-5^3-7x^2+15x-4$ 是否含有因式 $x-1$？答：____________．

3．三个质数 p、q 和 r 满足 $p+q=r$，以及 $1<p<q$，则 $p=$ ________．

三、解答题：

1．试写出 5 个自然数，使得其中任意两个数中的较大的一个数可以被这两个数的差整除．

2．求方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{13}$ 的正整数解．

3．求 $xy=-8\ (x\geqslant y)$ 的整数解．

4．求方程 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{u^2}=1$ 的正整数解．

5．某校初三学生乘汽车外出搞社会调查，要求乘每辆汽车的学生人数相等．若每辆汽车乘坐 23 人，则有一辆汽车少乘坐 4 人；若开走一辆空车，则所有学生正好能平均乘坐到其他各辆车上．已知每辆汽车最多只能乘坐 27 人，求起初有多少辆汽车？有多少个学生？

一、选择题：

1．不定方程 $x^2-y^2=64$ 的正整数解为(　　)．

A．1 组　　B．2 组　　C．3 组　　D．4 组

2. 设正整数 b、m、n 满足$\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$，则这样的 b、m、n 的取值有(　　).

A. 一组　　B. 两组　　C. 多于两组　　D. 不存在

3. 5^{2001}的末三位数是(　　).

A. 025　　B. 125　　C. 625　　D. 825

4. 三个不同的质数 a、b、c，且满足 $a+b=c$，则 abc 的最小值是(　　).

A. 15　　B. 30　　C. 6　　D. 10

二、填空题：

1. 方程$\sqrt{y-\frac{1}{5}}+\sqrt{x-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$的整数解为__________.

2. 若 $M=\overline{2x78}$是一个能被 17 整除的四位数，则 x 的值为__________.

3. 2001 除以某自然数，其商为 50，则其除数及余数分别为__________.

三、解答题：

1. 电子钟 7 分钟亮一次灯，整点响铃．12 点既亮灯又响铃以后，下次在几点既亮灯又响铃？

2. $\overline{abcd}$是一个四位的自然数，已知$\overline{abcd}-\overline{abc}-\overline{ab}-a=2867$，试确定这个四位数$\overline{abcd}$.

3. 写出 12 个连续自然数，使其中每一个数都是合数.

4. 魔术师要求一个游戏参加者想好一个三位数$\overline{abc}$，然后，魔术师再要求记下 5 个数，$\overline{acb}$、$\overline{bac}$、$\overline{bca}$、$\overline{cab}$、$\overline{cba}$，并把它们加起来．求出和为 N，只要 N 的大小知道，魔术师就知道原数$\overline{abc}$是多少．如果 $N=3194$，请你确定$\overline{abc}$.

5. 已知定理："若三个大于 3 的质数 a、b、c 满足关系式 $2a+5b=c$，则 $a+b+c$ 是整数 n 的倍数."试问：上述定理中的整数 n 的最大可能值是多少？并证明你的结论.

6. 某影剧院共有座位 1000 个，排成若干排，总排数大于 16，从第二排起，每排比前一排多一个座位，问影剧院共有多少排座位？

7. 求满足方程$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$的一切整数 x 和 y.

第二十五讲　相似形（一）

解题指要

相似形的知识应用广泛，证明线段相等、线段成比例等问题都可以通过构造平行线或相似三角形得到解决．

一、相似形的不变性

形状相同的图形称之为相似形．两个相似形将保持：（1）对应边的比值不变；（2）对应角不变；（3）平行性不变；（4）点的共线性与线的共点性不变．

二、证明线段的比例式（或等积式）的几种常用的方法

（1）依据成比例线段的定义和性质，利用计算的方法．

（2）应用平行线分线段成比例定理．

（3）应用相似形的对应线段．

（4）应用三角形内、外角平分线性质定理．

（5）应用射影定理．

（6）应用等底或等高三角形的面积比．

（7）应用第三比的方法．

熟悉如图 25－1 中形如“A”型、“X”型、“子母型”等相似三角形，对解题将十分有利．

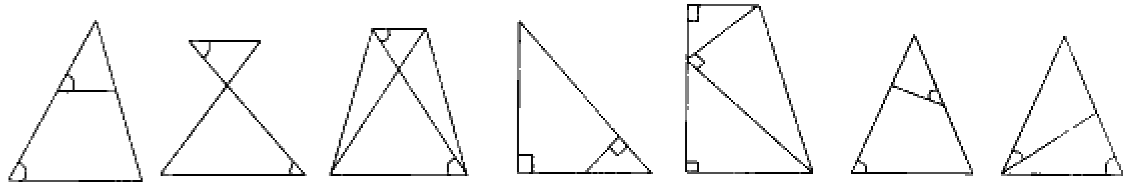


图 25－1

典型例题讲解

例一　在$\triangle ABC$中，$AB=10$，$AC=8$，点 D 在AC上且$AD=2$，试在 AB 上求出点 E，使所得三角形与原三角形相似，并求 AE 的长．若点 E 可以落在BC上，则共有多少种可能？

分析：本题因为 $AB>AC$，于是点 E 在AB 上有两种情况．

解：若 $DE/\!/BC$，则$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$．

$\therefore \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$，即$\dfrac{AE}{10}=\dfrac{2}{8}$．解得 $AE=\dfrac{5}{2}$．

若作$\angle AED=\angle C$，则$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$．

$\therefore \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AD}{AB}$，即$\dfrac{AE}{8}=\dfrac{2}{10}$．解得 $AE=\dfrac{8}{5}$．

若点 E 可以在 BC 上，由于没有明确 BC 与 AC 的大小关系，于是可以作的直线有 3 种或 4 种可能．

例二 如图 25－2，在$\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在 BC、AC 上，AD、BE 交于点 F．已知$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{4}$．（1）求$\dfrac{AF}{AD}$的值；（2）对于给定的自然数 m_1、n_1（均不小于 2），设$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{m_1}$、$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{n_1}$对$\dfrac{AF}{AD}$对应的值为$p$，对于给定的自然数 m_2、n_2（其中 $m_2\neq m_1$，$n_2\neq n_1$），$\dfrac{AF}{AD}=q$，此时能否存在 $p=q$？若存在，则 m_2、n_2 与 m_1、n_1 有何关系？

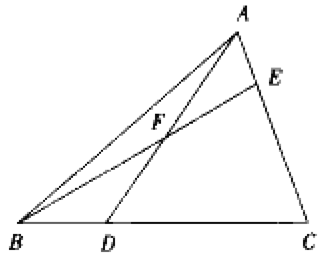


图 25－2

分析：（1）只要过 P 点作 $DG/\!/BE$ 即可．（2）由上面的分析可知$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{m_2}{m_2+n_2-1}$，$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{m_1}{m_1+n_1-1}$，于是由题意得$\dfrac{m_1}{m_1+n_1-1}=\dfrac{m_2}{m_2+n_2-1}$．

解：（1）过 D 作 $DG/\!/BE$，交 CE 于点 G．

$\because DG/\!/BE$，$\therefore \dfrac{AF}{FD}=\dfrac{AE}{EG}$．

$\because \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{4}$，$\therefore \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{1}{4-1}=\dfrac{1}{3}$．

$\because DG/\!/BE$，$\therefore \dfrac{BD}{BC}=\dfrac{EG}{EC}$．

$\because \dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \dfrac{EC}{EG}=3$．

$\therefore \dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{EC}{EG}=\dfrac{1}{3}\times 3$，即$\dfrac{AE}{EG}=1$．$\therefore \dfrac{AF}{FD}=1$．

$\therefore \dfrac{AF}{AF+FD}=\dfrac{3}{4+3-1}=\dfrac{1}{2}$，即$\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{1}{2}$．

（2）由（1）的推理可得：当$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{m_1}$、$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{n_1}$时，$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{m_1}{m_1+n_1-1}$；当$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{m_2}$、$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{n_2}$时，$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{m_2}{m_2+n_2-1}$．

$\because$当 $m_1\neq m_2$，$n_1\neq n_2$ 时，若$\dfrac{m_2}{n_2-1}=\dfrac{m_1}{n_1-1}$，

则有$\dfrac{m_1}{m_1+n_1-1}=\dfrac{m_2}{m_2+n_2-1}$．

$\therefore$当$\dfrac{m_2}{n_2-1}=\dfrac{m_1}{n_1-1}$时，$\dfrac{m_2}{m_2+n_2-1}=\dfrac{m_1}{m_1+n_1-1}$．

例三 如图 25－3，在$\triangle ABC$ 中，P 是 AB 边上的一点，

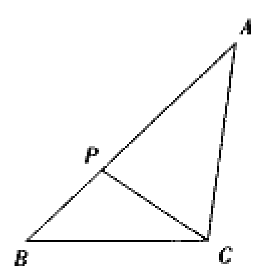


图 25－3

▶笔 ▶记 ▶栏

连结 CP. 当 BC、BP、AB 满足什么条件时，$\triangle PBC \backsim \triangle CBA$？

解：满足 $BC^2 = BP \cdot AB$ 时，$\triangle PBC \backsim \triangle CBA$.

例四 如图 25－4，O 是四边形 $ABCD$ 对角线的交点．若$\angle BAD + \angle BCA = 180°$，$AB = 6$，$AC = 5$，$AD = 4$，$\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{7}{6}$，试求 BC 的值．

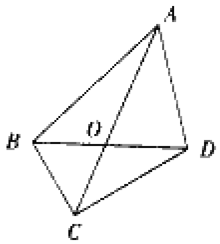


图 25－4

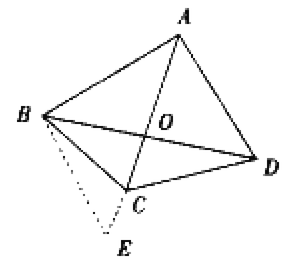


图 25－4a

分析：此题的条件多而散，可以作平行线构造相似三角形，以起到联系条件与结论的桥梁作用．过 B 点作 $BE \parallel AD$ 便可得．

解：如图 25－4a，过 B 点作 $BE \parallel AD$ 交 AC 延长线于 E.

$\therefore \angle BAD + \angle ABE = 180°$.

$\because \angle BAD + \angle BCA = 180°$，$\therefore \angle ABE = \angle ACB$.

又$\because \angle BAC = \angle EAB$，$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle AEB$.

故 $\dfrac{BC}{BE} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5}{6}$.

$\because BE \parallel AD$，$\therefore \dfrac{BE}{AD} = \dfrac{BO}{DO} = \dfrac{7}{6}$，且 $AD = 4$.

$\therefore \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{5}{6} BE = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{7}{6} \times 4 = \dfrac{35}{9}$.

例五 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A : \angle B : \angle C = 1:2:4$，求证：$\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{1}{BC}$.

分析：延长 AB 至 D，使 $BD = AC$；又延长 BC 至 E，使 $AE = AC$，连结 DE、AE，证$\triangle ABC \backsim \triangle DAE$.

证明：如图 25－5，延长 AB 至 D，使 $BD = AC$（此时 $AD = AB + AC$），又延长 BC 至 E，使 $AE = AC$，连结 ED.

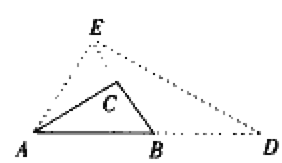


图 25－5

下面证明，$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

设$\angle A = \alpha$，$\angle B = 2\alpha$，$\angle C = 4\alpha$，则$\angle A + \angle B + \angle C = 7\alpha = 180°$，由作图知，$\angle ACB$ 是等腰三角形 ACE 的外角，

$\therefore \angle ACE = 180° - 4\alpha = 3\alpha$.

$\therefore \angle CAE = 180° - 3\alpha - 3\alpha = 7\alpha - 6\alpha = \alpha$.

故$\angle EAB = 2\alpha = \angle EBA$，$AE = BE$.

又由作图知，$AE = BD$，$\triangle BDE$ 是等腰三角形，

$\therefore \angle D = \angle BED = \alpha = \angle CAB$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DAE$.

$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{BC}$，即$\frac{AB+AC}{AB}=\frac{AC}{BC}$.

$\therefore \frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{BC}$.

例六 将任意△ABC 的三边四等分，如图 25－6 所示，BC 边上的分点是 A_1、A_2、A_3，CA 边上的分点是 B_1、B_2、B_3，AB 边上的分点是 C_1、C_2、C_3，记△$A_1B_1C_1$ 的周长为 p_1，△ABC 的周长为 p，求证：$\frac{1}{2}p<p_1<\frac{3}{4}p$.

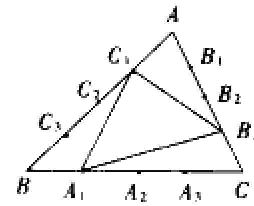


图 25－6

分析：连结 C_1B_3，先证 $C_1B_3/\!/BC$，再利用三角形三边的关系.

证明：如图 25－6a，连结 C_1B_3.

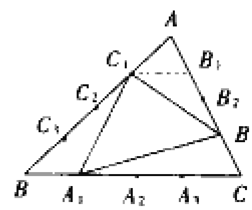


图 25－6a

$\because \frac{AC_1}{AB}=\frac{1}{4}=\frac{AB_3}{AC}$，$\therefore C_1B_3/\!/BC$，则$\frac{C_1B_3}{BC}=\frac{AC_1}{AB}=\frac{1}{4}$.

在△$B_1B_3C_1$ 中，$B_1B_3+B_3C_1>B_1C_1$，

即$\frac{1}{2}AC+\frac{1}{4}BC>B_1C_1$　　①

同理$\frac{1}{2}AB+\frac{1}{4}AC>C_1A_1$　　②

$\frac{1}{2}BC+\frac{1}{4}AB>A_1B_1$　　③

三式相加，得$\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}p>p_1$，即 $p_1<\frac{3}{4}p$.

另一方面，在△AB_1C_1 中，有 $B_1C_1+AC_1>AB_1$，

即 $B_1C_1+\frac{1}{4}AB>\frac{3}{4}AC$　　①

同理 $A_1C_1+\frac{1}{4}BC>\frac{3}{4}AB2$　　②

$B_1A_1+\frac{1}{4}AC>\frac{3}{4}BC$　　③

三式相加，得 $p_1+\frac{1}{4}p>\frac{3}{4}p$，即 $p_1>\frac{1}{2}p$.

综上所述，$\frac{1}{2}p<p_1<\frac{3}{4}p$.

例七 如图 25－7，在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O，直线 l 平行于 BD，且与 AB、DC、BC、AD 及 AC 的延长线分别相交于点 M、N、R、S 和 P. 求证：$PM\cdot PN=PR\cdot PS$.

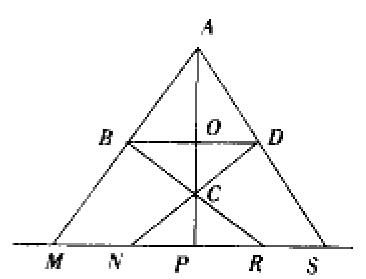


图 25－7

分析：从条件及图形可知有很多对相似三角形，关键是如何利用有关的比例线段. 可由结论出发找准相关比，再找出过渡比.

证明：由 $BO/\!/PM$，可得△BOA ∽ △MPA，故$\frac{PM}{BO}=\frac{PA}{OA}$.

▶笔▶记▶栏

由 $DO \parallel PS$，知$\triangle DOA \backsim \triangle SPA$，于是$\frac{PS}{DO}=\frac{PA}{OA}$.

$\therefore \frac{PM}{BO}=\frac{PS}{DO}$，即$\frac{PM}{PS}=\frac{BO}{DO}$.

由 $BO \parallel PR$，知$\triangle BOC \backsim \triangle RPC$，故$\frac{PR}{BO}=\frac{PC}{CO}$.

由 $DO \parallel PN$，知$\triangle DOC \backsim \triangle NPC$，故$\frac{PN}{DO}=\frac{PC}{CO}$.

$\therefore \frac{PR}{BO}=\frac{PN}{DO}$，即$\frac{PR}{PN}=\frac{BO}{DO}$.

$\therefore \frac{PR}{PN}=\frac{PM}{PS}$，即 $PM \cdot PN = PR \cdot PS$.

笔记栏

练习二十五

一、选择题：

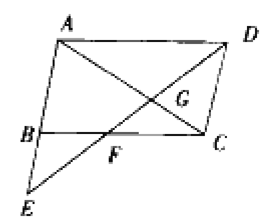


图 25 - 8

1. 如图 25 - 8，在▱$ABCD$ 中，E 是 AB 延长线上一点，连结 DE，交 AC 于 G，交 BC 于 F，则图中相似三角形（不含全等三角形）共有(　　)对.

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

2. 已知线段 $AB=n$，C 是 AB 上一点，且 AC 是 AB 和 BC 的比例中项，则 AC 的长为(　　).

A. $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})n$　　B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}n$　　C. $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)n$　　D. $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}n$

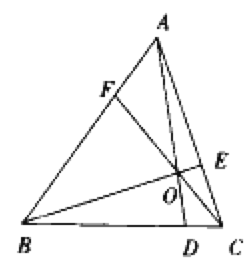


图 25 - 9

3. 如图 25 - 9，在$\triangle ABC$ 中，E、F 分别在 AC、AB 上，且 $4AF=AB$，$4CE=AC$，BE、CF 相交于 O，AO 的延长线交 BC 于 D，则 $BD:DC$ =(　　).

A. 7∶1　　B. 8∶1　　C. 9∶1　　D. 9∶2

二、填空题：

1. 如图 25 - 10，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB=7$，$AD=2$，$BC=3$，如果边 AB 上的点 P 使得以 P、A、D 为顶点的三角形和以 P、B、C 为顶点的三角形相似，则这样的点 P 有________个.

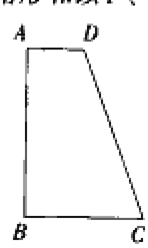


图 25 - 10

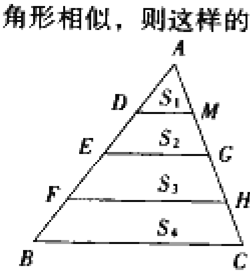


图 25 - 11

2. 已知一边长为 4 的正三角形，引一平行于三角形一边的直线分此三角形为面积相等的三角形和梯形两部分，则梯形的中位线长为________.

3. 如图 25 - 11，在$\triangle ABC$ 中，$DM \parallel EG \parallel FH \parallel BC$、$AD:DE:EF:FB=1:2:3:3$，则 $S_1:S_2:S_3:S_4$ = ________.

三、解答题：

1. 如图 25－12，在△ABC 中，$AB=AC$，D 是 AC 延长线上一点，且 $CD=AC$，E 是 AC 的中点. 求证：$BD:BE=2:1$.

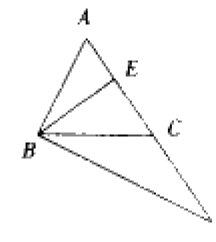


图 25－12

2. 如图 25－13，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB\perp EB$，$EF\perp FB$，且$\angle 1=\angle 2$. 求证：$FB=DC$.

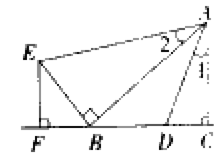


图 25－13

3. 已知 AD 是△ABC 的内角平分线，$BH\perp AD$，垂足为 H. $CK\perp AD$，垂足为 K，求证：$\frac{AB}{AC}=\frac{DH}{DK}$.

4. 如图 25－14，在△ABC（$AB>AC$）的 AB 边上取一点 D，在 AC 边上取一点 E，使 $AD=AE$，直线 DE 和 BC 的延长线交于 P 点，求证：$BP:CP=BD:CE$.

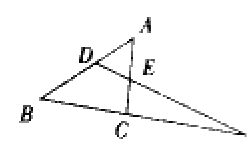


图 25－14

5. 已知：一直线和△ABC 的边 AB、AC 及 BC 的延长线相交于点 E、D、F，并且 $AD=DC$. 求证：$\frac{AE}{BE}=\frac{CF}{BF}$.

专题训练二十五

一、选择题：

1. 设$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的三边分别为a、b、c和a'、b'、c'，且已知对任何实数x，分式$\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$恒为定值，那么(　　).

A. $\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$有两边相等　　B. $\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$全等

C. $\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$相似　　D. $\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$既不相似也没有相等的边

2. 在$\triangle ABC$中，底边BC上的两点E、F把BC三等分，BM是AC上的中线，AE、AF分别交BM于G、H两点，那么$BG:GH:HM$的比值为(　　).

A. 3:2:1　　B. 5:3:2　　C. 6:4:3　　D. 7:5:3

3. 如图25-15，在梯形$ABCD$中，$AB/\!/CD$，AC交BD于O，$MON/\!/AB$且MON分别交AD、BC于M、N，于是$\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CD}$等于(　　).

A. $\dfrac{1}{MN}$　　B. $\dfrac{2}{MN}$　　C. $\dfrac{3}{MN}$　　D. $\dfrac{4}{MN}$

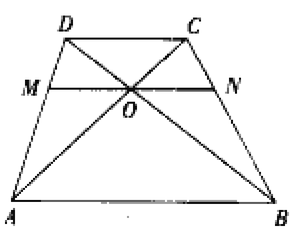


图25-15

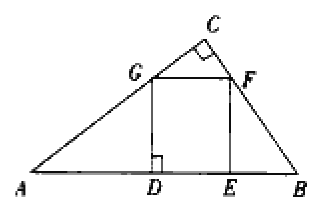


图25-16

4. 如图25-16，在$Rt\triangle ABC$中，$DEFG$是内接正方形，DE在斜边AB上，若$BC=3$，$AC=4$，$AB=5$，则$AD:DE:BE$的值为(　　).

A. 3:4:5　　B. 9:16:25　　C. 16:12:9　　D. 9:12:16

二、填空题：

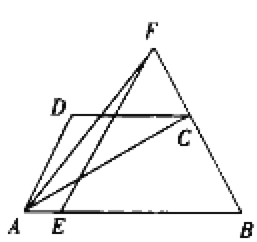


图25-17

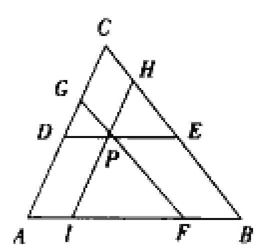


图25-18

1. 如图25-17，在等腰梯形$ABCD$中，$AB/\!/CD$，$AB=2CD$，$\angle A=60^\circ$，又E是底边AB上一点，且$FE=FB=AC$，$FA=AB$，则$AE:EB=$________.

2. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$AB\perp AC$，D是AC的中点，连结BD，过A作$AE\perp BD$交BC于E，

那么$\frac{BE}{EC}=$______.

3. 如图25－18，P是$\triangle ABC$内一点，等长的三条线段DE、FG和HI分别平行于边AB、BC和CA，并且都过P点. 已知$AB=12$、$BC=8$、$CA=6$，那么$AI:IF:FB=$______.

三、解答题：

1. 已知：$x=\frac{a+b}{2}$，$y=\frac{b+c}{2}$，$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$. 求证：$b$是$a$、$c$的比例中项.

2. 已知$\triangle ABC$中，底边BC上的两点把BC三等分，BM是AC上的中线，AE、AF分BM为x、y、z三部分($x>y>z$)，求$x:y:z$.

3. 如图25－19，在$\triangle ABC$中，D、E分别是边BC、AB上的点，且$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，如果$\triangle ABC$、$\triangle EBD$、$\triangle ADC$的周长依次为$m_1$、$m_2$、$m_3$，求证：$\frac{m_1+m_2}{m_3}\leqslant\frac{5}{4}$.

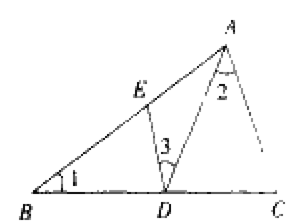


图25－19

4. 如图25－20，直线m的同侧有三个相邻的等边$\triangle ABC$、$\triangle ADE$、$\triangle AFG$，且G、A、B都在直线m上. 设这三个三角形的边长依次为a、b、c，连GD交AE于N，再连BN交AC于L. 求证：$AL=\frac{abc}{ab+bc+ca}$.

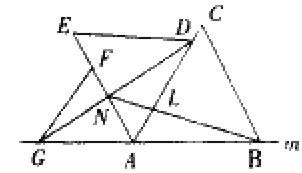


图25－20

5. 如图 25－21，在$\angle MPN$的边 PM 上有点 A、D，在边 PN 上有点 C、B，AB 与 CD 相交于点 F．（1）若 PF 是$\angle MPN$ 的平分线，求证：$\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}=\frac{1}{PC}+\frac{1}{PD}$．（2）若$\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}=\frac{1}{PC}+\frac{1}{PD}$，求证：$PF$ 平分$\angle MPN$．

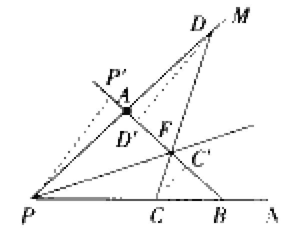


图 25－21

第二十六讲　相似形（二）

通过对相似三角形性质的研究，可以发现有些面积问题与相似形有关，即在一定的条件下，面积比可以用有关线段的比来表示．本讲主要介绍相似形与面积的关系及有关共线点、共点线、射影法在解题中的应用．

一、与面积有关的性质

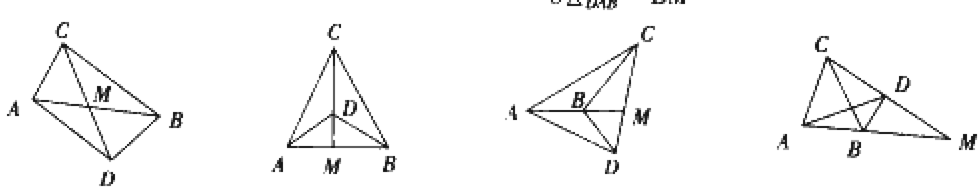
（1）等底等高的两个三角形的面积相等．

（2）等高（底）的两个三角形面积比等于其底（高）边的比．

（3）三角形的底扩大若干倍，把它的高相应地缩小相同的倍数，则新三角形与原三角形的面积相等．

（4）共角定理：共角（相等角或互补角）两三角形的面积比等于这个角两夹边乘积的比．

（5）共边定理：若两直线 AB 与 CD 相交于 M，则$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DAB}}=\dfrac{CM}{DM}$，如图 11－1 所示：



①　　②　　③　　④

图 26－1

（6）若$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，且相似比为 k，则面积比为 k^2．

二、两个著名的定理

1．梅涅劳斯定理：如果在$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上有点 D、E、F，且 D、E、F 三点共线，则$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$．

逆定理：如果在$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上分别有一点 D、E、F，且满足$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$，则 D、E、F 三点共线．

2．塞瓦定理：设 O 是$\triangle ABC$ 内任意一点，AO、BO、CO 分别交对边于 N、P、M，则$\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CP}{PA}=1$．

逆定理：设 M、N、P 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 上，且满足$\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CP}{PA}=1$，则

AN、BP、CM 相交于一点.

三、射影法

1. 射影定理：如图 26－2，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$，则 $AC^2=AD\cdot AB$；$CD^2=AD\cdot BD$；$BC^2=BD\cdot AB$.（请读者自己证明.）

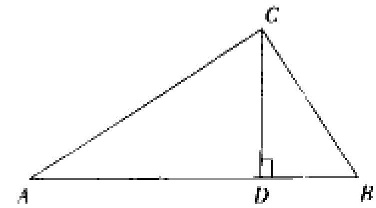


图 26－2

2. 射影法：从一些已知点向同一直线作垂线段，则这些垂线段都是平行的，从而可以利用射影定理及平行得出比例. 这样的解题方法称为射影法.

典型例题讲解

例一 自己画图，然后证明上述两个著名定理.

（1）证明梅涅劳斯定理.

证法一：如图 26－3，过 A 作 $AG\parallel BD$ 交 DF 的延长线于 G.

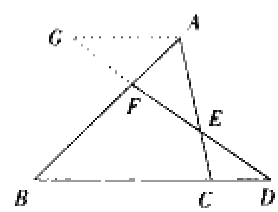


图 26－3

$\therefore \dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AG}{BD}$，$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{DC}{AG}$.

$\therefore \dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{DC}{AG}\cdot\dfrac{AG}{BD}=1$.

证法二：如图 26－3a，过 D 作 $MN\perp DF$ 于 D，过 A 作 $AA'\perp MN$ 于 A'，过 C 作 $CC'\perp MN$ 于 C'，过 B 作 $BB'\perp MN$ 于 B'.

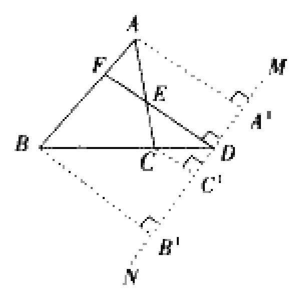


图 26－3a

$\therefore AA'\parallel FD\parallel CC'\parallel BB'$

$\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{DB'}{DC'}$，$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{DC'}{A'D}$，$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{A'D}{DB'}$.

将上述三式相乘得，

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{DB'}{DC'}\cdot\frac{DC'}{A'D}\cdot\frac{A'D}{DB'}=1.$$

（逆定理）证明：（用同一法证）如图 26－3b，过 D、F 两点作直线，交 AE 于 E'. 由梅氏定理得：

$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE'}{E'A}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$.

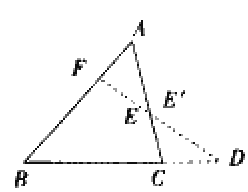


图 26－3b

$\because \dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$，$\therefore \dfrac{CE'}{E'A}=\dfrac{CE}{EA}$.

由合比定理得 $\dfrac{CA}{E'A}=\dfrac{CA}{EA}$，

$\therefore E'A=EA$，即 E 点在直线 DF 上. $\therefore D$、E、F 三点共线.

（2）证明塞瓦定理.

证法一：如图 26－3c，由结论的形式联想梅氏定理结论的形式，可考虑利用梅氏定理证明.

△CAM 被直线 POB 所截，得

▶笔▶记▶栏

$\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AB}{BM}\cdot\frac{MO}{OC}=1.$　　　　①

又由△*CMB* 被直线 *AON* 所截，得$\frac{CO}{OM}\cdot\frac{MA}{AB}\cdot\frac{BN}{NC}=1.$ ②

①×②得$\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}=1.$

证法二：利用等积变换证明.

∵△*CAO* 与△*CBO* 有公共边 *CO*，而这两个三角形 *CO* 边上高的比为 $AM:MB$，∴$\frac{AM}{MB}=\frac{S_{\triangle CAO}}{S_{\triangle CBO}}$，

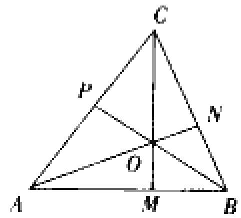


图 26－3c

同理：$\frac{BN}{NC}=\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CAO}}$，$\frac{CP}{PA}=\frac{S_{\triangle CBO}}{S_{\triangle ABO}}$. 三式相乘，得

$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=\frac{S_{\triangle CAO}}{S_{\triangle CBO}}\cdot\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CAO}}\cdot\frac{S_{\triangle CBO}}{S_{\triangle ABO}}=1.$

例二　如图 26－4，在△*ABC* 中，*D* 为 *BC* 边上任一点，*E* 为 *AC* 边上任一点，*AD*、*BE* 交于 *F*. 求证：$\frac{AF}{FD}=\frac{AE}{EC}\cdot\frac{BC}{BD}$.

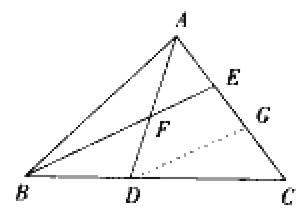


图 26－4

分析：过 *D* 作 $DG/\!/BE$ 交 *AC* 于 *G*.

证明：过 *D* 作 $DG/\!/BE$，交 *AC* 于 *G*.

∴$\frac{AF}{FD}=\frac{AE}{EG}$，$\frac{BC}{BD}=\frac{EC}{EG}$.

∴$\frac{AF}{FD}=\frac{AE}{EG}=\frac{AE}{EC}\cdot\frac{EC}{EG}=\frac{AE}{EC}\cdot\frac{BC}{BD}$.

例三　如图 26－5，*P* 为△*ABC* 外一点，射线 *AP*、*BP*、*CP* 分别交 *BC* 及 *AC*、*AB* 的延长线于 *D*、*E*、*F*，求$\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}-\frac{PD}{AD}$的值.

分析：过 *P* 作 $PG\perp BC$ 于 *G*，过 *A* 作 $AH\perp BC$ 于 *H*，则 $PG/\!/AH$.

证明：作 $PG\perp BC$ 于 *G*，$AH\perp BC$ 于 *H*.

∴$\frac{PD}{AD}=\frac{PG}{AH}=\frac{PG\cdot BC/2}{AH\cdot BC/2}=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$.

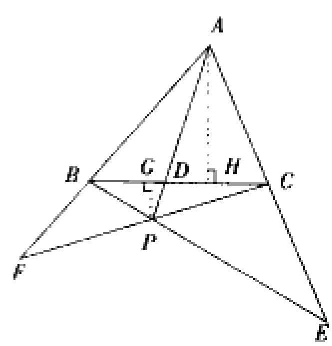


图 26－5

同理$\frac{PE}{BE}=\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\frac{PF}{CF}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$.

∴$\frac{PE}{BE}+\frac{DF}{CF}-\frac{PD}{AD}=\frac{S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=1.$

例四　设 *AD* 为△*ABC* 的 *BC* 边上的中线，引任一直线 *CEF* 交 *AD* 于 *E*，交 *AB* 于 *F*. 求证：$\frac{AE}{2ED}=\frac{AF}{FB}$.

分析：本题可以利用射影法证明.

证法一：如图 26－6，设 *A*、*B*、*D* 三点在直线 *EF* 上的射影分别为 A'、B'、

▶笔▶记▶栏

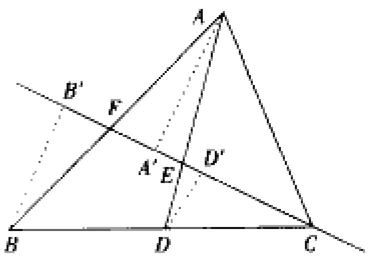


图 26-6

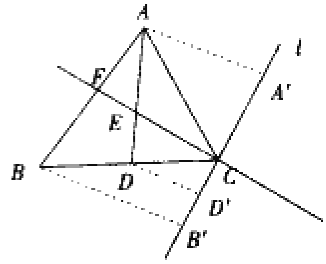


图 26-6a

D'，则 $BB' \parallel AA' \parallel DD'$，从而$\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{AA'}{DD'}$，$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AA'}{BB'}$，$\dfrac{DD'}{BB'}=\dfrac{1}{2}$.

故$\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{AA'}{DD'}=\dfrac{2AA'}{BB'}=\dfrac{2AF}{FB}$，即$\dfrac{AE}{2ED}=\dfrac{AF}{FB}$.

证法二：如图 26-6a，设 A、B、D 三点在过 C 且与 EF 垂直的直线 l 上的射影分别为 A'、B'、D'，则 $AA' \parallel DD' \parallel BB'$，从而$\dfrac{CB'}{CD'}=2$，$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{A'C}{CB}$，$\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{A'C}{CD'}$. 故$\dfrac{AE}{2ED}=\dfrac{AF}{FB}$.

例五 如图 26-7，$\triangle PQR$ 与$\triangle P'Q'R'$ 是两个全等的等边三角形，它们交成六边形 $ABCDEF$，求证：$AB^2+CD^2+EF^2=BC^2+DE^2+FA^2$.

分析：6 个小三角形相似，由面积与相似三角形的关系可得.

证明：如图 26-7，设 S_1、S_1'、…表示所在小三角形的面积，易证这 6 个小三角形互相相似，由此可得

$$\frac{AB^2}{S_1}=\frac{CD^2}{S_2}=\frac{EF^2}{S_3}=\frac{AB^2+CD^2+EF^2}{S_1+S_2+S_3},$$

$$\frac{BC^2}{S_1'}=\frac{DE^2}{S_2'}=\frac{FA^2}{S_3'}=\frac{BC^2+DE^2+FA^2}{S_1'+S_2'+S_3'},$$

且$\dfrac{AB^2}{S_1}=\dfrac{BC^2}{S_1'}$.

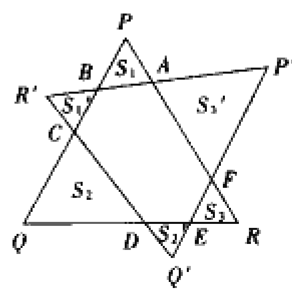


图 26-7

$\because S_1+S_2+S_3+S_{ABCDEF}=S_1'+S_2'+S_3'+S_{ABCDEF}$（即 $S_{\triangle PQR}=S_{\triangle P'Q'R'}$），

$\therefore S_1+S_2+S_3=S_1'+S_2'+S_3'$.

故 $AB^2+CD^2+EF^2=BC^2+DE^2+FA^2$.

例六 围绕$\triangle B_1B_2B_3$ 外接$\triangle A_1A_2A_3$，围绕$\triangle A_1A_2A_3$ 外接$\triangle C_1C_2C_3$，使它的三边分别平行于$\triangle B_1B_2B_3$ 的三边，试用 $S_{\triangle B_1B_2B_3}$ 和 $S_{\triangle C_1C_2C_3}$表示 $S_{\triangle A_1A_2A_3}$.

分析：利用相似形及面积的关系.

解：如图 26-8，设点 B_1、B_2、B_3 分别在边 A_2A_3、A_1A_3、A_1A_2 上，而点 A_1、A_2、A_3 分别在边 C_2C_3、C_3C_1、C_1C_2 上.

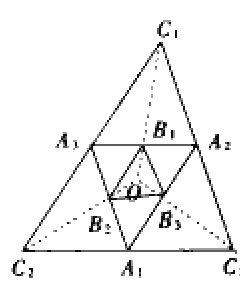


图 26-8

$\because \triangle B_1B_2B_3$ 的三边分别平行于$\triangle C_1C_2C_3$ 的三边，

$\therefore$ 直线 B_1C_1、B_2C_2、B_3C_3 相交于一点 O.

▶笔▶记▶栏

$\therefore S_{\triangle A_3B_2OB_1} = S_{\triangle B_1C_2O}$，且 $\dfrac{S_{\triangle C_2B_1O}}{S_{\triangle B_1OB_2}} = \dfrac{C_2O}{B_2O} = \dfrac{C_1O}{B_1O} = \dfrac{S_{\triangle C_1OC_2}}{S_{\triangle C_2B_1O}}$.

$\therefore S_{\triangle A_1A_2A_3} = kS_{\triangle B_1B_2B_3} = \sqrt{S_{\triangle B_1B_2B_3} \cdot S_{\triangle C_1C_2C_3}}$.

例七 如图 26－9，在△ABC 内部选取一点 P，过 P 作三条分别与△ABC 的三边平行的直线，这样所得的三个三角形 S_1、S_2、S_3 的面积分别为 $4m^2$、$16m^2$、$64m^2$，求△ABC 的面积.

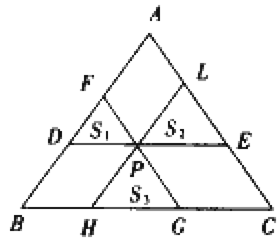


图 26－9

分析：该题没有具体给出线段的长，于是可以利用三角形相似来求得.

提示：$\sqrt{\dfrac{S_1}{S_{\triangle ABC}}} + \sqrt{\dfrac{S_2}{S_{\triangle ABC}}} + \sqrt{\dfrac{S_3}{S_{\triangle ABC}}} = 1$

$S_{\triangle ABC} = 196m^2$.

▶笔▶记▶栏

一、选择题：

1. 如图 26－10，在▱$ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，F 是 AD 的中点，EF 交 AC 于点 O，FE 的延长线交 CB 的延长线于 G 点，则 $S_{\triangle AOF}:S_{\triangle COG}$ 为(　　).

   A. 1:4　　B. 1:9　　C. 2:5　　D. 1:2

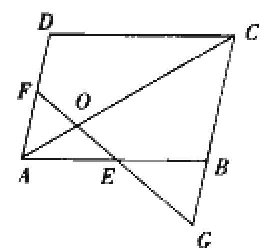


图 26－10

2. 如图 26－11，D 为△ABC 的边 AC 上一点，$\angle DBC = \angle A$，已知 $BC = \sqrt{3}$，△BCD 与△ABC 的面积比是 3:4，则 CD 的长是(　　).

   A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

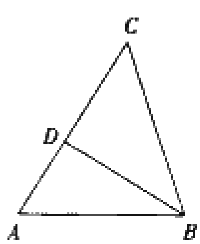


图 26－11

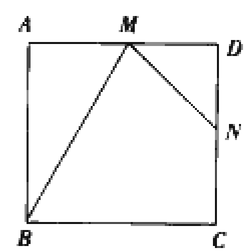


图 26－12

3. 如图 26－12，在正方形 $ABCD$ 中，M 是 AD 的中点，N 点在 CD 上，若 $\angle BMN = \angle MBC$，则 $\dfrac{CN}{ND}$ 的值为(　　).

   A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

4. 三角形的三条高分别为 5、12、13，则这个三角形是(　　).

   A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 不能确定

二、填空题：

1．如图 26－13，在△ABC 中，D 在 BC 上，且 $BD:DC=4:3$，E 在 AD 上，且 $AE:ED=6:7$，如果 BE 交 AC 于 F，则 $BE:EF=$ ________.

2．如图 26－14，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\angle B=90°$，$AD=3$，$BC=6$，点 P 在高 AB 上滑动，若△DAP ∽△PBC，$AP=5$，则 $PB=$ ________.

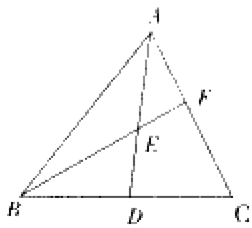


图 26－13

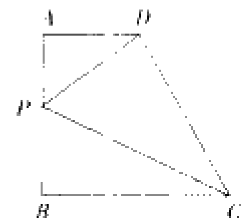


图 26－14

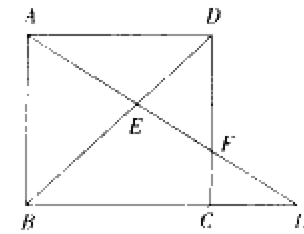


图 26－15

3．如图 26－15，$ABCD$ 为正方形，A、E、F、G 在同一直线上，且 $AE=6$cm，$EF=4$cm，则 FG ＝______cm.

三、解答题：

1．如图 26－16，两根电灯杆相距 l 米，分别在高为 h_1、h_2 的 A、C 处用铁丝将其固定，求铁丝 AD 与铁丝 BC 的交点 M 到地面的高 MH，其与 l 有关吗？

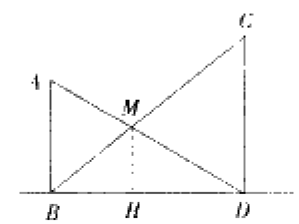


图 26－16

2．(1) 矩形 $ABCD$ 与矩形 $EFGH$ 满足何条件才相似？

(2) 设矩形的长和宽分别为 a 和 b $(a>b)$，在其四周镶上宽度为 x 的木条，得到一个新的长方形．试问：原来矩形与新矩形的面积比是多少？此两矩形相似吗？

3．如图 26－17，△ABC 和△DEF 不相似，但∠A＝∠D，能否将这两个三角形分别分割成两个三角形，使△ABC 所分成的每个三角形与△DEF 分成的每个三角形对应相似？如果能，请设计出来．

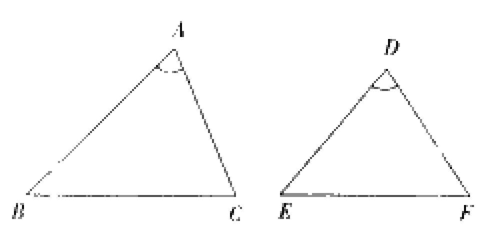


图 26－17

4. 已知：如图 26－18，P 为 AC 中点，D、E 为 BC 上两点，且 $BD=DE=EC$、AD、AE 分别交 BP 于 M、N．求：$BM:MN:NP$．

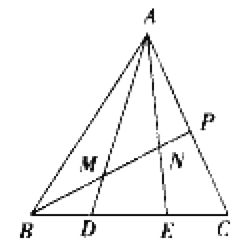


图 26－18

5. 如图 26－19，在$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上分别取点 D、E、F，且 $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=k\geqslant 5$，$S_{\triangle ABC}=2$，求 $S_{\triangle PQR}$．

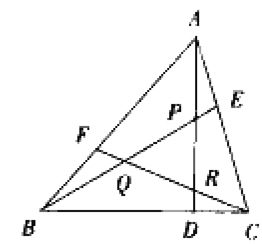


图 26－19

专题训练二十六

一、选择题：

1. 如图 26－20，正方形 $OPQR$ 内接于$\triangle ABC$，已知$\triangle AOR$、$\triangle BOP$ 和$\triangle CRQ$ 的面积分别是 $S_1=1$、$S_2=3$ 和 $S_3=1$，那么正方形 $OPQR$ 的边长是(　　)．

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

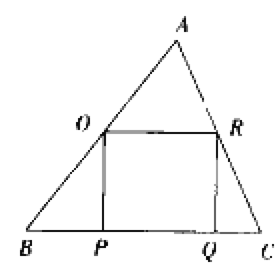


图 26－20

2. 如图 26－21，O 是$\triangle ABC$ 内部一点，P、Q、R 分别是三边 AB、BC、AC 上的点，且 $OP\parallel BC$，$QO\parallel AC$，$OR\parallel AB$，$OP=OQ=OR=x$，若 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，那么 x 等于(　　)．

A．$\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$　　B．$\dfrac{a+b+c}{9}$

C．$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$　　D．$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}}$

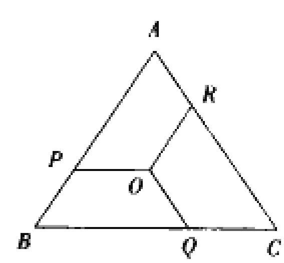


图 26－21

二、填空题：

1. 如图 26－22，在$\triangle ABC$ 中，$DE\parallel FG\parallel BC$，$GZ\parallel EF\parallel AB$，若 ADE、$\triangle EFG$、$\triangle GZC$ 的面积分别为 16cm^2、36cm^2、64cm^2，则$\triangle ABC$ 的面积为________．

2. 如图 26－23，梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=90°$，对角线 $AC\perp BD$ 于 P 点，已知 $AD:DC=4:5$，则 $BD:AC=$________．

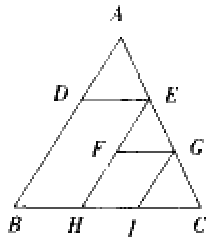


图 26－22

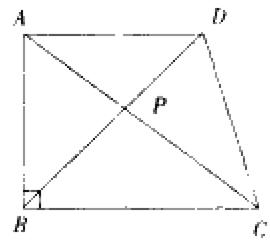


图 26－23

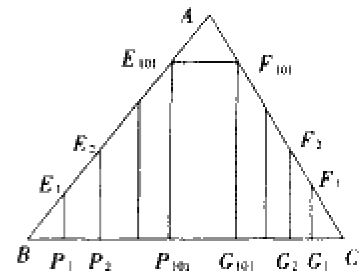


图 26－24

3．如图 26－24，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=2\sqrt{5}$，$BC=4$，在BC上有 101 个不同的点P_1，P_2，…，P_{101}，过这 101 个点分别作$\triangle ABC$的内接矩形$P_1E_1F_1G_1$，$P_2E_2F_2G_2$，…，$P_{101}E_{101}F_{101}G_{101}$，设每个内接矩形的周长分别为$L_1$，$L_2$，…，$L_{101}$，则$L_1+L_2+\cdots+L_{101}=$________．

三、解答题：

1．把一个锐角三角形的余料加工成正方形零件，使正方形的四个顶点都在三角形的边上．若三角形的三边长分别为a、b、c，且$a>b>c$．问：正方形的两个顶点放在哪条边上，可使加工出来的正方形零件面积最大？

2．如图 26－25，在锐角$\triangle ABC$中，$PQRS$是$\triangle ABC$的内接矩形，且$S_{\triangle ABC}=nS_{\text{矩形}PQRS}$，$n$是大于等于 3 的自然数．求证：$\dfrac{BS}{AB}$为无理数．

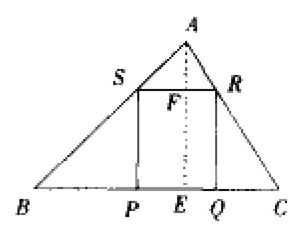


图 26－25

3．如图 26－26，若$\triangle DEF$的顶点D、E、F分别在$\triangle ABC$的三边上，且$\dfrac{AF}{FB}=m$，$\dfrac{BD}{DC}=n$，$\dfrac{CE}{EA}=l$，求证：$S_{\triangle DEF}=\dfrac{mnl+1}{(m+1)(n+1)(l+1)}$．

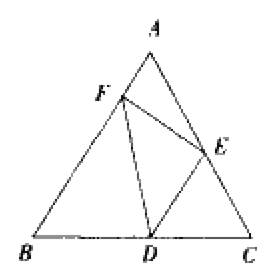


图 26－26

4．如图 26－27，在 Rt$\triangle CAB$中，$\angle A=90°$，$\angle B$、$\angle C$的平分线相交于F，且分别交对边于D、E，求$S_{\text{四边形}BCDE}:S_{\triangle BFC}$．

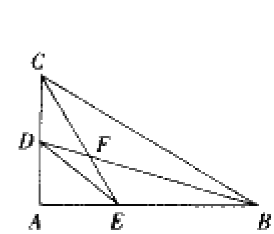


图 26－27

5. 如图 26－28，P 为$\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，作$\square PEAF$. 求证：在 $S_{\triangle BPF}$、$S_{\triangle PCE}$、$S_{\square PEAF}$中，至少有一个面积不小于$\frac{4}{9}\cdot S_{\triangle ABC}$.

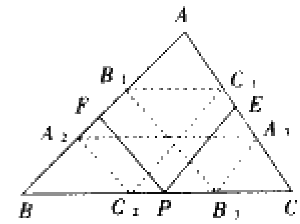


图 26－28

6. 如图 26－29，过 P 分别作三边的平行线 DD'、EE'、FF'，设 $S_{\triangle ABC}=20$，求：$S_{\triangle PEF'}+S_{\triangle PD'F}+S_{\triangle PE'D}$的最小值.

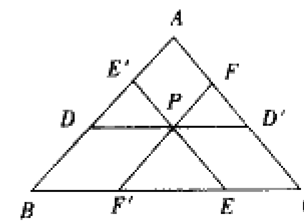


图 26－29

第二十七讲　面积与面积法

解题指导

在前面，尤其是上一讲已涉及到有关面积的问题，也从中发现用面积法解题的优势．这一讲将系统地介绍有关面积及面积法的问题．面积问题是基本的、有趣的、极其重要的几何问题之一，其包括两类．一类是直接与面积有关的问题，即面积的计算，另一类是题目本身与面积无关，但可以用面积，即面积法来解决的问题．在各类数学竞赛中，面积问题常常见到．

一、常见图形的面积公式

1．三角形的面积（如图 27－1）：$S=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\left(\text{其中 } p=\frac{1}{2}(a+b+c)\right).$$

2．平行四边形的面积（如图 27－2）：$S=bh=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$（其中 d_1、d_2 为对角长，φ 为 d_1、d_2 的夹角）．

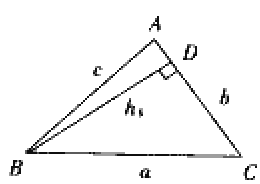


图 27－1

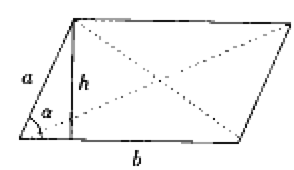


图 27－2

3．梯形的面积（如图 27－3）：$S=\frac{1}{2}(a+b)h=lh$．（其中 l 为中位线长）．

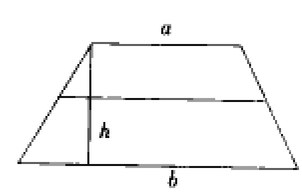


图 27－3

4．圆的面积：$S=\pi R^2=\frac{\pi}{4}d^2$（其中 d 为直径）．

5．正多边形的面积：正三角形的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$；正四边形的面积 $S=a^2$；正五边形的面积 $S=\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2$；正六边形的面积 $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$．

二、重要的面积定理

1．两个全等形的面积相等．

2．一个图形的面积等于它各部分面积之和．

3．等底等高的两个三角形的面积相等．

4. 与平行四边形同底等高的三角形面积等于平行四边形的面积的一半.

三、利用等积变换解平面几何问题

如图 27－4①，若 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$，则 $BD=DC$；如图 27－4②，若 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}$，则 $AD\parallel BC$；如图 27－4③，$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BDC}}$.

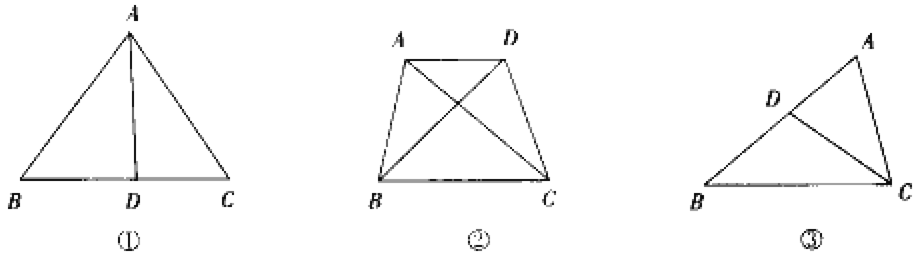


图 27－4

熟悉图 27－5 中各基本图形中面积之间的关系，在遇到复杂的图形的面积计算时非常有用. 请读者指出图 27－5 各图中 S_1、S_2、S_3、S_4 之间的关系.

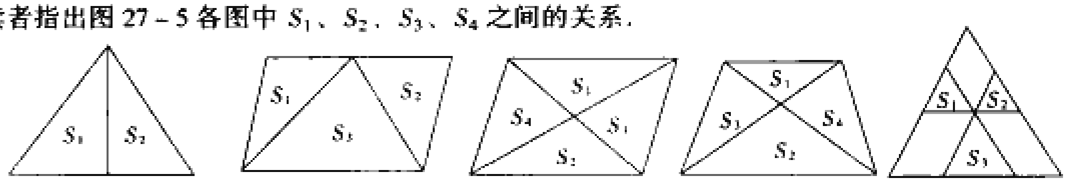


图 27－5

典型例题讲解

例一 如图 27－6，在△ABC 的边 AB、AC 上分别有点 D、E，BE 和 CD 相交于 P，且△ADE、△BPD、△CPE 的面积分别为 5、8、3，求△ABC 的面积.

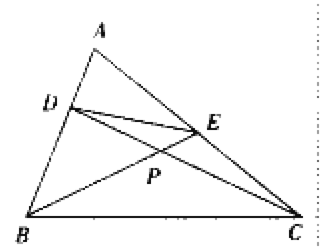


图 27－6

分析：本题直接用公式去求△ABC 的面积是很困难的. 可利用有关面积比，从而找出解题的突破口.

解：设 $S_{\triangle DPE}=x$，$S_{\triangle BPC}=y$.

$\because \dfrac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle DPB}}=\dfrac{PC}{PD},\dfrac{S_{\triangle DPE}}{S_{\triangle PEC}}=\dfrac{DP}{PC}$，$\therefore \dfrac{x}{3}=\dfrac{8}{y}$，即 $xy=24$.

又 $\because \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BDC}}=\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BDE}}$，$\therefore \dfrac{8+x}{8+y}=\dfrac{5}{8+x}$.

$\therefore \begin{cases} xy=24, \\ \dfrac{8+x}{8+y}=\dfrac{5}{8+x}. \end{cases}$

解得 $x=2$，$y=12$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=5+8+3+2+12=30$.

例二 如图 27－7，在梯形 ABCD 中，$AD\parallel BC$，△AOD、△AOB、△BOC 的面积分别为 S_1、S_3、S_2（如图所示），梯形的面积为 S. 试求 $\sqrt{S}$ 与 $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$、S_3

▶笔▶记▶栏

与$\sqrt{S_1}\cdot\sqrt{S_2}$的关系.

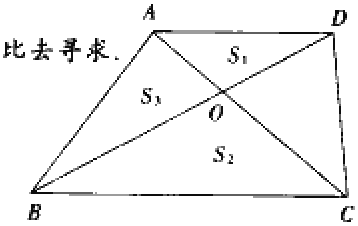


图 27－7

分析：在梯形中，$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle DOC}$，再利用面积比去寻求.

解：$\because S_{\triangle DOC}=S_{\triangle AOB}=S_3$，

又$\because \dfrac{S_2}{S_3}=\dfrac{OC}{OA}$，$\dfrac{S_{\triangle DOC}}{S_1}=\dfrac{S_3}{S_1}=\dfrac{OC}{OA}$，

$\therefore \dfrac{S_2}{S_3}=\dfrac{S_3}{S_1}$，即 $S_3{}^2=S_1\cdot S_2$，$\therefore S_3=\sqrt{S_1}\cdot\sqrt{S_2}$.

又$\because S_1+S_2+2S_3=S$，即 $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$，

$\therefore \sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$.

例三 如图 27－8，在钝角$\triangle ABC$ 中，BD 是钝角的平分线，求证：$\dfrac{1}{BC}+\dfrac{1}{BA}=\dfrac{1}{BD}$.

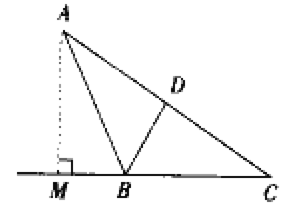


图 27－8

分析：本题的条件较为简单，无从下手，但若利用 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，则柳暗花明.

证明：过 A 作 $AM\perp BC$ 于 M. 设$\angle ABC=2\beta$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$BD=d$.

$\because S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}ad\sin\beta$，$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}dc\sin\beta$，$S_{\triangle ACM}=\dfrac{1}{2}(a+c\cos\beta)c\sin\beta=\dfrac{1}{2}ac\sin\beta+\dfrac{1}{2}c^2\sin\beta\cos\beta$，$S_{\triangle ABM}=\dfrac{1}{2}c^2\sin\beta\cdot\cos\beta$，

又$\because S_{\triangle DBC}+S_{\triangle ABD}=S_{\triangle AMC}-S_{\triangle ABM}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}ad\sin\beta+\dfrac{1}{2}dc\sin\beta=\dfrac{1}{2}ac\sin\beta$.

$\because \sin\beta>0$，$\therefore ad+dc=ac$，即$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{d}$.

$\therefore \dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{BC}=\dfrac{1}{BD}$.

例四 如图 27－9，已知 P 是$\triangle ABC$ 内一点、AP、BP、CP 的延长线分别交 BC、CA、AB 于 D、E、F. 设 $PA=a$，$PB=b$，$PC=c$，$PD=PE=PF=d$. 若 $a+b+c=29$，$d=6$，求 abc.

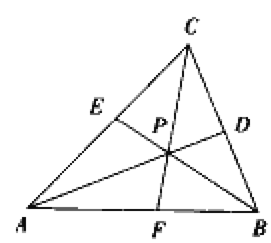


图 27－9

分析：直接从 $a+b+c=29$ 入手求 abc 的值是较困难的. 可结合图形利用面积比得到边的关系.

解：设 $S_{\triangle ABC}=S$，$S_{\triangle APF}=S_1$，$S_{\triangle BPF}=S_2$，$S_{\triangle BPD}=S_3$，$S_{\triangle CPD}=S_4$，$S_{\triangle CPE}=S_5$，$S_{\triangle APE}=S_6$.

$\therefore \dfrac{S_1+S_2}{S}=\dfrac{d}{c+d}=\dfrac{6}{c+6}$，

$\dfrac{S_3+S_4}{S}=\dfrac{6}{a+6}$，$\dfrac{S_5+S_6}{S}=\dfrac{6}{b+6}$.

$\therefore \dfrac{6}{a+6}+\dfrac{6}{b+6}+\dfrac{6}{c+6}=1$.

解得　$abc=36(a+b+c)+432$.

当 $a+b+c=29$ 时，$abc=1476$.

例五 设△ABC 的三条高线之和等于此三角形三个角平分线交点到一边距离的9倍. 求证：△ABC 是正三角形.

分析：设 $S_{\triangle ABC}=S$，于是 $h_a=\frac{2S}{a}$，$h_b=\frac{2S}{b}$，$h_c=\frac{2S}{c}$，利用此关系较方便.

证明：设 $S_{\triangle ABC}=S$，三个内角平分线的交点 O 到一边距离为 h，三边上的高分别为 h_a、h_b、h_c，则 $h_a=\frac{2S}{a}$，$h_b=\frac{2S}{b}$，$h_c=\frac{2S}{c}$.

$\therefore h_a+h_b+h_c=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot 2S$.

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOB}=\frac{bh}{2}+\frac{ah}{2}+\frac{ch}{2}$，

$\therefore h_a+h_b+h_c=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)h$.

又 $h_a+h_b+h_c=9h$，$\therefore\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=9$.

化简、变形，得

$c(a-b)^2+b(a-c)^2+a(b-c)^2=0$.

又 $\because a$、b、c 均大于0，$\therefore a-b=a-c=b-c=0$.

$\therefore a=b=c$，即△ABC 为正三角形.

例六 已知 x、y、z 都是正数，且满足 $xyz(x+y+z)=1$. 求 $(x+y)(x+z)$ 的最小值.

分析：构造边长为 $x+y$、$y+z$、$x+z$ 的△ABC，然后利用有关面积关系便可得.

解：$\because x$、y、z 都是正数，且 $(x+y)+(y+z)>x+z$，$(y+z)+(x+z)>x+y$，$(z+x)+(x+y)>y+z$，于是构造以 $x+y$、$y+z$、$z+x$ 为边长的△ABC.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(x+y)(y+z)\sin A\leqslant\frac{1}{2}(x+y)(y+z)$，

$\therefore (x+y)(y+z)\geqslant 2S_{\triangle ABC}$.

又 $\because\sqrt{xyz(x+y+z)}=S=1$，$\therefore(x+y)(y+z)\geqslant 2$，且当 $x+y=y+z$ 时取等号.

$\therefore(x+y)(y+z)$ 的最小值为2.

例七 如图27－10，以 Rt△ABC 两直角边 AC、BC 为边分别向三角形外侧作正方形 $ACDE$、$BCGH$，连 BE、AH 交 AC、BC 于 P、Q，求证：$CP=CQ$.

分析：要证 $CP=CQ$，可考虑 CP、CQ 所在的两个三角形面积相等，以 CP、CQ 为边的三角形显然不行. 注意到 $CP\perp BD$，$CQ\perp AG$，而 $BD=AG$，于是只需证 $S_{\triangle AQG}=S_{\triangle PBD}$ 就行了.

证明：连 QG、DP、CH、CE.

$\because$ 四边形 $BCGH$、$AEDC$ 是正方形，$\therefore HG\parallel BC$，$DE\parallel AC$.

$\therefore S_{\triangle CGQ}=S_{\triangle HCQ}$，$S_{\triangle DPC}=S_{\triangle EPC}$.

笔记栏

$\because S_{\triangle HCA}=\frac{1}{2}HG\cdot CA$，$S_{\triangle ECB}=\frac{1}{2}BC\cdot DE$，

而 $HG=BC$，$CA=DE$，

$\therefore S_{\triangle HCA}=S_{\triangle ECB}$.

$\therefore S_{\triangle QGA}=S_{\triangle QGC}+S_{\triangle QCA}=S_{\triangle HCQ}+S_{\triangle QCA}=S_{\triangle HCA}$

$=S_{\triangle ECB}=S_{\triangle ECP}+S_{\triangle BCP}=S_{\triangle DCP}+S_{\triangle BCP}$

$=S_{\triangle DPB}$.

$\because S_{\triangle QGA}=\frac{1}{2}CQ\cdot AG$，$S_{\triangle PDB}=\frac{1}{2}PC\cdot BD$，

而 $AG=AC+CG=CD+BC=BD$，

$S_{\triangle QGA}=S_{\triangle PDB}$.

$\therefore CQ=PC$.

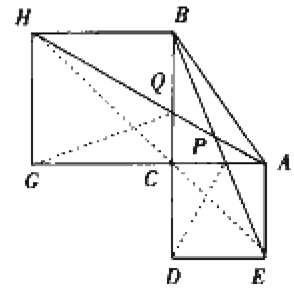


图 27－10

▶随▶记▶栏

一、选择题：

1. 一个三角形一边长为 2，这边上的中线为 1，另两边的和是$\sqrt{3}+1$，则此三角形的面积为(　　).

A. 1　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\sqrt{3}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

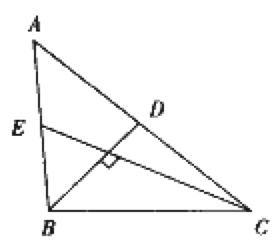


图 27－11

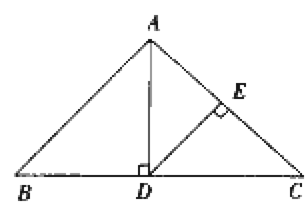


图 27－12

2. 如图 27－11，在△ABC 中，已知 BD 和 CE 分别是两边上的中线，并且 $BD\perp CE$，$BD=6$，$CE=7$，则△ABC 的面积等于(　　).

A. 28　B. 26　C. 25　D. 30

3. 如图 27－12，已知 AD 是 Rt△ABC 斜边 BC 上的高，DE 是 Rt△ADC 斜边上的高，若 $DC:AD=1:2$，$S_{\triangle DCE}=a$，则 $S_{\triangle ABC}$为(　　).

A. $4a$　B. $9a$　C. $16a$　D. $25a$

二、填空题：

1. 如图 27－13，已知 M 是▱$ABCD$ 边 AB 的中点，CM 交 BD 于 E，则图中阴影部分的面积与▱$ABCD$ 的面积之比为________.

2. 如图 27－14，在△ABC 中，$DE\parallel BC$，DE 分别交 AB、AC 于 D、E，若 $S_{\triangle ADE}=2S_{\triangle DCE}$，则 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=$________.

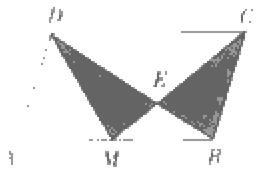


图 27－13

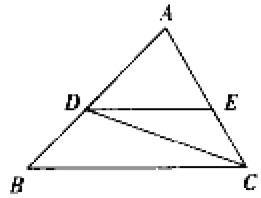


图 27－14

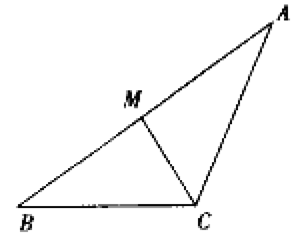


图 27－15

3．如图 27－15，在$\triangle ABC$中，M是AB的中点，$MC=MA=5$，则$\triangle ABC$的周长是_________.

三、解答题：

1．利用面积法证明平行线分线段成比例定理．

2．如图 27－16，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 互相垂直，求$S_{\text{四边形}ABCD}$（用 AC、BD 表示）．

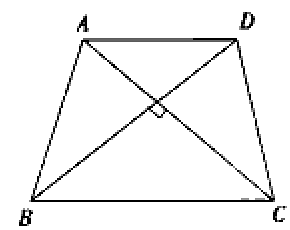


图 27－16

3．如图 27－17，$AD \parallel BC$，且 AC 与 BD 相交于 E，求证：$\dfrac{1}{S_{\triangle ABC}}+\dfrac{1}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{1}{S_{\triangle ABE}}$.

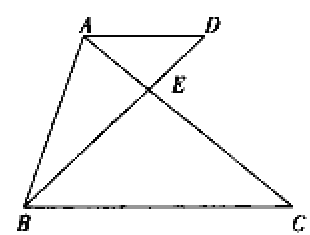


图 27－17

4．如图 27－18，$\triangle BOF$、$\triangle BOD$、$\triangle AOF$、$\triangle COE$ 的面积分别为 30、35、40、84，求$\triangle ABC$的面积．

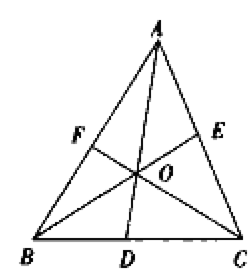


图 27－18

5. 如图 27－19，在$\triangle ABC$中，$AB=3AC$，$\angle A$的平分线交BC于D，过B作$BE\perp AD$于E，求证：$AD=DE$.

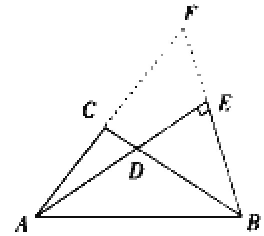


图 27－19

6. 如图 27－20，从三角形ABC内一点P，作边BC、CA、AB的垂线，设垂线长为t_a、t_b、t_c，h_a、h_b、h_c为$\triangle ABC$的高，求证：$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$.

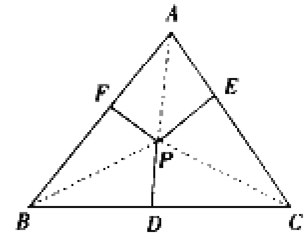


图 27－20

[redacted]

一、选择题：

1. 平行于三角形一边的 9 条直线，将另一边 10 等分，同时把三角形分成 10 个不同的部分，已知这些部分中最大面积是 57，则原三角形的面积为(　　).

A．200　　B．250　　C．300　　D．400

2. 若D是$\triangle ABC$的边BC上一点，$\triangle ABD$和$\triangle ACD$的重心分别为E、F，则$S_{\triangle AEF}:S_{\triangle ABC}$等于(　　).

A．4:9　　B．1:3　　C．2:9　　D．1:9

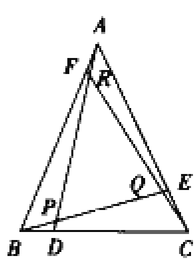


图 27－21

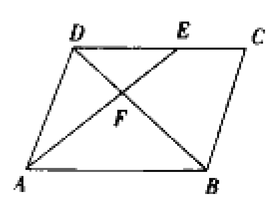


图 27－22

3. 如图 27－21、在正三角形的边BC、CA、AB上分别有内分点D、E、F，将边分成$2:(n-2)$

（其中 $n>4$），线段 AD、BE、CF 相交所成的$\triangle PQR$ 的面积是$\triangle ABC$ 的面积的$\frac{1}{7}$，则 n 的值是（　　）.

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

4. 如图 27－22，在平行四边行 $ABCD$ 中，E 为 DC 上一点，且 $DE:EC=5:3$，连结 AE、BE、BD，设 AE、BD 相交于 F，$\triangle DEF$、$\triangle EFB$、$\triangle ABF$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3，则 $S_1:S_2:S_3$ 等于（　　）.

A. 5:8:10　　B. 25:64:100　　C. 9:25:64　　D. 25:40:64

二、填空题：

1. 一个三角形的边长都是整数，其周长为 8，则这个三角形的面积等于__________.

2. 如图 27－23，若 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，E 是 AB 的中点，F 是 BC 的中点，AF 与 DE 相交于 I，BD 和 AF 相交于 H，则四边形 $BEIH$ 的面积为__________.

3. 如图 27－24，A 在线段 BG 上，$ABCD$ 和 $DEFG$ 都是正方形，面积分别是 9 和 16，则$\triangle CDE$ 的面积为__________.

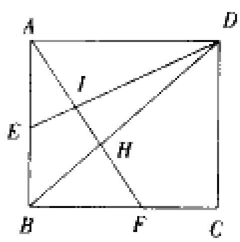


图 27－23

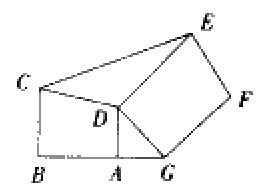


图 27－24

三、解答题：

1. 如图 27－25，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$S_{\triangle CDE}:S_{\triangle CDB}=2:5$，求 $S_{\triangle CDE}:S_{\triangle ABD}$.

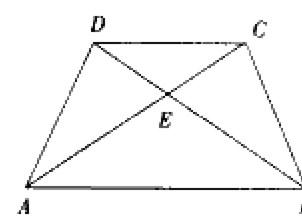


图 27－25

2. 如图 27－26，AD 是$\triangle ABC$ 的中线，E 是 AB 上一点，CE 交 AD 于 R，求证：$\frac{AR}{RD}=\frac{2AE}{EB}$.

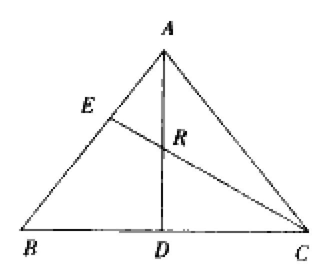


图 27－26

3. 求证：等腰三角形底边上任意一点到两腰所引的垂线段之和为定值.

4. 如图 27－27，在△ABC 中是否存在一点 P，使得过 P 点的任意一直线都将△ABC 分成等积的两部分？为什么？

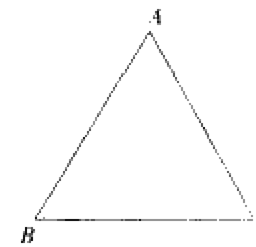


图 27－27

5. 如图 27－28，过 P 点作四条射线与直线 l 和 l_1 分别相交于 A、B、C、D 和 A_1、B_1、C_1、D_1，求证：$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC}=\frac{A_1B_1 \cdot C_1D_1}{A_1D_1 \cdot B_1C_1}$.

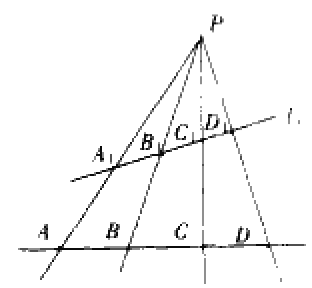


图 27－28

6. 设 $a \geqslant c$，$b \geqslant c$，$c>0$，求证：$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}$.

第二十八讲　组合初步

解题指要

随着计算机科学的迅速发展，有关组合数学的题目在数学竞赛中经常出现．解决有关组合数学方面的问题大都不需要太多的专门知识，但要机敏，要有较高的分析能力．本讲将简单介绍有关组合的简单问题．

一、排列、组合的概念

从一个集合中有序地选取一组元素称为排列．从一个集合中选取一组元素而不计其次序称为组合．有些问题是先选取后再考虑排序的，于是要同时考虑组合与排列．

二、有关的公式及性质

1．从 n 个不同的元素中取 r 个不同元素的排列数为 $P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}$，其中 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$．

2．从 n 个不同的元素中取 r 个不同元素的组合数为 $C_n^r=\frac{n!}{(n-r)!\ r!}$．

3．基本组合恒等式：

（1）$C_n^k=C_n^{n-k}$；

（2）$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$；

（3）$C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$；

（4）$C_n^kC_k^m=C_n^mC_{n-m}^{k-m}=C_n^{k-m}C_{n-k+m}^m$（$m\leqslant k\leqslant n$）；

（5）$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$；

（6）$C_n^0-C_n^1+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$．

典型例题讲解

例一　设△ABC 是一个满足下列条件的直角三角形：①该三角形两直角边的长度为整数；②若该三角形的周长是 $x$cm，则三角形的面积是 $x\text{cm}^2$．试确定三角形的个数．

分析：该题是一个计数问题，设两直角边为 a、b，列代数方程即可求解．

解：设两直角边的长度为 a、b，a、b 均为自然数．由题意可得

$\frac{1}{2}ab=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$．整理得 $ab-4a-4b+8=0$，即$(a-4)(b-4)=8$．

$\therefore \begin{cases} a-4=1,\ 2,\ 4,\ 8, \\ b-4=8,\ 4,\ 2,\ 1. \end{cases}$

∴该三角形的三边共为两组，即5、12、13或6、8、10，所以三角形有两个.

例二 计算凸12边形所有对角线的条数以及以凸12边形的顶点所构成的三角形的个数. 若 n 边形呢?

分析：可利用乘法原理或组合公式.

解：每个顶点均发出9条对角线. 但每条对角线均算两次，于是共有 $\frac{12\times 9}{2}=54$ 条对角线. 所组成的三角形的个数为 $C_{12}^{3}=\frac{12!}{9!\ 3!}=110$. 若是 n 边形，则共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线. 其组成的三角形个数为 $C_n^3=\frac{n!}{(n-3)!\ 3!}=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$.

例三 有3封不同的信，投入到4个信箱中，共有多少种投法?

分析：本题应该是排列问题（或用乘法原理）.

解：一共有 $4^3=64$ 种.

例四 15个人相约，每两人互通电话一次，并且各通信一次，试问共通话多少次? 共通信多少封?

分析：通电话与通信是有区别的.

解：共通电话的次数为：$\frac{15\times 14}{2\times 1}=105$（次）

一共通信：$15\times 14=210$（封）

例五 从2，3，4，5，6，…，30，31，32，33，34，35，36，37，38，这37个数中，选取两个不同的数，使其和为偶数的选法共有多少种?

分析：本题属于组合问题，但要分两类来考虑.

解：从37个数中的19个偶数中选取两个不同的偶数的方法数为 $C_{19}^{2}=\frac{19!}{17!\ 2!}=171$（种）. 从37个数中的18个奇数中选取两个不同的奇数的方法数为 $C_{18}^{2}=\frac{18!}{16!\ 2!}=153$（种）.

∴一共有 $171+153=324$ 种选法.

例六 在凸十三边形每个顶点处任意写一个自然数，以这凸十三边形的顶点为顶点的三角形中，若三个顶点所标三数之和为奇数，则称该三角形为奇三角形；若三数之和为偶数，则称为偶三角形. 试证明：奇三角形个数必为偶数.

分析：本题可利用乘法原理，再利用奇偶性推出结论.

证明：设 A 为一个顶点，则含 A 点的三角形共有 $C_{12}^{2}=\frac{12!}{10!\ 2!}=66$（个），即每个自然数均在这66个三角形的顶点上. 以各顶点为顶点的三角形个数为 $C_{13}^{3}=\frac{13!}{10!\ 3!}=286$（个），当把所有286个三角形顶点所标的自然数都相加后其和为

▶速▶记▶栏

S，此时每个顶点上的数均加了 66 次，故 S 为偶数．若奇三角形的个数为奇数，则它们的顶点所标的自然数总和 S_1 为奇数，而偶三角形顶点所标的自然数总和 S_2 必为偶数．由 $S_1+S_2=S=$ 偶数，故矛盾．$\therefore$ 奇三角形的个数必为偶数．

例七 乘积 $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)(m_1+m_2)(c_1+c_2+c_3)$ 展开后共有多少项?

分析：由乘法的意义，本题可分四步完成，利用组合可以解决．

解：乘积展开式的项是由每个因式任取一项连乘而得到的，可分四步完成：

第一步：在第一个因式的 a_1、a_2、a_3 中任取一个，有三种取法；

第二步：在第二个因式的 b_1、b_2、b_3、b_4 中任取一个，有四种取法；

第三步：在第三个因式的 m_1、m_2 中任取一个，有两种取法；

第四步：在第四个因式的 c_1、c_2、c_3 三个因子中任取一个，有三种取法．于是由乘法原理可知，其积展开式共有 $N=3\times4\times2\times3=36$（项）．

例八 如图 28－1，若走路必须自右至左、自下而上．

（1）由 A 出发经过 C 到达 B，共有几种走法?

（2）由 A 出发不经过 C 到达 B，共有几种走法?

分析：可以对走法进行分类讨论．

（1）由 A 到 C 有 3 种走法，由 C 到 B 有 4 种走法．由乘法原理可知，从 A 出发经过 C 到达 B，共有 $3\times4=12$（种）走法．

（2）由 A 出发不经过 C 到达 B，必须经过 D、E、F 之一．因为由 A 到 D 有两种走法，由 D 到 B 有两种走法，所以 $A\to D\to B$ 有 $2\times2=4$（种）走法．又 $A\to E\to B$，$A\to F\to B$ 各有一种走法，由加法原理可知，由 A 不经过 C 到 B 共有 $4+1+1=6$（种）走法．

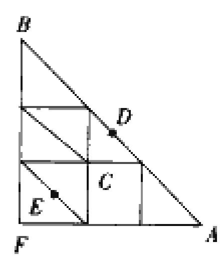


图 28－1

$\therefore$ 一共有 $N=12+4+6=22$（种）走法．

练习二十八

一、选择题：

1． 如图 28－2，图中所有三角形的个数是(　　)．

A．47　　B．46　　C．44　　D．43

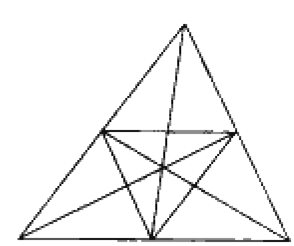


图 28－2

2． 如图 28－3，E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的 AC、AB 边的中点．则图中面积两两相等的三角形共有(　　)．

A．10 对　　B．9 对　　C．8 对　　D．6 对

二、填空题：

1． 某校有数学、物理、化学三个课外小组，数学小组有 12 人，物理小组有 9 人，化学小组有 8 人，现从这三组中选一个人去参加市科技活动组，则共有______种不同的选法．

2． 某农场为了考察三个外地优良品种 A、B、C，计划在甲、乙、丙、丁、戊共五种类型的土地

上分别进行引种试验，则共需________个试验小区.

3. 为了使得在一个办公大楼里的9个办公室中任何两个办公室之间能直接通话，需要连接________条电话线.
4. 有三封不同的信，投入到四个信箱中，共有________种投法.
5. 3名运动员在运动会上争夺4项冠军，共有________种不同的结果.
6. 有红、黄、白三种颜色的信号旗各 n 面（$n>3$），取其中的一面、二面、三面组成纵列信号，可以有________种不同的信号.

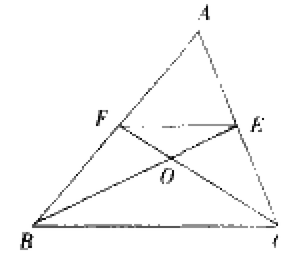


图 28－3

7. 将十个人任意分成甲、乙两组，每组至少一个人，则有________种不同的分法.
8. 从19，20，21，…，90，91，92这74个数中，选取两个不同的数，使其和为偶数的选法总数有________种.

三、解答题：

1. 某校参加数学竞赛有120名男生，80名女生；参加英语竞赛有120名女生，80名男生. 已知该校共有260名学生参加竞赛，其中有75名男生两科都参加了，那么只参加数学竞赛而没有参加英语竞赛的女生的人数是多少？

2. 如图28－4，从 A 到 B 途中经过 P，沿着最短路线走，共有多少条不同路线？

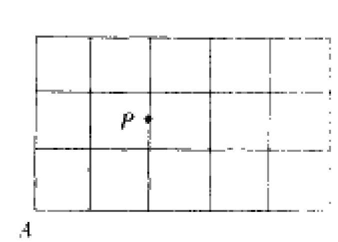


图 28－4

3. 有一个大长方形的月饼，用一刀竖着切可以将其切成两块，两刀可得四块，若切2001刀，可得几块？

4. 如图28－5，在 $\angle AOB$ 的边 OA 上有 m 个不同的已知点，边 OB 上有 n 个不同的已知点，以 OA 边上一个已知点和 OB 边上一个已知点为端点作线段. 求：(1) 共可以作多少条不同的线段？(2) 这些线段最多有多少个不同的交点？

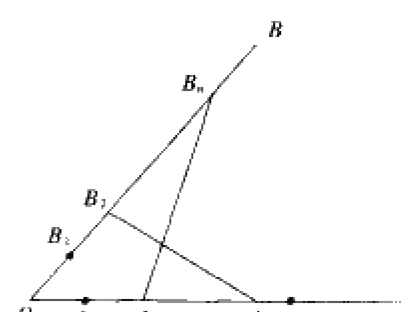


图 28－5

专题训练二十八

一、选择题：

1. 已知周长小于15的三角形三边都是质数，且其中一边的长为3，这样的三角形有(　　).

A. 4个　　B. 5个　　C. 6个　　D. 7个

2. 在等边△ABC所在平面上找到这样的点P，使△PAB、△PBC、△PAC都是等腰三角形，那么具有这样性质的点的个数共有（　　）个.

A. 1　　B. 7　　C. 9　　D. 10

二、填空题：

1. 给定平面上n个点，已知1，2，4，8，16，32都是其中两点之间的距离，那么点数n的最小值是________.

2. 用1~6这6个数码可以组成________个五位不同数码的奇数.

3. 由非负整数构成的整点(m, n)中，如果做加法$m+n$时，不需要进位，则称(m, n)为"简单点"，这时$m+n$叫做(m, n)的和，那么共有________个和为1990的"简单点".

4. 由1~9这9个数码中选取6个数码组成六位数，但要求其中必须包含4个数码是奇数、2个数码是偶数，共可作出________个这样的六位数.

5. 把三枚红色棋子和黄、蓝、白、黑色棋子各一枚排成一排，可有________种不同的排法.

6. 将十名学生分成两组，进行篮球比赛，共有________种不同的分法.

7. 分别从四所学校选拔6名运动员，每校至少1人，有________种不同的选法.

8. 用0~6这7个数码，不许重复，可以组成________个能被5整除的三位数.

三、解答题：

1. (1) 设计一种方法，把一个正方形不重复不遗漏地分割成8个正方形．分得的正方形大小可以不相同；(2) 如何把正方形分成31个小正方形？(3) 如何把一个立方体分割成55个小立方体呢？(大小可以不一样.)

2. 如果25个点将某圆周25等分，那么顶点只能在这25个点中选取的正多边形有几个？

3. 用0~9这10个数码，可以组成多少个含有两个重复数码的三位数？

4. 圆桌上的9个位置上放着9种不同的点心和饮料，6位先生与3位女士共进早餐，3位女士两

两不相邻的坐法有多少种?

5. 甲、乙两队各出 7 名队员按事先排好的顺序出场参加围棋擂台赛. 双方先由 1 号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与对方 2 号队员比赛……直到有一方队员全部被淘汰为止，另一方获得胜利，形成一种比赛过程. 试求所有可能出现的比赛过程的种数.

6. 设 $ABCDEF$ 为六边形，一只青蛙开始在顶点 A 处. 它每次可随意跳到相邻两顶点之一. 若在 5 次内跳到 D 处，则停止跳动. 问：这只青蛙从开始到停止，可能出现的不同跳法有几种?

第二十九讲　数学方法与数学原理

择题指要

数学竞赛的题目形式多变，于是在解题时要求要有一定的灵活性及技巧性，要有灵活、巧妙的解题策略，于是掌握一定的数学方法及有关的数学原理是很有必要的．本讲将较全面地介绍常用的数学方法及有关的数学原理．

一、配方法

配方法是数学方法中较为常用且较重要的方法．它是代数变形的重要手段，是因式分解、等式的恒等变形、研究相等关系、讨论不等关系的常用技巧．

常用的等式有：

1．$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$；

2．$a\pm 2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2$；

3．$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$；

4．$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right]$．

二、换元法

所谓换元法就是引入新的变元代替原来的字母式子．它也是数学方法中一种重要的方法．合理运用换元法能使较难的问题变得易于处理．

三、构造法

所谓构造法就是构造性解题方法，在解代数或几何题时较为常见，如构造三角形全等、相似等来证明有关问题．

四、待定系数法

待定系数法在因式分解、分式的计算、多项式的运算、方程等许多数学问题中有着广泛的应用，它也是常用的数学方法之一．

五、数形结合的思想

数与形是数学中的两个基本的概念，在解题时若能有机地将数与形结合在一起，有利于沟通条件与结论，能使数量关系抽象、几何图形直观．若能巧妙地把“形”与“数”结合在一起，即巧妙地数形结合，将给解题带来很大的方便．

典型例题讲解

例一　求代数式 x^4+x^2+3 的最值．

分析：通过 x 的取值来确定是不可能的，可以利用配方和非负性质得到．

解：$\because x^4+x^2+3=\left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$，

又 $\because x^2\geqslant 0$，$\therefore$ 当 $x^2=0$，即 $x=0$ 时，$\left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，且为最小值．

$\therefore$ 其最小值为 3．

例二 已知 $x+y=6$，$z^2=xy-16$，求 x、y、z 的值．

分析：由 $x+y=6$ 可变形得 $x=6-y$，将其代入 $z^2=xy-9$，再配方可得．

解：$\because x+y=8$，$\therefore x=8-y$．

又 $\because z^2=xy-16$，$\therefore z^2=(8-y)y-16$，即 $y^2-8y+16+z^2=0$．

$\therefore (y-4)^2+z^2=0$．$\therefore y=4$、$z=0$，得 $x=4$．

$\therefore x$、y、z 的值分别为 4、4、0．

例三 求能使 m^2+m+5 是完全平方数的所有整数 m 的积．

分析：找出适合条件的 m 是关键，设 $m^2+m+5=N^2$，利用数的分解式的性质．

解：设 $m^2+m+5=N^2$，配方得（N 为整数）

$\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{19}{4}=N^2$，$N^2-\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{19}{4}$，

$(2N)^2-(2m+1)^2=19$，

$(2N+2m+1)(2N-2m-1)=19$．

$\therefore \begin{cases}2N+2m+1=1,\ 19,\ -1,\ -19,\\ 2N-2m-1=19,\ 1,\ -19,\ -1.\end{cases}$

解得：$m_1=-5$，$m_2=4$．

$\therefore$ 满足能使 m^2+m+5 为整数的 m 的积为 $-5\times 4=-20$．

小结：应用配方法解题主要是应用了非负数的性质，而利用配方法解题的关键是恰当地“拆项”与“添项”．

例四 设 $1999x^3=2000y^3=2001z^3$，$xyz>0$，且有 $\sqrt[3]{1999x^2+2000y^2+2001z^2}=\sqrt[3]{1999}+\sqrt[3]{2000}+\sqrt[3]{2001}$，求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ 的值．

分析：若直接解本题是很困难的．可设 $1999x^3=2000y^3=2001z^3=k^3$．

解：设 $1999x^3=2000y^3=2001z^3=k^3$，则有 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt[3]{1999}}{k}$，$\dfrac{1}{y}=\dfrac{\sqrt[3]{2000}}{k}$，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\sqrt[3]{2001}}{k}$．

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{k}(\sqrt[3]{1999}+\sqrt[3]{2000}+\sqrt[3]{2001})$．

$\because \sqrt[3]{1999}+\sqrt[3]{2000}+\sqrt[3]{2001}=\sqrt[3]{1999x^2+2000y^2+2001z^2}$，

$\therefore k\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{\dfrac{k^3}{x}+\dfrac{k^3}{y}+\dfrac{k^3}{z}}=k\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}$．

$\therefore \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$．

▶速▶记▶栏

$\because xyz>0$，且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\neq 0$，$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

小结：把数、式或方程中的某些部分看成一个整体，并用一个新的字母代替进行换元，其目的就是要简化运算过程，分散或降低解题的难度，若能结合其他的一些数学思想方法还可以达到更佳的效果.

例五 设 $x>0$，试求 $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}$的最大值.

分析：因为$\sqrt{A}+\sqrt{B}$与$\sqrt{A}-\sqrt{B}$互为对偶式，于是本题可以构造其对偶式.

解：构造 $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}$的对偶式：

$u=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}$，则有 $yu=1$，$y=\frac{1}{u}$.

$\because u\geqslant 2+\sqrt{2+1}=2+\sqrt{3}$（当 $x=1$ 时取等号），

$\therefore y=\frac{1}{u}\leqslant\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$（当 $x=1$ 时取等号）.

故 $y_{最大值}=2-\sqrt{3}$.

小结：构造法的实质是根据数学问题的条件或结论所具有的特征，以条件中的元素为“元件”，以数学关系为“支架”，发挥想象力，进行构思，建立一个优美的数学模型.

例六 有甲、乙、丙三种货物，若购买甲 3 件、乙 7 件、丙 1 件，共需 315 元；若购甲 4 件、乙 10 件、丙 1 件，共需 420 元. 现购甲、乙、丙各一件，一共需多少元？

分析：本题的条件有两个等式，于是只要从已知等式解出：$x+y+z$ 的值就够了. 于是可设 $x+y+z=m(3x+7y+z)+n(4x+10y+z)$，从而求 m、n.

解：设分别购买甲、乙、丙一件各需 x 元、y 元、z 元，依题意得：

$$\begin{cases}3x+7y+z=315\\4x+10y+z=420\end{cases}$$

设
$$\begin{aligned}x+y+z&=m(3x+7y+z)+n(4x+10y+z)\\&=(3x+4n)x+(7m+10n)y+(m+n)z.\end{aligned}$$

$$\therefore\begin{cases}3m+4n=1,\\7m+10n=1.\\m+n=1.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}m=3,\\n=-2.\end{cases}$$

$\therefore x+y+z=3\times 315+(-2)\times 420=105$（元）.

答：购甲、乙、丙各一件需 105 元.

例七 若 x^3+px^2+qx+r 是 x 的一次式的完全立方式，求证：$q^2=3pr$.

分析：设原式为$(x+m)^3$，展开进行研究.

证明：设 $x^3+px^2+qx+r=(x+m)^3=x^3+3mx^2+3m^2x+m^3$.

笔记栏

$$\therefore\begin{cases}3m=p,\\3m^2=p,\\m^3=r.\end{cases}\quad 解得\ q^2=3pr.$$

小结：在解决这一类问题时，先要用字母表示需要确定的系数，然后根据条件、恒等式的性质去解出有关的字母.

例八 正数 x、y、z 满足方程组 $\begin{cases}x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25,\\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9,\\ z^2+xz+x^2=16.\end{cases}$

试求 $xy+2yz+3xz$ 的值.

分析：构造三角形，利用余弦定理.

解：如图 29－1，把方程组改写成

$$\begin{cases}x^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt3}\right)^2-2x\cdot\dfrac{y}{\sqrt3}\cdot\cos150^\circ=5^2,\\ \left(\dfrac{y}{\sqrt3}\right)^2+z^2=3^2,\\ z^2+x^2-2xz\cos120^\circ=4^2.\end{cases}$$

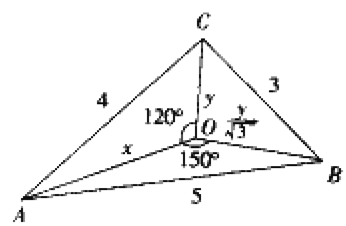


图 29－1

由此和 $120^\circ+150^\circ+90^\circ=360^\circ$ 可构造一个 Rt△ABC，使 $AB=5$，$BC=3$，$CA=4$，且在△ABC 内取一点 O，使 $OA=x$，$OB=\dfrac{y}{\sqrt3}$，$OC=z$，$\angle AOB=150^\circ$，$\angle BOC=90^\circ$，$\angle AOC=120^\circ$，则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COA}$，即 $6=\dfrac12x\cdot\dfrac{y}{\sqrt3}\cdot\sin150^\circ+\dfrac12\cdot\dfrac{y}{\sqrt3}\cdot z+\dfrac12zx\sin120^\circ=\dfrac{xy}{4\sqrt3}+\dfrac{yz}{2\sqrt3}+\dfrac{\sqrt3}{4}zx$. $\therefore xy+2yz+3zx=24\sqrt3$.

小结：数形结合主要包括两类基本问题，一是“以形助数”，即将“数”的问题借助几何图形的性质使之形象、直观；二是“以数辅形”，即将“形”的问题经数量化处理，并借助计算使之具体、精确.

练习二十九

一、选择题：

1. 计算 $\sqrt{14+6\sqrt5}-\sqrt{14-6\sqrt5}$ 的值为(　　).

   A. 1　　B. $\sqrt5$　　C. $2\sqrt5$　　D. $3\sqrt5$

2. 若实数 a、b、c 满足 $a^2+b^2+c^2=8$，则代数式 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 的最大值是(　　).

   A. 24　　B. 18　　C. 15　　D. 12

3. 若 $M=10a^2+b^2-7a+6$，$N=a^2+b^2+5a+1$，则 $M-N$ 的值为(　　).

   A. 负数　　B. 正数　　C. 非负数　　D. 不确定

二、填空题：

1. 设 $A=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+27$，则 A 的最小值为________.

2. 设 x、y 为实数，且满足 $\begin{cases}(x-1)^3+2001(x-1)=-1,\\(y-1)^3+2001(y-1)=1,\end{cases}$ 则 $x+y$ 的值为________.

3. 已知 $a^2b^2+a^2+b^2+1=4ab$，则 $a=$________，$b=$________.

三、解答题：

1. 试判断代数式 $x^2-4x+y^2-6y+27$ 的正负情况，并试求其最值.

2. 若 $A=\dfrac{56789012345}{67890123456}$，$B=\dfrac{56789012346}{67890123458}$，试比较 A、B 的大小.

3. 若 $M=(4+2\sqrt{3})^3$，它的小数部分为 p，试求 $M\cdot(1-p)$的值.

4. 试问：多项式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 能否表示成两个多项式的平方差？

5. 化简：$\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})}-\sqrt{15+\sqrt{12}+\sqrt{20}+\sqrt{28}}$.

6. 求证：当 a、b、c、d 均为正数时，有$\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}>\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$.

专题训练二十九

一、选择题：

1. 方程$\sqrt{x^2-2x+2-2\sqrt{x^2-2x+1}}=3$的所有解的和为(　　).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

2. 设$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2000^2}+\frac{1}{2001^2}}$，则与$S$最接近的整数是(　　).

A. 1999　　B. 2001　　C. 2000　　D. 1998

3. 如图29-2，CD是等腰$\triangle ABC$的底边AB上的高，E是腰BC的中点，AE交CD于F，现给出三条路线：(a) $A\to F\to C\to E\to B\to D\to A$；(b) $A\to C\to E\to B\to D\to F\to A$；(c) $A\to D\to B\to E\to F\to C\to A$.

设它们的长度分别为$L(a)$、$L(b)$、$L(c)$，那么下列三种关系式：$L(a)<L(b)$、$L(a)<L(c)$、$L(b)<L(c)$中，一定能成立的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

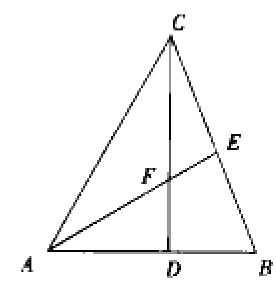


图29-2

二、填空题：

1. 设$A=2000^2+2000^2\times2001^2+2001^2$，则$A$是一个完全平方数吗？答：________.

2. 已知$a+b+\frac{1}{2}c+5=2\sqrt{a-1}+4\sqrt{b-2}+3\sqrt{c-3}$，则$(a+b+c)^2$ = ________.

3. 若整数a、b、c满足$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c$，则$(a+b-2c)^{2001}=$________.

三、解答题：

1. 求方程$m^2-2mn+16n^2=211$的正整数解.

2. 设a、b、c、d是实数，且$ad-bc=1$，$a^2+b^2+c^2+d^2-ab+cd=1$，求$abcd$的值.

3. 已知$a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$，$ax+by=0$，求证：$a^2+x^2=1$，$b^2+y^2=1$，$ab+xy=0$.

4. 已知 x、y、z 均为正数，且 $x^2+y^2=z^2$，$z\cdot\sqrt{x^2-r^2}=x^2$，求$\dfrac{3xy}{2rz}$的值.

5. 比较$\sqrt{2}(a+b+c)$和$\sqrt{a^2+(b+c)^2}+\sqrt{a^2+b^2}+c$的大小（其中 a、b、c 均为正数）.

6. 已知直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=5$，$BC=12$，试问：能否找出一条能同时等分 $\triangle ABC$ 的面积及周长的直线？有几条？

第三十讲　综合能力测试

一、选择题：

1. 若 $0<b<1$，则化简$\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}-2}\div\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{1+b}$得(　　).

A. $\frac{1-b}{1+b}$　　B. $\frac{b-1}{b+1}$　　C. $1-b^2$　　D. b^2-1

2. 若 $x<2$，则 $|\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}|$ 为(　　).

A. -2　　B. 1　　C. $5-2x$　　D. $2x-5$

3. 当 $x>0$ 时，方程$\frac{[x]}{\{x\}}=\frac{x}{[x]}$的解为(　　).

A. $0<x<1$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　D. $x>2$

4. 如图 30－1，矩形 $ABCD$ 的长为 a，宽为 b，如果 $S_1=S_2=\frac{1}{2}(S_3+S_4)$，则 $S_4=$(　　).

A. $\frac{3}{8}ab$　　B. $\frac{3}{4}ab$　　C. $\frac{2}{3}ab$　　D. $\frac{1}{2}ab$

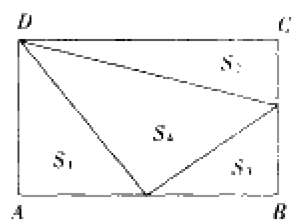


图 30－1

5. 如图 30－2，已知线段 PQ 过$\triangle ABC$ 的重心 M、P、Q 分别内分 AB、BC 的比值为 p、q，则$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=$(　　).

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 不确定

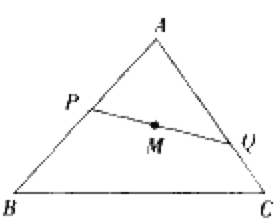


图 30－2

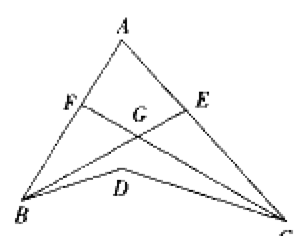


图 30－3

6. 如图 30－3，BE、CF 分别为$\angle ABD$、$\angle ACD$ 的平分线．BE 与 CF 交于 G，若$\angle BDC=140°$，$\angle BGC=110°$，则$\angle A$ 的值为(　　).

A. 70°　　B. 80°　　C. 75°　　D. 85°

二、填空题：

1. 观察数列 0，3，8，15，24，35，…排列的规律性，则第 102 项的数应为__________.

2. 若代数式为$\frac{4x}{4^x+2}$，则取 $x=\frac{1}{2001}$，$\frac{2}{2001}$，…，$\frac{2000}{2001}$的值时相应的代数值的和为__________.

3. 计算：$1.2345^4+0.7655^4-1.2345^3\times0.7655^2-1.2345^2\times0.7655^3+4.938\times3.062=$ ________.

4. 若△ABC 中，$AB=AC$，P 为△ABC 内的一点，$PC>PB$，则∠APB ______ ∠APC（填 >、< 或 = 号）.

5. 在△ABC 中，D 是 AB 边上的点，已知 $AC=15$，$BC=13$，$CD=12$，$AD=9$，则 $BD=$ ____.

6. 如图 30－4，在△ABC 中，$AB=8$，$BC=7$，$CA=6$，延长 BC 到 P 使△PAB ∽ △PCA，则 PC 的长度为 ________.

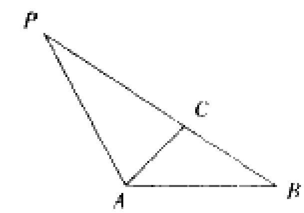


图 30－4

7. 有 n 个药箱，每两个药箱必有一种相同的药，每种药恰在两个药箱中出现，则有__________种药.

三、解答题：

1. 观察下列等式：$2\times\frac{2}{1}=2+\frac{2}{1}$，$3\times\frac{3}{2}=3+\frac{3}{2}$，$4\times\frac{4}{3}=4+\frac{4}{3}$，…，试问答：正整数 $n+1$ 与哪一个数相乘，其积恰好等于这两个数的和？并证明之.

2. 观察等式：$21+12=33$，$43+34=77$，$35+53=88$，$18+81=99$，…，试猜想一个命题，并证明之.

3. 按下面规则扩充新数：

已知 a、b 两数，可按规则 $c=ab+a+b$ 扩充一个新数，而 a、b、c 三个数中任取两数，按规则又可扩充一个新数，…，每扩充一个新数叫做一次操作．现有 1 和 5.

（1）按要求操作三次，求得到的最大数；

（2）能否通过上述扩充得到新数 3999？

4. 设二次三项式 ax^2+bx+c 的系数是正整数，当 $x=2001$ 时，二次三项式的值 $a\times2001^2+b\times2001+c=p$ 是一个素数，证明：ax^2+bx+c 不可能分解为两个整系数一次式的乘积.

5. 设有 n 个亮着的灯的拉线开关，规定每次必须拉动 $n-1$ 个拉线开关，这 $n-1$ 盏灯，原来亮着的变为关闭，原来关闭的变为亮着．试问：能否把所有的灯都关闭？

6. 四边形 $ABCD$ 的对角线交于 P，且 $S_{\triangle ABP}+S_{\triangle CDP}=S_{\triangle BCP}+S_{\triangle ADP}$，求证：$P$ 是一条对角线的中点．

7. 设 $S_n=\frac{1}{2}\left(n^2-100n+196+|n^2-100n+196|\right)$，$n=1,2,3,\cdots,103$，求 $S_1+S_2+\cdots+S_{103}$．

参考答案及解题思路

练习一

1. 解：(1) 原式 $=(x+y)(x-y)+(7x+y)+12=(x+y+3)(x-y+4)$.

解：(2) 原式 $=(x-y)(x+4y)+(x+14y)-6=(x-y+3)(x+4y-2)$.

解：(3) 原式 $=x^3-x-6x+6=x(x^2-1)-6(x-1)=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x-2)(x+3)$.

解：(4) 原式 $=[(a^4-2a^2b^2+b^4)-(2a^2c^2-2b^2c^2)+c^4]-4b^2c^2=[(a^2-b^2)^2-2c^2(a^2-b^2)+(c^2)^2]-(2bc)^2$
$=(a^2-b^2-c^2)-(2bc)^2=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)=[a^2-(b-c)^2][a^2-(b+c)^2]=$
$(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)$.

2. 解：$\because\ x^2-4x+4+y^2-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{9}=0$，$\therefore (x-2)^2+(y-\dfrac{1}{3})^2=0$.

$\therefore x=2$，$y=\dfrac{1}{3}$，$\therefore x+\dfrac{1}{y}=5$，$x^2+\dfrac{1}{y^2}=13$.

3. 解：$\because a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc=0$. $\therefore a^3+b^3+c^3=3abc=-45$.

4. 解：$\because x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$. $\therefore$ 设 $x^2+xy+ky^2-2x+11y-15=(x+my-5)(x+ny+3)$，

即原式 $=x^2+(m+n)xy+mny^2+(3m-5n)y-2x-15$.

$\therefore \begin{cases} m+n=1, \\ 3m-5n=11. \end{cases}$ 解得 $n=-1$，$m=2$.

$\therefore k=-2$.

专题训练一

一．1. D　2. B　3. C　4. A

二．1. 2　2. $(a+b+c)(a+2b+3c)$　3. 1　4. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

三　1. $(x+3y+2)(x-y+1)$　2. $(2x-3y+z)(3x+y-2z)$　3. $(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$

4. $2(x+5)(x-1)(x^2-9x-30)$　5. $(a+b-ab-1)^2$　6. $-2(z+x)(z-x)(x^2+y^2)(y^2+z^2)$

四．1. 证明：$n^3-n=n(n-1)(n+1)$. 当 n 是正整数时，$n-1\geqslant 0$，若 $n-1=0$，$n^3-n=0$，是6的倍数；若 $n-1>0$，$n(n-1)(n+1)$ 是三个连续的正整数的积，其中必有一个是2的倍数，另一个是3的倍数，所以 n^3-n 的值是6的倍数.

2. 解：$x^2=(a+\dfrac{1}{a})^2=a^2+\dfrac{1}{a^2}+2$，$x^3-2x^2-3x+6=(x-2)(x^2-3)$，则 $(x-2)(x^2-3)=0$，即 $x=2$ 或 $x^2=3$，

所以 $a^2+\dfrac{1}{a^2}+2$ 的值为4或3.

3. 解：原式 $=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^2+2)^2-4a^2=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)=[(a+1)^2+1][(a-1)^2+1]$，由 $|a|\neq 1$，得 $(a+1)^2+1>1$，$(a-1)^2+1>1$，即 a^4+4 是合数.

4. 解：由 $x+\dfrac{1}{x}=-1$，得 $x^2+x=-1$. 又 $x^3+x^2+x=0$，故有 $x^3=-x^2-x=1$，所以

(1) $x^{3n}+\dfrac{1}{x^{3n}}=(x^3)^n+\dfrac{1}{(x^3)^n}=1+1=2$；

(2) $x^{3n+1}+\dfrac{1}{x^{3n+1}}=(x^3)^n\cdot x+\dfrac{1}{(x^3)^n\cdot x}=x+\dfrac{1}{x}=-1$.

练习二

一．1. 商式：$4x^2+6x^2+2x-4$，余式：0.

2. 商式：$9x^2+6x+4$，余式：-2.

3 商式：$3x^2-2x+1$，余式：$3x-2$.

二、1. 原式$=(x-4)(x-1)^2$.

2. 原式$=(2x-1)(x-2)(x+1)^2$.

三、因为$f(x)$能被$x-1$整除，所以$f(1)=0$，则可求得$m=-17$.

四、提示：只需证明$f(1)=0$，$f(-1)=0$.

专题训练二

一、1. -100　　2. ± 2和3　　3. $m=0$.

二、1. $(x-1)(x+3)^2$　　2. $(x+1)^2(x+3)(x-2)$　　3. $(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

4. $(x^2+2x+3)(x^2-x+2)$　　5. $(x+2y+3)(x+y+1)$

三、1. 解：$\because 3(x^4+6x^2+25)-(3x^4+4x^2+28x+5)=14(x^2-2x+5)$，$\therefore f(x)=x^2-2x+5$.　$\therefore f(1)=4$.

2. 证明：由$f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=f(a_4)=1$，据余数定理：有$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+1$. 因为$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$是四个不同的整数，所以$(\beta-a_1)$，$(\beta-a_2)$，$(\beta-a_3)$，$(\beta-a_4)$应是四个不同的整数，且它们的积不可能等于$-2$. 因为$-2=1\times 2\times(-1)$最多只有三个约数. 故$f(\beta)=(\beta-a_1)(\beta-a_2)(\beta-a_3)(\beta-a_4)+1$不可能等于$-1$.

练习三

一、1. $(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$　　2. $-2b(a-b)$　　3. $(x-y)(x-y-1)$

4. $(c-d+a-b)(c-d-a+b)(c+d+a+b)(c+d-a-b)$.

二、1. 解：此多项式为三次齐次轮换式，

当$a=b$时，原式$=0$.

$\therefore$ $(a-b)$是原式的因式.

由对称性知$(b-c)$、$(c-a)$也是原式的因式.

设原式$=k(a-b)(b-c)(c-a)$，令$a=1$，$b=0$，$c=-1$，

得$(1-0)^3+(0+1)^3+(-1-1)^3=k(1-0)(0+1)(-1-1)$.

$\therefore k=3$.

故　原式$=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

2. 解：此多项式为三次齐次对称式，

当$x=-y$时，原式$=0$.

$\therefore$ $(x+y)$是原式的因式.

由对称性知$(y+z)$、$(z+x)$也是原式的因式.

设原式$=k(x+y)(y+z)(z+x)$，令$x=2$，$y=1$，$z=0$，

得$(2+1+0)^3-2^3-1^3-0^3=k(2+1)(1+0)(0+2)$.

$\therefore k=3$.

故　原式$=3(x+y)(y+z)(z+x)$.

3. 解：此多项式为三次齐次对称式，

当$a=b+c$时，原式$=0$.

$\therefore$ $(a-b-c)$是原式的因式.

由对称性知$(b-c-a)$、$(c-a-b)$也是原式的因式.

设原式$=k(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$，令$a=0$，$b=1$，$c=2$，

得　$(2+0)+4(0+1)-(0+1+8)=k(0-1-2)(1-2-0)(2-0-1)$.

$\therefore k=-1$.

故　原式$=-(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)=(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

4. 解：此多项式为五次齐次对称式，当$x=0$时，原式$=0$.

$\therefore x$是原式的因式，

由对称性知 y、z 也是原式的因式．

设原式 $=xyz[L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)]$，

令　$x=y=z=1$，得　$L+M=80$．

令　$x=y=1$，$z=-1$，得　$3L-M=240$．

解方程组 $\begin{cases}L+M=80,\\3L-M=240,\end{cases}$　得 $\begin{cases}L=80,\\M=0.\end{cases}$

$\therefore$ 原式 $=80xyz\ (x^2+y^2+z^2)$．

三．证明：当 $x=y$ 时，轮换式　$x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)=y^4(y-z)+y^4(z-y)+z^4(y-y)=0$．

$\therefore (x-y)$ 是它的因式．由对称性知此式必有因式 $(x-y)(y-z)(z-x)$．

设 $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)[L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)]$．

令 $x=0$，$y=1$，$z=-1$，得 $2L-M=-1$．

令 $x=1$，$y=-1$，$z=2$，得 $6L-M=-5$．

解方程组 $\begin{cases}2L-M=-1,\\6L-M=-5,\end{cases}$　得 $\begin{cases}L=-1,\\M=-1.\end{cases}$

$\therefore$ 原式左边 $=\dfrac{-(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}{2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}$

$=-\dfrac{1}{2}(x-y)(y-z)(z-x)=$ 右边．

专题训练三

一、1．C　　2．A　　3．A　　4．D

二、1．$-(a-b)(b-c)(c-a)$．解题思路：将原式看成关于 a 的一元多项式，设 $f(a)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$．易知当 $a=b$ 和 $a=c$ 时，都有 $f(a)=0$，故 $a-b$ 和 $a-c$ 也是原式的因式；同理可知 $b-c$ 也是原式的因式．由于原式为三次式，至多有三个因式．故可设原式 $=k(a-b)(b-c)(c-a)$，其中 k 为待定系数，令 $a=0$，$b=1$，$c=-1$，可得 $k=-1$．$\therefore$ 原式 $=-(a-b)(b-c)(c-a)$．

2．$-(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$．解题思路：当 $x=y$ 时．原式 $=0$．$\therefore$ 原式有因式 $x-y$．同理，$y-z$，$z-x$ 也是原式的因式．但四次多项式应有四个一次因式．由对称性知剩下一个必为 $x+y+z$．故可设原式 $=k(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$，其中 k 为待定系数．令 $x=0$、$y=1$、$z=2$，解得 $k=-1$．$\therefore$ 原式 $=-(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$．

3．$5(x-y)(y-z)(z-x)\cdot(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$．解题思路：当 $x=y$，$y=z$，$z=x$ 时，都有原式 $=0$．故 $x-y$，$y-z$，$z-x$ 都是原式的因式．但原式是一个五次多项式．故必另有一个二次因式，由对称性可设．原式 $=(x-y)(y-z)(z-x)\times[A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)]$，其中 A、B 为待定系数．令 $x=1$，$y=2$，$z=0$，得 $10A+AB=30$　　①

令 $x=1$，$y=3$，$z=0$，得 $5A+3B=35$　　②

由①，②得：$A=5$，$B=-5$．

$\therefore$ 原式 $=5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$．

4．$\underbrace{333\cdots3}_{n个}$．解：原式 $=\underbrace{111\cdots1}_{n个}\times10^n-\underbrace{111\cdots1}_{n个}=\underbrace{111\cdots1}_{n个}\times(10^n-1)-\underbrace{111\cdots1}_{n个}\times\underbrace{111\cdots1}_{n个}\times\underbrace{999\cdots9}_{n个}=\underbrace{111\cdots1}_{n个}\times\underbrace{111\cdots1}_{n个}\times3\times3=(\underbrace{333\cdots3}_{n个})^2$．

三、1．证明：由已知每支足球队共赛 $n-1$ 场，即 $x_i+y_i=n-1(1\leq i\leq n)$，又 $x_1+x_2+\cdots x_n=y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n$，由此 $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)=(x_1^2-y_1^2)+(x_2^2-y_2^2)+\cdots+(x_n^2-y_n^2)=(n-1)[(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(y_1+y_2+\cdots+y_n)]=0$．

2．证明：设原式 $=(x+p)(x^2+qx+r)$（p、q、r 为整数），与原式比较系数可得 $pr=d$，由 $bd+cd=(b+c)d$ 为奇数，所以 $(b+c)$ 与 d 均为奇数，则 p 与 r 也是奇数．令 $x=1$，则原式左边 $=1+b+c+d$ 为奇数．原式右边 $=(1+p)(1+q+r)$ 为偶数．奇数 $\neq$ 偶数，矛盾．

3．证明：因为大于5的质数都为奇数，故设 $p=2m+1$，$q=2n+1$．$p^4-q^4=(p^2+q^2)(p+q)\cdot(p-q)=8(2m^2+$

$2n^2+2m+2n+1)(m+n+1)(m-n)$，$\therefore p^4-q^4$能被8整除．$\because m+n$，$m-n$同奇偶，$\therefore(m+n+1)$、$(m-n)$中必有一个偶数，$\therefore p^4-q^4$能被16整除．$\because p$、$q$都是大于5的质数，$\therefore$其末位数字只能是1、3、7、9之一．且$1^4$、$3^4$、$7^4$、$9^4$的末位数字都是1，$\therefore p^4-q^4$的末位数是0，$\therefore p^4-q^4$能被5整除．$\because$ 16与5互质，$\therefore p^4-q^4$能被80整除．

练习四

1．证明：$\because(2n)^2=4n^2$，$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$．$\therefore 4\mid(2n)^2$，$(2n+1)^2$被8除余1．

2．证明：$\because ax+4y=11(x+y)-(2x+7y)$，$11\mid(2x+7y)$，$\therefore 11\mid 9x+4y$．

3．证明：　$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3=\frac{1}{2}(2n^3+3n^2+n-6)=\frac{1}{2}[n(n+1)(2n+1)-6]=\frac{1}{2}[n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n-1)-6]$．

$\because n(n+1)(n+2)$，$n(n+1)(n-1)$均是6的倍数，$\therefore 3\mid(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3)$．

4．证明：对x按3进行分类：

①当$x=3k$时，原方程变形为$3(3k^2-y^2)=17$．$\because 3\nmid 17$，$\therefore$原方程无解．

②当$x=3k+1$时，原方程变形为$3(3k^2+2k-y^2)=16$．$\because 3\nmid 16$，$\therefore$原方程无解．

③当$x=3k+2$时，原方程变形为$3(3k^2+4k-y^2)=13$．$\because 3\nmid 13$，$\therefore$原方程无解．

5．解：设除数为q，余数为r，依题意有：$1234=64q+r$，$0\leqslant r\leqslant q$，$0\leqslant 1234-64q<q$．

解得$19\leqslant q<20$，$q=19$．代入到$1234=64\times q+r$中，得$r=18$．

6．解：能被9整除的1962位的数中$\underbrace{99\cdots9}_{1962个}$最大，$\underbrace{11\cdots1}_{1962个}$最小，而$\underbrace{99\cdots9}_{1962个}$的各位数字之和为17658，$\underbrace{111\cdots1}_{1962个}$的各位数字之和为1962，它们的各数位的数字之和分别为27和18，27和18的数字之和为9，$\therefore c=9$．

专题训练四

一、1．D　2．B　3．C　4．A

二、1．解题思路：由$n=a+b+ab$，得$n+1=(a+1)(b+1)$．显然$n=1$和2时，a、b无整数解．一般若$n+1$是质数，①式无整数解；而当$n+1$为合数时，①式定有整数解．在1，2，…，100中，使$n+1$为质数的n共有26个，它们是1，2，4，6，10，12，16，…，96，100．于是“好数”有$100-26=74$个．

2．解题思路：合数从小到大是4，6，8，9，10，…因此尽可能小且不相等的三个合数为$4+6+8=18$．于是由$17<4+6+8$就是不能用三个不相等的合数表示的奇数．另一方面，任何不小于19的奇数$2k-1$，总可以表示成　$2k-1=4+9+(2k-14)$　$(k\geqslant 10)$．

此时　$2k-14=2(k-7)\geqslant 6$，从而$2k-1$可表示为三个合数之和．于是，17是满足条件的最大奇数．

3．解题思路：设n的所有正约数为d_1、d_2、…、d_k．由于当d是n的一个正约数时，$\frac{n}{d}$也是n的一个正约数，因而$\frac{n}{d_1}$，$\frac{n}{d_2}$，…，$\frac{n}{d_k}$也是n的所有正约数，从而有$d_1\cdot d_2\cdots d_k=\frac{n}{d_1}\cdot\frac{n}{d_2}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{d_k}$，即$(d_1d_2\cdots d_k)^2=n^k$．由题意，则$(d_1d_2\cdots dk)^2=n^k=64^2$．

由于$64^2=4^6=8^4=2^{12}=16^3$，当$n=64$，$k=2$时，由于64有7个正约数，而不是有2个约数，所以$n\neq 64$；当$n=4$，$k=6$时，由于4没有6个约数，所以$n\neq 4$；当$n=2$，$k=12$时，由于2没有12个正约数，所以$n\neq 12$；当$n=16$，$k=3$时，由于16有5个正约数，所以$n\neq 16$；当$n=8$，$k=4$时，可以验证：8恰有4个正约数1、2、4、8，且$1\times2\times4\times8=64$．于是所求的$n$只有8．

4．576，162．

三、1．证明：注意$9=3^2$，于是由惟一分解定理可知，$r-a$、$r-b$、$r-c$、$r-d$必然是±1、±3、±9之一，但从a、b、c、d互不相等可知，$r-a$、$r-b$、$r-c$、$r-d$互不相等，故它们只能是±1、±3．所以和为$1-1+3-3=0$，即$a+b+c+d=4r$．

2．证明：设n、$n+1$是两个相继的正整数，$d=(n,\ n+1)$，则$d\mid n$，$d\mid(n+1)$，于是$d\mid(n+1)-n$，即$d\mid 1$，故$d=1$．

3．证明：把p按被3除得的余数分类可知，只有$p=3$，才能使p、$8p^2+1$都是质数，此时$8p^2-p+2=71$为质数．

4. 解：易得 $5\mid d-a$，$\therefore d-a=5$，且 $c-b=0$。设 $a+b+c+d=n^2$（n 为正整数），$\therefore 2(a+b)=n^2-5$，易得 $5<n^2<36$，且 n 为奇数。$\therefore n=3$ 或 5。求得所有四位数为：1996、2887、3778、4669。

练习五

一、1. 日　2. 2　3. 0　4. 12　5. 1

二、1. 解：因为 $7\equiv-1\pmod{8}$，所以 $7^{2n+1}\equiv(-1)^{2n+1}\equiv-1\pmod{8}$，$7^{2n+1}-1\equiv-2\equiv6\pmod{8}$。

2. 解：因为 $2001\equiv1\pmod{10}$，所以 $2001^{2001^{2001}}\equiv1\pmod{10}$。所以个位数字为 1。

3. 证明：$\because 3^2\equiv2\pmod{7}$，$\therefore 3^6\equiv2^3\equiv1\pmod{7}$。

$\therefore 3^{1990}=3^{6\times331}\times3^4\equiv4\pmod{7}$。

又 $\because 2^{1989}\times5^{1991}\equiv2^{1989}\times(-2)^{1991}\equiv(-1)^{1991}\times2^{3980}\equiv(-1)\times2^2\equiv-4\pmod{7}$，

$\therefore 3^{1990}+2^{1989}\times5^{1991}\equiv4+(-4)\equiv0\pmod{7}$。

4. 解：这个问题实际上是求 $1\times3\times5\times\cdots\times1989\times1991$ 除以 1000 的余数。

设 $A=1\times3\times5\times\cdots\times1989\times1991$。

$\because 1000=8\times125$，而 A 中有足够的因子 5，$\therefore A$ 显然是 125 的倍数，即 $A=125M$。

下面研究 M 除 8 的余数情况。

把 M 分组写成如下的形式：

$M=1\times3\times7$　（去掉 5）

$\times9\times11\times13\times15$

$\times17\times19\times21\times23$

$\times27\times29\times31$　（去掉 25）

$\times\cdots$

$\times1985\times1987\times1989\times1991$

除去第 1 行和第 4 行外，其余各行都是 4 个系数的乘积，这 4 个连续奇数的乘积模 8 同余于 1，而 $1\times3\times7\equiv3(-1)\equiv5\pmod{8}$，$27\times29\times31\equiv3\times(-3)\times(-1)\equiv1\pmod{8}$，

所以 $M\equiv5\times1\times1\equiv5\pmod{8}$，即 $M=8k+5$（k 为整数）。

所以 $A=125\times(8k+5)=1000k+625\equiv625\pmod{1000}$。

所以 A 的末三位数字为 625。

专题训练五

一、1. 59　2. 星期天　3. 3　4. 29　5. 8

二、1. 证明：$\because 2222^{5555}=(317\times7+3)^{5555}\equiv3^{5555}\pmod{7}$，$3^3\equiv(-1)\pmod{7}$，

而 $3^{5555}=3^{1851\times3}\cdot3^2\equiv(-1)\cdot3^2=(-9)\pmod{7}$，

又 $\because 5555^{2222}=(793\times7+4)^{2222}\equiv4^{2222}\pmod{7}$，$4^3\equiv1\pmod{7}$，

而 $4^{2222}=4^{740\times3}\cdot4^2\equiv1\cdot16\pmod{7}$，

$\therefore 2222^{5555}+5555^{2222}\equiv(-9)+16=7\equiv0\pmod{7}$。

2. 解：由已知得 $a=7k+2$，$b=7m+5$（k，m 为整数），$\therefore a^2+4b=49k^2+28(k+m)+21+3$，

$a^2-4b=49k^2+28(k-m)-21+5$，$\therefore a^2+4b$ 和 a^2-4b 被7除的余数分别是3和5。

3. 解：(1) 将这列数中的每一个数模 7 依次得到 1，3，4，0，4，4，1，5，6，4，3，0，3，3，6，2，1，3，4，0，4，4，…因为从第 3 项起，每一项模 7 等于前两项的和模 7，故从第 17 项起，出现周期性。由于 $1993=16\times124+9$，故 $a_{1993}\equiv a_9\equiv6\pmod{7}$，即第 1993 个数被 7 除余 6。

(2) 由于前面 1992 组数中共有 $1+2+3+\cdots+1992=996\times1993$ 个数，故第 1993 组中的第一个数是 $a_{996\times1993+1}$，最后一个数是 $a_{996\times1993+1993}$，这些数模 7 的和为 $(4+4+1+5+6+4+3+0+3+3+6+2+1+3+4+0)+\cdots+(4+4+1+5+6+4+3+0+3)\equiv(4+4+1+5+6+4+3+0+3)\equiv2\pmod{7}$，即第 1993 组各数之和被 7 除余 2。

4. 解：用 9 整除判别法求得：$a=2$，$b=1$，$c=7$，$d=1$，$e=4$，$f=3$，$g=3$。

练习六

一．1．3　2．10020　3．3　±1　4．93　5．奇数

二．1．解：$\because 1987\equiv 11\equiv(-2)(\bmod 13)$，$1987^2\equiv 4(\bmod 13)$，$1987^6\equiv 4^3\equiv 64\equiv(-1)(\bmod 13)$，$1987^{12}\equiv(-1)^2\equiv 1(\bmod 13)$，

又 $\because 2000=12\times 166+8$，

$1987^{2000}=1987^{12\times 166+8}=(1987^{12})^{166}\cdot(1987)^8\equiv 1^{166}\cdot 1987^2\cdot 1987^6\equiv 4\cdot(-1)\equiv(-4)\equiv 9(\bmod 13)$，

$\therefore 1987^{2000}$被13除的余数为9．

2．证明：$\because 1988=2\times 2\times 7\times 71$，显然 4 可整除 2000，580，76，1496．

$\because 2000\equiv 5(\bmod 7)$，　$580\equiv 6(\bmod 7)$，　$76\equiv 6(\bmod 7)$，　$1496\equiv 5(\bmod 7)$，

$\therefore 2000^n-580^n+76^n-1496^n\equiv 5^n-6^n+6^n-5^n\equiv 0(\bmod 7)$．

又$2000\equiv 12(\bmod 71)$，　$580\equiv 12(\bmod 71)$，　$76\equiv 5(\bmod 71)$，　$1496\equiv 5(\bmod 71)$，

$\therefore 2000^n-580^n+76^n-1496^n\equiv 12^n-12^n+5^n-5^n\equiv 0(\bmod 71)$．

因此，由 $4\mid(2000^n-580^n+76^n-1496^n)$，　$7\mid(2000^n-580^n+76^n-1496^n)$，　$71\mid(2000^n-580^n+76^n-1496^n)$，且 4，7，71 彼此互质，

故 $1988\mid(2000^n-580^n+76^n-1496^n)$．

3．解：因 $4444^{4444}<10000^{4444}$，而 10000^{4444}共有 $4\times 4444+1$ 位数，其中各数码最大值为 9，所以 4444^{4444}各数位上的数字和应小于 $(4\times 4444+1)\times 9=159993$，即 $A<159993$．A 的数字和不会超过 $1+5\times 9=46$，即 $B\leqslant 46$．B 的数字和不会超过 $3+9=12$，即 $C\leqslant 12$．

又因$4444\equiv 7(\bmod 9)\equiv$，$4444^{4444}\equiv 7^{4444}(\bmod 9)\equiv(7^3)^{1481}\times 7(\bmod 9)\equiv 1^{1481}\times 7\equiv 7(\bmod 9)$，$1^{1481}\times 7\equiv(\bmod 9)$，且 $4444^{4444}\equiv A\equiv B\equiv C$，

$\therefore C\equiv 7(\bmod 9)$．

$\because 0<C\leqslant 12$，$\therefore C=7$．

4．证明：将原方程变形为 $9x^2-6xy+18y^2=5961$，即$(3x-y)^2+17y^2=5961$．

$\therefore(3x-y)^2\equiv 5961(\bmod 17)$，即$(3x-y)^2\equiv 11(\bmod 17)$．

若原方程有整数解，即 x、y 均为整数，那么$(3x-y)$也是整数．

在模 17 之下只有 0，±1，±2，…，±7，±8 这 17 类，经平方后为 0，1，4，9，16，8，2，15，13，不可能得 11，故没有 x，y 满足$(3x-y)^2\equiv 11\ (\bmod 17)$．

专题训练六

1．证明：$\because 2222\equiv 3(\bmod 7)$，　$5555\equiv 4(\bmod 7)$，

$\therefore 2222^{5555}+5555^{2222}\equiv 2222^{5555}+4^{5555}+5555^{2222}-4^{2222}-(4^{5555}-4^{2222})$．

$\because 2222^{5555}+4^{5555}\equiv 3^{5555}+4^{5555}(\bmod 7)\equiv 3^{5555}+(-3)^{5555}\equiv 0(\bmod 7)$，

$5555^{2222}-4^{2222}\equiv 4^{2222}-4^{2222}(\bmod 7)\equiv 0(\bmod 7)$，

又　$4^{5555}-4^{2222}\equiv(4^5)^{1111}-(4^2)^{1111}$，而　$4^5-4^2=4^3\cdot 4^2-4^2\equiv 64\times 4^2-4^2\equiv 63\times 4^2\equiv 0(\bmod 7)$，

$(4^5-4^2)\mid[(4^5)^{1111}-(4^2)^{1111}]$，

$\therefore 4^{5555}-4^{2222}\equiv 0(\bmod 7)$．

$\therefore 7\mid(2222^{5555}+5555^{2222})$．

2．解：令 $x=14^{1414}$，因 $x\equiv 0(\bmod 4)$，　①

而 $14^2=196\equiv -4(\bmod 25)$，$14^6\equiv(-4)^3\equiv -14(\bmod 25)$．

$\because(14,\ 25)=1$，$\therefore 14^5\equiv -1(\bmod 25)$，$14^{10}\equiv(-1)^2\equiv 1(\bmod 25)$．

$\because 14^{14}\equiv 196^7\equiv 6^7\equiv 6(\bmod 10)$，即　$14^{14}=10k+6$，

$x=14^{1414}\equiv 14^{10k+6}\equiv(14^{10})^k\cdot 14^6\equiv 1^k\cdot(-14)\equiv 11(\bmod 25)$，

$\therefore x=25m+11$．　②

将②代入①得$25m+11\equiv 0(\bmod 4)$，

$m+3\equiv 0(\bmod 4)$，

$m\equiv 1(\bmod 4)$,

$\therefore m=4n+1$.

$\therefore x=25(4n+1)+11$，即　$x=100^n+36$.

所以 14^{1414}末两位数字为 36.

3. 证明：设 $n=2m+1$　　$(m=1,2,\cdots)$，

则　$2^{2n}(2^{2n+1}-1)-28\quad=2^{4m+2}(2^{4m+3}-1)-28\quad=2^2[2^{4m}(2^{4m+3}-1)-7]\quad=4[16^m(8\times 16^m-1)-7$

$=4[8(16^m)^2-(16^m)-7]\quad=4[8\times 16^m+7][16^m-1]\quad=4[16^m-1][8(16^m-1)+15]$.

$\because 16\equiv 1(\bmod 15)$，　$16^m\equiv 1(\bmod 15)$，$\therefore 15\mid(16^m-1)$，$15\mid[8(16^m-1)+15]$.

$\therefore 4\times 15\times 15\mid[2^{2n}(2^{2n+1}-1)-28]$.

即 $900\mid[2^{2n}(2^{2n+1}-1)-28]$.

所以 $2^{2n}(2^{2n+1}-1)-28$ 的末两位数字均为零.

所以 $2^{2n}(2^{2n+1}-1)$的末两位数字为 28.

4. 证明：当 $(10,n)=1$ 时，$n^{101}\equiv n(\bmod 1000)$.

$\because n^{101}-n=n(n^{100}-1)=n(n^{50}+1)(n^{25}+1)(n^{25}-1)$，又$(10,n)=1$，

$\therefore n$ 必为奇数；$n^{50}+1$，$n^{25}+1$，$n^{25}-1$ 必均为偶数.

$\therefore n(n^{50}+1)(n^{25}+1)(n^{25}-1)\equiv 0(\bmod 8)$.

因$(10,n)=1$，所以 n 不是 5 的倍数，只可能是 $n\equiv\pm 1(\bmod 5)$ 或 $n\equiv\pm 2(\bmod 5)$，必有 $n^{100}\equiv 1$ $(\bmod 5^3)$.

因为 $(5k+1)^{100}$展开式最后三项为$\dfrac{100\times 99}{1\times 2}$ $(5k)^2+100(5k)+1$，

除最后一项外都是 125 的倍数．所以 $(5k+1)^{100}\equiv 1(\bmod 5^3)$.

当 $n=5k-1$，$5k+2$，$5k-2$ 时，同理可证：由$(8,5^8)=1$，可得$1000\mid(n^{100}-1)$.

即　$1000\mid(n^{100}-1)$，$n(n^{100}-1)=n^{101}-n$，

$n^{101}\equiv n(\bmod 1000)$.

5. 解：因 7^1，7^2，7^3，7^4 的末位数字分别为 7，9，3，1．7^7 的末位数字为 3，所以$(7^7)^7$的末位数字为 7．$((7^7)^7)^7$的末位与 7^7 的末位相同，即为 3.

$(((7^7)^7)^7)^7$的末位与$(7^7)^7$的末位相同，即为 7.

所以当指数有奇数个 7 时，末位为 3；

当指数有偶数个 7 时，末位为 7.

由于有 100 个 7 在指数位置上，所以原式末位为 7.

因 7^1，7^2，7^3，7^4，7^5，7^6，7^7 的末两位数字依次为 07，49，43，01，07，49，43．而$(7^7)^7$的末两位数字即$(43)^7$的末两位数字．由$(43)^1$，$(43)^2$，$(43)^3$，$(43)^4$的末两位数字依次为 43，49，07，01，故$(43)^7$的末两位数字为 07，这样，$((7^7)^7)^7$末两位数字为 43.

当指数上有奇数个 7 出现时，末两位数字为 43；当指数上有偶数个 7 出现时，末两位数字为 07.

6. 证明：设原数 $A=10a+b$，将最后一位数字 b 移到最前面一位，得到数 $B=10^{6n-1}b+a$，

考察数 $3B-A=3b\cdot 10^{6n-1}+3a-10a-b=-7a+b(3\times 10^{6n-1}-1)$.

$\because 3\times 10^{6n-1}-1=3\underbrace{00\cdots 0}_{(6n-1)个}-1=299\cdots 9=299999\underbrace{999\cdots 9}_{6(n-1)个}=299999\times 10^{6(n-1)}+\underbrace{99\cdots 9}_{6(n-1)个}$，$299999\equiv 0(\bmod 7)$，

$999999\equiv 0(\bmod 7)$，$\underbrace{99\cdots 9}_{6(n-1)个}=999999\underbrace{00\cdots 0}_{6(n-2)个}+999999\underbrace{00\cdots 0}_{6(n-3)个}+\cdots+999999$，

$\therefore \underbrace{99\cdots 9}_{6(n-1)个}\equiv 0(\bmod 7)$.

$\therefore 3\times 10^{6n-1}-1\equiv 0(\bmod 7)$.

$3B-A\equiv 0(\bmod 7)$，$3B\equiv A(\bmod 7)$.

$\because A\equiv 0(\bmod 7)$，且$(3,7)=0$，$\therefore B\equiv 0(\bmod 7)$，得证.

练习七

一. 1. 180　　2. 6　　3. 50°　　4. 7　　5. 30°

二. 1. 提示：因为 $AB = AC$，$CD = BF$，$BD = CE$，所以$\angle B = \angle C$，$\triangle BDF \cong \triangle CED$，$\angle BDF = \angle DEC$，$\angle EDC = \angle BED$，$\angle BDF + \angle EDC = \angle BDF + \angle DFB = 180^\circ - \angle B$，$\angle B = \dfrac{180^\circ - \angle A}{2}$，而$\angle A = 56^\circ$，所以$\angle EDF = 180^\circ - (\angle BDF + \angle EDC) = 62^\circ$.

2. 提示：过 A 作$\angle BAC$的平分线交 BD 于 G，由$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 2$，$\triangle BAC$ 是等腰直角三角形，证得$\triangle BGA \cong \triangle AEC$，$\therefore AG = CE$，$\because D$ 是 AC 的中点，可证$\triangle AGD \cong \triangle CED$，$\therefore \angle 2 = \angle 4$.

3. 提示 1：如图 7－11a，延长 AF、BC 交于 G，$\because F$ 是 CD 的中点，可证$\triangle AFD \cong \triangle GFC$，$\therefore GC = CD$，$\because \angle EAF = \angle FAD$，$\therefore \angle EAF = \angle EGF$，$\therefore EA = EG$，$\therefore AE = EC + CD$.

提示 2：如图 7－11b，过 F 作 $FG \perp AE$ 交 AE 于 G，连结 FE，$\because \angle EAF = \angle FAD$，证明$\triangle AGF \cong \triangle ADF$，$\triangle FGE \cong \triangle FCE$，从而可证明 $AE = EC + CD$.

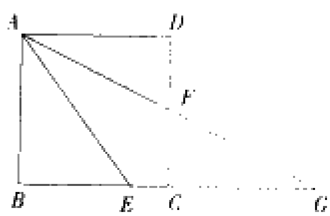


图 7－11a

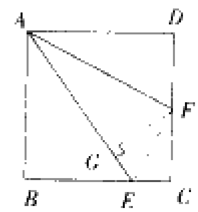


图 7－11b

4. 解：设 $AC = x$，则 $AD = \dfrac{1}{2}x$，在Rt$\triangle ACD$ 中，$\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2 + 4^2 = x^2$，$\therefore AC = x = \dfrac{8}{3}\sqrt{3}$，$AD = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

在 Rt$\triangle CDB$ 中，$4^2 + DB^2 = 5^2$，$\therefore DB = 3$，故 $AB = AD + DB = \dfrac{4}{3}\sqrt{3} + 3$.

专题训练七

一. 1. 3　　2. 9　　3. 2　　4. 45°或 135°　　5. 0.5

二. 1. C　　2. B　　3. D　　4. C

三. 1. 证明：如图 7－17a，延长 BE 至 F，使 $EF = AE$，连结 CF，在 BC 上截取 $BA' = BA$，连结 EA'.

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle BA'E$.

$\because \angle A = 100^\circ$，$AB = AC$，$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$.

因此$\angle ABE = 20^\circ$，则　$\angle AEB = \angle BEA' = \angle A'EC = 60^\circ$.

$\therefore \angle FEC = \angle A'EC$.

又　$EA' = EA = EF$，$\therefore \triangle EFC \cong \triangle EA'C$.

因此$\angle FCE = \angle A'CE = 40^\circ$，$\angle BFC = 80^\circ$.

$\because \angle FBC = 20^\circ$，$\therefore \angle BFC = 80^\circ$.

因此$\angle BFC = \angle BCF$.

故　$BC = BF = BE + EF = BE + AE$.

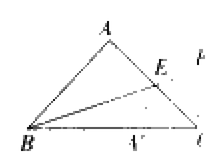


图 7－17a

2. 证明：如图 7－20，延长 AC 至 B'，使 $AB' = AB$，连结 PB'，延长 CP 交 AB 于 E.

在$\triangle ABP$ 和$\triangle AB'P$ 中，

$\begin{cases} AB = AB', \\ \angle BAD = \angle CAD, \\ AP \text{ 是公共边}, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle AB'P$. $\therefore PB = PB'$，$\angle ABP = \angle B'$.

$\because \angle PCB' > \angle AEP$，$\angle AEP > \angle ABP$，$\therefore \angle PCB' > \angle B'$.

$\therefore PB' > PC$，即　$PB > PC$.

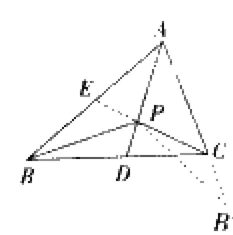


图 7－20

3. 解：(1) ∵ $BD \perp CA$，$CE \perp AB$，∴ $\angle BEF = \angle CDF = 90^\circ$.

而 $\angle BFE = \angle CFD$，故 $\angle ABP = \angle QCA$.

又 $AB = QC$，$BP = CA$，∴ $\triangle ABP \cong \triangle QCA$.

于是 $AP = QA$.

(2) ∵ $\angle AQC = \angle PAB$，①

$\angle AQC = \angle QEA + \angle QAE = 90^\circ + \angle QAE$，②

$\angle PAB = \angle PQA + \angle QAE$，③

∴由①、②、③得 $\angle PAQ = 90^\circ$.

即 $AP \perp AQ$.

4. 证明：如图 7－19a，延长 MD，交 CB 的延长线于 F.

∵ $\angle F + \angle FDB = \angle BAE + \angle ADM$，∴ $\angle F = \angle BAE$.

又 $\angle FBD = \angle ABE = 90^\circ$，$BD = BE$，∴ $\triangle FBD \cong \triangle ABE$，

则 $FB = AB = BC$，即 B 为 FC 的中点.

∵ $FM \perp AE$，$BN \perp AE$，∴ $FM \parallel BN$.

∴点 N 为 CM 的中点.

即 $MN = NC$.

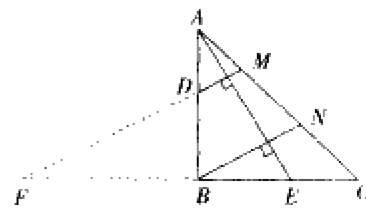


图 7－19a

练习八

一、1. C　2. D　3. C　4. C

二、1. $\sqrt{3}$　2. 45°　3. $\frac{\sqrt{3}}{4}(2-\sqrt{3})a^2$.　4. 90°或75°或15°　5. $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$.

三、1. 证明：过 E 作 $EG \perp AB$ 于 G，如图 8－10a，则 $\angle AEG = 30^\circ$. 在 $\triangle AEG$ 与 $\triangle ABC$ 中，$AE = AB$，$\angle AEG = \angle CAB = 30^\circ$，$\angle BAC = \angle EGA = 90^\circ$，∴ $\triangle AEG \cong \triangle ABC$. ∴ $EG = AC = AD$.

又在 $\triangle ADF$ 与 $\triangle GEF$ 中，$AD = GE$，$\angle AFD = \angle GFE$，$\angle DAF = \angle EGF = 90^\circ$，∴ $\triangle ADF \cong \triangle GEF$. ∴ $DF = EF$.

2. 提示：利用等腰三角形三线合一的性质证明.

3. 提示：连结 CD，设法证明 $\triangle CDF \cong \triangle BDE$，可得 $DF = DE$，$\angle CDF = \angle BDE$，因此 $\angle CDF + \angle CDE = \angle BDE + \angle CDE = 90^\circ$.

4. 证明：延长线段 BD 到 E，使 $DE = DC$，连结 AE，则 $\angle ADE = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BDC) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BDC$.

∵ $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BDC$，∴ $\angle ADE = \angle ADC$.

∵ $AD = AD$，∴ $\triangle ADE \cong \triangle ADC$. ∴ $AE = AC = AB$.

∵ $\angle ABD = 60^\circ$，∴ $\triangle ABE$ 是等边三角形.

∴ $AB = BE = BD + DE = BD + DC$.

说明：此题也可以延长 CD 到 F，使 $DF = BD$，连结 AF，读者可自己完成证明.

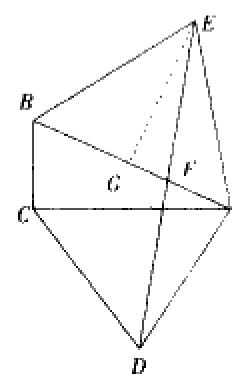


图 8－10a

5. 提示：以 AC 为边在 $\triangle ABC$ 外作等边 $\triangle ACB'$，连结 $B'D$. 则可证得 $\triangle ABD \cong \triangle AB'D$，又可证得 $\triangle AB'D \cong \triangle CB'D$，所以有 $AD = CD$.

6. 提示：由 $\triangle ABE \cong \triangle CAD$ 得 $\angle ABE = \angle CAD$，从而可得 $\angle BPQ = \angle PAB + \angle ABP = \angle PAB + \angle CAD = 60^\circ$，$\angle PBQ = 30^\circ$，利用直角三角形性质可得 $BP = 2PQ$.

专题训练八

一、1. B　2. A　3. C　4. D

二、1. 9cm 或 10cm　2. 100°　3. $b-a$　4. a

三、1. 答：这样的 P 点共有 10 个. P 点的作法：

(1) 分别作 ABC 各边的垂直平分线 MN、EF、GH 交点 P_1；

(2) 以 P_1 为圆心，PA 的长为半径画弧交 MN、EF、GH 于点 P_2，P_3，P_4；

(3) 分别以点 A、B、C 为圆心、以 AB 的长为半径画弧交 MN、EF、GH 于点 P_5，P_6，P_7，P_8，P_9，P_{10}，则 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5、P_6，P_7，P_8，P_9，P_{10}这 10 个点就是所满足条件的点．如图 8－21．

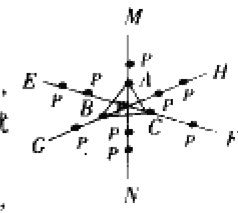


图 8－21

2．证明：如图 8－18a，在 BC 上截取 $BE=AD$，连结 DE．$\because \angle BAC=90°$，$AB=AC=BD$，$\angle ABD=30°$，$\therefore \angle DBC=\angle CAD=15°$，$\angle ACB=\angle ABC=45°$，设$\angle ACD=\alpha$，在

$\triangle ADC$ 和$\triangle BED$ 中，$\begin{cases} AC=BD, \\ \angle CAD=\angle CBE=15°, \\ AD=BE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BED$．$\therefore DC=DE$．

$\because \angle ACD=\angle BDE=\alpha$，$\therefore \angle DCE=\angle DEC=45°-\alpha$．

又$\because \angle DEC=15°+\alpha$，$\therefore 45°-\alpha=15°+\alpha$，得 $\alpha=15°$．

$\therefore \angle DAC=\angle ACD$．$\therefore AD=CD$．

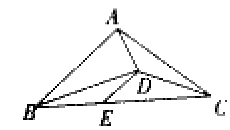


图 8－18a

3．证明：如图 8－19a，在 BC 上取 $BE=BD$，$\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=40°$，$\therefore \angle DBC=20°$，

$\angle BED=\frac{1}{2}(180°-\angle DBE)=80°$．

$\therefore \angle DEC=100°$．

$\therefore \angle EDC=180°-\angle DEC-\angle ECD=40°=\angle ECD$．

$\therefore CD=DE$．

在 BC 上再取 F，使$\angle DFE=\angle DEF=80°$

$\therefore DF=DE$，且$\angle DFB=100°=\angle DAB$．

又$\angle FBD=\angle ABD=20°$，$BD=BD$，$\therefore \triangle FBD \cong \triangle ABD$．

$\therefore AD=DF=DE=EC$．

$\therefore BC=BE+EC=BD+AD$．

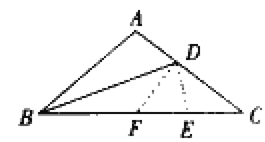


图 8－19a

4．解：分两种情形讨论：

(1) 当直线通过等腰三角形顶角的顶点时，有两个解：

图 8－22

(2) 当直线通过底角的顶点时，有两个解：

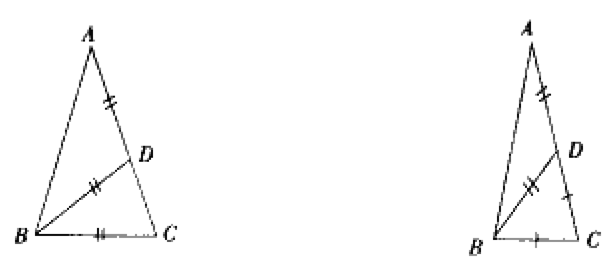


图 8－23

本题四解，顶角分别等于 90°、108°、36°、25°42′．

5．证明：注意到$\triangle ABC$ 是给定的、P 是任意的、因此要根据 P 相对于$\triangle ABC$ 的位置分别进行讨论：(1) P 在

△ABC 内，如图 8-24；(2) P 在 BC 边上，如图 8-25；(3) P 在 AC 边上，如图 8-26；(4) P 在 AB 边上，如图 8-27；(5) P 是△ABC 外一点，如图 8-28. 前四类的证明略，关于第五类的情形，其证明如下：

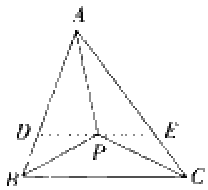


图 8-24

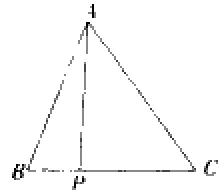


图 8-25

图 8-26

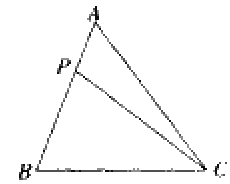


图 8-27

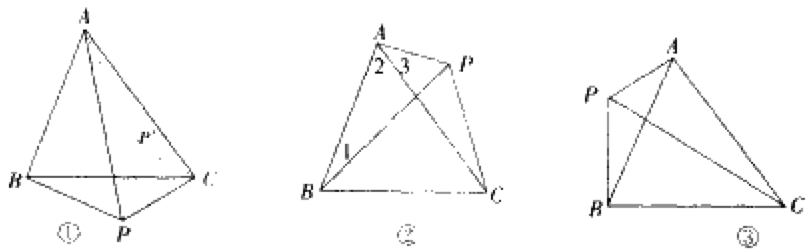


图 8-28

①P 与 A 在 BC 异侧. 作$\angle CAP' = \angle CBP$，截取 $AP' = BP$，从而△$AP'C$≌△BPC，$P'C = PC$，$\angle PCP' = 60°$，$PC = P'C = P'P$，于是 $PA \leqslant AP' + P'P = PB + PC$；

②P 与 B 在 AC 的异侧. 在△APB 中，$\angle 3 + \angle 2 > 60° > \angle 1$，$PB > AP$，∴ $PA < PB + PC$；

③P 与 C 在 AB 异侧，同②.

综上所述，无论 P 在什么位置，均有 $PA \leqslant PB + PC$.

6. 解：$\angle CAB = \angle CBA = \frac{1}{2}(180° - \angle C) = 80°$，从而$\angle ANB = 180° - \angle ABN - \angle BAN = 50° = \angle NAB$，

∴ $AB = BN$. 又在△ABM 中，$\angle AMB = 180° - \angle MAB - \angle ABM = 180° - 80° - 60° = 40°$，

作等腰△BAD，使 $BD = BA$，则 $BD = BN$. 又$\angle ABD = 180° - 2\angle CAB = 20°$，$\angle DBN = 60°$，

△BDN 为等边三角形，$BD = DN$.

在△BDM 中，$\angle DBM = \angle DMB = 40°$，∴ $DM = DB = DN$，又得△DMN 为等腰三角形.

∵ $\angle MDN = 180° - \angle ADB - \angle BDN = 40°$，$\angle DMN = \frac{1}{2}(180° - \angle MDN) = 70°$，

∴ $\angle NMB = \angle NMA - \angle BMA = 70° - 40° = 30°$.

图 8-20a

练习九

一. 1. -1　2. -3　3. $-\frac{1}{3}$　4. 1　5. $\frac{9}{5}$

二. 1. 证明：原式左边 $= \frac{1}{x+y}\left(\frac{x^2-yz}{x+z} + \frac{y^2-zx}{y+z}\right) = \frac{1}{x+y} \cdot \frac{x^2y - yz^2 + xy^2 - xz^2}{(x+z)(y+z)} = \frac{1}{x+y} \cdot \frac{(xy-z^2)(x+y)}{(x+z)(y+z)} =$ 右边.

2. 证明：由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$，两边同乘以 $abc(a+b+c)$，得 $(c+a)(a+b)(b+c) = 0$，∴ $a = -c$ 或 $c = -b$ 或 $b = -a$，分别代入左边或右边即得证.

3. 证明：由条件可推得 $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = 0$，∴ $c = a+b$ 或 $b = a+c$ 或 $a = b+c$，分别代入可得结论.

4. 解：(1) 由已知得 $\frac{a}{1} = \frac{x}{y+z}$，$\frac{b}{1} = \frac{y}{z+x}$，$\frac{c}{1} = \frac{z}{x+y}$.

由合比性质得 $\frac{a}{a+1} = \frac{x}{x+y+z}$，$\frac{b}{b+1} = \frac{y}{x+y+z}$，$\frac{c}{c+1} = \frac{z}{x+y+z}$.

∴ $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$.

(2) 设$\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=k$.

若 $a+b+c\neq 0$，则由等比性质得$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{c+a+b}=k$，$\therefore k=2$.

此时，$a+b=2c$，$b+c=2a$，$c+a=2b$.

若 $a+b+c=0$，则 $a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$，

$\therefore$当 $a+b+c\neq 0$时，$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{2c\cdot 2a\cdot 2b}{abc}=8$；

当 $a+b+c=0$时，$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{(-c)(-a)(-b)}{abc}=-1$.

(3) 此题中，分式的分子是单项式，分母是多项式，所以可以采用先取倒数的方法将分式变形，然后利用配方法进行整体代入.

由$\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{5}$知 $x\neq 0$，取倒数，得$\frac{x^2+x+1}{x}=5$，$\therefore x+\frac{1}{x}+1=5$.

(4) 原式$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{a(bc+b+1)}+\frac{abc}{ab(ca+c+1)}=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}=1$.

5. 解：$\because x^4+4=(x^2)^2+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=[(x+1)^2+1][(x-1)^2+1]$，

$$\therefore \text{原式}=\frac{(3^2+1)(1^2+1)(7^2+1)(5^2+1)(11^2+1)(9^2+1)\cdots(39^2+1)(37^2+1)}{(5^2+1)(3^2+1)(9^2+1)(7^2+1)(13^2+1)(11^2+1)\cdots(41^2+1)(39^2+1)}$$

$$=\frac{(1^2+1)(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)\cdots(39^2+1)}{(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)\cdots(39^2+1)(41^2+1)}=\frac{1^2+1}{41^2+1}=\frac{2}{1682}=\frac{1}{841}.$$

专题训练九

一、1. C　2. B　3. D　4. D　5. A　6. B

二、1. 13　2. $-\frac{3}{4}$　3. 1　4. 0　5. 2或-3

三、1. 证明：(1)、(3) 两题是证恒等式，证明恒等式的方法很多，一般可以从一边证到另一边；也可以左、右两边分别化简到同一结果；或者证明两边的差为零.

(1) 设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，则 $a=bk$，$c=dk$.

左边$=\frac{b^{2001}k^{2001}+b^{2001}}{d^{2001}k^{2001}+d^{2001}}=\frac{b^{2001}(k^{2001}+1)}{d^{2001}(k^{2001}+1)}=\frac{b^{2001}}{d^{2001}}$，右边$=\frac{(bk+b)^{2001}}{(dk+d)^{2001}}=\frac{b^{2001}}{d^{2001}}$，

$\therefore$左边=右边.

故原等式成立.

(2) $\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}$.

$\because \frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1}$，而$\frac{1}{7n+1}$显然不可约，$\therefore \frac{14n+3}{7n+1}$不可约.

因此，$\frac{7n+1}{14n+3}$不可约，故$\frac{21n+4}{14n+3}$不可约.

(3) 左边$-$右边$=-2\left[\frac{1}{(y-z)(z-x)}+\frac{1}{(z-x)(x-y)}+\frac{1}{(x-y)(y-z)}\right]$

$=-2\frac{(x-y)+(y-z)+(z-x)}{(y-z)(z-x)(x-y)}=0$，

$\therefore$左边=右边.

2. 解：$\because \frac{a}{x(x+a)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}$，…，$\frac{a}{(x+3a)(x+4a)}=\frac{1}{x+3a}-\frac{1}{x+4a}$，

$\therefore$原式$=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}\right)+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+2a}\right)+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x+2a}-\frac{1}{x+3a}\right)+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x+3a}-\frac{1}{x+4a}\right)$

$=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4a}\right)=\frac{4}{x(x+4a)}$.

3. 解：由$\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$，得 $a^4-a^2b^2-2b^4=0$.

分解因式，得$(a^2-2b^2)(a^2+b^2)=0$.

$\because a^2+b^2\neq 0$，$\therefore a^2-2b^2=0$，即 $a^2=2b^2$.

$\therefore \dfrac{a^2-b^2}{19a^2+96b^2}=\dfrac{2b^2-b^2}{19\cdot 2b^2+96b^2}=\dfrac{b^2}{(38+96)b^2}=\dfrac{1}{134}$.

4．解：$\because \dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \dfrac{a+b}{ab}=3$，即$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=3$.

同理可得方程组$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=3, & ①\\[2mm] \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=4, & ②\\[2mm] \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=5. & ③\end{cases}$

$(①+②+③)\div 2$，得 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=6$.

$\therefore \dfrac{bc+ac+ab}{abc}=6$．$\therefore \dfrac{abc}{ab+bc+ca}=\dfrac{1}{6}$.

5．解：$\because \dfrac{a+bt}{1+t}=\dfrac{b(1+t)+a-b}{1+t}=b+\dfrac{a-b}{1+t}$，　$\therefore \dfrac{a+bt}{1+t}-b=\dfrac{a-b}{1+t}$.

又　$\dfrac{a+bt}{1+t}-a=\dfrac{t(b-a)}{1+t}$，

$\because a<b$，$t>0$，　$\therefore \dfrac{a-b}{1+t}<0$，$\dfrac{t(b-a)}{1+t}>0$.

即　$\dfrac{a+bt}{1+t}<b$，$\dfrac{a+bt}{1+t}>a$．$\therefore a<\dfrac{a+bt}{1+t}<b$.

6．证明：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，$\therefore \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=1$，

即　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+2\left(\dfrac{yz}{bc}+\dfrac{zx}{ca}+\dfrac{xy}{ab}\right)=1$，得$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-2\times\dfrac{ayz+bzx+cxy}{abc}$.

又　$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$，即$\dfrac{ayz+bzx+cxy}{xyz}=0$，

$\therefore ayz+bzx+cxy=0$．$\therefore \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

7．证明：由$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$　得$\dfrac{abc}{ab+bc+ca}=2$.

$\therefore (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$.

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)=0$．则得 $a+b=0$ 或 $b+c=0$ 或 $c+a=0$，

$\therefore c=2$ 或 $a=2$ 或 $b=2$.

练习十

一、1．0　　2．$\dfrac{4}{a^2-4}$　　3．$\dfrac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}$　　4．0　　5．5

二、1．(1) $\dfrac{-10}{x-1}+\dfrac{13}{x-2}$　　(2) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x}$　　(3) $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{1}{x-6}$

(4) $\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{10}{x+2}+\dfrac{12}{x+3}$　　(5) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

2．$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-1)^3}$

3．$1+\dfrac{-3}{x-2}+\dfrac{8}{x-3}$.

4．$1+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}$.

专题训练十

一、1．B　解题思路：已知式等于一个固定值，就是说：不论 x、y 取何值，原式的值不变，于是可取 $x=y=0$，则原式为：$\dfrac{-1}{-1}\times\dfrac{-1}{-1}\div\dfrac{-1}{-1}=1$.

2．B　解题思路：原方程变为 $x^2+2a|-x|-3a^2=0$，$\Rightarrow |x|^2+2a|x|-3a^2=0 \Rightarrow (|x|-a)(|x|+3a)=0$，

$\therefore |x|=a$，或 $|x|=-3a$．当 $a>9$ 时，$x=\pm a$，($|x|=-3a$ 无解)；当 $a<0$ 时，$x=\pm 3a$($|x|=a$ 无解)；当 $a=0$ 时，$x=0$(舍去)．

3．C　解题思路：考虑 $x+y=5$，设 $x=\frac{5a}{a+b}$，$y=\frac{5b}{a+b}$．代入 $z^2=\frac{5a}{a+b}\cdot\frac{5b}{a+b}+\frac{5b}{a+b}-9=-\frac{(3a-2b)^2}{(a+b)^2}$，即 $z^2+\frac{(3a-2b)^2}{(a+b)^2}=0$．$\therefore z=0$，$3a-2b=0$，即 $a=\frac{2}{3}b$，于是得 $x=2$，$y=3$，$z=0$．$\therefore x+2y+3z=2+2\times3+3\times0=8$．

4．B　解题思路：设 $a=\frac{x}{x+y}$，$b=\frac{y}{x+y}$，(x、y 是正实数)，则 $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})=1+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}=1+\frac{x+y}{y}+\frac{x+y}{x}+\frac{(x+y)^2}{xy}=3+\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y}{x}+\frac{(x+y)^2}{xy}\geqslant 3+2+\frac{4xy}{xy}=3+2+4=9$．当 $x=y$，即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})$ 的最小值为 9．

二、1．解题思路：令 $y=x^2+2x-8$．原方程变为 $\frac{1}{y+9x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y-15x}=0$．解得 $y=9x$ 或 $y=-5x$．由 $x^2+2x-8=9x\Rightarrow x_1=8$，$x_2=-1$；由 $x^2+2x-8=-5x\Rightarrow x_3=-8$，$x_4=1$．经检验，它们都是方程的解．

2．解题思路：$\because a=1$，$ab=2$，$\therefore b=2$，则原式 $=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{2000\times2001}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+\left(\frac{1}{2000}-\frac{1}{2001}\right)=1-\frac{1}{2001}=\frac{2000}{2001}$．

3．解题思路：原方程变为 $(a+1)x^2-2ax+(a-1)=0$，即 $(x-1)[(a+1)x-(a-1)]=0$，$\therefore x_1=1$，当 $a>1$，或 $a<-1$ 时，有正数解 $x_2=\frac{a-1}{a+1}$．

4．解题思路：设第一台单打需 x 天打完，第二台单独打完麦子需 y 天，依题意

$$得\begin{cases}4(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=1,\\ \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{x}}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{y}}=9.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x=12,\\y=6.\end{cases}\quad 或\begin{cases}x=6,\\y=12.\end{cases}$$

三、1．证明：由已知等式去分母得 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$，知 $a+b$、$b+c$、$c+a$ 中至少有一个为零，不妨设 $c+b=0$，则有 $b=-c$．代入求证式：左 $=\frac{1}{a^{2001}}$，右 $=\frac{1}{b^{2001}}$，$\therefore$ 所证式成立．

2．解：原式变为 $\begin{cases}\frac{x}{y}=xy-a, & ①\\ \frac{y}{x}=xy-\frac{1}{a}. & ②\end{cases}$

①×②：$(xy-a)(xy-\frac{1}{a})=1\Rightarrow x^2y^2-(a+\frac{1}{a})xy=0$，

$\therefore xy=0$（舍去）；$xy=a+\frac{1}{a}$．　③

将③代入①，得 $\frac{x}{y}=\frac{1}{a}$．　④

又 $xy\cdot\frac{x}{y}=(a+\frac{1}{a})\cdot\frac{1}{a}$，$x^2=\frac{a^2+1}{a^2}$，$\therefore x_{1,2}=\pm\frac{1}{a}\sqrt{a^2+1}$，分别代入④得 $y_{1,2}=\pm\frac{1}{a}\sqrt{a^2+1}$．

$\therefore\begin{cases}x_1=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+1},\\ y_1=\sqrt{a^2+1},\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-\frac{1}{a}\sqrt{a^2+1},\\ y_2=-\sqrt{a^2+1}.\end{cases}$

3．证明：设 $y_i=\frac{x_i}{x_i+1}$ ($i=1$、2、…、$n-1$)，$y_n=\frac{x_n}{x_1}$，诸 y_i 中不是 $+1$ 就是 -1，但 $y_1+y_2+\cdots+y_n=0$，故其中 $+1$ 与 -1 的个数相同，设为 k，于是 $n=2k$；又 $y_1y_2\cdots y_n=1$，即 $(-1)^k=1$，故 k 为偶数，$\therefore n=2k$ 一定是 4 的倍数．

4. 提示：化分式为部分分式证明.

练习十一

1. 提示：将已知条件直接代人便可.

2. 提示：由 $a+b+c=0$，得 $a=-(b+c)$，从而 $2a^2+bc=a^2+a^2+bc=a^2-(b+c)a+bc=(a-b)(a-c)$，类似地第二、第三项分别为$(b-c)$、$(b-a)$、$(c-a)(c-b)$，计算待证式左边便得结论.

3. 证明：已知条件可以转化为 $a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)=2abc$，

即 $a^3-(b+c)a^2-(b-c)^2a+(b+c)(b-c)^2=0$，

即 $a^2(a-b-c)-(b-c)^2(a-b-c)=0$，

即 $(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)=0$，

$\therefore a=b+c$ 或 $b=c-a$，或 $c=b-a$，不论是哪一种情形，$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$、$\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$和$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$这三个分式中总有两个等于 1，而另一个等于 -1，因此就证明了 $\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1}+\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1}=1$.

4. 证明：$\because c=a+b$，$\therefore c-a=b$，待证式左边 $=\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+c)(a^2-ac+c^2)}=\dfrac{(a-b)[(a+b)^2-ab]}{(a+c)[c^2-a(c-a)]}=\dfrac{(a-b)(c^2-ab)}{(a+c)(c^2-ab)}=\dfrac{a-b}{a+c}=$ 右边.

5. 提示：仿例 7.

6. 提示：仿例 8.

7. 证明：用换元法，设 $c=x-1$、$b=y-1$、$c=z-1$，已知条件即 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$，类似于例 8 可证得 $a=-b$，$b=-c$，$c=-a$，三者中至少有一个成立，即得 $x+y$，$y+z$，$z+x$ 中至少有一个等于 2.

8. 提示：设 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=k$ 即可.

专题训练十一

一、1. D 解题思路：$\because a+b+c=0$，$\therefore a=-(b+c)$.

$$\text{原式}=\frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)}{abc}=\frac{(b+c)^3+b^2(-b)+c^2(-c)}{-(b+c)bc}$$

$$=\frac{b^3+c^3+3bc(b+c)-b^3-c^3}{-(b+c)bc}=-3.$$

2. B 解题思路：$a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=a^2+6ab+9b^2-(25b^2-10bc+c^2)=(a+3b)^2-(5b-c)^2=(a+8b-c)(a-2b+c)=0$. $\because a$、b、c 是$\triangle ABC$ 的三边长，$\therefore a+b-c>0$，则 $a+8b-c=(a+b-c)+7b\neq0$.

$\therefore a-2b+c=0$，$\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{1}{2}$.

3. C 解题思路：因 $\dfrac{a^2}{2a^2+bc}=\dfrac{a^2}{2a^2+b(-a-b)}=\dfrac{a^2}{a^2-ab+a^2-b^2}=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}$，同理 $\dfrac{b^2}{2b^2+ac}=\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}$，$\dfrac{c^2}{2c^2+ab}=\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$，$\therefore$ 原式 $=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=-\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$.

4. C 解题思路：由题设有：

$b(b+c-a)=(a+b)(a+c-b)$，①

$b(2a+b+2c)=(a+b)(a+b+c)$.②

①－②，得 $b(-3a-c)=-2b(a+b)$.

$\because b\neq0\left(\text{否则}\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a+b+c}{2a+b+2c}\text{变为 }0=\dfrac{1}{2}\right)$，

$\therefore c=2b-a$.③

将③代入①得，$3b-2a=a+b$，即 $b=\frac{3}{2}a$.

代入③，得 $c=2a$.

故 $(a+b):(b+c):(c+a)=(a+\frac{3}{2}a):(\frac{3}{2}a+2a)$ $(2a+a)=5:7:6$.

二、1. 解题思路：$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=-3$.

设 $a+b+c=k$,则 $k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3$

$=-3+3=0$, $\therefore k=0$,或$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.若$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$,则$(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=0$,从而 $k^2-1=0$, $k=\pm1$, $\therefore a+b+c=0$ 或 1,或 -1.

2. 解题思路：由$\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$两边平方，得 $x=a+\frac{1}{a}-2$，即 $x+2=a+\frac{1}{a}$，$\therefore\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{(x+2)^2-4}=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$.

由已知条件知 $x\geqslant0$，$a>0$，则$\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{a-1}{\sqrt{a}}\geqslant0$ 得 $a\geqslant1$，$\therefore a-\frac{1}{a}\geqslant0$，则$\sqrt{x^2+4x}=a-\frac{1}{a}$.

$\therefore$原式$=\dfrac{a+\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}-(a-\frac{1}{a})}=a^2$.

3. 解题思路：(1)若 $a+b+c\neq0$，由已知得$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{c}=\frac{(a+b-c)+(a-b+c)+(-a+b+c)}{a+b+c}$

$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$.

故 $a+b-c=c$, $a+b=2c$.

同理 $b+c=2a$, $c+a=2b$.

因此 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{2c\cdot2a\cdot2b}{abc}=8$;

(2) 若 $a+b+c=0$，则 $a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$.

因此 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{(-c)(-a)(-b)}{abc}=-1$.

4. 解题思路：设$\frac{x}{a}=u$，$\frac{y}{b}=v$，$\frac{z}{c}=w$，则 $u+v+w=1$， ①

$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$. ②

由①得 $u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu)=1$. ③

又由②得$\frac{uv+vw+wu}{uvw}=0$. $\therefore uv+vw+wu=0$.

代入③得 $u^2+v^2+w^2=1$，即$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

三、1. 证明：由已知条件去分母得$bc(a+b+c)+ac(a+b+c)+ab(a+b+c)=abc$,

即$(a+b)\cdot c\cdot(a+b+c)+ab(a+b)=0$,解得$(a+b)(b+c)(c+a)=0$,

$\therefore a+b$、$b+c$、$c+a$ 中至少有一个为零.

不妨设 $a+b=0$，则 $a=-b$，于是$\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{(-b)^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{c^7}$，$\frac{1}{a^7+b^7+c^7}=\frac{1}{(-b)^7+b^7+c^7}$

$=\frac{1}{c^7}$，所以$\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7+b^7+c^7}$.

2. 证明：设$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$，则 $a_1=kb_1$，$a_2=kb_2$，$\cdots$，$a_n=kb_n$.

左边$=\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}=\sqrt{kb_1{}^2}+\sqrt{kb_2{}^2}+\cdots+\sqrt{kb_n{}^2}=\sqrt{k}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$,

右边 $=\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)}=\sqrt{k(b_1+b_2+\cdots+b_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)}$

$=\sqrt{k}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$.

∴左边 = 右边，原式成立.

3. 证明：设 $\frac{y+z}{ay+bz}=\frac{z+x}{az+bx}=\frac{x+y}{ax+by}=m$，则 $y+z=m(ay+bz)$.

于是 $(1-am)y=(bm-1)z$.

同理 $(1-am)z=(bm-1)x$，$(1-am)x=(bm-1)y$.

将上面三式左右两边分别相乘得 $(1-am)^3=(bm-1)^3$

所以 $1-am=bm-1$，$m=\frac{2}{a+b}$.

由 $\frac{y+z}{ay+bz}=\frac{2}{a+b}$ 化简得 $(y-z)(a-b)=0$，所以 $a=b$ 或 $y=z$.

同理可得 $a=b$ 或 $x=z$. 故 $a=b$ 或 $x=y=z$.

4. 解：由条件等式得 $a^4-2b^4=a^2b^2$，即 $(a^2-2b^2)(a^2+b^2)=0$.

∵ $a^2+b^2\neq0$，∴ $a^2=2b^2$. 故 $\frac{a^2-b^2}{18a^2+84b^2}=120$.

5. 解：∵ $x=3-\frac{9}{y}$，$\frac{9}{z}=3-y$，$z=\frac{9}{3-y}$，∴ $z+\frac{9}{x}=\frac{9}{3-y}-\frac{9}{3-\frac{9}{y}}=3$.

6. 解：当 $x=2a$，$y=2b$ 时，x^2+xy-y^2 的值是 1，即 $4a^2+4ab-4b^2=1$，∴ $a^2+ab-b^2=\frac{1}{4}$. 将 $x=3a+5b$、$y=5a+8b$ 代入 $x^2+xy-y^2=(3a+5b)^2+(3a+5b)(5a+8b)-(5a+8b)^2=-(a^2+ab-b^2)=-\frac{1}{4}$.

练习十二

1. (1) 提示：先作奠基三角形 ADM，使 $\angle ADM=\mathrm{Rt}\angle$，$AD=h_a$，$AM=m_a$；再以 A 为圆心、b 为半径作弧，交 DM 的延长线于 C，延长 CD 到 B，使 $MB=MC$.

(2) 提示：先作奠基三角形 ABD，使 $\angle ADB=\mathrm{Rt}\angle$，$AD=h_a$，$AB=C$；再以 A 为顶点，AB 为一边作 $\angle BAC=\angle\alpha$，另一边交 BD 延长线于 C.

(3) 提示：先作奠基三角形 AFC，使 $\angle AFC=\mathrm{Rt}\angle$，$\angle A=\angle\alpha$，$FC=h_c$；再以 C 为圆心，a 为半径作弧，交 AF 的延长线于 B.

(4) 提示：先作奠基三角形 BCF，使 $\angle BFC=\mathrm{Rt}\angle$，$FC=h_c$，$BC=a$；再以 BC 的中点 M 为圆心，m_a 为半径作弧，交 BF 的延长线于 A.

2. (1)、(2) 略.

(3) 提示：先作奠基三角形 ACD，使 AC = 已知直角边，CD = 斜边与另一直角边之差，$\angle ACD=\mathrm{Rt}\angle$，再作 AD 的垂直平分线交 DC 的延长线于 B.

(4) 提示：先作奠基三角形 CME，使 $\angle CEM=\mathrm{Rt}\angle$，$\angle E$ = 斜边上的高，CM = 斜边上的中线；再以 M 为圆心、MC 为半径作弧，分别交 EM、ME 的延长线于 A、B.

3. 4. 提示：同 1.(1)

专题训练十二

1. 已知：$\angle\alpha$，线段 a. 求作：$\triangle ABC$，使 $\angle C=90°$，$BC=a$，$\angle B=\angle\alpha$. 作法：(1) 作 $BC=a$；(2) 过 C 点作 $EC\perp BC$；(3) 作 $\angle CBF=\angle\alpha$，BF、CE 交于点 A，则 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 为所求的三角形，如图 12-8.

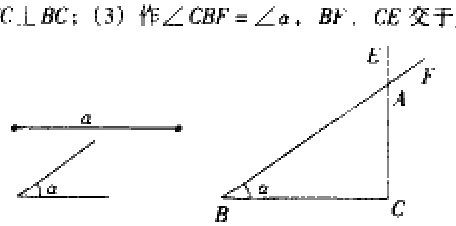


图 12-8

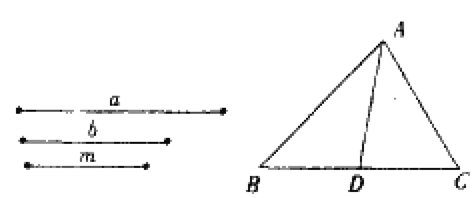


图 12-9

2. 已知：线段 m、b、a. 求作：△ABC，使 $BC=a$，$AC=b$，BC 边上的中线等于 m. 作法：（1）作△ADC，使 $DC=\frac{1}{2}a$，$AC=b$，$AD=m$；（2）延长 CD 至 B，使 $BD=\frac{1}{2}a$，连接 AB，则△ABC 为所求作的三角形，如图 12－9.

3. 已知：线段 a、b、h. 求作：△ABC，使 $BC=a$，$AC=b$，BC 边上的高等于 h. 作法：（1）Rt△ADC，使 $\angle ADC=90°$，$AD=h$，$AC=b$；（2）延长 CD 至 B，使 $BC=a$，连接 AB，则△ABC 为所求，如图 12－10.

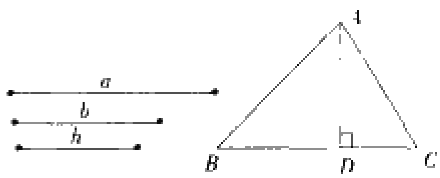


图 12－10

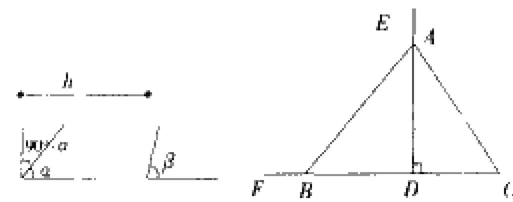


图 12－11

4. 已知：$\angle\alpha$、$\angle\beta$，线段 h. 求作：△ABC，使 $\angle B=\angle\alpha$，$\angle A=\angle\beta$，BC 边上的高等于 h. 作法：（1）作 $ED\perp FD$；（2）截取 $AD=h$；（3）以 A 为顶点，AD 为一边，作 $\angle DAB=90°-\angle\alpha$，$AB$ 交 DF 于 B；（4）以 AB 为一边，A 为顶点，作 $\angle BAC=\angle\beta$，AC 交 BD 的延长线于 C. 则△ABC 为所求，如图 12－11.

5. 解题思路：可先作 $\angle MON=\angle\alpha$，然后在 $\angle MON$ 的两边上截取 $OA=\frac{1}{2}m$，$OB=\frac{1}{2}n$，最后反向延长 OM 至 C，使 $OC=\frac{1}{2}m$，反向延长 ON，使 $ON=\frac{1}{2}n$，顺次连结 A、B、C、D，可得.

6. 解题思路：先作以 a、b 为边，夹角为 α 的奠基三角形.

7. 解题思路：可先求作出 $\angle\beta=\frac{1}{2}(180°-\alpha)$ 的角，然后作以已知边为底边，$\angle\beta$ 为底角的等腰三角形为奠基三角形.

8. 解题思路：可先作线段 $AC=m$，再作 AC 的中垂线 MN 与 AC 交于 O，再在 OM 上截 $OB=\frac{1}{2}n$，ON 上截 $OD=\frac{1}{2}n$. 顺次连结 A、B、C、D 即可.

9. 解题思路：可先作线段 $AC=c$，再作 AC 的中垂线 MN 与 AC 交于 O，再在 OM 上截 $OB=\frac{1}{2}c$，ON 上截 $OD=\frac{1}{2}c$，顺次连结 A、B、C、D 即可.

10. 作法：（1）作△CBE，使 $CE=2c$，$BE=b$，$BC=a$；（2）取 CE 的中点 D，连接 BD 并延长至 A，使 $DA=BD$；（3）连接 AC，则△ABC 为所求.

11. （1）取 $AC=m$；（2）在 AC 的一旁，以 AC 为一边作△ABC，使 $AB=a$，$BC=b$；（3）在 AC 的另一旁，以 AC 为一边作△ACD，使 $CD=c$，$DA=d$.
四边形 $ABCD$ 即为所求.

12. 解题思路：先作以两底和为一边，两对角线为另两边的奠基三角形.

13. 作法：（1）作 $\angle ABC=90°$，取 $BA=2$cm，$BC=2$cm；（2）作 $\angle BCD=135°$，取 $CD=1$cm；（3）连 AD. 即得四边形 $ABCD$.

14. 解：由 B 向对岸作垂线，$BB'=$ 河宽. 连 AB' 交对岸于 M，则 M 为桥之一端.

练习十三

1. 解题思路：Rt△ACD 中，$CD^2=AC^2-AD^2$，Rt△BCD 中，$CD^2=BC^2-DB^2$，因此有 $2CD^2=AC^2+BC^2-AD^2-DB^2$. 因为 Rt△$ABC$ 中，$AC^2+BC^2=AB^2=(AD+DB)^2=AD^2+2AD\cdot DB+DB^2$，所以有 $2CD^2=2AD\cdot DB$，故 $CD^2=AD\cdot DB$.

2. 解题思路：$CD^2=AD\cdot BD$，则 $CD^4=AD^2\cdot BD^2=(AE\cdot AC)\cdot(BF\cdot BC)=(AE\cdot BF)\cdot(AC\cdot BC)$，而 $AC\cdot BC=CD\cdot AB$，所以 $CD^4=AE\cdot BF\cdot AB\cdot CD$，故 $CD^3=AE\cdot BF\cdot AB$.

3. 解：如图 13－8a，因为△ABC 与△AED 全等，理由是：

$$\begin{cases} AB = AE, \\ \angle B = \angle E, \\ \angle CAB = \angle DAE. \end{cases}$$

从而 $AC = AD$．∴ $BC = a - AC$．

设 $BC = x$，则 $AC = a - x$．

∴ $x^2 + b^2 = (a - x)^2$．　∴ $x = \dfrac{a^2 - b^2}{2a}$．

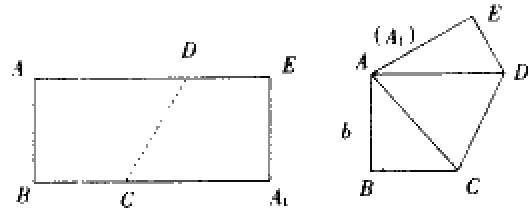


图 13－8a

∴ $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2 - b^2}{2a} \times b$．∴不重合部分面积为$\dfrac{(a^2 - b^2)\ b}{2a}$．

4. 解：如图 13－9a，将△ABP 绕 A 旋转到△AP_1C；将△APC 绕 C 旋转到△BP_2C；将△BPC 绕 B 旋转到△AP_3B．

可证得：△APP_1、△BPP_3、△CPP_2 是等边三角形；△PP_1C、△PBP_2、△PP_3A 是直角三角形．

求得多边形 $AP_1CP_2BP_3$ 的面积为 $18 + \dfrac{25}{2}\sqrt{3}$．所以三角形的面积为 $9 + \dfrac{25}{4}\sqrt{3}$．

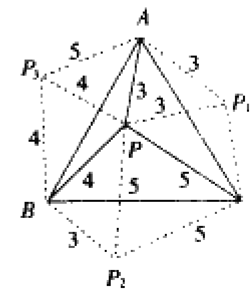


图 13－9a

5. 提示：过上底两端点作等腰梯形的两条高 AE、DF．

6. 解：最短路程为 BB' 的长．由已知∠$B'VB = 60°$，$VB = VB'$，可得等边三角形 VBB'．∴ $BB' = 2$．即为蚂蚁所走的最短路程．

专题训练十三

一、1. $3\sqrt{2}$　2. 132　3. 400　4. 3

二、1. 证明：由勾股定理，得 $l^2 = (n + m)(n - m)$．∵ l 为质数，∴ $n + m = l^2$，$n - m = 1$，∴ $2m = l^2 - 1$，∴ $2(l + m + 1) = (l + 1)^2$．

2. 解：$AC = 10\text{cm}$，由勾股定理的逆定理知△ADC 为直角三角形，$S_{四边形ABCD} = 144\text{cm}$．

3. 解：作 $PP' \parallel A_1B_1$ 交 AA_1 于 P'，过 A' 作 $A'D \parallel A_1B_1$，易得 $AP' = 1$，$AA' = 2$，$A'A_1 = 15$，$BD = 5$，∴ $AP + PB = A'B = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$．

4. 解：设另两边分别为 a、b，则 $b^2 - a^2 = 21^2$，$(b + a)(b - a) = 3^2 \cdot 7^2$，$b + a = 7^2$ 或 $3^2 \times 7$ 或 3×7^2 或 $3^2 \times 7^2$，答案为 $21 + 49 = 70$．

5. 解：过 M 作 AD 的平行线交 AB 于 P、交 CD 于 Q，则 $MA^2 - MB^2 = AP^2 - BP^2 = DQ^2 - CQ^2 = MD^2 - MC^2 = \dfrac{1}{2}$．又 $MD^2 + MC^2 = CD^2 = 1$，∴ $MC = \dfrac{1}{2}$．而 $CD = 1$，∴∠$MCD = 60°$．

练习十四

1. 证明：第 1 个小孩得 0 颗、第 2 个小孩得 1 颗，…，第 8 个小孩得 7 颗．至少要 $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 7 = 28$，与题设只有 27 颗相矛盾，故必有两个小孩得的糖果一样多．

2. 证明：2000 个点可构成有限多个三角形，这些三角形必有面积最小的，面积最小的三角形就是所求的三角形．

3. 证明：n 个点构成的有限多个三角形，必有面积最大的三角形，不妨设为△ABC，过 A、B、C 分别作 BC、AC、AB 的平行线，相交于 A'、B'、C'．此△$A'B'C'$ 就符合题设要求．事实上，若存在一点 D 在△$A'B'C'$ 的外部，不妨设 D 与 A 在 BC 的同侧，显然 $S_{\triangle DBC} > S_{\triangle ABC}$，与△$ABC$ 是面积最大的相矛盾，故 D 必在△$A'B'C'$ 的内部，且 $S_{\triangle ABC} \leqslant 4$．

4. 证明：设这 1996 个点中以 A、B 两点之间的距离最大，则任取一点 C，必有 $AC \leqslant AB$，$BC \leqslant AB$．故∠$ACB > 90°$（因为△ABC 为钝角三角形）．从而点 C 在以 AB 为直径的圆内，而 $AB < 1$，故结论成立．

5. 证明：(1) 由 997 个点连结每两点的线段只有有限条，所以必有一条最长者，设 AB 为诸线段中最长者．

A 与其他 996 个点连线的中点均在以 A 为圆心，以$\dfrac{1}{2}AB$ 为半径的圆的内部或圆周上．

B 与其他996个点连线的中点均在以 B 为圆心，以 $\frac{1}{2}AB$ 为半径的圆的内部或圆周上．

以上两圆外切于线段 AB 的中点．

所以至少有 $2\times996-1=1991$ 个中点，即1991个红点．

（2）在数轴上取997个点，它们分别对应于1，2，3，…，997，按要求将中点染红，则对应于分母为1或2的那些点就是全部的红点，个数恰为1991个．

6．证明：由于只有有限多个圆，我们取其中半径最大者．令其圆心为 O_1，半径为 r_1，面积为 A_1，和⊙O_1 相交的圆必落在以 O_1 为圆心、$3r_1$ 为半径的圆内．去掉和圆 O_1 相交的圆，则余下的圆和⊙O_1 不相交，没被去掉的圆与⊙O_1 盖住的总面积为 S_1，则 $S_1\leqslant9\pi r_1^2$，$A_1=\pi r_1^2\geqslant\frac{1}{9}S_1$．

在和⊙O_1 不相交的有限个圆中，再取半径最大者，设其圆心为 O_2，半径为 r_2，面积为 A_2，去掉和⊙O_2 相交的圆，余下的圆和⊙O_1，⊙O_2 都不相交，没被去掉的圆与⊙O_2 所盖住的总面积为 S_2，则 $S_2\leqslant9\pi r_2^2$，$A_2=\pi r_2^2\geqslant\frac{1}{9}S_2$．

如此继续下去，由于只有有限个圆，一定能做到使它们不相交为止，设有 k 个互不相交的圆，则

$A_1+A_2+\cdots+A_k\geqslant\frac{1}{9}(S_1+S_2+\cdots+S_k)=\frac{1}{9}$．

专题训练十四

1．证明：正 n 边形的 n 个顶点中必有一个离 P 点最近，不妨设该点为 A_i．又设 A_j、A_{j+1} 为两个相邻顶点，而点 P 在 $\angle A_jA_iA_{j+1}$ 的内部（或边上）．

若 P 点在 $\angle A_jA_iA_{j+1}$ 内部，则 $180°>\angle A_iPA_j=180°-\angle PA_iA_j-\angle PA_jA_i\geqslant180°-2\angle PA_iA_j>180°-2\angle A_jA_iA_{j+1}=180°-\frac{2}{n}\cdot180=\left(1-\frac{2}{n}\right)180°$．

若 P 点在 $\angle A_jA_iA_{j+1}$ 的边上，不妨设 P 在 A_iA_{j+1} 上，则有 $180°>\angle A_iPA_j=\left(1-\frac{2}{n}\right)180°$．

2．证明：用 A_i、B_i 分别表示红、蓝点（$i=1,2,\cdots,n$），考察所有一红一蓝连接的 n 条线段，则 n 条线段总长取最小值的连线就满足要求．如图14－5，若 A_1B_2 与 A_2B_2 相交，则 $A_1B_2+A_2B_1<A_1B_1+A_2B_2$，故改连 A_1B_2 及 A_2B_1（其余的 $n-2$ 条线段不动），则会使 n 条线段的总长变小．

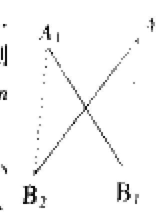


图14－5

3．证明：计算 n 行和 n 列中每一行和每一列所有各方格的数的和，这 $2n$ 个和中一定有一个最小的，设某一行的各数之和最小，且这个和为 k．若 $k\geqslant n$，则表中各数之和 $S\geqslant nk\geqslant n^2>\frac{1}{2}n^2$；若 $k<n$，则这行中就包括至少 $n-k$ 个0．

现考察包括这些0的列，由于0所在的行与列的数字和不小于 n，故0所在的列的数字之和不小于 $n-k$，而位于其他任一列的数字和不小于 k，故表中的全部数字之和满足：$S\geqslant(n-k)(n-k)+k\cdot k=n^2-2kn+2k^2$．

4．证明：在各行棋子中，一定有一行棋子最多，设这一行有 p_1 枚棋子，再从剩下的 $2n-1$ 行中找一行棋子最多的，设有 p_2 枚棋子，如此下去，共找出 n 行，这 n 行共有 $p_1+p_2+\cdots+p_n$ 枚棋子，而剩下的 n 行有 $p_{n+1}+p_{n+2}+\cdots+p_{2n}$ 枚棋子．

我们证明所选出的 n 行至少有 $2n$ 枚棋子．

否则，若 $p_1+p_2+\cdots+p_n\leqslant2n-1$，则 $p_{n+1}+\cdots+p_{2n}\geqslant n+1$（因为共有 $3n$ 枚棋子），由这两个不等式得：p_1，p_2，…，p_n 比中至少有一个不大于1，p_{n+1}，p_{n+2}，…，p_{2n} 中至少有一个大于1，这与 p_1，p_2，…，p_n 比 p_{n+1}，p_{n+2}，…，p_{2n} 都大矛盾．

由于 $p_1+p_2+\cdots+p_n\geqslant2n$，则其余的 n 枚棋子从 n 列中选即可．

5．证明：可按以下办法装运货物：

先往第一辆车上尽量装货，一直装到不超过1500千克，但再加一包便超过1500千克时为止，并将这超载的一包放在汽车旁边．

再照此办理，往第 2 辆、第 3 辆，…卡车上装货，直到装完 8 辆卡车，这时已装上货物连同每辆卡车旁边所放的货物总重量已超过 $1500\times 8=12000$（千克），因此剩下的货物不超过 $13500-12000=1500$（千克），完全可能由第 9 辆卡车装运．

然后再把剩在卡车旁的 8 包货分成两组，每组 4 包，其重量不超过 $350\times 4=1400$（千克），可用两辆卡车装运．

6．证明：设 x_1 是方程 $x^2+y^2+z^2=2^n xyz$ 中的一切正整数解中的最小的解，即满足 $x_1^2+y_1^2+z_1^2=2^n x_1y_1z_1$．

则 x_1、y_1、z_1 都是偶数．

设 $x_1=2x_2$，$y_1=2y_2$，$z_1=2z_2$，则 $x_2^2+y_2^2+z_2^2=2^{n+1}x_2y_2z_2$．

说明 x_2、y_2、z_2 也是方程的一组解，此时 $x_2<x_1$，与 x_1 最小相矛盾．

综合能力测试

一、1．B　解题思路：$12345^2-2345^2=(12345-2345)(12345+2345)=10^4\times 14690=14690\times 10^5$

$\therefore n=5$．

2．C　解题思路：如图 15－5，$\angle B=\angle C=30°$，$\angle BAC=120°$，$\therefore \angle DAC=30°$．设 $AD=x$，在 $\triangle ADC$ 中，$AD=DC=x$，在 $Rt\triangle ABD$ 中，$\angle B=30°$，$\therefore BD=2AD=2x$，$BD+DC=3x=24$，$\therefore AD=8$．

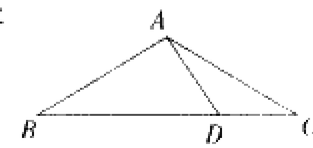


图 15－5

3．A　解题思路：$x=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=1-\frac{1}{n!}<1$．

4．D　解题思路：（1）式不是分解因式；（2）式未分解完；根据因式分解的含义，（5）式也不属于因式分解．

5．A　解题思路：由题意知 $p+q=333$．若 p、q 奇偶性相同，则 $p+q$ 是偶数而不是奇数 333，故 p 和 q 一奇一偶；又偶数质数仅有 2 个，另一个奇质数一定比 2 大．而 $p<q$，则 $p=2$，$q=331$．

6．B　解题思路：$2(a^2+b^2+c^2+d^2)=2ab+2bc+2cd+2da\Rightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=0\Rightarrow a=b=c=d$．$\therefore$ 四边形是菱形．

7．A　解题思路：设 $7322=a$，则 $w=7321\times 7322\times 7323\times 7324+1=(a-1)\cdot a(a+1)(a+2)+1=(a^2-1)(a^2+2a)+1=a^4+2a^3-a^2-2a+1=(a^2+1\cdot a-1)^2=(a^2+a-1)^2=(7322^2+7321)^2$，

即 $w=(7322^2+7321)^2$．$\therefore w$ 是一个平方数．

8．B　解题思路：延长 BD 分别交于 FC、AC 于 H、K，如图 15－6，设 $\angle GBD=\angle 1$，$\angle DCG=\angle 2$，$\angle BDC=\alpha$，$\angle BGC=\angle\beta$，$\angle DHC=\gamma$．

$\because \alpha=\gamma+\angle 2$，$\gamma=\beta+\angle 1$，$\therefore \alpha=\beta+\angle 1+\angle 2$．

得 $\angle 1+\angle 2=140°-110°=30°$．同理可得 $\beta=\angle A+\angle 1+\angle 2$．$\therefore \angle A=80°$．

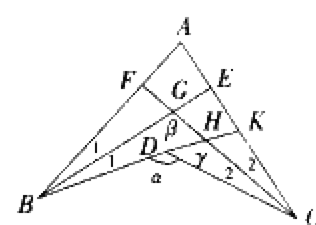


图 15－6

二、1．$-\frac{1}{2}$、-3、$\frac{9}{2}$．

2．解题思路：在▱$ABFE$ 中，$EF=AB$，$EF\parallel AB$，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，$\therefore EF\perp BC$．在 $\triangle EBF$ 中，$\because A'B'$ 分别为 EB、BF 的中点，$\therefore A'B' \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}EF$．同理 $B'C' \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}B'C'$．$\therefore C'B'\perp A'B'$，$\angle A'B'C=90°$．同理 $\angle B'C'D'=\angle C'D'A'=90°$．$\therefore$ 四边形 $A'B'C'D'$ 为矩形．$\therefore S_{A'B'C'D'}=A'B'\cdot C'D'=\frac{1}{2}EF\cdot\frac{1}{2}BC=\frac{1}{4}AB\cdot BC=\frac{1}{4}S_{ABCD}$．

3．解题思路：如图 15－7，设 $BC=x$ cm，$AB=y$ cm．因 $S_{\triangle ABP}=2cm^2=\frac{1}{2}y\cdot BP cm^2$，故 $BP=\frac{4}{y}$ cm．又因 $S_{\triangle ADQ}=4cm^2=\frac{1}{2}x\cdot DQ cm^2$，故 $DQ=\frac{8}{x}$ cm．故 $PC=\left(x-\frac{4}{y}\right)$ cm，$CQ=\left(y-\frac{8}{x}\right)$ cm．

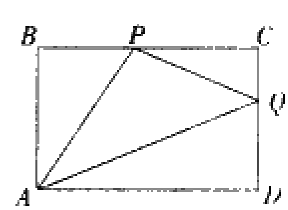


图 15－7

又因 $S_{\triangle PCQ}=3cm^2=\frac{1}{2}\left(x-\frac{4}{y}\right)\left(y-\frac{8}{x}\right)cm^2$，故 $\left(x-\frac{4}{y}\right)\left(y-\frac{8}{x}\right)=6$．故 $xy+\frac{32}{xy}$

$-18=0$. 解得 $xy=16$($xy=2$ 不合题意舍去). 故矩形面积为 16cm^2.

4. 解题思路：$\because 2x^2-6xy+9y^2-4x+4=0$，$\therefore (x-3y)^2+(x-2)^2=0$，得 $x=2$，$y=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \sqrt{y}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

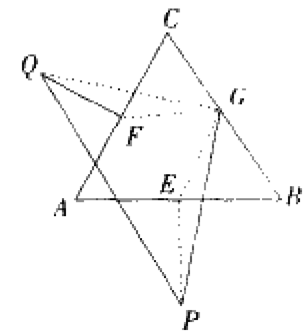


图 15－8

5. 解题思路：如图 15－8，连 EG、FG、QG，在$\triangle FGQ$ 与$\triangle EPG$ 中，因 $FG=AE=EP$，$QF=AF=GE$，且$\angle QFG=\angle GEP=150°$，故$\triangle FGQ\cong\triangle EPG$. 故 $GQ=GP=1$. 又因$\angle FGQ+\angle FGP=180°-150°=30°$，$\angle FGE=\angle A=60°$，故$\angle PGQ=90°$. 再由勾股定理可求得 $PQ=\sqrt{2}$.

6. 解题思路：设 $x-y=m$，$y-z=n$，$z-x=-(m+n)$，代入等式得$m^2+n^2+[-(m+n)]^2=[-m-(m+n)]^2+(-n+m)^2+[(m+n)+n]^2$.
整理得 $m^2+n^2+mn=0$. $\because |m|$、$|n|$均为非 0 时，有 $m^2+n^2\geqslant 2mn$，$\therefore m=n=0$，即 $x=y=z$，故原式 $=1$.

7. 解题思路：如图 15－3a，把每个螺母等分为六个边长都相等的小三角形（每个面积为 1），用分割法易见$\triangle ABC$ 的面积 = 六边形 $ADBECF$ 的面积 $-3\times\triangle ADB$ 的面积 $=(3+5+7+7)-3\times 0.5\times 6=22-9=13$.

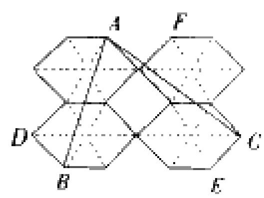


图 15－3a

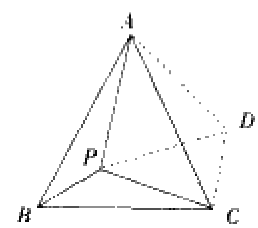


图 15－9

8. 解题思路：如图 15－9，以 AC 为一边在$\triangle ABC$ 外部作$\angle CAD=\angle BAP$，并在 AD 边上取 $AD=AP$，连 DC、DP. 则$\angle APD=\angle ADP$. $\therefore\triangle ADC\cong\triangle APB$. $\therefore\angle ADC=\angle APB$，$DC=PB$. 又$\because PC>PB$，$\therefore PC>DC$. $\therefore\angle CDP>\angle CPD$. $\therefore\angle CDP+\angle ADP>\angle CPD+\angle APD$. $\therefore\angle ADC>\angle APC$. $\therefore\angle APB>\angle APC$.

三、1. 解：易知每一辆车子一次可运走的箱子的重量不少于 2 吨，否则可再放一只箱子. 设需车 n 辆，则它们运走箱子的重量依次是 a_1，a_2，…，a_n，则 $2<a_i<3$（$i=1$，2，…，n）. 设所有运走的货物重量之和为 S，则 $2n<S=a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant 3n$，即 $2n\leqslant 10\leqslant 3n$. 从而，$\dfrac{10}{3}\leqslant n\leqslant 5$. 故 $n=4$ 或 5. 事实上，有 4 辆车不够，因为假设有 13 只箱子，每只重为$\dfrac{10}{13}$吨，由于$\dfrac{10}{13}\times 3<3$，$\dfrac{10}{13}\times 4>3$，所以每辆车只能运走 3 只箱子，这样，4 辆车子不能全部运走，因此至少要 5 辆汽车.

2. 证明：如图 15－4a，设 M、N 为 AE、BF 的中点，G 为 AB 的中点，O 为中线 PG 的中点，则 G、N、P、M 分别为四边形 $ABFE$ 四边的中点. 易知四边形 $GNPM$ 为平行四边形，故对角线 PG、MN 互相平分，即 MN 必过 PG 的中点 O，所以 MN 过定点.

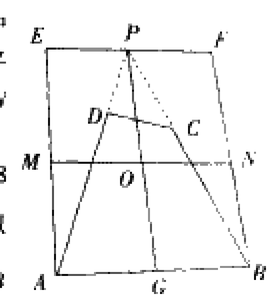


图 15－4a

3. 解：将其中两个距离较远的点记为 A、B. 考虑 A 与除 B 点以外的 1988 个点构成的 1988 条线段，这些线段的中点都互不重合，且到 A 点的距离小于 $\dfrac{1}{2}AB$，对 B 点作类似的讨论，又可得 1988 个互不重合的中点，它们到 B 点的距离小于$\dfrac{1}{2}AB$，加上 AB 的中点，共得互不重合的中点 $1988+1988+1=3977$(个). 另一方面，这 1990 个点每相邻两点间隔都相等时，不同中点的个数恰是 3977 个. 综上，所有可能线段的不同中点的最小数目是 3977 个.

练习十六

一、1. B　2. C　3. D　4. A　5. B.

二、1. 无数，五　　2. $\frac{1}{4}a^2\text{cm}^2$　　3. 34　　4. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$cm　　5. 4

三、1. 提示：将矩形四等分即可.

2. 解：从水平方向的 3 条平行线中取两条有 3 种取法；对上面的每一种取法，我们都可以从 4 条斜平行线中取两条组成平行四边形，则一共有 $N=3\times6=18$（种）.

3. 解：如图 16－25.

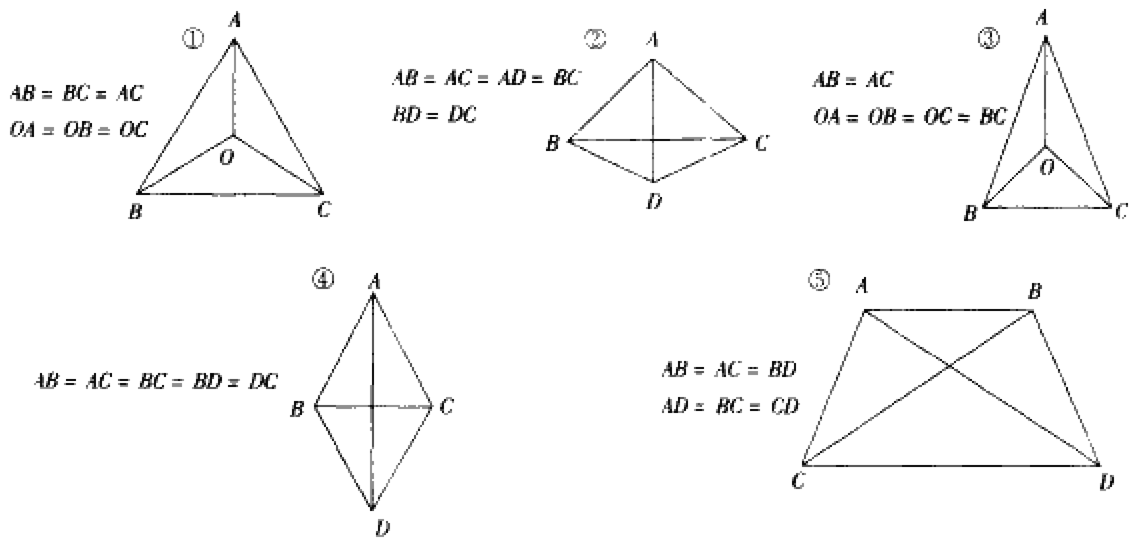


图 16－25

4.（2）解：设 $AB=1$，$\because \frac{AB}{AE}=k$，$AE=BF$，$\therefore AE=BF=\frac{1}{k}$.

$\therefore S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AB\cdot BF=\frac{1}{2k}$，又$\triangle AA'E\backsim\triangle AB'B$，$\therefore \frac{S_{\triangle AB'B}}{S_{\triangle AA'E}}=\frac{AB^2}{AE^2}$，即 $S_{\triangle AA'E}=\frac{1}{k^2}S_{\triangle AB'B}$.

又$\because S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AB'B}+S_{\triangle BB'F}=S_{\triangle AB'B}+S_{\triangle AA'E}$，$\therefore \frac{1}{2k}=(1+\frac{1}{k^2})S_{\triangle AB'B}$，$\therefore S_{\triangle AB'B}=\frac{k}{2(k^2+1)}$.

又$\because S_{正方形ABCD}=S_{正方形A'B'C'D'}+4S_{\triangle AB'B}$，

$\therefore 1=\frac{1}{5}+\frac{4k}{2(k^2+1)}$，解得 $k=\frac{1}{2}$，$k=2$（不合题意舍去）.

专题训练十六

一、1. C　　2. D　　3. C（提示：连结 BE、DP.）

4. B（分析：设 AD、BC 的延长线交于 E，则$\angle E=30°$，可得）　　5. B

二、1. $S-6$　　2. $\frac{3}{8}ab$（提示：E、F 分别为 AB、BC 的中点）　　3. 5　　4. $AB=BC$　　5. 9

三、1. 解：当 BD 最大时，B、A、D 在一条直线上，$BD=BA+AD=3$. $\therefore\triangle BDC$ 为等腰三角形. 作 $DE\perp BC$，则 $DE=\sqrt{6}$.

设 B 到 DC 的距离为 h，则 $S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}\times3\times h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{6}$.

$\therefore h=2\sqrt{2}$. 当 BD 最小时，A、D、C 在一条直线上.

$\because AB=2$，$AC=AD+DC=4$，$BC=2\sqrt{3}$，$AB^2+BC^2=AC^2$，

$\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形，且$\angle A=60°$，$BD=\sqrt{3}$，$BD\perp AC$. $\therefore h=\sqrt{3}$.

$\therefore BD$ 的变化范围为$\sqrt{3}<BD<3$；B 到 DC 的距离 h 的变化范围为$\sqrt{3}<h<2\sqrt{2}$.

2. 解：（1）在 23×23 的正方形中央铺一块 1×1 的瓷砖，再把剩下的部分划分为 4 个 11×12 的矩形，其中每一个矩形可分成 2×12 和 9×12 的矩形，然后铺上相应的 2×2 和 3×3 的瓷砖.

（2）把 23×23 的正方形的行接连编号，并把号码编为 1、4、7、…、22 的行涂成黑色，而把其余的涂成

白色，那么任何 2×2、3×3 的正方形瓷砖都将含偶数个白格，所以只由那样的瓷砖铺成 23×23 的正方形是不可能的，因为 23×23 的正方形包含奇数个白格.

(3) 不能.

3. 证明：设 $AD=a$，$AB=b$，$\angle DAB=\alpha$，则 $S_{四边形KLMN}=S_{\square ABCD}-(S_{\triangle AKN}+S_{\triangle BLK}+S_{\triangle CLM}+S_{\triangle DMN})$

$=ab\sin\alpha-\left[\frac{1}{2}AN\cdot AK\sin\alpha+\frac{1}{2}BL(b-AK)\sin\alpha+\frac{1}{2}(a-BL)(b-MD)\sin\alpha+\frac{1}{2}(a-AN)\cdot MD\sin\alpha\right]$

$=\frac{1}{2}ab\sin\alpha\left[1-\frac{(AN-BL)(AK-MD)}{ab}\right]$.

又 $\because S_{四边形KLMN}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$，$\therefore (AN-BL)(AK-MD)=0$.

$\therefore AN=BL$ 或 $AK=MD$. $\therefore LN\parallel AB$ 或 $KM\parallel AD$，即结论成立.

练习十七

一、1. C　2. D　3. D

二、1. 5cm　2. 20cm^2　3. $33°$.

三、1. (1) 证明：先证 $\triangle ABC\cong\triangle DBE$，$\therefore DE=AC$. 又 $\because AF=AC$，$\therefore DE=AF$. 同理可证 $AD=EF$. $\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

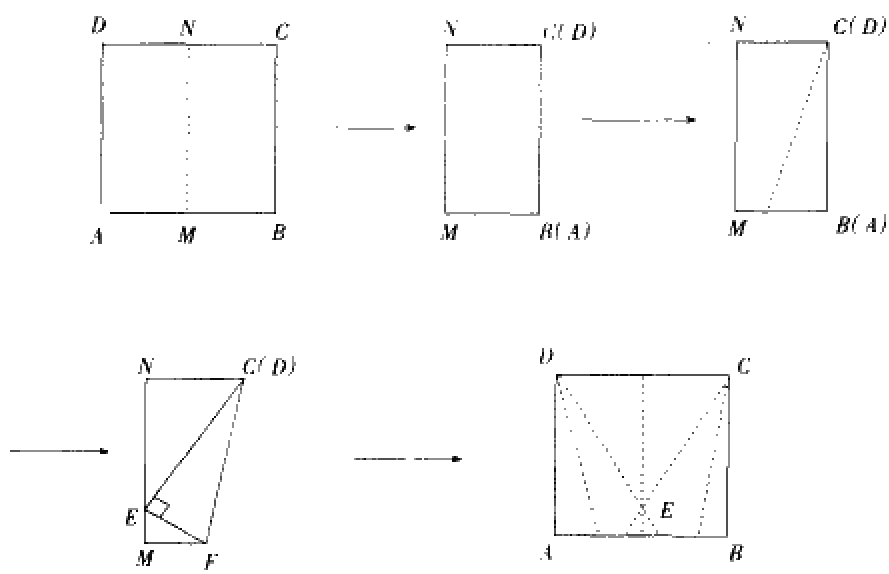


图 17 – 23

(2) 解：如图 17 – 23，当 $AB=AC$ 时，$\square ADEF$ 是菱形；

当 $\angle BAC=150°$ 时，$\square ADEF$ 是矩形；

当 $\angle BAC=60°$ 时，则 $\angle DAF=180°$，即 D、A、F 三点共线，此时不存在 $\square ADEF$.

2. 解：(1) 对折正方形 $ABCD$，得到折线 MN；

(2) 将重叠的两边 AD、BC 斜着向 MN 折叠，使顶点 A 和 B 落在 MN 上（E 处），并使折线过 D 和 C 点；

(3) 再沿 ED 和 EC 折叠一次，展开后即可得正三角形 ECD（如图 17 – 23 所示）.

由于 $EC=ED=BC=AD=CD$，于是 $\triangle ECD$ 为所求的正三角形.

类似上面的做法便可得有关的角及线段.

3. (1) 证明：由 $APMQ$ 是平行四边形且 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，推得 $MP+MQ=AC$，故其周长等于 $2AC$，是一个定值.

(2) 解：由 $AP'M'Q'$ 是平行四边形且 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，推得 $|M'P'-M'Q'|=AC$，即平行四边形 $AP'M'Q'$ 的两邻边之差的绝对值恰等于 AC.

专题训练十七

一、1. C　2. C（提示：取 OB 中点 N，OB_1 中点 P，连结 KN、LN、LP、MP）　3. B（提示：从构造 DE 边上的中线人手）.

二、1. 12［提示：$(1.4+2.6)\times 3=12$ 平方米］　2. 8（提示：转化为正方形即可求得）　3. 点 M 是 ▱$ABCD$ 对角线 AC 与 BD 的交点

三、1. 提示：取 DC 的中点 N，连结 EN、MN，证 $EM=MN$　2. 提示：利用梯形中位线定理.

3.（1）证明：连结 AC、BD，设它们交于 O 点，过 O 作 $OO_1\perp MN$ 于 O_1．$\because AA_1\perp MN$，$CC_1\perp MN$，$\therefore AA_1/\!/CC_1$．于是 $AA_1+CC_1=2OO_1$．同理：$BB_1+DD_1=2OO_1$．

$\therefore AA_1+CC_1=BB_1+DD_1$．

（2）当直线 MN 过▱$ABCD$ 的 AD 和 BC 边时，则有 $CC_1-AA_1=DD_1-BB_1$；

当直线 MN 与▱$ABCD$ 的 AD 和 AB 相交时，则有 $CC_1-AA_1=BB_1+DD_1$．

4. 解：（1）如图 17－21a，分别以 KN、KL、ML、MN 为折痕，相应将△AKN、△BKL、△CML、△DMN 翻折．

$\because K$ 是 AB 的中点，$\angle NKL=90°$，

$\therefore KA=KB$，$\angle AKN+\angle BKL=\angle NKL$．

$\therefore KA$ 和 KB 在翻折后重合于 KA_1．

同理，MC 和 MD 在翻折后重合于 MC_1．

又$\because \angle ANK+\angle DNM=\angle KNM$，$\therefore NA_1$ 和 NC_1 在一直线上．同理，LA_1 和 LC_1 在一直线上．

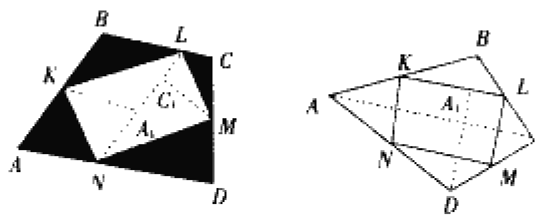


图 17－21a

①若 A_1 和 C_1 不同，则 N、L 都在直线 A_1C_1 上．此时$\angle A+\angle B=\angle KA_1N+\angle AK_1L=180°$，$AD/\!/BC$，则四边形 $ABCD$ 为梯形．$\therefore S=2S_1$．

②若 C_1 重合于 A_1，NA_1 和 LA_1 就可以不在同一直线上．此时，KA_1 和 MA_1 也可以不在同一直线上，$AC\perp BD$，且 N 和 L 分别是 AD 和 BC 的中点．$\therefore S=2S_1$．

（2）一定存在．任意凸四边形的面积总是其内接平行四边形面积的两倍．

5. 解：点 O' 是定点．作 $OO_1\perp AB$，$O'M\perp AB$，$A'A_1\perp AB$，$B'B_1\perp AB$．

易证 Rt△$AA_1A'\cong$ RtOO_1A，则 $OO_1=AA_1$，$O_1A=A_1A'$．同理 $BB_1=OO_1$，$B'B_1=O_1B$．$\therefore A'A_1+B'B_1=O_1A+O_1B=AB$，$O'M=\dfrac{1}{2}AB$．又 $AA_1=BB_1$，则 M 是 AB 中点，故知 O' 是定点．

练习十八

一、1. A　解题思路：如图 18－23，分别平移 AB、DC，得四边形 $ABEM$、四边形 $DCFM$ 均为▱，且面积相等，又得 $EN=NF$，$\therefore S_{\triangle EMN}=S_{\triangle FNM}$，$\therefore S_1=S_2$．

2. B　解题思路：如图 18－24，平移 AB，得 $2AD<AC+EC=4+6$，$2AD>EC-AC=6-4$，即 $AD>1$．

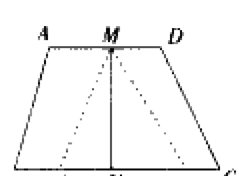


图 18－23

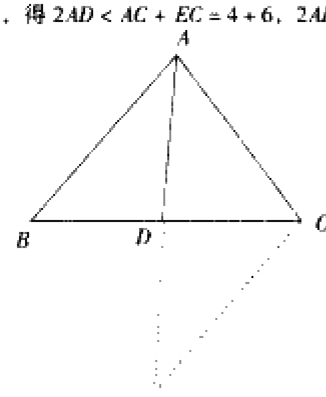


图 18－24

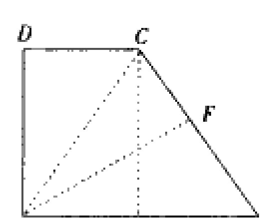


图 18－6a

3. A 解题思路：如图 18－6a，过 A 作 $AF\perp BC$ 于 F，平移 AD，连结 AC．$\because AD\perp AB$，$\therefore AD// CE$．

在 Rt△CEB 中，$BC=\sqrt{CE^2+BE^2}=13$，$\therefore BC\cdot AF=AB\cdot CE$．$\therefore AF=12$．

二、1. 4 解题思路：平移 AB、CD 使 A、N、D 三点重合．

2 $\sqrt{11}$ 解题思路：平移 AB 到 O 处，平移 AD 到 O 处，构造直角三角形．

3. 6 解题思路：平移 BC，构造直角三角形．

4. 如图 18－10a，$A\to D\to C\to B$，C、D． 5. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

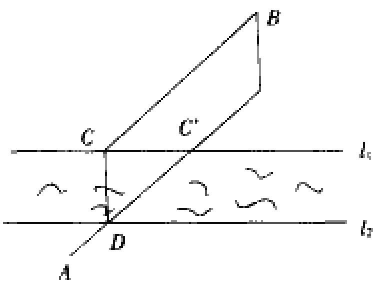


图 18－10a

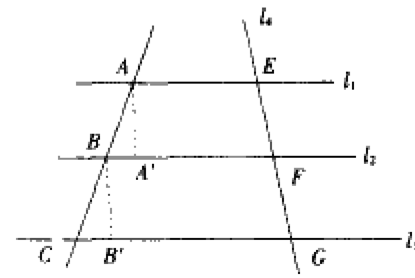


图 18－13a

三、1. 证明：平移 BC 至 EG，则四边形 $BCGE$ 为平行四边形．连结 GF，$\therefore GC=EB$，$\angle GCF=\angle FAE$，

$\because AB=AC$，$AE=CF$，$\therefore EB=FA$，$GC=FA$．$\therefore \triangle FCG\cong\triangle EAF$．$\therefore FG=EF$．$\therefore FG+EF\geqslant EG$，

$\therefore 2EF\geqslant BC$．$\therefore EF\geqslant\frac{1}{2}BC$．

2. 证明：如图 18－13a，平移 EF 到 AA'，FG 到 BB'．$\because l_1// l_2// l_3$，$\therefore AA'// BB'$．由条件得△$ABA'\cong$△BCB'．

$\therefore AB=BC$．当 l_4 变化时，若 $E'F'=F'G'$，同样有 $AB=BC$．

结论为：如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在其他直线上截得的线段也相等．

若$\frac{EF}{FG}=\frac{2}{3}$，则$\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$．

3. 解：如图 18－14a，延长 FD 到 G，使 $FD=DG$，连结 BG、EG．由条件得 $EF=EG$，$BG=CF$．

在△EBG 中，$BE+BG>EG$，$\therefore BE+CF>EF$．

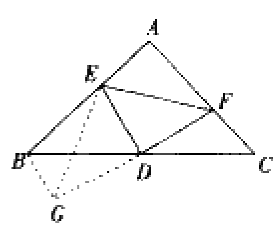


图 18－14a

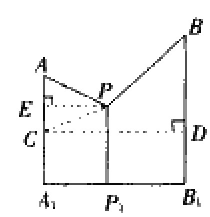


图 18－17a

专题训练十八

一、1. C 2. B.

3. B 解题思路：如图 18－17a，延长 BP 交 AA_1 于 C．如图平移，得$\angle ACP=\angle B=\angle A$，$\therefore PA=PC$，于是 $PA+PB=PC+PB=BC$．$\therefore CD=A_1B_1=12$，$AC=2AE=2(17-16)=2$．$\therefore A_1C=15$，$BD=BB_1-DB_1=BB_1-A_1C=20-15=5$．在 Rt△$BDC$ 中，$CB=\sqrt{CD^2+BD^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$，故 $PA+PB=13$．

二、1. $AB+AC<BD+DC$ 2. $\sqrt{34}$ 3. 0 4. 19

三、1. 解：如图 18－25，过 A 作 $AE// DC$ 交 BC 于 E，则四边形 $ADCE$ 为平行四边形．

若梯形的上、下底分别为 4 和 5，则 $BE=BC-AD=1$．而 $AE=DC$，则△ABE 三边为 1、1、4．这是不可能的．因此只能有 $AD=1$、$BC=5$ 或 4．

（1）若 $AD=1$，$BC=5$，则 $AB=DC=4$，且△ABE 为等边三角形．故梯形的高为 $2\sqrt{3}$．$\therefore$ 梯形的面

积为 $6\sqrt{3}$.

(2) 若 $AD=1$，$BC=4$，不妨设另两边长为 $AB=4$，$CD=5$，则 $AE=5$，$BE=3$.

$\therefore \triangle ABE$ 为直角三角形，且 $\angle B=90°$.

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 为直角梯形，其面积为 10.

又 $\because 10<6\sqrt{3}$，$\therefore$ 直角梯形时面积最小.

故 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{17}$.

$\therefore$ 其对角线之和为 $4\sqrt{2}+\sqrt{17}$.

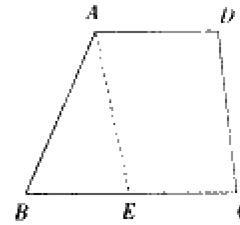


图 18－25

2. 证明：如图 18－26，平移线段 EC 至 DF，连 CF、BF，延长 DM 交 BF 于 M'. $\because DM'\parallel CF$，M 是 BC 的中点，$\therefore MM'$ 是 $\triangle BFC$ 的中位线，故 DM' 是 $\triangle DBF$ 的中线. 又 $\because AT$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DM'\parallel AT$，易知 DM' 平分 $\angle BDF$，从而 $\triangle BDF$ 是等腰三角形，故 $BD=DF$. 又 $DF=CE$，故 $BD=CE$.

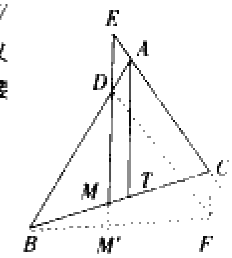


图 18－26

3. 提示：作 $EQ\parallel FG$、$PG\parallel KH$、$KR\parallel DE$，成等边三角形 PQR.

练习十九

一、1. C　2. D　3. B　4. B.

二、1. 3cm　提示：$\triangle AEF$ 是 $\triangle AED$ 翻折后得到的，它们是轴对称图形，因而全等.

2. $4\sqrt{2}$　3. $\frac{7}{10}$

三、1. 作法：作点 A 关于 OM、ON 的对称点 A'、A''，连结 $A'A''$ 与 OM 交于 B、ON 交于 C，则 $\triangle ABC$ 为所求.

2. 解：(1) 将 $\triangle BOC$ 绕顶点 C 顺时针旋转 $60°$，于是 $OC=CD$，$BO=AD$. 连结 OD.

$\because \angle OCD=\angle ACD+\angle ACO=\angle BCO+\angle ACO=60°$，

$\therefore OD=CO$. 故 $\triangle OCD$ 是等边三角形，即 $OD=OC$.

于是 $\triangle AOD$ 就是三边分别与 OA、OB、OC 相等的三角形. 因此，以此三边能构成一个三角形.

在 $\triangle AOD$ 中，$\angle AOD=360°-(110°+135°+60°)=55°$，$\angle ADO=\angle ADC-\angle ODC=135°-60°=75°$，$\angle DAO=180°-(55°+75°)=50°$.

(2) 欲使 $\triangle AOD$ 为直角三角形，

当 $\angle ADO=90°$ 时，只要 $\angle BOC=150°$；

当 $\angle AOD=90°$ 时，只要 $\angle BOC=100°$.

在 $\angle AOB=110°$ 时，由于 $\angle AOD+\angle ADO$ 总等于 $130°$，$\therefore \angle DAO\neq 90°$.

3. 解：由已知得点 P 的位置及 AP 的大小都是变的，$\therefore$ 以点 B 为中心顺时针旋转 $\triangle BAC$，使 BC 与 BP 重合，点 A 落在 B'，得 $\triangle BB'P$，连 AB'，$\therefore \angle CBP=\angle 60°$，$\angle ABB'=60°$，$\triangle ABB'$ 是等边△. 因此 B' 点是一个定点，而 $PB'=CA=2$，$\therefore$ 点 P 到 B' 点的距离是 2. 由于 $AB'=3$，$AB'+B'P\geqslant AP$，$AB'-B'P\leqslant AP$，$\therefore$ 当 A、B'、P 共线时 AP 可达最大值 5，最小值 1.

4. 证明：如图 19－30，作凸四边形 $ABCD$ 对角线 BD 的中垂线 MN，作 G 点关于 MN 的对称点 C'，连 AC'、BC'、DC'，则 $BC'=DC$，$DC'=BC$，可证明 $S_{\triangle ABC'}\leqslant\frac{1}{2}AB\cdot BC'$，$S_{\triangle ADC'}\leqslant\frac{1}{2}AD\cdot DC'$. 而 $S_{\triangle ABC'}+S_{\triangle ADC'}=S_{四边形ABC'D}=S_{四边形ABCD}$，$\therefore S_{\triangle 四边形ABCD}\leqslant\frac{1}{2}(AB\cdot CD+AD\cdot BC)$.

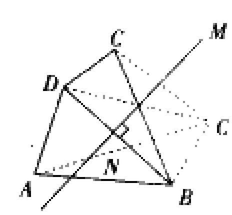


图 19－30

专题训练十九

一、1. B　2. B　3. A.

4. C　解题思路：以 O 为中心旋转 $90°$，则 A 转到 B，A_1 转到 B_1，$\therefore AA_1\perp BB_1$.

5. C　解题思路：以 A 为中心旋转 $90°$，则 C 转到 H、F 转到 B，$\therefore CF=HB$，且 $CF\perp HB$. 易证 $MQ=PN \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BH$，$PM=NQ \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CF$，$\therefore PMQN$ 为正方形.

二、1. 4　　2. $BE=\frac{1}{2}AD$.

3. 2　解题思路：如图 19－31，将$\triangle ABD$绕A逆时针旋转 90°到$\triangle ACD'$，易见$\angle DCD'=90°$，$\therefore\triangle ADD'$是等腰直角三角形，$DD'^2=2AD^2$。又在$\triangle DCD'$中，$DD'^2=CD'^2+CD^2=BD^2+CD^2$，故$2AD^2=BD^2+CD^2$.

4. 1，$\sqrt{3}$　解题思路：如图 19－32，将$\triangle ADC$绕点C逆时针旋转 60°，到$\triangle MEC$，则$DA+DB+DC=ME+ED+DB\geqslant MB$。由题意$MB=\sqrt{7}$，$MB^2=MC^2+BC^2-2MC\cdot BC\cdot\cos150°$，又$AB=2$，解得$\triangle ABC$两边长为 1 和$\sqrt{3}$.

5. 40°、80°、60°　解题思路：如图 19－33，将$\triangle BCM$绕点B逆时针旋转 60°到$\triangle BAM'$，则$BM'=BM=MM'$，$M'A=MC$，$\therefore AM$、BM、CM可构成一个三角形，计算得 40°，80°　60°.

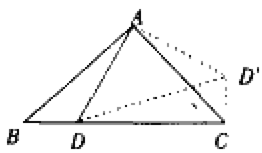


图 19－31

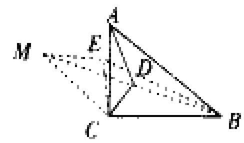


图 19－32

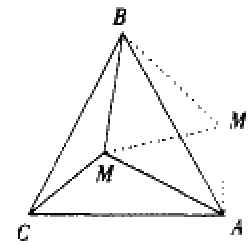


图 19－33

三、1. 解：将$\triangle PAC$绕点C旋转 60°得$\triangle P'A'C$.

$\because\angle BPC=\angle APC=\angle BPC=\angle A'P'C=120°$，$\therefore A'$、$P'$、$P$、$B$共线，即：$PA+PB+PC$的值最小.

编拟题目如下：（仅供参考）

在平地上竖立着三个圆柱形油库，其底面圆的直径都是 1，三个圆心分别相距 6 米、8 米、10 米，现要从地面上一点P安装三岔管分别通过各个油库，请问何时材料最省？

本题答案是：当三者的延长线分别通过A、B、C，且$\angle APB=\angle BPC=\angle APC=120°$时为最省.

2. 证明：如图 19－34，在$\triangle ABC$中，延长BA到D，使$AD=BC=a$；延长BC到E，使$CE=AB=c$，于是有$BD=BE=a+c$。故$\triangle BDE$为等腰三角形，$\therefore\angle BDE=\angle BED$.

将AD平移到CF，连DF，则$ADFC$是平行四边形．$\therefore DF=AC=b$、$CF=AD=a$，$\angle FCE=\angle ABC$.

$\because CE=AB=C$，$\therefore\triangle FCE\cong\triangle CBA$，$\therefore FE=AC=b$.

在$\triangle DEF$中，$\because DE<DF+EF=2b<a+c=BD=BE$.

$\therefore\angle B<\angle BDE=\angle BED$，即$\angle B<60°$.

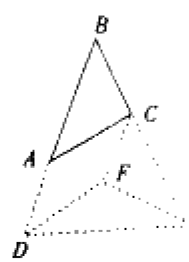


图 19－34

3. 解：延长AD到E，使$DE=BC$，连BE.

$\because\angle ADB=105°$．$\therefore\angle BDE=75°$.

$\because\angle A=45°$，$\therefore\angle ABD=180°-\angle A-\angle ADB=180°-45°-105°=30°$.

$\because\angle ABC=105°$，$\therefore\angle DBC=75°$.

$\because DB$公用，$\therefore\triangle DBC\cong\triangle BDE$．$\therefore DC=BE$，$\angle C=\angle E=45°$，

$\because\angle A=45°$，$\therefore\angle ABE=90°$，且$AB=BE$.

过A作DB的垂线AF，垂足为F．$\therefore AF=1001$.

$\because\angle ABD=30°$，$\therefore AB=2AF=2002$．$\therefore CD=BE=AB=2002$.

4. 解：青蛙每跳一次，就是完成一个中心对称变换，由中位线定理，得：$PP_2\,\underline{\underline{\parallel}}\,2AB\,\underline{\underline{\parallel}}\,P_3P_5$.　①

并且由$P_2C=CP_3$，$P_6C=CP_5$可知：四边形$P_3P_5P_2P_6$是平行四边形，则：$P_2P_6\,\underline{\underline{\parallel}}\,P_2P$.　②

由①、②得：P和P_6重合.

这说明青蛙每跳完 6 步，就回到起点P.

因为 2001 被 6 除余 3，故青蛙跳完第 2001 步后，应落在P_3的位置.

5. 证明：将A_1P、A_2P、A_3P、A_4P绕正方形中心O按顺时针旋转 90°，A_2P变成l_1，A_3P、A_4P、A_1P分别变为l_2、l_3、l_4．由A_1P、A_2P、A_3P、A_4P相交于一点而得证.

6. 证明：如图 19－29a，作关于 D 点的 $\triangle ABC$ 的中心对称图形 $\triangle BAC'$，其中 C'、E' 分别是 C、E 的对应点，则 $\triangle ADE \cong \triangle BDE'$.

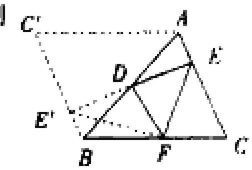


图 19－29a

$\therefore S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BDE'} + S_{\triangle BDF} = S_{四边形BFDE'}$.

$\because D$ 是 AB 的中点，$\therefore D$ 亦是 EE' 的中点．$\therefore S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DE'F}$.

故 $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DE'F} \leqslant S_{四边形BFDE'} = S_{\triangle BDF} + S_{\triangle BDE'}$.

即 $S_{\triangle DEF} \leqslant S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDF}$.

练习二十

一、1. D　2. C　3. D

4. D　解题思路：原式 $=\sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{-1}=\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2})^3+1}=\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{3}=\sqrt[3]{2}+1$.

5. C　6. A

二、1. $2\sqrt{2}-1$　解题思路：原式 $=\frac{a^{x}+a^{-x}}{a^{x}+a^{-x}}\cdot(a^{2x}-1+a^{-2x})=a^{2x}+\frac{1}{a^{2x}}-1=\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}-1=2\sqrt{2}-1$.

2. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$　解题思路：$\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b+2\sqrt{ab}}=\frac{6-4}{6+4}=\frac{1}{5}$，$\therefore$ 原式 $=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. 0　4. $\frac{2}{3}\sqrt{b-1}$　5. $2x+5$　6. 3

三、1.（1）$a^{\frac{11}{8}}b$　（2）$\frac{a^5}{b}$　（3）8　（4）$9a$　（5）a^{-}[illegible]　（6）$\frac{1}{a}$　（7）$\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$　（8）9

（9）解：$e^x=\sqrt{2-\sqrt{3}}$，$e^{3x}+e^{-3x}=(e^x+e^{-x})(e^{2x}-1+e^{-2x})$，于是可得结果为 3

（10）a^2.（11）$\frac{9}{10}$. 提示：原式 $=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)=\frac{9}{10}$.

2.（1）解：$\because\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}=5+(2\sqrt{2}-2)$. $\therefore a=5$，$1-b=2\sqrt{2}-2$. 因此 $b=3-2\sqrt{2}$.

故 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{5+3-2\sqrt{2}}{5-3+2\sqrt{2}}=\frac{4-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=5\sqrt{2}-6$.

（2）解：假设 $\frac{a+\sqrt{2}}{b+\sqrt{2}}$ 是有理数，令 $\frac{a+\sqrt{2}}{b+\sqrt{2}}=M$，$\therefore a+\sqrt{2}=Mb+M\sqrt{2}$.

整理，得 $(M-1)\sqrt{2}=a-Mb$.　①

若 $M=1$，则①化为 $a-b=0$，得 $a=b$.

这与已知矛盾，所以 $M\neq 1$.

将①化为 $\sqrt{2}=\frac{a-Mb}{M-1}$，　②

$\because a$、b、M 和 1 均为有理数，$M-1\neq 0$，

$\therefore$ ②式的右边是有理数，而左边是无理数，矛盾.

$\therefore \frac{a+\sqrt{2}}{b+\sqrt{2}}$ 不是有理数.

因此 $\frac{a+\sqrt{2}}{b+\sqrt{2}}$ 是无理数.

（3）解：不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，则有 $a+b>c$，

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}>\sqrt{a+b}>\sqrt{c}$.

于是可以构成三角形.

而对于 a^2、b^2、c^2，则不一定能构成三角形．如可设 $a=2$，$b=4$，$c=5$，则 $a^2=4$，$b^2=16$，$c^2=25$，而 $a^2+b^2<c^2$. 对于 $\sqrt[3]{a}$、$\sqrt[3]{b}$、$\sqrt[3]{c}$ 也不一定能构成三角形.

（4）解：$\because\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$，$\therefore\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

专题训练二十

一、1. A　解题思路：$\because 1+x^2=\left[\frac{1}{2}(2001^{\frac{1}{n}}+2001^{-\frac{1}{n}})\right]^2$，$\therefore$ 原式 $=\left[\frac{1}{2}(2001^{\frac{1}{n}}-2001^{-\frac{1}{n}})-\frac{1}{2}(2001^{\frac{1}{n}}+2001^{-\frac{1}{n}})\right]^n$

$=(-2001)^{-\frac{1}{n}}=(-1)^n 2001^{-1}$.

2. B　解题思路：$\because 3x+y=y+6$，$\therefore x=2$．又 $4-y\geqslant 0$，且 $6+y\geqslant 0$，得 $-6\leqslant y\leqslant 4$．$\therefore$ 偶数 $y=-6,-4,-2,0,2,4$．其中 $y=-6,-4,-2,0,4$ 时，根指数无意义或至少有一根式不是最简根式．

3. C　解题思路：由根式的意义可得 $x=6$ 才成立．

二、1. 2002　解题思路：$\because a-2002\geqslant 0$，$\therefore a\geqslant 2002$．$\therefore a-2001+\sqrt{a-2002}=a$．$\therefore \sqrt{a-2002}=2001$，即 $a-2002=2001^2$，$\therefore a-2001^2=2002$.

2. -13.

3. $\sqrt[3]{n+\frac{n}{n^3-1}}=n\sqrt[3]{\frac{n}{n^3-1}}$（$n$ 为正整数且 $n\neq 1$）．

三、1.（1）$2a$　（2）$-\sqrt{xy}$　（3）$-\sqrt{-(y-1)}$　（4）由已知得 $x=a+\frac{1}{a}-2$，则 $x^2+4x=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$.

2. 解：原式 $=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

3. 解：原式 $=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{7}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=M$.

$\because \frac{1}{M}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$，$\therefore M=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})$.

4. 解：原式 $=\frac{(\sqrt{15}+\sqrt{10}+\sqrt{6}+5)(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{5+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}{2(5+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$.

5. 解：原式 $=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{b}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{b}+\cdots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{b}$

$=\frac{1}{b}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}})$.

6. 证明：设 $ax^3=by^3=cz^3=k$，则 $x=\sqrt[3]{\frac{k}{a}}$，$y=\sqrt[3]{\frac{k}{b}}$，$z=\sqrt[3]{\frac{k}{c}}$．$\because \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，$\therefore \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{k}$.

又 $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z}}=\sqrt[3]{k}$，

$\therefore$ 本题得证．

7. 解：不能．$\because \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2=a^2+b^2+c^2$，说明三个数经过一次运算后始终保持平方和不变．但 $90^2+10^2+14^2=8396>8074=89^2+12^2+3^2$.

练习二十一

一、1. C　2. C　3. D　4. C

二、1. 2　解题思路：$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})[(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-3]=2\times(2^2-3)=2$.

2. $\frac{1}{b}$　3. 5　解题思路：$\because x=4-\sqrt{3}$，$\therefore x^2-8x+13=0$，代入即可．

三、1.（1）$2\sqrt{ab}$　（2）$2\sqrt{b}-5$　（3）$3\sqrt{3}-\sqrt{2}$．原式 $=\frac{\sqrt{5}(3\sqrt{3}-\sqrt{2})+2\sqrt{3}(3\sqrt{3}-\sqrt{2})+(3\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$

（4）$\sqrt{11}-\sqrt{6}$.

2. 解：$\because x=\frac{\sqrt{33}-5}{2}$，$\therefore x^2+5x=2$.

$\therefore$ 原式 $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+12=48+12=60$.

3. 证明：$\because \sqrt{39-\sqrt{432}}=6-\sqrt{3}$，$\therefore a=2-\sqrt{3}$．又 $\because 2a+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=6-\sqrt{3}$，$\therefore$ 结论成立．

4. 证明：$\because \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c}$，$\therefore a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b=-c$.

即 $a+b+c=-3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=3\sqrt[3]{abc}$.

$\therefore (a+b+c)^3=27abc$.

当 $a=b=c$ 时，有$\sqrt[3]{a}=0$，则 $a=b=c=0$.

故有$(a+b+c)^3=27abc$.

5. 证明：由已知得 $p=\dfrac{3a^4+1}{8a^3}$，$q=\dfrac{a^4+3}{8a}$.

$\therefore \sqrt[3]{(p+q)^2}-\sqrt[3]{(p-q)^2}=\sqrt[3]{\left(-\dfrac{3a^4+1}{8a^3}-\dfrac{a^4+3}{8a}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(-\dfrac{3a^4+1}{8a^3}+\dfrac{a^4+3}{8a}\right)^2}$

$=\sqrt[3]{\left(-\dfrac{a^2+1}{2a}\right)^6}-\sqrt[3]{\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^6}=\left(-\dfrac{a^2+1}{2a}\right)-\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2=1$.

故原命题成立.

6. 解：$\because 2001=(\sqrt{x^2+2001}+x)(\sqrt{2001+x^2}-x)$，$\therefore \sqrt{y^2+2001}-y=\sqrt{x^2+2001}+x$，$\sqrt{x^2+2001}-x$

$=\sqrt{y^2+2001}+y$，

$\therefore x+y=0$. $\therefore 100^{10x}\cdot 10^{20y}=10^{20(x+y)}=1$.

专题训练二十一

一、1. D　解题思路：原式$=\sqrt[3]{3}\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{-1}=\sqrt[3]{2}+1$.

2. C　解题思路：$\because \sqrt[11]{a}=\sqrt[11]{3^{55}}=3^5=243$，$\sqrt[11]{b}=\sqrt[11]{4^{44}}=4^4=256$，

$\sqrt[11]{c}=\sqrt[11]{66^{33}}=6^3=216$，$\sqrt[11]{d}=\sqrt[11]{7^{22}}=7^2=49$，

而 $256>243>216>49$，$\therefore b>a>c>d$.

3. A　　4. C

二、1. 1

2. 1　解题思路：$\because (\sqrt[3]{2}-1)a=2-1$，$\therefore \dfrac{1}{a}=\sqrt[3]{2}-1$.

3. 0　解题思路：设 $a=\sqrt{1997}$，$b=\sqrt{1999}$，$c=\sqrt{2001}$.

三、1. 解：(1) 原式$=\dfrac{5(4+\sqrt{11})}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})}-\dfrac{4(\sqrt{11}+\sqrt{7})}{(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})}-\dfrac{2(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}$

$=4+\sqrt{11}-\sqrt{11}-\sqrt{7}-3+\sqrt{7}=1$.

(2) $\because A^2=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2\cdot(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2(2+\sqrt{3})=(8-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4$，

$\therefore$原式$=2$.

(3) 设 $x=\sqrt{\dfrac{a-1}{3}}$，则 $a=3x^2+1$，$\dfrac{a+8}{3}=x^2+3$.

$\therefore$原式$=2$.

(4) $\because \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}=|n^2+3n+1|$，

$\therefore$当 $n=1998$ 时，原式$=1998^2+3\times1998+1=3992004+5995=3997999$.

2. 解：$\because x+y+2>0$，$\therefore y=-2+\dfrac{4}{x+2}$. $\because x$、y 为整数，$\therefore x+2=\pm1$、±2、±4.

$\therefore \begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$ 满足题意.

3. 解：设$\sqrt{xy}=p$，$\sqrt{yz}=q$，$\sqrt{zx}=r$，则$\begin{cases}pr+pq=39-p^2, & ①\\pq+qr=52-q^2, & ②\\pr+qr=78-r^2 & ③\end{cases}$

①+②+③，得$(p+q+r)^2=169$. $\therefore p+q+r=13$.

于是可得$\begin{cases} xy=9, \\ yz=16, \\ zx=36. \end{cases}$　　$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{9}{2}, \\ y=2, \\ z=8. \end{cases}$

4. 解：$\because 44^2<2001<45^2$，

$\therefore 44<\sqrt{2001}<45$.

$\therefore 44+2001<2001+\sqrt{2001}<45+2001$，即 $45^2<2001+\sqrt{2001}<46^2$.

$\therefore 45<\sqrt{2001+\sqrt{2001}}<46$. 依次类推可得其整数部分是 45.

5. 解：设 $2000x^3=2001y^3=2002z^3=k$ $(k\neq 0)$，则 $2000=\dfrac{k}{x^3}$，$2001=\dfrac{k}{y^3}$，$2002=\dfrac{k}{z^3}$.

$\because \sqrt[3]{2000x^2+2001y^2+2002z^2}=\sqrt[3]{2000}+\sqrt[3]{2001}+\sqrt[3]{2002}$，$\therefore \sqrt[3]{\dfrac{k}{x}+\dfrac{k}{y}+\dfrac{k}{z}}=\sqrt[3]{\dfrac{k}{x^3}}+\sqrt[3]{\dfrac{k}{y^3}}+\sqrt[3]{\dfrac{k}{z^3}}>0$，

即$\sqrt[3]{k}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}=\sqrt[3]{k}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$.

$\because k\neq 0$，$\therefore \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$.

由已知可得 $x>0$，$y>0$，$z>0$. $\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$.

6. 解：$\because x>0$，$\therefore$ 原式$=\sqrt{x^2+1+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+3}+\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}}$.

当 $x-\dfrac{1}{x}=0$ 时，即 $x=1$ 时，分母最小值为$\sqrt{3}+\sqrt{2}$. 故当 $x=1$ 时，原式的最大值是$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

7. 解：$\because \left(a+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{8}\right)$，$\therefore a^2=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(1-a)$. $\therefore a^4=\dfrac{1}{8}(1-a)^2(a>0)$.

$\therefore a^2+\sqrt{a^4+a+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(1-a)+\sqrt{\dfrac{1}{8}(1-a)^2+(a+1)}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(1-a)+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{(1-a)^2+8(a+1)}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}[(1-a)+(a+3)]=\sqrt{2}$.

练习二十二

一、1. C　2. A　解题思路：$\because c-a>0$，$c-b>0$，$\therefore$ 原式$=ca(c-a)+b^2(c-a)+b(c^2-b^2)>0$.

3. B　解题思路：$L-S=AD-BD+AE-EC-BC=AB+AC-BC-2(BD+EC)$. $\because AB=AC=BC$，$\angle ABC=\angle ACB=60°$，$\therefore BD+EC=\dfrac{1}{2}(BP+PC)=\dfrac{1}{2}BC$. $\therefore L-S=0$，即 $L=S$.

二、1. $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}>\dfrac{1}{h_c}$　解题思路：$\because a=\dfrac{2S}{h_a}$，$b=\dfrac{2S}{h_b}$，$c=\dfrac{2S}{h_c}$. 又$\because a+b>c$，$\therefore \dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}>\dfrac{1}{h_c}$.

2. $1<AD<13$.

3. $AB+CD>AC+BC$　解题思路：$(AB+CD)^2=AB^2+2AB\cdot CD+CD^2>AB^2+2AB\cdot CD$，再由勾股定理便可得.

三、1. 证明：如图 22-5a，将$\triangle ADC$ 沿 AD 翻折 180°至$\triangle ADE$ 位置后易知

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\triangle ADC\cong\triangle ADE\Rightarrow\angle 1=\angle 2\\ \angle BED>\angle 1\end{array}\right\}\Rightarrow\\ \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle BED>\angle 2\\ \angle 2>\angle B\end{array}\right\}\Rightarrow\angle BED>\angle B\Rightarrow BD>DE\\ \text{易知 } DE=DC\end{array}\right\}\Rightarrow BD>DC.\end{array}\right.$$

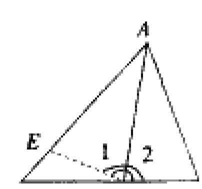


图 22-5a

2. 证明：如图 22-9，过 P 作 $DE/\!/BC$，交 AB、AC 于 D、E，则$\angle APD$ 和$\angle APE$ 中必有一个大于或等于 90°，不妨设$\angle APE\geqslant 90°$.

$\because \triangle ABC$ 为正三角形，$\therefore \triangle ADE$ 为正三角形，$\angle ADE = \angle AED = 60°$.

因此$\angle APE > \angle AED$. $\therefore x < AE$.

又在$\triangle DBP$ 中，$y < PD + DB$. 在$\triangle ECP$ 中，$z < PE + EC$.

$\therefore x + y + z < AE + PD + DB + PE + EC$.

而 $PD + PE = DE = AD$，$\therefore x + y + z < AE + EC + AD + DB = a + a$，即 $x + y + z < 2a$.

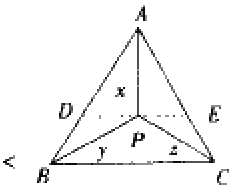


图 22－9

3. 提示：仿例 6 的证明.

4. 证明：如图 22－10，$\left.\begin{array}{l} OD + OB > BD \\ OD + OC > DC \\ OE + OC > EC \\ OE + OA > AE \\ OA + OF > AF \\ OF + OB > BF \end{array}\right\} \Rightarrow 2(AD + BE + CF) > AB + BC + AC \Rightarrow$

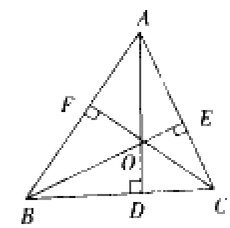


图 22－10

$h_a + h_b + h_c > \frac{1}{2}(a + b + c) \Rightarrow \frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} > \frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} \text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中，} AB > AD \\ \text{同理 } BC > BE\text{、}AC > CF \end{array}\right\} \Rightarrow AB + BC + CA > AD + BE + CF \Rightarrow$

$a + b + c > h_a + h_b + h_c \Rightarrow \frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} < 1$.

5. 证明：(1) $l < 2$ 可仿例 3 加以证明. (2) 设 O 是$\triangle ABC$ 的中心，将$\triangle AOB$ 绕 B 点逆时方向旋转 60°到$\triangle A'O'B$ 位置，这时 P 点相应旋转到 P'，易证$\triangle OO'B$ 和 $PP'B$ 是等边三角形，且 A'、O'、O、C 在一条直线上，所以 $l = PA + PB + PC = P'A' + PB + PC = P'A' + PP' + PC \geq A'C = \sqrt{3}$.

专题训练二十二

一、1. C　　2. C

二、1. $PQ < BC$. 解题思路：如图 22－11，$\angle A$ 是最大角，即$\angle A > \angle B$、$\angle A > \angle C$，$\therefore BC > AB$，$BC > AC$. 连 CP. $\because \angle BPC > \angle A > \angle B$，$\therefore BC > PC$. 又$\because \angle PQC < \angle A > \angle C$，$\therefore PC > PQ$. $\therefore PQ < BC$.

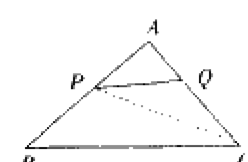


图 22－11

2. 24　解题思路：设腰长为 x，则底为 $100 - 2x$. 由三边关系且 x 为正整数可得.

3. 8　解题思路：设三角形另两边为 x、y，且 $x \leq y$，由题意得：① $x \leq y \leq 4$，可得当 $y = 4$ 时，$x = 1$、2、3；当 $y = 3$ 时，$x = 2$，3. ② $x \leq 4 \leq y$，可得 $x = 2$，$y = 5$；$x = 3$，$y = 5$；$x = 3$，$y = 6$. 共有 8 个.

4. 36　解题思路：设另两边为 x、y，且 $x \leq y$，则有 $x \leq y \leq 11$. $\therefore 6 \leq y \leq 11$，当 $y = 11$ 时，$x = 1$、2、3…、11；当 $y = 10$、9、8、7、6 时，分别可得 9 个、7 个、5 个、3 个、1 个，于是共有 36 个三角形.

三、1. 解：设$\triangle ABC$ 的面积为 S，所求的高为 h，其对应边为 c. 且高 4、12 分别对应边 a、b，于是 $4a = 12b = hc = 2S$. $\therefore \frac{2S}{4} - \frac{2S}{12} < \frac{2S}{h} < \frac{2S}{4} + \frac{2S}{12}$，

即 $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} < \frac{1}{h} < \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$. $\therefore 3 < h < 6$. 于是由题意可得 $h = 5$.

2. 解：设 $a^2 + b^2 = c^2$，如果一个自然数恰有 3 个正约数，则这个自然数一定是某个质数的平方. 由题意可得：$a < c$，$b < c$，且 a、b、c 中至少有两个是质数，且 $a \geq 5$，$b \geq 5$，$\therefore$ 最小的一组数为 5、12、13.

3. 解：当 E、F、G 分别是 BC、AC、AB 的中点时，则 $S_{\triangle EFG} = S' = \frac{1}{4}$.

当点 E 为 BC 中点，G 为 AB 的三等分点、$AG = \frac{2}{3}AB$ 时，有 $S_{\triangle AGE} = S' = \frac{2}{3}S_{\triangle ABE} = \frac{1}{3}$.

所以 F 只要在 A 点与 AC 的中点之间，$\triangle EFG$ 的面积 S' 满足 $\frac{1}{4} < S' < \frac{1}{3}$.

4. 解：当三角形两边 a、b 的夹角为直角时，则有 $h_a + h_b = a + b$.

当$\triangle ABC$的两边a、b的夹角为锐角时，$h_a<b$，$h_b<a$，则$h_a+h_b<a+b$.

当$\triangle ABC$的两边a、b的夹角为钝角时，同样有$h_a+h_b<a+b$.

所以，两边上的高的和不能大于这两边之和.

5. 证明：假设四点中任选三点构成三角形的三个内角都大于45°，如图22-12所示.

当四边形$ABCD$为凸四边形时，连AC、BD，据假设一定有$\angle 1$、$\angle 2$、…、$\angle 8$都大于45°. 所以$\angle 1+\angle 2+\cdots+\angle 8>360°$. 这与四边形内角和为360°矛盾！

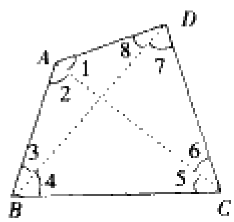


图22-12

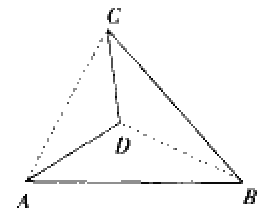


图22-13

当四边形$ABCD$为凹四边形时，连AC、BD，如图22-13，由假设$\angle 1+\angle 2+\cdots+\angle 6>270°$，这与三角形内角和为180°矛盾.

综上所述，这三点组成的三角形中至少有一个内角不大于45°.

6. 证明：记$\triangle LRP$、$\triangle QNR$、$\triangle PMQ$的面积分别为S_1、S_2、S_3，$S_{\triangle LMN}=S$，则$S_1=\frac{1}{2}ay\sin L=\frac{\sqrt{3}}{4}ay$，

$S_2=\frac{1}{2}bz\sin N=\frac{\sqrt{3}}{4}bz$，$S_3=\frac{1}{2}cx\sin M=\frac{\sqrt{3}}{4}cx$，$S=\frac{1}{2}k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}k=\frac{\sqrt{3}}{4}k^2$.

又$\because S_1+S_2+S_3<S$，$\therefore ay+bz+cx<k^2$.

7. 解：由$a+2b-2c+3=0$，得$a+3=2(c-b)$. $\therefore c-b=\frac{1}{2}(a+3)>0$，$\therefore c>b$.

又由（1）+（2）得$a^2-4c+3=0$，得$c=\frac{a^2+3}{4}$，$\therefore c-a=\frac{a^2+3}{4}-a=\frac{a^2-4a+3}{4}$.

又$\because a>c-b=\frac{1}{2}(a+3)$，$\therefore a>3$. $\therefore c-a>0$. $\therefore c>a$. 故c为最大边.

8. 证明：（1）设AB的中点为M，连结CM，则$\angle MCA=\angle A$，$\angle BMC=2\angle A\leqslant 60°$. 故$\angle BCM\geqslant 60°$，$BC\leqslant MC\leqslant\frac{1}{2}AB$，$\therefore\frac{BC}{AB}\leqslant\frac{1}{2}$.

（2）由于三角形三个内角中至少有一个角不大于60°，设$\angle BAC\leqslant 60°$，于是$\angle PAB$与$\angle PAC$中至少有一个不大于30°. 不妨设$\angle PAB\leqslant 30°$. 过P作$PD\perp AB$于D，由（1）知$\frac{PD}{PA}\leqslant\frac{1}{2}$. 而$PD\geqslant m$，$AP\leqslant l$，$\therefore\frac{m}{l}\leqslant\frac{PD}{l}\leqslant\frac{PD}{PA}\leqslant\frac{1}{2}$.

9. 证明：$\because\frac{PD}{AD}=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\frac{PE}{BE}=\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle BAC}}$，$\frac{PF}{CF}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle CAB}}$；

$\therefore\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$，$\therefore\frac{PD}{AD}$、$\frac{PE}{BE}$、$\frac{PF}{CF}$中至少有一个不大于$\frac{1}{3}$.

不妨设$\frac{PD}{AD}\leqslant\frac{1}{3}$，即$\frac{AD}{PD}=\frac{PD+AP}{PD}\geqslant 3$，

$\therefore\frac{AP}{PD}\geqslant 2$. 同理可证得$\frac{AP}{PD}$、$\frac{BP}{PE}$、$\frac{CP}{PF}$中至少有一个不大于2.

练习二十三

一、1. A　2. A

二、1. 29. 解：$\because 8.01\times1.24>8.02\times1.23>8.03\times1.22$，

$8.01\times1.24+8.02\times1.23+8.03\times1.22<8.01\times1.24\times3<8\times1.25\times3=30$，

又∵$8.01\times1.24+8.02\times1.23+8.03\times1.22>8\times(1.24+1.23+1.22)=8\times3.69>29$,

∴其整数为29.

2. 43, 0.26, −44, 0.74　　3. −1.26　　4. 3, $\sqrt{11}-3$.

三、1. (1) 解: $[(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2]=[10+2\sqrt{21}]$.

$\because 4.5<\sqrt{21}<5$, $\therefore 9<2\sqrt{21}<10$. $\therefore [(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2]=19$.

(2) 解: $\because \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2000}}$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2001}-\sqrt{2000}$

$=\sqrt{2001}-1$,

∴原式$=43$.

2. 解: $\because 2\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{11+\sqrt{96}}=\sqrt{20+\sqrt{96}-9}$,

$\therefore 4<2\sqrt{2}+3<5$. $\therefore 2\sqrt{2}+\sqrt{3}$的整数部分是4, 小数部分是$2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4$.

又$\because 2\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{11-\sqrt{96}}=\sqrt{1+(10-\sqrt{96})}$, $\therefore 1<2\sqrt{2}-\sqrt{3}<2$.

$\therefore 2\sqrt{2}-\sqrt{3}$的整数部分是1, 小数部分是$2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1$.

3. (1) 解: 设$[3x]=m$, $[2x]=n$, 则$m\leqslant 3x<m+1$, $n\leqslant 2x<n+1$,

即$\dfrac{m}{3}\leqslant x<\dfrac{m+1}{3}$, $\dfrac{n}{2}\leqslant x<\dfrac{n+1}{2}$.

于是原方程化为$8m-5n=3$, 且$\begin{cases}\dfrac{m}{3}<\dfrac{n+1}{2},\\ \dfrac{n}{2}<\dfrac{m+1}{3},\end{cases}$　　即$\begin{cases}3n-2m>-3,\\ 3n-2m<2.\end{cases}$

$\therefore 3n-2m=-2$、-1、0、1.

于是可得$\begin{cases}8m-5n=3,\\ 3n-2m=-2,\end{cases}$　$\begin{cases}8m-5n=3,\\ 3n-2m=-1,\end{cases}$　$\begin{cases}8m-5n=3,\\ 3n-2m=0,\end{cases}$　$\begin{cases}8m-5n=3,\\ 3n-2m=1.\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=1,\\ n=1.\end{cases}$　∴原方程的解为$\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{2}{3}$.

(2) 解: 设$[x]+\beta=x\ (0\leqslant\beta<1)$, 则$3[x]+3\beta+5[x]-50=0$.

$\therefore \beta=\dfrac{50-8[x]}{3}$. 故$0\leqslant\dfrac{50-8[x]}{3}<1$. $\therefore \dfrac{47}{8}<[x]\leqslant\dfrac{50}{8}$. $\therefore [x]=6$.

∴原方程的解为$x=6\dfrac{2}{3}$.

(3) 解: 令$m=[x]$, $\left[\dfrac{1}{x}\right]=n$, 则$m+n=3$.

$\because x>0$, 故$m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$. 于是$m+n$只可有如下解:

$\begin{cases}n=0,\\ m=3,\end{cases}$　$\begin{cases}n=1,\\ m=2,\end{cases}$　$\begin{cases}n=2,\\ m=1,\end{cases}$　$\begin{cases}n=3,\\ m=0.\end{cases}$

由第一组可得到$\begin{cases}0\leqslant\dfrac{1}{x}<1,\\ 3\leqslant x<4,\end{cases}$　$\therefore 3\leqslant x<4$;

由第四组可得到$\begin{cases}0\leqslant x<1,\\ 3\leqslant\dfrac{1}{x}<4,\end{cases}$　$\therefore \dfrac{1}{4}<x\leqslant\dfrac{1}{3}$.

∴原方程组的解为$3\leqslant x<4$或$\dfrac{1}{4}<x\leqslant\dfrac{1}{3}$.

4. 解: 设$[x]=n$, $\{x\}=\beta$, 则$0\leqslant\beta<1$. 即$x=n+\beta$. 于是当$0\leqslant\beta<\dfrac{1}{2}$时,

$[n+\beta]+\left[n+\beta+\dfrac{1}{2}\right]=n+n=2n$, $[2x]=[2n+2\beta]=2n+[2\beta]=2n$.

$\therefore [x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x]$.

当$\frac{1}{2}\leqslant\beta<1$时，$[x]+[x+\frac{1}{2}]=n+n+1=2n+1$,

$[2x]=[2n+2\beta]=2n+[2\beta]=2n+1$,

$\therefore [2x]=[x]+[\frac{1}{x}]$.

综上所述：$[x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x]$.

专题训练二十三

一、1. B 解题思路：$\because a+b=\sqrt{n}$，$\therefore a^2+b^2+2ab=n$. $\therefore a^3-9ab+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)-9ab$

$=\sqrt{n}(n-3ab)-9ab=0$. $\therefore \sqrt{n}(n-3ab)=9\sqrt{n}\cdot b$，$n-3ab=9b$. $\therefore b=\frac{n}{9+3\sqrt{n}}$.

$\because 0\leqslant\frac{n}{9+3\sqrt{n}}<1$，$\therefore n=6$.

2. D 解题思路：由题意得$[x]=4$，$\therefore y=11$. $\therefore [x]+y=15$，$\therefore 15<x+y<16$.

二、1. $x=0$，1，2，3，4. 解题思路：$\because [-1.77x]=-2x=[-2x+0.23x]$，$\therefore -2x=-2x+[0.23x]$.

$\therefore [0.23x]=0$. $\therefore 0\leqslant 0.23x<1$. 又因为$x$为自然数，$\therefore x=1$，2，3，4，0.

2. $x=5$. 解题思路：$\because 10\leqslant 1.9x<11$，$\therefore 5\frac{5}{19}\leqslant x<5\frac{15}{19}$.

3. $x=\frac{5}{3}$.

4. 57. 解题思路：$\left[\frac{600}{7}\right]-\left[\frac{200}{7}\right]=85-28=57$.

三、1. 解：原式$=1\times3+2\times5+3\times7+\cdots+43\times87+44\times66$

$=2\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n(n+1)}{2}+44\times66=61446$.

2. 解：(1) 这样的正整数个数为$\left[\frac{2001}{7}\right]=285$.

(2) $2001-285=1716$.

(3) $2001-\left[\frac{2001}{7}\right]-\left[\frac{2001}{13}\right]+\left[\frac{2001}{7\times13}\right]=2001-285-153+21=1584$.

(4) $\because 5^2=25$，故不超过24的合数必然是质数2、3的倍数.

$\therefore$所求的质数为$1+24-\left[\frac{24}{2}\right]-\left[\frac{24}{3}\right]+\left[\frac{24}{6}\right]=9$.

3. 解：$\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{5^2}\right]+\left[\frac{1000}{5^3}\right]+\left[\frac{1000}{5^4}\right]+\left[\frac{1000}{5^5}\right]=200+40+8+1+0=249$.

$\therefore N$的末尾共有249个零.

4. 解：对于$k=2$，3，…，n，都有$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$,

$\therefore S<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2$.

又$S>1$，$\therefore 1<S<2$. $\therefore [S]=1$.

5. (1) 解：$\because \frac{6x+5}{8}-1<\left[\frac{6x+5}{8}\right]\leqslant\frac{6x+5}{8}$，$\therefore \frac{6x+5}{8}-1<\frac{15x-7}{5}\leqslant\frac{6x+5}{8}$.

解上述不等式组，有$\frac{41}{90}<x\leqslant\frac{81}{90}$. 因而有$\frac{15\cdot\frac{41}{90}-7}{5}<\frac{15x-7}{5}\leqslant\frac{15\cdot\frac{81}{90}-7}{5}\Rightarrow-\frac{1}{30}<\frac{15x-7}{5}\leqslant\frac{13}{10}$. 由于$\frac{15x-7}{5}$是整数，故$\frac{15x-7}{5}=0$或$\frac{15x-7}{5}=1$. 当$\frac{15x-7}{5}=0$时，$x=\frac{7}{15}$；当$\frac{15x-7}{5}=1$时，$x=\frac{4}{5}$. 经检验：$x=\frac{7}{15}$、$\frac{4}{5}$均为原方程的解.

(2) 解：由已知方程得$2\{x\}=[x]-1$.

由 $[x]$ 和 $\{x\}$ 的性质知 $0\leqslant\{x\}<1$，$[x]$ 是整数.

$\therefore 0\leqslant 2\{x\}<2$，$[x]-1$ 是整数.

于是 $2\{x\}=0$ 或 $2\{x\}=1$. $\therefore\{x\}=0$，或 $\{x\}=0.5$.

当 $\{x\}=0$ 时，原方程化为 $[x]=1$，则 $x=[x]+\{x\}=1+0=1$.

当 $\{x\}=0.5$ 时，原方程化为 $[x]=2$，则 $x=[x]+\{x\}=2+0.5=2.5$.

故原方程的解为 $x=1$ 或 $x=2.5$.

(3) 解：原方程可化为 $2\{x\}=3[x]-9$. $\because[x]$ 为整数，$\therefore 3[x]-9$ 为整数.

又 $0\leqslant\{x\}<1$，$\therefore 0\leqslant 2\{x\}<2$. 故 $2\{x\}=0$ 或 $2\{x\}=1$.

即 $\{x\}=0$ 或 $\{x\}=0.5$. 当 $\{x\}=0$ 时，原方程化为 $3[x]=9$，$\therefore[x]=3$.

$\therefore x=[x]+\{x\}=3+0=3$.

6. 解：$\because 1\times2\times3\times4\cdots\times1000\times1001\times1002\times\cdots\times1999$ 中，含 11 的最高方次数等于：

$$r_1=\left[\frac{1999}{11}\right]+\left[\frac{1999}{11^2}\right]+\left[\frac{1999}{11^3}\right]+\cdots=181+16+1=198.$$

而 $1\times2\times3\times4\cdots999$ 中，含 11 的最高方次数等于：

$$r_2=\left[\frac{999}{11}\right]+\left[\frac{999}{11^2}\right]+\left[\frac{999}{11^3}\right]+\cdots=90+8=98.$$

$\therefore 1000\times1001\times\cdots\times1999$ 中含有 $r_1-r_2=100$ 个 11 的因子.

7. 解：$\because A=\dfrac{11\times(76+1)+12\times(77-1)+13\times(78+1)+14(79+1)}{11\times76+12\times77+13\times78+14\times79}=1+\dfrac{11+12+13+14}{11\times76+12\times77+13\times78+14\times79}$

$\therefore 100A=100+\dfrac{100\times11+100\times12+100\times13+100\times14}{11\times76+12\times77+13\times78+14\times79}=101+\dfrac{11\times24+12\times23+13\times22+14\times21}{11\times76+12\times77+13\times78+14\times79}$.

故 $101<A<102$，$\therefore[100A]=101$.

8. 证明：设 $\dfrac{y}{x}=t$，则 $y=xt$，$t=[t]+\beta_1$，$x=[x]+\beta_2$.

故 $y=[xt]=[([x]+\beta_2)([t]+\beta_1)]=[[x][t]+\beta_1[x]+\beta_2[t]+\beta_1\beta_2]$

$=[x][t]+[\beta_1[x]+\beta_2[t]+\beta_1\beta_2]$.

$\because x\geqslant1$，$y>0$，$t>0$，$\therefore[\beta_1[x]+\beta_2[t]+\beta_1\beta_2]\geqslant0$.

$\therefore[y]\geqslant[x][t]$，即 $\dfrac{[y]}{[x]}\geqslant[t]$. $\therefore\left[\dfrac{y}{x}\right]\leqslant\dfrac{[y]}{[x]}$.

练习二十四

一、1. C　解题思路：$\because 200y$ 是偶数，n 为偶数，则 x 为偶数，于是可得 y 为奇数.

2. C　　3. D

二、1. $a=-11$，$c=-6$. 解题思路：$\because x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$，$\therefore 6x^3-ax+c=(x-3)(x-1)$. $\therefore$ 当 $x=3$ 时，可得 $54-3a+c=0$；当 $x=1$ 时，可得 $6-a+c=0$. 解方程组可得 $a=-11$，$c=-6$.

2. 含有因式 $x-1$　解题思路：因为当 $x=1$ 时，该多项式的值为 0.

3. 2　解题思路：因为 p、q 和 r 均为质数，且 $p+q=r$. 所以 p、q、r 中必有一个是偶质数 2.

三、1. 解：答案不惟一. 如：1680，1692，1694，1695，1696.

2. 解：令 $x=13+a$，$y=13+b$（其中 a、b 为整数），代入原方程得 $\dfrac{1}{13+a}+\dfrac{1}{13+b}=\dfrac{1}{13}$.

去分母得 $13(13+b)+13(13+a)=(13+a)(13+b)$. 整理得 $ab=13^2$.

$\because x$、y 为正整数，a、b 只能取整数.

而 $13^2=13\times13=169\times1=1\times169$.

$\therefore a$ 的取值只可能为 13，169，1. 而 b 的相应取值为 13，1，169.

$\therefore$ 原方程的正整数解为：

$$\begin{cases}x_1=13+13,\\y_1=13+13,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=13+169,\\y_2=13+1,\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=13+1,\\y_3=13+169.\end{cases}$$

3. 解：原方程的整数解有四组：

$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=-8,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2,\\y_2=-4,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=4,\\y_3=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=8,\\y_4=-1.\end{cases}$

4. 解题思路：∵ x、y、z、u 都不小于 2，若其中 $x\geqslant 3$，则 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{u^2}\leqslant\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<1$，

∴ x、y、z、u 若满足方程，则必有 $x=y=z=u=2$.

5. 解：设原有汽车 m 辆，后来每车载学生 k 人．由题意得 $23m-4=k(m-1)$.

∴ $k=\frac{23m-4}{m-1}=\frac{23(m-1)+19}{m-1}=23+\frac{19}{m-1}$.

∵ k 是正整数，故 $\frac{19}{m-1}$ 应为整数．由于 19 是质数，所以 $m-1=1$，或 $m-1=19$，

即 $m=2$，或 $m=20$.

当 $m=2$ 时，$k=42$，与已知 $k\leqslant 27$ 不合，应舍去；当 $m=20$ 时，$k=24$，符合题设要求．

∴ 原有汽车 20 辆，学生有 $23m-4=460-4=456$（人）.

专题训练二十四

一、1. B　解题思路：∵ $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$，且 $x-y$、$x+y$ 有相同的奇偶性，∴ $\begin{cases}x+y=32,\\x-y=2,\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=16,\\x-y=4.\end{cases}$

2. A　解题思路：∵ $b^2-4\sqrt{2}=m+n-2\sqrt{mn}$，∴ $b^2=m+n$，$mn=8$．∴ $m=8$，$n=1$.

3. B　解题思路：∵ $5^3=125$，$5^4=625$，$5^5=3125$，$5^6=15625$，而 2001 为奇数，故应选 B.

4. C

二、1. $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$　解题思路：由题意知，$x\geqslant\frac{1}{5}$，$y\geqslant\frac{1}{5}$，$\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}-\sqrt{x-\frac{1}{5}}\geqslant 0$，∴ $x\leqslant\frac{26}{5}$.

原方程可变形为 $y=5+x-2\sqrt{5x-1}$．∵ y 与 x 均为整数，∴ $x_1=1$，$x_2=2$.

∴ 原方程的解为 $x=1$，$y=2$ 或 $x=2$，$y=1$.

2. $x=2$　解题思路：∵ $M=2078+100x=(122\times 17)+17\times 6x+4-2x$，∴ $17\mid 4-2x$．∵ $0\leqslant x\leqslant 9$，∴ $x=2$.

3. 除数为 40，余数为 1　解题思路：设其余数为 y，除数为 x，且 $0\leqslant y<x$，∴ $50x\leqslant 2001$，$51x>2001$．∴ $39\frac{12}{51}<x\leqslant 40\frac{1}{50}$，即 $x=40$，$y=1$.

三、1. 解：7 分与 60 分的最小公倍数为 420 分，所以下次在 7 点既亮灯又响铃．

2. 解：∵

$$\begin{array}{rr}
 & 1000a+100b+10c+d\\
 & -100a-10b-c\\
 & -10a-b\\
+) & -a\\
\hline
 & 2\times 1000+8\times 100+6\times 10+7
\end{array}$$

∴ $1000a-1000=2\times 1000$，即 $a=3$；$100b+1000-100a-100=800$，即 $b=2$；

$10c-10b-10a+100-10=60$，即 $c=2$；$d-c-b-a+10=7$，即 $d=4$.

∴ 该自然数为 3224.

3. 解：设其数分别为 $k+2$，$k+3$，$k+4$，…，$k+13$.

∴ k 必须是 2、3、4、…、13 的倍数，即取 $k=13!$.

于是可得：$13!+2$，$13!+3$，…，$13!+13$.

4. 解：由条件等式得 $\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}+\overline{abc}=N+\overline{abc}$.

∴ $100(2a+2b+2c)+10(2a+2b+2c)+(2a+2b+2c)=3194+\overline{abc}$.

$222(a+b+c)=222\times 14+86+\overline{abc}$.

$\therefore 222 \mid 86+\overline{abc}$，即 $86+\overline{abc}=222m$.

$\therefore \overline{abc}=222m-86$.

$\because \overline{abc}$为三位数，$m=1、2、3、4$，$\therefore \overline{abc}$为 136、358、580、802.

又 $222(a+b+c)>222\times14$，即 $a+b+c>14$，$\therefore \overline{abc}$为 358.

5．解：$\because a+b+c=a+b+2a+5b=3(a+2b)$，$\therefore a+b+c$ 是 3 的倍数.

设 a、b 被 3 除后的余数分别为 r_a、r_b，则有 $a=3m+r_a$，$(r_a\neq0)$，$b=3n+r_b$ $(r_b\neq0)$. 故 $2a+5b=5m+10n+2r_a+5r_b$.

由于 r_a、r_b 只能取 1 或 2，若取 $r_a=1$，$r_b=2$ 或 $r_a=2$，$r_b=1$，则 $2r_a+5r_b$ 总为 3 的倍数，即 $2a+5b$ 为 3 的倍数，c 为合数，这与 c 为质数矛盾.

因此 r_a、r_b 只能同时取 1 或同时取 2，此时，$a+2b$ 是 3 的倍数.

综上所述，可知 $a+b+c$ 总为 9 的倍数.

又$\because 2\times11+5\times5=47$，$11+5+47=63$，$2\times13+5\times7=61$，$13+7+61=81$，符合题意.

故 $n\leqslant(63, 81)=9$. 故 $9\leqslant n\leqslant9$. $\therefore n=9$，即 n 的最大可能值是 9.

6．解：设影剧院共有 k 排座位，第一排有 a 个座位.

由题意得 $a+(a+1)+\cdots+(a+k-1)=1000\ (k>16)$，

即$\dfrac{k(2a+k-1)}{2}=1000\ (k>16)$.

$\therefore k(2a+k-1)=2000=2^4\times5^3\ (k>16)$　　　①

显然 $k<(2a+k-1)$，且 k 与 $2a+k-1$ 的奇偶性正好相反.

由①式可知 $16<k<\sqrt{2000}<45$.

又$\because k$ 是 $2^4\times5^3$ 的约数，所以只可能：$k=2^2\times5=20$，$k=5^2=25$，$k=2^3\times5=40$.

但当 $k=20$ 或 $k=40$ 时，$2a+k-1$ 都是偶数，不合要求，所以 $k=25$. 这时 $2a+k-1=80$ 是偶数，且 $k=25<80=2a+k-1$ 是符合题意的.

7．解：令 $p=x+y$，$q=x-y$，则 $x=\dfrac{p+q}{2}$，$y=\dfrac{p-q}{2}$.

代入原方程，得 $28p=3(p^2+3q^2)$. $\therefore p$ 为非负整数且能被 3 整除.

令 $p=3k$（k 为非负整数），有 $28k=3(3k^2+q^2)$，可见 k 能被 3 整除.

令 $k=3n$（n 为非负整数），有 $28n=27n^2+q^2$，即 $n(28-27n)=q^2$.

$\because q^2\geqslant0$，$\therefore n(28-27n)\geqslant0$，即 $n=0$ 或 $n=1$.

当 $n=0$ 时，$p=q=0$，$x=y=0$ 不是原方程的解.

当 $n=1$ 时，$p=9$，$q=\pm1$. $x=5$，$y=4$ 或 $x=4$，$y=5$，经检验，都是原方程的解.

练习二十五

一、1. B　2. C　3. C

二、1. 3　2. $\sqrt{2}+1$　3. 1:8:27:45

三、1. 证明：$\because \angle A=\angle A$，$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{2}{1}$，在$\triangle ABD$中，$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{2}{1}$，$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle ADB$，$\therefore \dfrac{BD}{BE}=\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{2}{1}$.

2．证明：
$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABE\backsim\triangle ACD\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{EB}{DC}\\ \triangle EFB\backsim\triangle BCA\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{EB}{FB}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{EB}{DC}=\dfrac{EB}{FB}\Rightarrow FB=DC.$$

3．证明：由题设可知：
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}\\ \dfrac{DH}{DK}=\dfrac{BD}{DC}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DH}{DK}.$$

4．证明：通过比例式$\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{BD}{CE}$，可找到包括四条线段所在的两个三角形$\triangle BPD$与$\triangle EPC$，但这两个三角形不存在相似的可能，此时如果过点 C 作 AB 的平行线 CF，则由题设可得

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{BD}{CF}\\ CE=CF\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{BD}{CE}$$，这里 $\frac{BD}{CF}$ 是过渡比.

5. 提示：过点 C 作 $CG\parallel AB$ 或过点 A 作 $AP\parallel BF$ 交 FE 的延长线于 P. 本题还有其他作辅助线的方法，请读者讨论.

专题训练二十五

一、1. C　解题思路：设 $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=k$，$k$ 为定值，则 $(a-a'k)x^2+(b-b'k)x+(c-c'k)=0$. 由于该式对任何实数 x 都成立，于是 $a-a'k=b-b'k=c-c'k=0$，$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k$，即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似.

2. B　解题思路：过 C 作 $CH'\parallel AH$，交 BM 的延长线于 H'，则 $HM=MH'$. 同样可得 G'，有 $GH=H'G'$. 设 $BG=x$，$GH=y$，$HM=z$，则 $MH'=z$，$H'G'=y$. 得 $\frac{x}{2y+2z}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=y+z$，$\frac{x+y}{2z}=\frac{2}{1}\Rightarrow x=-y+4z$. $\therefore x=\frac{5}{2}z$，$y=\frac{3}{2}z$.

3. B　4. C

二、1. 1:3. 解题思路：如图 25－17a，延长 AD、BC 相交于 G，则 $\triangle GAB$ 为正三角形，CD 为中位线，AC 为高，有 $AC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$. 又由等腰 $\triangle ABF$、$\triangle FBE$ 中，$\angle ABF=\angle FBE$ 知，$\triangle ABF\backsim\triangle FBE$，有 $BE=\frac{BF^2}{AB}=\frac{3}{4}AB$，从而 $AE=AB-BE=\frac{1}{4}AB$，得 $AE:EB=1:3$.

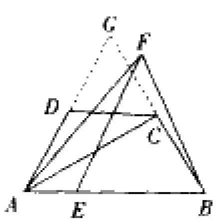


图 25－17a

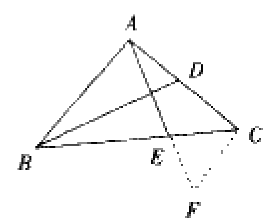


图 25－22

2. 2. 解题思路：如图 25－22，过 C 作 $CF\perp AC$，交 AE 的延长线于 F. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BAD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ACF$ 中，易证 $\angle ABD=\angle CAF$. 又 $AB=AC$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BAD\cong\mathrm{Rt}\triangle ACF$，$\therefore CF=AD$. $\because AB=2AD$，$\therefore\frac{AB}{CF}=2$，又 $\because\triangle EAB\backsim\triangle EFC$，$\therefore\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{CF}=2$.

3. 1:5:3. 解题思路：设 $AI=x$，$IF=y$，$FB=z$，则 $DP=x$，$PE=z$，从而 $DE=FG=HI=x+z$. 又由 $FG\parallel BC$，$HI\parallel CA$ 得 $\frac{FG}{BC}=\frac{AF}{AB}$，$\frac{HI}{CA}=\frac{BI}{AB}$，$\therefore\frac{x+z}{8}=\frac{x+y}{12}$，$\frac{x+z}{6}=\frac{y+z}{12}$. 又 $\because x+y+z=12$，联立方程可解得 $x=\frac{4}{3}$，$y=\frac{20}{3}$，$z=4$. 于是 $AI:IF:FB=x:y:z=1:5:3$.

三、1. 证明：将 $x=\frac{a+b}{2}$，$y=\frac{b+c}{2}$，代入 $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$ 中，得 $\frac{2a}{a+b}+\frac{2c}{b+c}=2$.

所以 $2a(b+c)+2c(a+b)=2(a+b)(b+c)$.

展开后整理得 $b^2=ac$. 故 b 是 a、c 的比例中项.

2. 证明：如图 25－23，以 M 为对称中心作关于 $\triangle ABC$ 的中心对称图形 $\triangle AB'C$，其中 E'、F' 分别是 E、F 的对应点，则 $E'C\parallel AE$，$F'C\parallel AF$.

在 $\triangle BP'C$ 中，由 $E'C\parallel AE$ 得 $\frac{BE}{EC}=\frac{x}{2y+2z}=\frac{1}{2}$. 在 $\triangle BQ'C$ 中，由 $F'C\parallel AF$ 得 $\frac{BF}{FC}=\frac{x+y}{2z}=2$.

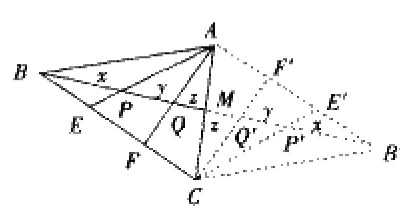


图 25－23

由以上可得 $x=\frac{5}{2}z$，$y=\frac{3}{2}z$. $\therefore x:y:z=5:3:2$.

3. 证明：由$\angle 2=\angle 1$，$\angle C=\angle C$，得$\triangle DAC\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}$. $\therefore DC=\frac{AC^2}{BC}=\frac{b^2}{a}$. $\therefore BD=BC-DC=\frac{a^2-b^2}{a}$.

又$\angle 2=\angle 3$，$\therefore DE\parallel AC$. $\therefore \triangle BDE\backsim\triangle BCA\backsim\triangle ACD$.

$\therefore \frac{m_1}{m}=\frac{BD}{BC}=\frac{a^2-b^2}{a^2}$，$\frac{m_2}{m}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$.

$\therefore \frac{m_1+m_2}{m}=\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{b}{a}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}=-\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}$.

4. 证明：由已知条件易证$\triangle BCL\backsim\triangle NAL$.

$\therefore \frac{BC}{AM}=\frac{CL}{AL}$，即$\frac{BC+AN}{AN}=\frac{CL+AL}{AL}$.

$\therefore \frac{a+AN}{AN}=\frac{a}{AL}$. $\therefore AL=\frac{aAN}{a+AN}$.

又由已知条件得$\triangle EDN\backsim\triangle AGN$.

$\therefore \frac{ED}{AG}=\frac{EN}{AN}$，即$\frac{b}{c}=\frac{EN}{AN}$. $\therefore \frac{b+c}{c}=\frac{EN+AN}{AN}$. $\therefore AN=\frac{bc}{b+c}$.

$\therefore AL=\frac{aAN}{a+AN}=\frac{a\cdot\frac{bc}{b+c}}{a+\frac{bc}{b+c}}=\frac{abc}{ab+bc+ca}$.

5. 证明：作 $PP'\perp AB$ 于 P'，$DD'\perp AB$ 于 D'，$CC'\perp AB$ 于 C'，则 $PP'\parallel DD'\parallel CC'$.

$\therefore \frac{PP'}{CC'}=\frac{PB}{BC}$，$\frac{DD'}{PP'}=\frac{DA}{PA}$，$\frac{DD'}{CC'}=\frac{DF}{FC}$.

$\therefore \frac{PB}{BC}\cdot\frac{DA}{PA}=\frac{DF}{CF}$.

(1) 由 PF 平分$\angle MPN$，得$\frac{DF}{CF}=\frac{PD}{PC}$.

$\therefore \frac{PB}{BC}\cdot\frac{DA}{PA}=\frac{PD}{PC}$，即$\frac{AD}{PA\cdot PD}=\frac{BC}{PB\cdot PC}$.

$\therefore \frac{PD-PA}{PA\cdot PD}=\frac{PB-PC}{PB\cdot PC}$，即$\frac{1}{PA}-\frac{1}{PD}=\frac{1}{PC}-\frac{1}{PB}$.

$\therefore \frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}=\frac{1}{PC}+\frac{1}{PD}$.

(2) 由$\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}=\frac{1}{PC}+\frac{1}{PD}$，得$\frac{1}{PA}-\frac{1}{PD}=\frac{1}{PC}-\frac{1}{PB}$.

$\therefore \frac{PD-PA}{PA\cdot PD}=\frac{PB-PC}{PC\cdot PB}$，即$\frac{AD}{PA\cdot PD}=\frac{BC}{PB\cdot PC}$.

$\therefore \frac{PB}{BC}\cdot\frac{DA}{PA}=\frac{PD}{PC}$.

又$\because \frac{PB}{BC}\cdot\frac{DA}{PA}=\frac{DF}{CF}$，$\therefore \frac{DF}{CF}=\frac{PD}{PC}$.

$\therefore PF$ 平分$\angle MPN$.

练习二十六

一、1. B　2. A　3. A

4. C　解题思路：$\because 2S=ah_a=bh_b=ch_c$，$\therefore a:b:c=\frac{1}{5}:\frac{1}{12}:\frac{1}{13}$. 设 $a=\frac{1}{5}x$，$b=\frac{1}{12}x$，$c=\frac{1}{13}x$，$\therefore \frac{1}{25}x^2>\frac{1}{144}x^2+\frac{1}{169}x^2$，即 $a^2>b^2+c^2$.

二、1. $\frac{73}{18}$　解题思路：$\because \frac{AE}{ED}=\frac{6}{7}$，$\frac{BD}{DC}=\frac{4}{3}$，$\frac{BC}{BD}=\frac{7}{4}$.

由例 2 可知$\frac{6}{7}=\frac{AF}{FC}\cdot\frac{7}{4}$，即$\frac{AF}{FC}=\frac{24}{49}$，$\frac{BE}{EF}=\frac{BD}{DC}\cdot\frac{AC}{AF}=\frac{4}{3}\times\frac{73}{24}=\frac{73}{18}$.

2. $\frac{18}{5}$或10　解题思路：若$\frac{PB}{AD}=\frac{BC}{PA}$，则 $PB=\frac{BC\cdot AD}{PA}=\frac{6\times 3}{5}=\frac{18}{5}$；若$\frac{PB}{PA}=\frac{BC}{AD}$，则 $PB=\frac{BC\cdot PA}{AD}=\frac{6\times 5}{3}=10$.

3. 5　解题思路：$\because AD\parallel BC$ 及 $AB\parallel DC$，$\therefore \frac{AE}{EF}=\frac{BE}{ED}=\frac{EG}{AE}=\frac{EF+FG}{AE}$. $\therefore FG=\frac{AE^2}{EF}-EF=\frac{6^2}{4}-4=5$.

三. 1. 提示：证$\triangle BMH\backsim\triangle BCD$、$\triangle DMH\backsim\triangle DAB$. 答案：$MH=\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}$，与 l 无关.

2. 解：(1) 矩形 $ABCD$ 与矩形 $EFGH$ 相似的条件是：$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}$或$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{EF}$.

(2) 设木条的宽为 x，则新的矩形的长为 $a+2x$，宽为 $b+2x$，

$\therefore \frac{S_{原}}{S_{新}}=\frac{ab}{(a+2x)(b+2x)}$. 新矩形与原矩形不相似.

设它们相似，则$\frac{a+2x}{a}=\frac{b+2x}{b}$，　①

或$\frac{a+2x}{b}=\frac{b+2x}{a}$.　②

由①有 $ab+2bx=ab+2ax$，得 $a=b$，矛盾.

由②有 $a^2+2ax=b^2+2bx$，即$(a+x)^2=(b+x)^2$，得 $a=b$，矛盾. 所以它们不相似.

3. 解：$\because \angle A=\angle D$，$\therefore \angle B+\angle C=\angle E+\angle F$，但$\angle B\neq\angle E$，$\angle B\neq\angle F$. 设$\angle B<\angle F$，作$\angle EFG=\angle B$，$G$ 在 DE 上，作$\angle BCH=\angle E$，H 在 AB 上.

4. 解：$\because AMD$ 是$\triangle BCP$ 的梅氏线，

$\therefore \frac{BM}{MP}\cdot\frac{PA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB}=1$.　①

$\because P$ 是 AC 中点，$\therefore \frac{PA}{AC}=\frac{1}{2}$. $\because BD=DE=EC$，$\therefore \frac{CD}{DB}=\frac{2}{1}$.

将$\frac{PA}{AC}$、$\frac{CD}{DB}$的值代人①得$\frac{BM}{MP}=1$，即 $BM=MP$.

又 ANE 亦是$\triangle BCP$ 的梅氏线，$\therefore \frac{BN}{NP}\cdot\frac{PA}{AC}\cdot\frac{CE}{EB}=1$.　②

将$\frac{PA}{AC}=\frac{1}{2}$，$\frac{CE}{EB}=\frac{1}{2}$代人②得$\frac{BN}{NP}=\frac{4}{1}=\frac{8}{2}$.

$\therefore BM:MN:NP=5:3:2$.

5. 解：$\because$在$\triangle ABD$ 和$\triangle ABC$ 中，BD 边与 BC 边同高，$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BD}{BC}$.

在$\triangle ABP$ 和$\triangle ABD$ 中，AP 边与 AD 边同高，$\therefore \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{AP}{AD}$.

$\because S_{\triangle ABC}=2$，$\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{AP}{AD}\cdot\frac{2BD}{BC}$ ①

$\because \frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=k>1$，$\therefore \frac{BC}{BD}=\frac{BD+DC}{BD}=1+\frac{DC}{BD}=1+\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k}$.

$\therefore \frac{BD}{BC}=\frac{k}{k+1}$　②

$\because$直线 BPE 截$\triangle ADC$ 的两边 AC、AD 和第三边 CD 的延长线，由梅氏定理得$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DP}{PA}=1$.

$\therefore \frac{1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}\cdot\frac{DP}{PA}=1$.

$\therefore \frac{PA}{DP}=\frac{k+1}{k^2}$. $\therefore \frac{DA}{PA}=\frac{PA+PD}{PA}=1+\frac{PD}{PA}=1+\frac{k^2}{k+1}=\frac{k^2+k+1}{k+1}$.

$\therefore \frac{PA}{DA}=\frac{k+1}{k^2+k+1}$.　③

把②、③代人①，得$\triangle S_{\triangle ABP}=\frac{k+1}{k^2+k+1}\cdot\frac{2k}{k+1}=\frac{2k}{k^2+k+1}$.

同理 $S_{\triangle BCQ}=S_{\triangle CAR}=\frac{2k}{k^2+k+1}$.

$\therefore S_{\triangle PQR}=S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BCQ}+S_{\triangle CAR})=1-\frac{6k}{k^2+k+1}=\frac{k^2-5k+1}{k^2+k+1}$.

专题训练二十六

一、1. C　2. A

二、1. 324cm^2　解题思路：$\frac{DE}{BC}+\frac{FG}{BC}+\frac{IC}{BC}=1$.

2. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　解题思路：Rt$BAD\backsim$ Rt$\triangle CBA$.

3. 808　解题思路：每个矩形的周长都为8.

三、1. 解：设 a、b、c 三边上的高分别为 h_a、h_b、h_c，$\triangle ABC$ 的面积为 S，落在 a、b、c 三边的正方形边长分别为 $x_a=\frac{2S}{a+h_a}$，$x_b=\frac{2S}{b+h_b}$，$x_c=\frac{2S}{c+h_c}$，则 $x_a<x_b<x_c$，即当正方形两个顶点落在最短边上时，可使正方形零件面积最大.

2. 证明：作 $AE\perp BC$ 于 E，交 RS 于 F，令 $\frac{BS}{AB}=k$，$AE=h$，$BC=a$.

$\because SP\perp BC$，$AE\perp BC$，$\therefore SP/\!/AE$. $\therefore\triangle SBP\backsim\triangle ABE$，$\frac{SP}{AE}=\frac{BS}{AB}=k$，即 $SP=kh$.

又 $SR/\!/BC$，$\frac{AS}{AB}=\frac{AB-BS}{AB}=1-k$，$\therefore\triangle ASR\backsim\triangle ABC$，$\frac{SR}{BC}=\frac{AS}{AB}=1-k$，即 $SR=(1-k)a$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}ah$，$S_{矩形PQRS}=PS\cdot SR=(k-k^2)ah$.

$\because S_{\triangle ABC}=nS_{矩形PQRS}$，$\therefore\frac{1}{2}ah=n(k-k^2)ah$. 即 $2nk^2-2nk+1=0$. 故 $k=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2n}\sqrt{n^2-2n}$.

$\because n^2-2n<(n-1)^2$ 及自然数 $n\geqslant3$ 时，$(n-2)^2<n^2-2n$，

$\therefore\sqrt{n^2-2n}$ 为无理数，即 k 为无理数. $\therefore\frac{BS}{AB}$ 为无理数.

3. 证明：$\because\frac{AF}{FB}=m$，$\frac{CE}{EA}=l$，利用比例性质，得 $\frac{AF}{AB}=\frac{m}{m+1}$，$\frac{AE}{AC}=\frac{1}{l+1}$. 将线段比转为相应图形面积比，得 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AE\cdot AF}{AC\cdot AB}=\frac{m}{(m+1)(l+1)}$.

同理 $\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{n}{(n+1)(m+1)}$，$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{l}{(l+1)(n+1)}$.

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle DEF}&=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AEF}-S_{\triangle BDF}-S_{\triangle CDE}\\&=\left[1-\frac{m}{(m+1)(l+1)}-\frac{n}{(n+1)(m+1)}-\frac{l}{(l+1)(n+1)}\right]\cdot S_{\triangle ABC}\\&=\frac{mnl+1}{(m+1)(n+1)(l+1)}S_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$

显然，当 $m=n=l=1$ 时，点 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 各边之中点，$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

当 $m=n=l$ 时，$S_{\triangle DEF}=\frac{m^2-m+1}{(m+1)^2}S_{\triangle ABC}$.

4. 解：利用比例性质及面积公式. 设 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$. 由内角平分线的性质，有 $\frac{AE}{EB}=\frac{b}{a}$，再利用合比定理，得 $\frac{AE}{c}=\frac{b}{a+b}$.

$\therefore AE=\frac{bc}{a+b}$，$BE=c-AE=\frac{ac}{a+b}$.

于是，$S_{\triangle CBE}=\frac{1}{2}BE\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot\frac{ac}{a+b}\cdot b=\frac{abc}{2(a+b)}$.

又 $\because\frac{CF}{FE}=\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{AE}=\frac{b}{AE}=\frac{a+b}{c}$，$\therefore\frac{CF}{CE}=\frac{a+b}{a+b+c}$.

$\therefore S_{\triangle BCF}:S_{\triangle BCE}=CF:CE$，

即 $S_{\triangle BCF}=\frac{a+b}{a+b+c}\cdot\frac{abc}{2(a+b)}=\frac{abc}{2(a+b+c)}$.

同理 $\frac{AD}{DC}=\frac{c}{a}$，$\therefore\frac{AD}{b}=\frac{c}{a+c}$，即 $AD=\frac{bc}{a+c}$.

$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{a+b}\cdot\frac{bc}{a+c}=\frac{b^2c^2}{2(a+b)(a+c)}$.

$\therefore S_{四边形BCDE}=\frac{1}{2}bc-\frac{b^2c^2}{2(a+b)(a+c)}=\frac{abc(a+b+c)}{2(a+b)(a+c)}$.

$\therefore S_{四边形BCDE}:S_{\triangle BCF}=\frac{abc(a+b+c)}{2(a+b)(a+c)}:\frac{abc}{2(a+b+c)}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)}=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2+ab+ac+bc}$

$=\frac{2a^2+2ab+2ac+2bc}{a^2+ab+ac+bc}$

$(\because b^2+c^2=a^2)=2$.

5. 证明：如图 26－28a，分别作三边的平行线将$\triangle ABC$分成 9 个全等的三角形：$\triangle AB_1C_1$，$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_1B_1A_2$，…显然 P 在线段 BC_2 上变动，$S_{\triangle PEC}\geqslant S_{\triangle C_2C_1C}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$；$P$ 在线段 B_3C 上变动，则 $S_{\triangle BPF}\geqslant S_{\triangle BB_3B_1}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$，所以下面只需证明 P 在线段 C_2B_3 上变动，$S_{\square PEAF}\geqslant\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$即可.

由平行四边形对边相等：$A_2M=C_2P=A_1N$，$\therefore\triangle A_2MF\cong\triangle NH_1H$（易知对应角相等）.

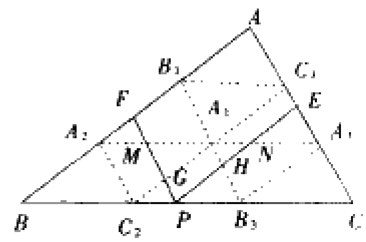


图 26－28a

同理：$\triangle EA_3N\cong\triangle GA_1M$，$\therefore S_{\square PEAF}=S_{\triangle AA_2A_3}+S_{PGA_1H}\geqslant S_{\triangle AA_2A_3}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$.

6. 解：如图 26－29，$\triangle PF'E$、$\triangle FPD'$、$\triangle E'DP$ 都与$\triangle ABC$ 相似，设 S_1、S_2、S_3 分别为$\triangle PF'E$、$\triangle FPD'$、$\triangle E'DP$ 的面积，并设 $F'E=x$，$PD'=y$，$DP=z$.

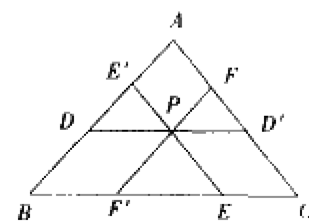


图 26－29

$\therefore\frac{S_1}{20}=\frac{x^2}{BC^2}$，$\frac{S_2}{20}=\frac{y^2}{BC^2}$，$\frac{S_3}{20}=\frac{z^2}{BC^2}$.

$\therefore\frac{S_1+S_2+S_3}{20}=\frac{x^2+y^2+z^2}{BC^2}$.

$\because 4(x^2+y^2+z^2)-2BC^2=4(x^2+y^2+z^2)-2(x+y+z)^2=(x+y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geqslant 0$，$\therefore\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{BC^2}\geqslant 1$. $\therefore\frac{S_1+S_2+S_3}{20}\geqslant\frac{1}{2}$，

即 $S_1+S_2+S_3\geqslant 10$. $\therefore$其最小值为$\triangle ABC$ 面积的一半，且当 P 为重心时达到最小值.

练习二十七

一、1. B　2. A　解题思路：利用中位线得到$\triangle ABC$ 的面积与四边形 $BCDE$ 的面积有一定的关系　3. C

二、1. $\frac{1}{3}$　2. $\frac{4}{9}$　3. 24　解题思路：过 M 作 $MD\parallel BC$，则 $MD\perp AC$，且 D 为 AC 的中点.

三、1.（略）　2. 答案：$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$.

3. 证明：设 $S_1=S_{\triangle AED}$，$S_2=S_{\triangle BCE}$，$S_3=S_{\triangle ABE}$.

$\because S_{\triangle ABC}=S_3+S_2$，$S_{\triangle ABD}=S_3+S_1$，

$\therefore\frac{1}{S_{\triangle ABC}}+\frac{1}{S_{\triangle ABD}}=\frac{1}{S_3+S_2}+\frac{1}{S_3+S_1}=\frac{2S_3+S_1+S_2}{(S_3+S_2)(S_3+S_1)}=\frac{2S_3+S_1+S_2}{S_3^{\ 2}+S_3(S_1+S_2)+S_1S_2}$.

$\because S_3^{\ 2}=S_1+S_2$，

$\therefore\frac{1}{S_{\triangle ABC}}+\frac{1}{S_{\triangle ABD}}=\frac{2S_3+S_1+S_2}{2S_3^{\ 2}+S_3(S_1+S_2)}=\frac{1}{S_3}=\frac{1}{S_{\triangle ABE}}$.

4. 提示：本题类似例 1，可设 $S_{\triangle COD}=x$，$S_{\triangle AOE}=y$. 答案：315.

5. 证明：延长 AC、BE 交于 F.

$\because AD$ 平分$\angle BAC$，$AB=3AC$，$\therefore BD=3CD$，且 $S_{\triangle ABD}=3S_{\triangle ACD}$，即 $S_{\triangle ABC}=\frac{4}{3}S_{\triangle ABD}$.

$\because AE$ 平分$\angle FAB$，$AE\perp BF$，$\therefore AB=AF$.

又 $\because AB=3AC$，即 $AF=3AC$，$\therefore S_{\triangle ABF}=3S_{\triangle ABC}$.

$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABF}=\frac{3}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}S_{\triangle ABD}\right)=2S_{\triangle ABD}$.

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BDE}$，$\therefore AD=DE$.

6. 证明：设$\triangle ABC$的三边的长分别为 a、b、c，

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BPC}+S_{\triangle APC}+S_{\triangle BPA}=\frac{1}{2}at_a+\frac{1}{2}bt_b+\frac{1}{2}ct_c$，

$\therefore 2S_{\triangle ABC}=at_a+bt_b+ct_c$，

即$\frac{at_a}{2S_{\triangle ABC}}+\frac{bt_b}{2S_{\triangle ABC}}+\frac{ct_c}{2S_{\triangle ABC}}=1$.

又 $\because 2S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$，$\therefore \frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$.

专题训练二十七

一、1. C　解题思路：设底边边长为 a，高为 h，则$\frac{1}{2}(a+0.9a)\times 0.1h=57$，故$\frac{1}{2}ah=300$.

2. C　解题思路：延长 AE、AF 分别交 BC 于 M、N，则 M、N 分别是 BD、DC 的中点，易得 $S_{\triangle AEF}:S_{\triangle ABC}=2:9$.

3. B　　4. D

二、1. $2\sqrt{2}$　　2. $\frac{7}{15}$　　3. $4+3\sqrt{2}$

三、1. 答案：4:15.

2. 证明：连结 BR.

设 $S_{\triangle BRD}=S_1$，$S_{\triangle BRE}=S_2$，$S_{\triangle ARE}=S_3$.

$\therefore S_{\triangle CRD}=S_1$，$S_{\triangle ARC}=S_2+S_3$.

$\therefore \frac{S_{\triangle ARC}}{S_{\triangle CRE}}=\frac{AR}{RE}$，即$\frac{AR}{RE}=\frac{S_2+S_3}{S_1}$.

又$\frac{AE}{BE}=\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{S_{\triangle ARE}}{S_{\triangle BRE}}$，即$\frac{AE}{BE}=\frac{S_2+S_3}{2S_1}$，

$\therefore \frac{2AE}{BE}=\frac{S_2+S_3}{S_1}$，$\therefore \frac{AR}{RD}=\frac{2AE}{BE}$.

3. 证明：$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE$，连结 AP，则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APB}+S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}AB\cdot PE+\frac{1}{2}AC\cdot PD=\frac{1}{2}AB(PE+PD)$.

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot CF=\frac{1}{2}AB(PE+PD)$.

$\therefore PE+PD=CF$（定值）.

4. 解：假设满足条件的 P 点存在，连 AP 并延长交 BC 于 D，连 BP 并延长交 AC 于 E.

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$. $\therefore BD=CD$.

同理 $AE=CE$. $\therefore P$ 为$\triangle ABC$ 的重心. 过 P 作 $GH\parallel BC$ 分别交 AB、AC 于 G、H，$\therefore \triangle AGH\backsim\triangle ABC$. 又

$\because S_{\triangle AGH}=S_{四边形GBCH}$，$\therefore \left(\frac{AC}{AB}\right)^2=\left(\frac{AP}{AD}\right)^2=\frac{S_{\triangle AGH}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$. 故$\frac{AP}{AD}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

这与三角形重心的性质定理$\frac{AP}{AD}=\frac{2}{3}$矛盾. $\therefore$不存在这样的 P 点.

5. 证明：设 $S_{\triangle PAD}=S$，$S_{\triangle PA_1D_1}=S'$，$S_{\triangle PAB}=S_1$，$S_{\triangle PA_1B_1}=S'_1$，$S_{\triangle PBC}=S_2$，$S_{\triangle PB_1C_1}=S_2'$，$S_{\triangle PCD}=S_3$，

$S_{\triangle PC_1D_1}=S_3'$，则$\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot BC}=\frac{S_1\cdot S_3}{S\cdot S_2}$，$\frac{A_1B_1\cdot C_1D_1}{A_1D_1\cdot B_1C_1}=\frac{S_1'\cdot S_3'}{S'\cdot S_2}$

$\therefore \frac{AB\cdot CD}{AD\cdot BC}\cdot\frac{A_1D_1\cdot B_1C_1}{A_1B_1\cdot C_1D_1}=\frac{S_1\cdot S_3\cdot S_2'\cdot S'}{S_1'\cdot S_3'\cdot S_2\cdot S}$.

又$\frac{S_1}{S_1'}=\frac{PA\cdot PB}{PA_1\cdot PB_1}$，类似可得其他比，

故$\frac{AB\cdot CD\cdot A_1D_1\cdot B_1C_1}{A_1B_1\cdot C_1D_1\cdot AD\cdot BC}=\frac{PA\cdot PB\cdot PC\cdot PD\cdot PB_1\cdot PC_1\cdot PA_1\cdot PD_1}{PA\cdot PB_1\cdot PC_1\cdot PD_1\cdot PB\cdot PC\cdot PA\cdot PD}=1$.

即$\dfrac{AB\cdot CD}{AD\cdot BC}=\dfrac{A_1B_1\cdot C_1D_1}{A_1D_1\cdot B_1C_1}$.

6. 证明：以$\sqrt{c}$、$\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}$为边作矩形$ABCD$，其中$AB=\sqrt{c}$，$BC=\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}$. 在BC上取一点E，使$BE=\sqrt{a-c}$，则$CE=\sqrt{b-c}$. 此时，$AE=\sqrt{a}$，$DE=\sqrt{b}$，$\therefore S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CDE}=S_{\triangle AED}$，即$\frac{1}{2}\sqrt{c}\sqrt{a-c}+\frac{1}{2}\sqrt{c}\sqrt{b-c}=\frac{1}{2}\sqrt{a}\sqrt{b}\sin\angle AED$. 由于$\sin\angle AED\leqslant 1$，$\therefore\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leqslant\sqrt{ab}$.

练习二十八

一、1. A　2. A

二、1. 29　解题思路：共有$12+9+8=29$（种）不同的选法.

2. 15　解题思路：共需安排$3\times5=15$（个）试验小区.

3. 36　解题思路：需连接$C_9^2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$（条）电话线.

4. 64　解题思路：共有$4^3=64$（种）投法.

5. 81　解题思路：共有$3^4=81$（种）不同的结果.

6. 39　解题思路：共有$3+3^2+3^3=39$（种）不同的信号.

7. 1022　解题思路：每个人都可分在甲组，也可分在乙组，因此共有$2^{10}=1024$种不同分法. 但要排除两种极端情况：甲组10人，乙组无人；乙组10人，甲组无人. 因此，应有$1024-2=1022$种不同分法.

8. 1332　解题思路：(1) 从37个偶数中选取两个不同的偶数的方法数为$C_{37}^2=\dfrac{37\times36}{2\times1}$；(2) 从37个奇数中选取两个不同的奇数的方法数为$C_{37}^2=\dfrac{37\times36}{2\times1}$. 总的选法数为$\dfrac{37\times36}{2}+\dfrac{37\times36}{2}=37\times36=1332$（种）.

三、1. 解：$\because$参加数学、英语竞赛的人数各有200人，而参加竞赛的总人数是260人，$\therefore$两科都参加的人数是$200+200-260=140$（人）.

又$\because$75个男生参加了两科竞赛，$\therefore$两科都参加的女生人数是$140-75=65$（人）.

$\because$参加数学竞赛的女生人数是80人，$\therefore$只参加数学竞赛而没有参加英语竞赛的女生人数是$80-65=15$（人）.

2. 解：仿照例题，可得共有12条不同路线.

3. 解：本题等同于：平面上有n条直线，可以把平面最多分成多少个区域？易知$a_n=a_{n-1}+n$，于是若切2001刀，则可得2003002.

4. 解：(1) 在线段OA边上取一点有m种不同的选法，在线段OB边上的端点有n种不同的选法，于是共有mn条线段.

(2) 交点与各自取两点形成的四边形是一一对应的. 在OA边上取两点共有$\dfrac{m(m-1)}{2}$种方法，在OB上取两点共有$\dfrac{n(n-1)}{2}$种方法，因此形成的四边形个数为$\dfrac{m(m-1)}{2}\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{mn(m-1)(n-1)}{4}$.

故所求的交点个数最多为$\dfrac{mn(m-1)(n-1)}{4}$个.

专题训练二十八

一、1. B　解题思路：边长分别为（2，2，3），（2，3，3），（3，3，3），（3，3，5）.

2. D　解题思路：AB中垂线上除$\triangle ABC$的中心外，还有三点，于是共有$3\times3+1=10$（个）.

二、1. 7　解题思路：因为已知的距离中任意三个数都不能构成同一个三角形的三条边长.

2. 360　解题思路：以数码1、3、5为个位数的五位数各有P_5^4个. 因此，共有$3P_5^4=360$个五位不同数码的奇数.

3. 200　解题思路：(1) 个位做加法：0+0，只有一种办法；(2) 十位做加法：0+9，1+8，…，9+0，有10种办法；(3) 百位做加法：有10种办法；(4) 千位做加法：0+1，1+0，有两种办法. 故和为1990的"简单点"共有$1\times10\times10\times2=200$（个）.

4. 21600　解题思路：先在1、3、5、7、9中任意选取4个数码，有C_5^4种；再在2、4、6、8中任意选取2个数

码，有 C_4^2 种．将选出的 6 个数码排列起来，有 P_6 种方法．故满足题意的六位数共有 $C_5^4\times C_4^2\times P_6=21600$ 个．

5．840　解题思路：先从 7 个位置中任意选出 3 个来放红棋子，有 C_7^3 种方法．对于其中任一种选法，其余 4 个位置上都有 P_4 种不同排法，所以共有 $C_7^3\cdot P_4=840$ 种不同的排法．

6．126　解题思路：首先从 10 人中选出 5 人为一组，有 C_{10}^5 种选法，把剩余的人看做另一组，于是共有 $C_{10}^5\cdot C_5^5$ 种分法．但以上每一种分法都重复出现了 2 次．例如：$a_1a_2a_3a_4a_5$，$a_6a_7a_8a_9a_{10}$ 和 $a_6a_7a_8a_9a_{10}$，$a_1a_2a_3a_4a_5$．它们实质上是一种分法，所以不同的分法共有 $\frac{C_{10}^5\cdot C_5^5}{2}=126$ 种．

7．10　解题思路：四所学校选送人数的方案有两种：①2、2、1、1，这时选送方法有 C_4^2 种；②3、1、1、1，这时选送方法有 C_4^1 种．所以共有 $C_4^2+C_4^1=10$ 种不同的选法．

8．55　解题思路：个位数字是 0 或 5 的三位数均能被 5 整除．以 0 为个位数的三位数有 P_6^2 个、以 5 为个位数的三位数有 P_6^2-5 个（去掉以数 0 为首位的 5 个数），所以符合题意的三位数共有 $P_6^2+(P_6^2-5)=55$ 个．

三、1．解：(1) 把正方形分成 16 小格，则可以任意选择；(2) 取任意 5 块各分成 4 个相同的小正方形，则一共有 31 个正方形；(3) 把立方体分割成 $3^3=27$ 个相同的小立方体，再取其中 4 个各分割成 8 个小立方体，则共有 55 个小正方体．

2．解：设正 n 边形满足条件，则除去 n 个顶点外的 $25-n$ 个点均匀地分布在正 n 边形各边所对的劣弧上．

$\therefore \frac{25-k}{k}=\frac{25}{k}-1$ 是整数，且 $n\mid 25$．而 $n\geqslant 3$，故 $n=5$、25．

$\therefore$ 正多边形的个数为 $\frac{25}{5}+\frac{25}{25}=5+1=6$ 个．

3．解：由于数码 0 不能排在首位，所以符合题意的三位数由以下三类组成：

第一类是不含 0 的，这时可从 1～9 这 9 个数码中任取两个数码，再让每一个数码重复一次，即它是三个元素中有两个取重复的全排列，所以对于这两个数码组成三位数的全排列的个数为 $2\cdot\frac{3!}{2!}=3!$．因此不含 0 的三位数有 $3!\ C_9^2$ 个；

第二类是含 1 个 0 的，这时可从 1～9 这 9 个数码中任取一个数码，再让它重复一次．但数码 0 不能放在首位，所以每取一个数码可组成两个三位数．因此含 1 个 0 的三位数有 $2\cdot C_9^1$ 个；

第三类是含两个 0 的，这只能是 100，200，…，900，因此，共有 9 个．

所以，符合题意的三位数共有 $3!\ C_9^2+2C_9^1+9=243$ 个．

4．本题形似循环排列，但因 9 个位置放的点心和饮料不同，实质上为直线排列问题．

从圆桌的某个位置开始，将 9 个位置依次编为第 1 号，第 2 号，…，第 9 号，然后将 9 个人排成一列从左到右依次坐第 1 号，第 2 号，…，第 9 号即可．先让 6 位先生从左到右站成一列，有 P_6 种站法，然后让 3 位女士分别站在排头、排尾或两位先生之间，有 P_7^3 种站法．因此 9 个人站成一列有 $P_6\cdot P_7^3$ 种办法．但如果排头，排尾都是女士，当 9 个人围桌就餐时，这两位女士相邻，这类情况有 $P_6^6\cdot P_5^1$ 种．

所以符合题意的坐法有 $P_6\cdot P_7^3-P_6^6\cdot P_5^1=147600$ 种．

5．设胜方用了 k（$k=1$、2、…，7）名队员才淘汰了负方的 7 名队员．由于双方队员上场顺序都是事先安排好的，所以负方的 7 名队员一定是被胜方的第 k 号队员所淘汰的．而在此之前，负方已被淘汰了 6 名队员，胜方则被淘汰了 $k-1$ 名队员．由于每一回合恰淘汰一名队员，因此，在此之前已比赛了 $6+k-1=k+5$ 个回合，且其中有 $k-1$ 个回合中被淘汰的是胜方的队员，此时所有可能的不同比赛过程的种数为 C_{k+5}^{k-1}．

由于甲、乙都可能是胜方，因此所有可能出现的比赛过程的种数是

$2(C_6^0+C_7^1+C_8^2+\cdots+C_{12}^6)=2C_{13}^6=3432$．

6．解：由条件可知，青蛙的跳法只可能出现两种情况：

①跳 3 次到达 D 点，有 2 种跳法．

②跳 5 次停止（前 3 次不到达 D 点），而前 3 次的 2^3 种跳法中，有 2 种到达 D 点，故前 3 次有 $2^3-2=6$（种）跳法，而后 2 次有 2^2 种跳法，因此共有 $2^2\times 6=24$（种）跳法．

$\therefore$ 一共有 $2+24=26$（种）跳法.

练习二十九

一、1. C　　2. A　**解题思路**：原式 $=3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$　　3. B

二、1. 26

2. 2　**解题思路**：$\because (x-1)^3+(y-1)^3+2001[(x-1)+(y-1)]=0$，$\therefore [(x-1)+(y-1)]\ [(x-1)^2-(x-1)(y-1)+(y-1)^2+2001]=0$. $\therefore x+y=2$.

3. $a=1$，$b=1$ 或 $a=-1$，$b=-1$

三、1. 解：原式 $=(x-2)^2+(y-3)^2+14$.

$\because (x-2)^2\geqslant 0$，$(y-3)^2\geqslant 0$，$\therefore$ 原代数式无论 x、y 取任何实数时总是正的，且当 $x=2$，$y=3$ 时，其最小值为 14.

2. 解：设 $56789012345=x$，$67890123456=y$，则 $A=\dfrac{x}{y}$，$B=\dfrac{x+1}{y+2}$，

$\because A-B=\dfrac{x}{y}-\dfrac{x+1}{y+2}=\dfrac{xy+2x-xy-y}{y(y+2)}=\dfrac{2x-y}{y(y+2)}$，

又 $\because 2x-y>0$，$y+2>0$，$\therefore A-B>0$，即 $A>B$.

3. 解：设 $N=(4-2\sqrt{3})^3$，$\therefore 0<N<1$. 又有 $0<p<1$，$\therefore 0<p+N<2$. 再设 M 的整数部分为 Q，

则 $Q+N+p=N+M=(4-2\sqrt{3})^3+(4+2\sqrt{3})^3=416$（整数）.

$\therefore N+p$ 也是整数. 注意到 $0<p+N<2$，$\therefore p+N=1$. 于是 $1-p=N=(4-2\sqrt{3})^3$.

$\therefore M(1-p)=(4+2\sqrt{3})^3\cdot(4-2\sqrt{3})^3=64$.

4. 解：设 $x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2+ax+b)^2-(cx+d)^2$.

将其右边展开整理，再利用恒等式的对应项的系数应相等的性质解得：$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$，$c=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$d=0$.

因此该多项式可以表示成两个多项式的平方差的形式，即 $x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2+\dfrac{1}{2}x+1)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2$.

5. 解：设 $\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

两边平方得：$13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$. 比较系数，得：

$$\begin{cases}x+y+z=13,\\ xy=5,\\ yz=35,\\ xz=7.\end{cases}$$

解此方程组得 $x=1$，$y=5$，$z=7$.

又设 $\sqrt{15+\sqrt{20}+\sqrt{20}+\sqrt{28}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$. 同理解得 $a=3$，$b=5$，$c=7$.

$\therefore$ 原式 $=1+\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{7}=1-\sqrt{3}$.

6. 证明：如图 29－3，以 $a+b$、$c+d$ 为长和宽作矩形 $ABCD$. 设 $AB=a+b$，$BC=c+d$，在 AB 上取一点 P，使 $AP=a$，则 $BP=b$. 在 BC 上取一点 Q，使 $BQ=C$，则 $CQ=d$.

$\therefore PQ=\sqrt{b^2+c^2}$，$PD=\sqrt{a^2+(c+d)^2}=\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$，

$DQ=\sqrt{(a+b)^2+d^2}=\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$.

由三角形三边关系即 $PD+PQ>DQ$ 可得 $\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}>\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$.

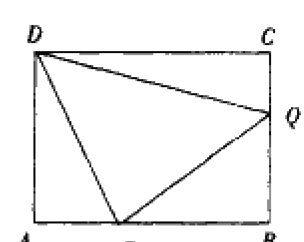


图 29－3

专题训练二十九

一、1. C

2. B　解题思路：当 n 为整数时，$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{(1+\frac{1}{n})^2-\frac{2}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

$=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2}$

$=\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

$\therefore S=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2000}-\frac{1}{2001}\right)$

$=2000+1-\frac{1}{2001}=2001-\frac{1}{2001}$.

3. B　解题思路：如图 29－4，设 $BD=x$，$BE=y$，$FE=u$，$FD=v$，则其他各线段都可用 x、y、u、v 表示，由图 29－3 知，$L(a)=2u+2v+2y+2x$，$L(b)=4y+x+v+2u$，$L(c)=2x+3y+u+2v$，其中 $2u=\sqrt{x^2+v^2}$，$2y=\sqrt{x^2+9v^2}$，由此得，$L(c)-L(a)=y-u=\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+9v^2}-\sqrt{x^2+v^2})>0$，所以 $L(a)<L(c)$成立，(A) 不对．

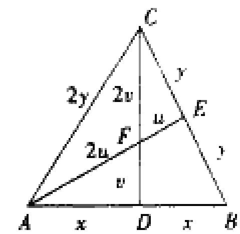


图 29－4

其次，$L(b)-L(a)=2y-x-v=\sqrt{x^2+9v^2}-x-v=\sqrt{(x+v)^2+8v^2-2xv}-(x+v)$，因任给一组正数 x 和 v，都能作出底边为 $2x$、高为 $3v$ 的等腰三角形，所以可取 $8v^2-2xv\leqslant 0$，即 $x\geqslant 4v$，此时有 $L(b)-L(a)\leqslant 0$．$\therefore L(a)<L(b)$不能总成立，(D) 不对．

最后，$L(c)-L(b)=x-y+v-u$，由图知，若四边形 $BDFE$ 关于 BF 对称，即等腰△ABC 成为正三角形，则会有 $x-y+v-u=0$，因而 $L(b)$未必小于 $L(c)$，(C) 也不会成立．$\therefore$选 (B)．

二、1. 是　解题思路：设 $n=2000$，$\therefore A=n^2+n^2\times(n+1)^2+(n+1)^2=n^2+(n^2+n)^2+n^2+2n+1=n^4+2n^3+3n^2+2n+1=(n^2+1)^2+2n(n^2+1)+n^2=(n^2+n+1)^2$．

2. 400　解题思路：$\because$原等式变形得$(\sqrt{a-1}-1)^2+(\sqrt{b-2}-2)^2+\frac{1}{2}(\sqrt{c-3}-3)^2=0$．$\therefore a=2$，$b=6$，$c=12$．$\therefore(a+b+c)^2=(2+6+12)^2=400$．

3. 1　解题思路：$\because a^2+b^2+c^2+4\leqslant ab+3b+2c$，$\therefore\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2\leqslant 0$．$\therefore a=1$，$b=2$，$c=1$，$\therefore(a+b-2c)^{2001}=(1+2-2\times1)^{2001}=1$．

三、1. 解：$\because(m-n)^2=211-15n^2\geqslant 0$，$\therefore n^2\leqslant\frac{211}{15}<15$．故 $n=1$、2、3．解得$\begin{cases}m=14,\\n=1.\end{cases}$

2. 解：将 $ad-bc=1$ 代入，得 $a^2+b^2+c^2+d^2-ab+cd=ad-bc$，

即 $2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab+2cd-2ad+2bc=0$．

$(a-b)^2+(a-d)^2+(b+c)^2+(c+d)^2=0$．

因 a、b、c、d 是实数，所以$(a-b)^2\geqslant 0$，$(a-d)^2\geqslant 0$，$(b+c)^2\geqslant 0$，$(c+d)^2\geqslant 0$．

只有$(a-b)^2=0$，$(a-d)^2=0$，$(b+c)^2=0$，$(c+d)^2=0$．

所以 $a-b=0$，$a-d=0$，$b+c=0$，$c+d=0$．$\therefore a=b=-c=d$，代入 $ad-bc=1$，得 $a\times a-a\times(-a)=0$，即 $a^2=\frac{1}{2}$．所以 $abcd=-a^4=-\frac{1}{4}$．

3. 证明：当 a、b、x、y 中有为 0 者时，结论显然成立；当 a、b、x、y 均不为 0 时，作矩形 $ABCD$，使 $AB=|a|$，$BC=|b|$，$AD=|x|$，$CD=|y|$，$AC=BD=1$．则 $a^2+x^2=1$，$b^2+y^2=1$，$|ab|=|xy|$．又由 $ax+by=0$ 可知，若 a 与 b 同号，则 x 与 y 异号；若 a 与 b 异号，则 x 与 y 同号，从而 ab 与 xy 异号．$\therefore ab+xy=0$．

4. 解：由条件 $x^2+y^2=z^2$ 联想勾股定理，于是我们构造一个 Rt△ABC，如图 29－5 所示，过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，

由射影定理得 $BC^2=BD\cdot AB$，即 $x^2=z\cdot\sqrt{x^2-CD^2}$．又 $x^2=z\cdot\sqrt{x^2-r^2}$，$\therefore CD=r$．$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}rz$，$\therefore \frac{3xy}{2rz}=\frac{3}{2}$．

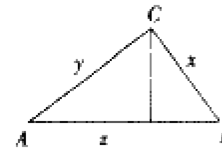


图 29－5

5．解：构造如图 29－6 所示的正方形，则 $AB=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$，$BC=\sqrt{a^2+b^2}$，$CD=c$．

$\therefore AD=\sqrt{(a+b+c)^2+(a+b+c)^2}=\sqrt{2}(a+b+c)$．

$\because AD<AB+BC+CD$，$\therefore\sqrt{2}(a+b+c)<\sqrt{a^2+(b+c)^2}+\sqrt{a^2+b^2}+c$．

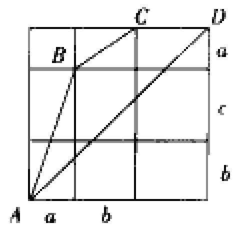


图 29－6

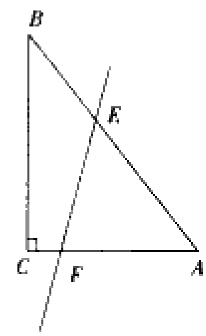


图 29－7

6．解：(1) 如图 29－7，当直线 EF 分别与 AC、AB 交于 F、E 时，若 EF 满足要求，

则 $AE+AF=\frac{1}{2}(5+12+13)=15$，$\frac{1}{2}AE\cdot AF\sin A=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times5\times12)$，即 $\frac{12}{13}AE\cdot AF=30$．

解得 $AE=\frac{15+\sqrt{95}}{2}$，$AF=\frac{15-\sqrt{95}}{2}$．即直线存在．

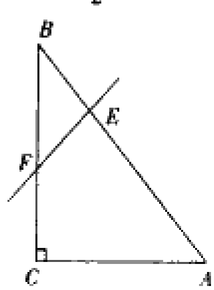


图 29－8

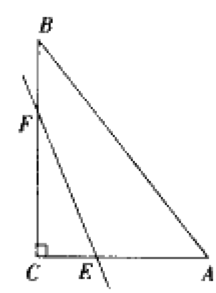


图 29－9

(2) 如图 29－8，当直线交 AB、BC 于 E、F 时，若满足条件，则 $BE+BF=15$，$\frac{1}{2}BE\cdot BF\sin B=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times5\times12)$，即有 $\frac{5}{13}BE\cdot BF=30$．无解．

(3) 如图 29－9，当直线交 AC、BC 于 E、F 时，若满足条件，则必有 $CE+CF=15$，$\frac{1}{2}CE\cdot CF=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times5\times12$．无解．

综上所述，能找到一条直线能使直角三角形等分周长及面积，这样的直线只有 1 条．

第三十讲　综合能力测试

一、1．A　解题思路：可取 $b=\frac{1}{2}$ 代入可得．

2．C　3．C　4．A　5．B　6．B

二、1．10403　解题思路：$\because 1^2-1=0$，$2^2-1=3$，$3^2-1=8$，$4^2-1=15$，$\therefore$ 第 102 项 $=102^2-1=10403$．

2．1000　解题思路：$\because\frac{1}{2001}+\frac{2000}{2001}=1$，$\frac{2}{2001}+\frac{1999}{2001}=1$，…，$\therefore x_1+x_2=1$，且当 x_1 与 x_2 相应的代数式的值之和

为 1，∴其值为 1000.

3. 16 解题思路：因 $4.938=4\times1.2345$，$3.062=4\times0.7655$，且 $1.2345+0.7655=2$，所以可设 $x=1.2345$，$y=0.7655$，则原式 $=x^4+y^4-x^3y^2-x^2y^3+4x\cdot4y=x^4+y^4-x^2y^2(x+y)+16xy=x^4+y^4-2x^2y^2+16xy=(x^2-y^2)^2+16xy=(x+y)^2(x-y)^2+16xy=4(x-y)^2+16xy=4(x+y)^2=16$.

4. > 5. 5 6. 9

7. 解题思路：用点表示药箱，线表示相同的药．"每两种药箱中必有一种相同的药"$\Leftrightarrow$每两点之间必有一条线；"每种药恰在两个药箱中"$\Leftrightarrow$每两条线代表两种不同的药．于是，线的条数$\Leftrightarrow$药的种数．问题转化为"n 个点，每两点连一条线（不一定是直线段），共有多少条线？"易知．共有$\frac{1}{2}n(n-1)$种药.

三、1. 解：$(n+1)\cdot\frac{n+1}{n}=(n+1)+\frac{n+1}{n}$．证明（略）

2. 解：等式的左端是两位数的个位数字与十位数字对调后相加，右端是 11 的倍数．

猜想的命题为：$a\times10+b+b\times10+a=11\times k$，其中 a，b，k 为自然数．证明如下：

$10a+b+10b+a=10(a+b)+(a+b)=(a+b)(10+1)=11(a+b)$.

3. 解：(1) 第一次只能得到 $1\times5+1+5=11$．为了达到最大，于是取 5，11 得 $5\times11+1+11=67$，所以第三次操作得到最大的新数为 $11\times67+11+67=815$.

(2) $\because c=ab+a+b=(a+1)(b+1)-1$，$\therefore c+1=(a+1)(b+1)$.

取 a、c 可得新数 $d=(a+1)(c+1)-1=(a+1)(a+1)(b+1)-1$．$\therefore d+1=(a+1)^2(b+1)$.

取 b、c 可得新数 $e=(b+1)(c+1)-1=(b+1)^2(a+1)$．$\therefore e+1=(b+1)^2(a+1)$.

扩大后的新数为 x，则总可以表示为 $x+1=(a+1)^m\cdot(b+1)^n$.

取 $a=1$，$b=4$，而 $2^5\times5^5=4000$，且 $3999+1=2^5\times5^5$，故可以扩充新数 3999.

4. 证明：假设正整数系数的二次三项式可以分解为两个整系数一次因式之积，

即 $ax^2+bx+c=(d_1x+e_1)(d_2x+e_2)$， ①

其中 d_1、d_2、e_1、e_2 均为整数.

易知 $d_1d_2=a>0$，即 d_1、d_2 同正负．不妨设 d_1、d_2 均为正整数，以 $x=2001$ 代入①，得 $|2001d_1+e_1|\cdot|2001d_2+e_2|=a\times2001^2+b\times2001+c=$素数 p. ②

$\because$②式中左边两个因数都是整数，它们的积为素数，$\therefore$其中必有一个为 1.

不妨设 $|2001d_1+e_1|=1$. ③

但另一方面，由①易知，$x=-\frac{e_1}{e_2}$为 $ax^2+bx+c=0$ 的根，而该方程为正系数，它只能有负根（$\because x_1+x_2<0$，$x_1\cdot x_2>0$），$\therefore e_1>0$.

$\therefore 2001d_1+e_1>1$. ④

④与③矛盾，原命题得证.

5. 解：当 n 为偶数时，$(n-1)$为奇数，要 n 盏灯全部熄灭，各灯开关次数之和必为 n 个奇数相加，这只需开关 n 次，各灯总次数之和为 $n(n-1)$即可．从左到右把灯排成一排，○表示亮灯，×表示熄灯，第一次最左一盏亮不变化，即○×××…×，第二次第二盏不变化××○○○…○，第三次第三盏不变化○○○×××…×…，第 $n-1$ 次为○○○…×，第 n 次全熄灭×××…×.

当 n 为奇数时，$(n-1)$盏为偶数，各盏灯开关次数的总和必为偶数．要奇数盏灯全部熄灭，总和必为奇数.

故 n 为奇数时，不能把全部灯都熄灭；当 n 为偶数时，按上述操作总能做到全部灯都熄灭.

6. 证明：如图 30－5，由三角形面积公式得：

$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AP\cdot BP\cdot\sin\alpha$，$S_{\triangle ADP}=\frac{1}{2}AP\cdot DP\cdot\sin\beta$，$S_{\triangle CDP}=\frac{1}{2}\cdot DP\cdot CP\cdot\sin\alpha$，

$S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}BP\cdot CP\cdot\sin\beta$.

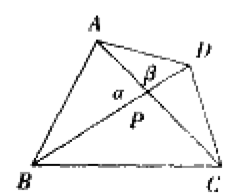


图 30－5

而 $\sin\alpha=\sin\beta$，故有 $AP\cdot BP+CP\cdot DP=AP\cdot DP+BP\cdot CP$.

整理得$(AP-CP)(BP-DP)=0$，即 $AP=CP$ 或 $BP=DP$

于是 P 必为某对角线的中点.

7. 解：$n^2-100n+196=(n-2)(n-98)$.

(1) 当 $n>98$ 时，或 $n<2$ 时，$n^2-100n+196>0$.

此时 $S_n=\frac{1}{2}$ $(n^2-100n+196+n^2-100n+196)$ $=n^2-100n+196$.

$\therefore S_1+S_{99}+S_{100}+S_{101}+S_{102}+S_{103}=(-1)(-97)+97\times1+98\times2+99\times3+100\times4+101\times5=1202$.

(2) 当 $2\leqslant n\leqslant98$ 时，$S_n=0$. $\therefore S_2=S_3=\cdots=S_{98}=0$.

$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{102}=1202$.