前　言

数学竞赛是数学课外活动的主要形式之一，它可以扩大学生的视野，锻炼学生的智慧，帮助学生理解数学在现实生活、生产、科技中的地位和作用，促进学生个性品质的形成和数学才能的发挥，有利于培养人才。

数学竞赛活动在世界各国都很活跃，迄今为止，国际数学奥林匹克（*IMO*）已经进行了31届大赛。自1985年我国首次参加第26届"*IMO*"以来，逐年取得优异的成绩，现已进入世界强国之列。为使这项活动更加深入更加广泛地开展，有计划分层次地对不同年级的学生进行训练，我们编写了《数学奥林匹克教练丛书》。全书共三册，分别供初中一、二、三年级用。

本套教练丛书以《中学数学教学大纲》为依据，参考了《中学数学竞赛大纲》（草案），以现行初中代数、几何课本为基础，考虑到学生的实际水平，通俗易懂地渗透数学思想，数学方法，强化数学技能与技巧的训练，培养学生既能提高数学成绩，又能掌握参加各类数学竞赛的基本常识和解题要领。

每册书按相应的教科书内容同步精选专题，介绍基本原理，范例与方法，给出相关的练习题与答案。

参加本册编写的有：官长秦、李伟、张贵刚、赵伟。统

稿官长泰。

借本书出版的机会，敬请广大读者提出批评指正，在此深表谢意！

编　者

1991年1月

目　录

一　函　数

（一）基本原理

1．基本概念

（1）平面直角坐标系；（2）函数的概念；（3）正比例函数；（4）反比例函数；（5）一次函数；（6）二次函数．

2．两点间距离公式

（1）有序实数对与坐标平面内的点是一一对应的．

（2）同一数轴上两点间的距离　设 $A(x_A)$、$B(x_B)$为同一数轴上任意两点，则有向线段 AB的长度为
$|AB| = |X_B - X_A|$．

（3）坐标平面内任意两点间的距离　设两点$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，则P_1、P_2两点间的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

3．正比例函数$y = kx$（$k \neq 0$）的图象和性质

（1）图象：经过原点的直线．

（2）性质：$k>0$，直线$y = kx$在一、三象限，y随x增大而增大．$k<0$，直线$y = kx$在二、四象限，y随x的增大而减小．

4．反比例函数 $y = \frac{x}{k}$（$k \neq 0$）的图象和性质

(1) 图象：双曲线。

(2) 性质：$k>0$，双曲线的两支分别在第一、三象限内，y 随 x 的增大而减小；当 $k<0$ 时，双曲线的两支分别在第二、四象限内，y 随 x 的增o而增大。

双曲线的两个分支都无限接近 x 轴、y 轴，但永远不与 x 轴、y 轴相交。

5. 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象和性质

(1) 图象：过点 $(0, b)$ 与直线 $y=kx$ 平行的直线。

(2) 性质：$k>0$，y 随 x 的增大而增大；$k<0$，y 随 x 的增大而减小。

6. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象和性质

(1) 图象：抛物线。

(2) 性质：

①对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$；

② 顶点为 $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$；

③$a>0$，抛物线开口向上；$a<0$，开口向下。

④当 $a>0$ 时，在对称轴的左侧，y 随着 x 的增大而减小；在对称轴右侧，y 随着 x 的增大而增大。当 $a<0$ 时，在对称轴的左侧，y 随着 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，y 随着 x 的增大而减小。

⑤若 $a>0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；若 $a<0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

为了方便、在数学上常用 $f(x)$ 表示一个 x 的函数，用 $f(a)$表示当 $x=a$ 时，函数 $f(x)$的值。

（二）范例与方法

1．求函数的解析式

例1 已知一次函数的自变量的取值范围是$2\leqslant x\leqslant 6$，函数值的范围是$13\geqslant y\geqslant 9$，求这个一次函数。

思路：运用一次函数的解析式 $y=kx+b(k\neq 0)$，当$x=2$时，$y=13$及当 $x=6$ 时，$y=9$，来确定 k 和 b 的值即可。

解：设 $y=kx+b$，则依题意，得$\begin{cases}2k+b=13\\6k+b=9,\end{cases}$

解得$k=-1$，$b=15$。 $\therefore$ $y=-x+15(2\leqslant x\leqslant 6)$。

【说明】 在函数自变量 x 的取值范围里，x每取一个值，函数 y 就有一个确定的值与它对应的关系来建立方程(组)，再解这个方程（组），常是确定解析式中的某些常数的常用方法。

例2 已知抛物线$y=f(x)$，当$x=2$ 时有最小值-9，且 $f(x)=0$ 的两个根的平方和是26，求$f(x)$的解析式。

思路：求二次函数 $f(y)=ax^2+bx+c$，也就是应用题中条件，求a、b、c的值。

解一：令 $f(x)=ax^2+bx+c$，则依题意，得

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=2\\[2mm]\dfrac{4ac-b^2}{4a}=-9\\[2mm]x_1{}^2+x_2{}^2=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{2c}{a}=26,\end{cases}$$

解得$a=1$，$b=-4$，$c=-5$。∴ $f(x)=x^2-4x-5$。

解二：由题设，可得顶点是 $(2,-9)$，故可设 $f(x)=a(x-2)^2-9=ax^2-4ax+4a-9$。因两根的平方和是26，故 $x_1^2+x_2^2=16-2\cdot\frac{4a-9}{a}$，即$16-2\cdot\frac{4a-9}{a}=26$，解得$a=1$，$\therefore f(x)=x^2-4x-5$。

【说明】 题给的条件不同，常设不同形式的解析式，以使解题过程简化。二次函数的表达式有下列三种形式：

①一般式：$y=ax^2+bx+c$，若已知三点坐标求解析式，常用一般式确定a、b、c。

②顶点式：$y=a(x+m)^2+k$，若给定的条件与函数图象的对称轴、顶点、函数的极值有关时，常用顶点式确定a、m、k，再化为一般式。

③交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$，若给定的条件和图象与x轴的交点有关时，常设交点式确定a，再化为一般式。

例3. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在直线 $y=x$ 上，且这个顶点和原点的距离为$\sqrt{2}$。又知抛物线与x轴两交点的距离为$2\sqrt{2}$，求此抛物线的解析式。

思路：设抛物线为$y=a(x+m)^2+k$，则顶点 $(-m,k)$ 在 $y=x$ 上，可得一方程；又顶点到原点的距离为$\sqrt{2}$可得第二个方程；再由抛物线与x轴两交点的距离为$2\sqrt{2}$得第三方程，由这三个方程可确定m、k、a的值。

解：令 $y=a(x+m)^2+k$，由题设，得

$$\begin{cases}-m=k\\ m^2+k^2=2,\end{cases}$$

因此抛物线的顶点为(1，1)或(-1，-1)。

当顶点在(1，1)时，$y=a(x-1)^2+1$

$$=ax^2-2ax+a+1.$$

因两根之差为$2\sqrt{2}$，故$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{-4a}}{|a|}=2\sqrt{2}$。

解得$a=-\frac{1}{2}$，$\therefore y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$。

当顶点在(-1，-1)时，$y=a(x+1)^2-1$

$$=ax^2+2ax+a-1.$$

同理可得，$a=\frac{1}{2}$，$\therefore y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$。

【说明】 要注意二次函数、一元二次方程、二次三项式之间的密切联系。

例4 已知不等式$ax^2+bx+c<0$的解集是$-2<x<-\frac{1}{2}$，而$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象与y轴的交点的纵坐标是方程$y^2-y-2=0$的正数解，求此二次函数表达式中的a、b、c的值。

思路： 抓住一元二次不等式、二次函数、一元二次方程之间的联系，即可确定a、b、c的值。

解： $\because$ $y^2-y-2=0\Rightarrow y_1=2, y_2=-1$。

又 $\because$ $ax^2+bx+c<0$的解集为$-2<x<-\frac{1}{2}$，

而$y=ax^2+bx+c$的图象与y轴的交点的纵坐标是2。

$\therefore$ $y=ax^2+bx+c$的图象大致如图(1-1)。

$\therefore$ 图象过三点 $A(-2,\ 0)$、$B\left(-\frac{1}{2},0\right)$、$C(0,2)$。

则 $\begin{cases} 4a-2b+c=0 \\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+c=0 \\ c=2。\end{cases}$

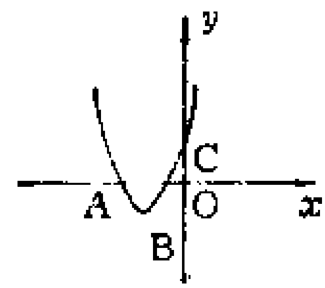


图 1—1

解得$a=2,b=5,c=2$。

2．二次函数的极值

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$，自变量 x 的取值范围是全体实数）的极值求法，常见的初等方法有三种：

1．配方法

$$\because \quad y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

$\therefore$ 若$a>0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，

若$a<0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

2．公式法

直接使用顶点坐标公式求具体函数的极值。

3．判别式法

在二次函数$y=ax^2+bx+c$中，把 y 看作是参数，得到关于 x 的二次方程 $ax^2+bx+(c-y)=0$。

要使 x 为实数，则应有 $b^2-4a(c-y)\geqslant0$，

即$4ay\geqslant4ac-b^2$。

当 $a>0$ 时，$y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$，此时 $y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；

当 $a<0$ 时，$y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$，此时 $y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$。

如果需要求出取得极值时相应的 x 值，则只需要将 $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ 代入 $ax^2+bx+(c-y)=0$ 求出 x 的值即可。

例5 x 为何值时，函数 $y=\frac{5}{x^2-4x+5}$ 有最大值？并求最大值。

思路： 先求 $z=x^2-4x+5$ 的最小值。

解： 令 $z=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$，当 $x=2$ 时，$z_{极小值}=1$。

$\therefore$ $y_{极大值}=5$，此时 $x=2$。

例6 求函数 $y=\frac{m}{3x^2+\sqrt{3}x+2}$ 的极值（$m\neq0$）。

思路： 先求 $z=3x^2+\sqrt{3}x+2$ 的极值，再按 $m>0$，$m<0$ 两种情况分别研究。

解： 令 $z=3x^2+\sqrt{3}x+2=\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$，

当 $x=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 时，$z_{极小值}=\frac{7}{4}$。

当 $m>0$ 时，$y_{极大值}=\frac{4}{7}m$，此时 $x=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$；

当 $m<0$ 时，$y_{极小值}=\frac{4}{7}m$。

例7 求函数 $y=x\sqrt{1-x^2}$ 的极值。

解： 当 $x>0$ 时，$y=\sqrt{x^2-x^4}$。令 $z=x^2-x^4=-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$。当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y=\sqrt{z}=\frac{1}{2}$ 是极大值。

当 $x<0$ 时，$y=-\sqrt{x^2-x^4}$。当 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y=-\frac{1}{2}$ 是极小值。

例8 求函数 $y=x+\sqrt{10ax-23a^2-x^2}$ 的最大值。

解： 令 $y=x+\sqrt{10ax-23a^2-x^2}$，

则 $y-x=\sqrt{10ax-23a^2-x^2}$。

平方整理得 $2x^2-2(y+5a)x+y^2+23a^2=0$…………①

∵ x 为实数，∴ $\Delta=(y+5a)^2-2(y^2+23a^2)\geqslant 0$，即 $(y-3a)(y-7a)\leqslant 0$。当 $a>0$ 时，$3a\leqslant y\leqslant 7a$；当 $a<0$ 时，$7a\leqslant y\leqslant 3a$。又∵ $10ax-23a^2-x^2\geqslant 0$，∴ $a>0$ 时，$(5-\sqrt{2})a\leqslant x\leqslant(5+\sqrt{2})a$；$a<0$ 时，$(5+\sqrt{2})a\leqslant x\leqslant(5-\sqrt{2})a$。

当 $a>0$ 时，$y=7a$ 代入①，得 $x=6a$；

$a<0$ 时，$y=3a$ 代入①，得 $x=(4\pm\sqrt{5})a$，满足上式。

∴ $a>0$ 时，$y_{最大值}=7a$；

$a<0$ 时，$y_{最大值}=3a$。

例9 如图(1—2)在 $\triangle ABC$ 中，已知 $BC=4$，$AC=2\sqrt{3}$，$\angle ACB=60°$，在 BC 边上有一动点 P，过 P 作 $PD//AB$，与 AC 相交于 D，连 AP，设 $BP=x$，

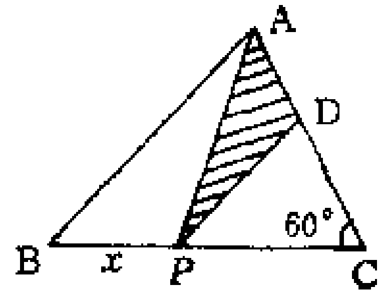


图 1—2

当 x 取何值时，$\triangle APD$ 的面积有最大值，并求出最大值。

思路： 利用 $S_{\triangle APD}=S_{\triangle APC}-S_{\triangle DPC}$，即可得到解决。

解： $\because\ PD//AB,\therefore\triangle PCD\backsim\triangle ABC$.则 $\frac{CP}{CB}=\frac{CD}{CA}$。

$$\therefore\quad \frac{4-x}{4}=\frac{CD}{2\sqrt{3}},\quad CD=\frac{\sqrt{3}\,(4-x)}{2}.$$

因此，$\triangle APD$ 的面积 $y=S_{\triangle APC}-S_{\triangle DPC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}(4-x)\sin 60^\circ-\frac{1}{2}\cdot(4-x)\cdot\frac{\sqrt{3}\,(4-x)}{2}\sin 60^\circ=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$。

当 $x=-\frac{\frac{3}{2}}{2\times\left(-\frac{3}{8}\right)}=2$ 时，$y_{最大值}=\frac{-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{4\times\left(-\frac{3}{8}\right)}=\frac{3}{2}$。

因此，当 $x=2$ 时，$\triangle APD$ 的面积最大，最大面积是 $\frac{3}{2}$。

【说明】 求解最值的实际问题，首先要根据题意画出图形，并由图形的性质列出函数的表达式（解析式），求出 y 的极值时，还要注意自变量是否在它的取值范围内，并符合实际意义。

3. 根的分布问题

利用二次函数的图象抛物线与 x 轴交点的位置关系，可

以解决一些二次方程根的分布问题。

例9 m 取何实数时，已知函数 $y=(m-2)x^2-(3m+6)x+6m(m\neq2)$的图象与 x 轴的：(1) 两个交点都在原点的右侧；(2) 两个交点分别在原点两侧；(3) 两个交点中的一个必是原点。

思路 将已知二次函数图象与 x 轴交点的位置与原点的位置关系，转化成相应的一元二次方程 (1) 有两个正根；(2) 有一个正根和一个负根；(3) 有一个根是0.来解决则较顺。

解：(1) 函数图象与 x 轴两个交点都在原点右侧，则应满足

$$\begin{cases} m-2\neq0 \\ \Delta>0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1\cdot x_2>0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} m\neq2 \\ -3(5m+2)(m-6)>0 \\ \dfrac{3m+6}{m-2}>0 \\ \dfrac{6m}{m-2}>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\neq2 \\ -\dfrac{2}{5}<m<6 \\ m<-2或m>2 \\ m<0或m>2 \end{cases} \Rightarrow 2<m<6.$$

(2) 依题意，同理可得

$$\begin{cases} m-2\neq0 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq2 \\ \dfrac{6m}{m-2}<0 \end{cases} \Rightarrow 0<m<2.$$

(3) 依题意，同理可得

$$\begin{cases} m-2\neq 0 \\ \Delta>0 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ -3(5m+2)(m-6)>0 \\ 6m=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m\neq 2 \\ -\dfrac{2}{5}<m<6 \\ m=0。 \end{cases}$$

则 $m=0$。

【说明】 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 和 x 轴的交点关于原点的位置，有如下关系：

两个交点都在原点左侧	两个交点都在原点右侧	两个交点在原点两侧	有一个交点是原点
$a\neq 0$ $\Delta>0$ $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}<0$ $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}>0$	$a\neq 0$ $\Delta>0$ $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0$ $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}>0$	$a\neq 0$ $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0$	$a\neq 0$ $\Delta>0$ $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=0$

例10 设a，b为正数，证明：方程$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+b}=0$有两个实根，一个根在$\dfrac{a}{3}$和$\dfrac{2a}{3}$之间，另一个根在$-\dfrac{2b}{3}$和$-\dfrac{b}{3}$之间。

思路：要证已给方程的两个根分别在$\frac{a}{3}$和$\frac{2a}{3}$，及$-\frac{2b}{3}$和$-\frac{b}{3}$之间，运用下面事实即可：若$f(a)>0$（或<0），$f(b)<0$（或>0）时，由图象易知二次方程至少有一个根x_0，满足$a<x_0<b$（设$a<b$）。

解：将原方程去分母后得到方程

$$f(x)=3x^2-2(a-b)x-ab=0 \qquad (1)$$

因$\Delta>0$，所以有两个不相等的实数根，又

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^2}{3}-\frac{1}{3}ab<0,$$

$$f\left(\frac{2a}{3}\right)=\frac{1}{3}ab>0.$$

故(1)的根必在$\left(\frac{a}{3},\ \frac{2a}{3}\right)$之间。而且该根不会使原方程分母为0。同理可得另一个根在$\left(-\frac{2b}{3},\ -\frac{b}{3}\right)$内。

例 11 已知方程$ax^2+bx+c=0$有两个相异实根，求证：方程$ax^2+bx+c+k\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$至少有一个根，在前一个方程的两根之间。

证：由题设，有$\Delta>0$，且前一方程的两根为

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

令 $f(x)=ax^2+bx+c+k\left(x+\frac{b}{2a}\right)$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

则 $f(x_1)=a\cdot\frac{b^2-4ac}{4a^2}+k\cdot\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{4ac-b^2}{4a}$

$$=k\cdot\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

同样 $f(x_2)=-k\cdot\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

由此可见，$f(x_1)$和$f(x_2)$有相异的符号，所以，后一个方程至少有一个根在x_1与x_2之间。

例12 k取何值时，方程$x^2+4x+4k-k^2=0$的一个根大于3，另一个根小于3。

思路：如果把这个问题转化成二次函数，就是抛物线$y=x^2+4x+4k-k^2$与x轴的两个交点必在定点（3，0）的两侧，且开口向上。因此，当$x=3$时，y的值一定小于零。

解：要使方程$x^2+4x+4k-k^2=0$的一个根大于3，另一个根小于3，则需有

$$3^2+4\times3+4k-k^2<0,$$

$\therefore$ $k^2-4k-21>0$，解之，得$k<-3$或$k>7$。

因此，当$k<-3$或$k>7$时，方程的一个根大于3，另一个根小于3。

例13 k为何值时，方程$7x^2-(k+13)x+k^2-k=0$的两根分别在区间(0,1)和(1,2)内。

解：令$f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$，此图象是开口向上的抛物线，依题意，则有

$$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)<0 \\ f(2)>0, \end{cases} \quad 即\begin{cases} k^2-k-2>0 \\ k^2-2k-8<0 \\ k^2-3k>0, \end{cases} \quad \begin{cases} k<-1或k>2 \\ -2<k<4 \\ k>3或k<0. \end{cases}$$

则当$3<k<4$或$-2<k<-1$时，方程的两根分别在区间$(0,1)$和$(1,2)$内。

（三）练习题

1、选择题

(1) 如果函数 $y=ax+2$ 的图象与函数 $y=bx+3$ 的图象相交于 x 轴上一点（其中$a\cdot b\neq 0$），那么a，b 的关系是（　　）

(A)　$a=b$.　　(B) $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$.

(C) $a+2=b+3$. (D) 以上都不对。

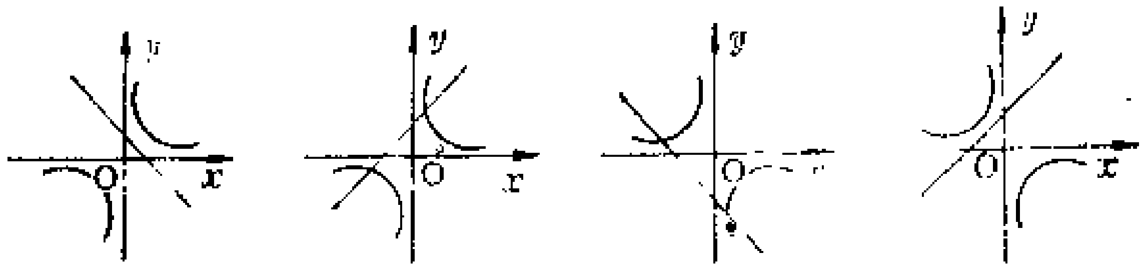
(2) 已知一次函数 $y=kx+4$的图象与两坐标轴围成的三角形面积为6，则 k 值为（　　）

(A)　± 3.　　(B)　$\frac{4}{3}$.

(C)　$-\frac{4}{3}$.　　(D)　$\pm\frac{4}{3}$.

(3) 在同一坐标系里，表示函数 $y=kx+b$ 与 $y=\frac{kb}{x}$ $(kb>0)$ 的图象是下列四个图中的（　　）

(4) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1—3 所示，则下列 6 个代数式



(A)　(B)　(C)　(D)

ab，ac，$a+b+c$，$a-b+c$，$2a+b$，$2a-b$ 中，其值为正的式子个数为　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) 2个．(B) 3个．(C) 4个．

(D) 4个以上．

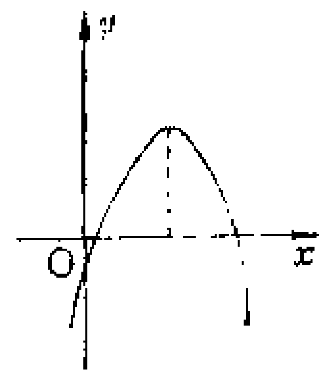


图 1—3

(5) 在 $y=ax^2+bx+c$ 中，如果 $a:b:c=2:3:4$，且该函数有最小值 $\frac{23}{4}$，那么它的解析式是（　　）

(A)　$y=2x^2+3x+4$．

(B)　$y=4x^2+6x+8$．　　(C)　$y=6x^2+9x+12$．

(D)　$y=8x^2+12x+16$．

2．填空题

(1) 在直角坐标系中，与 x 轴及 y 轴相切的圆的圆心为 P 点，且圆过坐标为(1，8)的点，P 点的坐标是______．

(2) 已知 $y=(2m^2+5m-12)x^{(m^2-3m+1)}$ 是一、三象限的反比例函数，则 $m=$____．

(3) 二次函数 $y=ax^2+bx(a>0,\ b<0)$ 的图象和 $y=2x^2$ 的图象形状一样，前者的图象和 x 轴的两个交点间的距离是3，则 $a=$____，$b=$____．

(4) 如果 A、B 为直角三角形的两个锐角，且 $\sin A=\frac{4}{5}$，函数 $y=(1-\sin B)x^2+\cos B\cdot x+1+\sin B$，那么函数 $\overline{y}$ 的最小值为____。

(5) 矩形 $ABCD$ 的宽 $AB=60$，$BC=40$，设动点 P 自 A 出发，沿着矩形的四边，自 $A\to B\to C\to D\to$ 回到 A，将距离 AP 看成路程（如图1—4中 P 点路程将是 $x=AB+BP$）的函数，则函数的表达式是____。

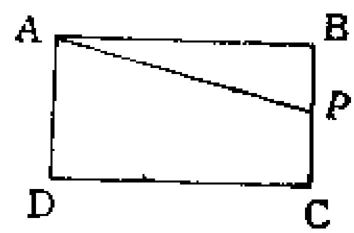


图 1—4

3. 如图1—5，一次函数 $y=-2x+2$ 的图象与两坐标轴围成 $\text{Rt}\triangle OAB$，一正比例函数的图象把 $\text{Rt}\triangle OAB$ 的面积分成 1:2 的两部分，求这个正比例函数的解析式。

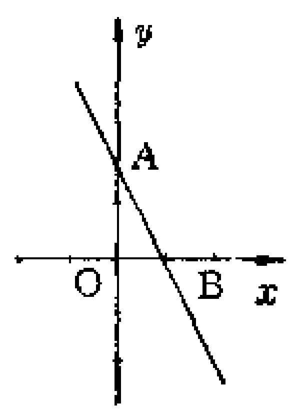


图 1—5

4. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向下，顶点落在第二象限。

(1) 确定 a,b,b^2-4ac 的符号，简述理由；

(2) 若此题抛物线经过原点，且顶点在 $x+y=0$ 上，与原点距离为 $3\sqrt{2}$，求抛物线的解析式。

5. 已知抛物线 $y=(m-3)x^2-mx+m$ 与 x 轴有两个交点 A、B，且 m 为奇数。

(1) 求这个函数的解析式；

(2) 如果抛物线上的一点 C，使得 $\triangle ABC$ 的面积为3，求 C 点的坐标。

6. 求证：不论 a 是什么实数，二次函数 $y=x^2+ax+a-2$ 的图象都与 x 轴相交于两个不同的点，并且求出这两点间的距离最小时 a 的值和最小距离。

7. 二次函数 $y=x^2+2mx+n$，（1）若它的图象经过点 $(1,1)$，求 m、n 间的关系；（2）在（1）的条件下，函数有最小值 -3，求 m、n 的值。

8. 已知 $x^2+2y^2=1$，求 $2x+5y^2$ 的最大值和最小值。

9. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的一部分如图 1—6 所示，试求：$a-b+c$ 的取值范围。

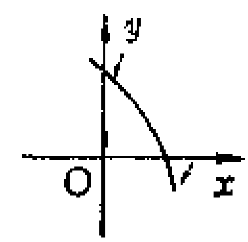


图 1—6

10. 设 a,b,c 是三角形的三边长，且 $b\geqslant a$，$b\geqslant c$，二次函数 $y=(a+b)x^2+2cx-(a-b)$ 在 $x=-\frac{1}{2}$ 时取最小值为 $-\frac{a}{2}$。求 $\triangle ABC$ 三内角的度数。

11. 已知 $y=(\cos\theta)x^2-(4\sin\theta)x+6$，对于任意实数 x 都有 $y>0$，且 θ 是三角形的一个内角，求 θ 的取值范围。

12. 若二次函数 $y=(m^2-4)x^2+(m^2-2m+24)x+6(m-6)$ 的图象与 x 轴的正半轴相交于横坐标为整数的两个不同的点，试确 m 的值。

13. m 取何值时，函数 $y=(m-2)x^2-4mx+2m-6$ 的图象与 x 轴的两个交点都在原点的左边。

14. 已知 $y=x^2+(k+3)x+2k-k^2$ 是关于 x 的二次函数，

（1）试证明它的图象与 x 轴总有两个不同的交点；

(2) 如果一个交点的横坐标 x 小于2，另一个交点的横坐标大于2，试确定实数 k 的取值范围。

15. 已知 x 为实数，求证：分式 $\frac{x^2+34x-7}{x^2+2x-7}$ 的值不能介于4和5之间。

16. 设 $m\neq\frac{1}{2}$，二次函数 $f(x)=x^2-(m-1)x+(2m-1)$。如果关于 x 的二次方程 $x^2-(m-1)x+(2m-1)=0$ 有两个大于2的不同实根，求 $f\left(\frac{m-1}{m-2}\right)$ 的取值范围。

17. 如图1—7，在两条平行直线 AB 和 CD 上，分别取一定点 M 和 N，在直线 AB 上取定长线段 $ME=a$，在线段 MN 上取一点 K，连结 EK 并延长交 CD 于 F，若两平行直线间的距离为 d，试问 K 取在何处时，$\triangle MEK$ 和 $\triangle NFK$ 的面积之和为最小？并求出这个最小值。

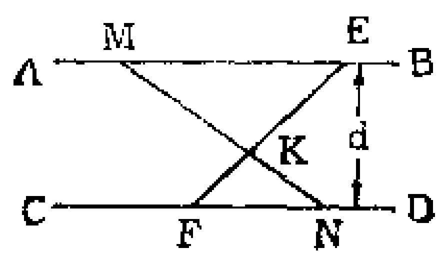


图 1—7

（四） 答案与提示

1. (1) B；(2) D；(3) B. ∵ $kb>0$，则 $y=\frac{kb}{x}$ 的图象如(A)，(B)，而 $y=kx+b$ 的图象如 (B)，(C)，(D)，故(B)同时满足两方程. (4) A；(5) B。

2. (1) (5，5)，(13，13)；(2) $m=2$；(3) 2，-6；(4) $1\frac{1}{5}$；(5) 若 P 点在 AB 上，$AP=x$，若 P 点在 BC 上，

$AP=\sqrt{60^2+(x-60)^2}$，若 P 点在 CD 上：
$AP=\sqrt{40^2+(160-x)^2}$，若 P 点在 DA 上，$AP=200-x$。

3. 利用相似三角形，可得：$y=x$或 $y=4x$。

4. (1) $\because a<0$，由 $x=-\frac{b}{2a}$，得$b<0,b^2-4ac>0$。

(2) 由抛物线顶点在 $x+y=0$上，有$-\frac{b}{2a}+\frac{4ac-b^2}{4a}=0$。由抛物线过原点。必有$c=0$。$\therefore b^2+2b=0$。解得$b=-2$或$b=0$(舍去)。再由抛物线顶点与原点距离为 $3\sqrt{2}$，有$\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)^2=(3\sqrt{2})^2$，以$b=-2$，$c=0$代入上式，并解得$a=\pm\frac{1}{3}$，$a=\frac{1}{3}$(舍去)，$\therefore$解析式为 $y=-\frac{1}{3}x^2-2x$。

5. (1) $y=-2x^2-x+1$。

(2) 设 $A(x_1, 0)$，$B(x_2, 0)$。由 $y=-2x^2-x+1$，得 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-1$。则$A\left(\frac{1}{2},0\right)$，$B(-1, 0)$，$AB=\frac{3}{2}$。设 $C(x,y)$，由题意，得 $S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot|y|=3$，解得$|y|=4$，$C$点坐标为$\left(\frac{-1+\sqrt{41}}{4},-4\right)$或$\left(\frac{-1-\sqrt{41}}{4},-4\right)$。

6. $a=2$时，最小距离是2。

7. (1) $2m+n=0$；

(2) $m_1=-3$，$n_1=6$；$m_2=1$，$n_2=-2$。

8。由$x^2+2y^2=1$可知$y^2=\frac{1-x^2}{2}$，且$-1\leqslant x\leqslant 1$，于是，$2x+5y^2=2x+\frac{5(1-x^2)}{2}=-\frac{5}{2}\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{29}{10}$。当$x=-1$时，$\left|x-\frac{2}{5}\right|$最大，当$x=\frac{2}{5}$时，$\left|x-\frac{2}{5}\right|$最小，所以，当$x=\frac{2}{5}, y=\sqrt{\frac{42}{10}}$时，$2x+5y^2$有最大值$\frac{29}{10}$，当$x=-1$，$y=0$时，$2x+5y^2$有最小值$-2$。

9。由图象知，有$a<0$，$f(0)=c=1$，$f(1)=a+b+c=1$，$-\frac{b}{2a}<0, \frac{4ac-b^2}{4a}>0$，可得$a<0$，$-1<b<0$，$c=0$。

$\therefore 0<a-b+c<2$。

10。由题设有$\frac{-c}{a+b}=\frac{1}{2}(1)$，$\frac{-(a+b)(a-b)-c^2}{a+b}=-\frac{a}{2}(2)$。

由(1)、(2) 得$(b-c)+(b-a)=0$，从而$b-c=0$，$b-a=0$，$\therefore a=b=c$。

11。当θ是钝角时，$\cos\theta<0$，这与y值恒正矛盾；

当$\theta=90°$时，$\cos\theta=0, \sin\theta=1, y=-4x+6$这也与$y$值恒正矛盾。

故θ只能是锐角，即$\cos\theta>0$，故二次函数有极小值，其极小值为正，$\therefore\ \frac{24\cos\theta-16\sin^2\theta}{4\cos\theta}>0$，由于$\cos\theta>0$，

$\therefore 24\cos\theta-16\sin^2\theta>0$，即$3\cos\theta-2\sin^2\theta>0$，$\therefore 3\cos\theta-2+2\cos^2\theta>0$，$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)>0$。$\because \cos\theta+2>0$ 恒成立，$\therefore 2\cos\theta-1>0$，$\cos\theta>\frac{1}{2}$，$\therefore 0°<\theta<60°$。

12. 交点为 $x=\frac{-(m^2-2m+24)\pm m(m-14)}{2(m^2-4)}$，$x_1=\frac{-6}{m-2}$，$x_2=\frac{8}{m+2}-1$，由 $\frac{-6}{m-2}$ 为正整数，得 $m=-4$，-1，0，1。由 $\frac{8}{m+2}-1$ 为正整数，得 $m=-1$，0，2。当 $m=0$时，$x_1=x_2=3$（不合题意）。$\therefore m=-1$是唯一的解。

13. 设两交点为$(x_1,0)$，$(x_2,0)$。又$x_1<0$，$x_2<0$，

则 $\begin{cases} \Delta=16m^2-4(m=2)(2m-6)>0 \\ x_1+x_2=\frac{4m}{m-2}<0 \\ x_1\cdot x_2=\frac{2m-6}{m-2}>0. \end{cases}$ 解得 $1<m<2$。

14. (1) $\Delta=(k+3)^2-4(2k-k^2)=5\left(k-\frac{1}{5}\right)^2+8\frac{4}{5}\geqslant 0$。

(2) $x_1<2$，$x_2>2$，即$x_1-2<0$，$x_2-2>0$，故$(x_1-2)(x_2-2)<0$。$\therefore x_1x_2-2(x_1+x_2)+4<0$，由韦达定理，有 $(2k-k^2)+2(k+3)+4<0$，$k^2-4k-10>0$，解得$k<2-\sqrt{14}$或$k>2+\sqrt{14}$。

15. 设 $y=\frac{x^2+34x-7}{x^2+2x-7}$，得$(1-y)x^2+(34-2y)x-$

$(7-7y)=0$，$\because x$为实数，$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程的判别式$\Delta\geqslant0$，得不等式，从而$y\geqslant5$。即分式的值不能介入 4 和 5之间。

16．设方程的两个根为 x_1 和x_2，又有$x_1+x_2=m-1$，$x_1\cdot x_2=2m-1$，而 $x_1>2$，$x_2>2$，于是$\frac{m-1}{4m-2}=\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$。$\because$抛物线开口向上，$\therefore$当 $x<\frac{1}{2}$时，对应的点在 x 轴上方，因而 $f\left(\frac{m-1}{m-2}\right)>0$。

17．设$MK=x$，$MN=b$，则 $NK=b-x$，又设$\angle EMN=\theta$，则$\angle MNF=\theta$，$AB//CD$，有$\triangle MKE\backsim\triangle NKF$，$\frac{a}{NF}=\frac{x}{b-x}$，$NF=\frac{a(b-x)}{x}$，$S_{\triangle面积和}=S_{\triangle MKE}+S_{\triangle NKF}=$

$\frac{a}{2}\sin\theta\left(2x+\frac{b^2}{x}+2b\right)$。$\because$ $a<0$。$\sin\theta>0$ 且为定值，$\therefore$

$S_{\triangle面积和}$与$2x+\frac{b^2}{x}-2b$同取极小值。设 $y=2x+\frac{b^2}{x}-2b$(1)

用判别式法解(1)得$y\geqslant2(\sqrt{2}-1)b$。$\therefore y_{最小值}=2(\sqrt{2}-1)b$。代入(1) 化简得$(\sqrt{2}x-b)^2=0$，$x=\frac{\sqrt{2}}{2}b$，此时

$S_{\triangle面积和最小}=\frac{a}{2}\sin\theta\cdot2(\sqrt{2}-1)b=(\sqrt{2}-1)ab\sin\theta=$

$(\sqrt{2}-1)ad$（$\because b\sin\theta=d$）。

二　极值与条件最值

上一节我们研究了一元二次函数的极值问题，这里将介绍简单分式函数的极值和简单多元二次函数的条件最值问题。

（一）基本原理

1. 利用二次三项式的判别式求有理分式函数的极值

对于有理分式函数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$（其中$f(x)$、$g(x)$是关于x的一次或二次函数式），一般变形为 $y\cdot g(x)-f(x)=0$，再整理为关于 x 的二次方程，因为使这个等式成立的 x 必为实数，所以得判别式 $\Delta=\varphi(y)\geqslant 0$，解关于 y 的不等式，即可得 y 的极值。这种函数，有的只有最小值或最大值；有的两者均有；有的两者均无。

2. 多元函数

一元二次函数只有一个自变量，称为一元函数，如果一个函数的自变量多于一个，则称此函数为多元函数。

一般地说，设对于 n 个变量 x_1，x_2，…，x_n 的每一组允许取用的值，均有变量 y 的唯一确定定值与它对应，则称变量 y 是变量 x_1，x_2，…，x_n 的 n 元函数，记为

$$y=\varphi(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)。$$

3. 条件最值

求多元函数的最值，并且对自变量还伴有附加条件，如在条件$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，而$x+2y=1$的时候，求$2x+3y^2$的最大值和最小值、这类最值问题，在数学上称为条件最值。这些附加条件，常称为约束条件。

解决条件最值问题的一般方法是利用约束条件，采用代入消元法，使问题转化成无条件的一元函数的最值问题来解决。

（二）范例与方法

例1 求函数 $y=\dfrac{x^2+1}{x}\ (x>0)$ 的极值。

思路：求函数极值有多种方法，应根据函数的形式，适当选择求极值的方法。此例将采用判别式法，配方法，基本不等式法等三种方法求解。

解一：（判别式法）

$y=\dfrac{x^2+1}{x}$改写为$x^2-yx+1=0$，当x取实数时，必有$\Delta=y^2-4\geqslant0$，即$|y|\geqslant2$。由$x>0$，所以y不会取负值，因此$y\geqslant2$。即函数的极小值为2。

解二：（配方法）

$$y=\frac{x^2+1}{x}=\frac{x^2-2x+1+2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}+2,$$

当$x>0$时，$\dfrac{(x-1)^2}{x}\geqslant0$，

$\therefore$ 函数y在$\dfrac{(x-1)^2}{x}=0$，即$x=1$时有极小值2。

解三（基本不等式法）

$$y=\frac{x^2+1}{x}\text{写成 } y=x+\frac{1}{x}\quad(x>0),$$

$\therefore\quad x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$。当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，等号成立，所以函数 y 当 $x=1$时有极小值2。

【说明】 基本不等式是根据 $(a-b)^2\geqslant 0$ 而得的。$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\geqslant 0$，$\therefore a^2+b^2\geqslant 2ab$，上题中 $a^2=x$，$b^2=\frac{1}{x}$，$a=\sqrt{x}$，$b=\sqrt{\frac{1}{x}}$，$\therefore\ x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$。

例2 求函数 $y=\frac{x^2-7x+12}{x-2}$ 极大值或极小值。

思路： 运用判别式法。

解： 原式变形为$x^2-(y+7)x+(2y+12)=0$，因x为实数，故有$\Delta=(y+7)^2-4(2y+12)\geqslant 0$，$\therefore y\leqslant -3-2\sqrt{2}$ 或 $y\geqslant -3+2\sqrt{2}$，故$y_{\text{极小值}}=-3+2\sqrt{2}$，此时$x=\frac{y+7}{2}=2+\sqrt{2}$，$y_{\text{极大值}}=-3-2\sqrt{2}$，此时 $x=\frac{y+7}{2}=2-\sqrt{2}$。

例3 已知函数 $y=\frac{ax+b}{x^2+2}$的极大值为1，极小值为-2，求实数a、b的值。

思路： 用待定系数法及判别式的知识求解。

解： 由原函数式得 $yx^2-ax+(2y-b)=0$，

当x取实数时，必有$\Delta=(-a)^2-4y(2y-b)\geqslant 0$，即$y^2-\frac{b}{2}y-\frac{a^2}{8}\leqslant 0$①，由题设极大值为1，极小值为－2，∴$(y-1)(y+2)\leqslant 0$②，由①、②知道$y^2-\frac{b}{2}y-\frac{a^2}{8}=(y-1)(y+2)$，即$y^2-\frac{b}{2}y-\frac{a^2}{8}=y^2+y-2$，比较两边的系数，得

$$-\frac{b}{2}=1,\ \frac{a^2}{8}=2,\therefore\quad b=-2,\ a=\pm 4.$$

例 4　求函数$y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$的最值。

思路：选择判别式法求解。

解：去分母，整理得

$$(y-1)x^2+(y+1)x+(y-1)=0 \qquad ①$$

当$y\neq 1$时，这是一个关于x的二次方程，∵x是实数，∴$\Delta=(y+1)^2-4(y-1)^2\geqslant 0\Rightarrow\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$。将$y=3$代入①，解得$x=-1$，即当$x=-1$时，$y$取最大值3。将$y=\frac{1}{3}$代入①，知$x=1$时，$y$取最小值$\frac{1}{3}$。

【说明】　一般说来，求最值时都必须找出与最值相应的x值，用判别式法也不例外，否则会导致错误。这是由于不等式$y\leqslant M$，意味着$y<M$或$y=M$，不一定必有$y=M$。看下面这个反例便清楚了。求函数$y=\frac{6x^2+6x+2}{2x^2+2x+1}$的最值。

变形后得关于 x 的二次方程 $(2y-6)x^2+(2y-6)x+(y-2)=0$，由 $\Delta\geqslant 0$，解得 $1\leqslant y\leqslant 3$。如果说最大值是 3 那就错了，因为，当 $y=3$ 时，上面关于 x 的方程变为 $1=0$，矛盾。最小值是 $1\left(x=-\frac{1}{2}\right)$ 是对的。

例5 已知 $x+y+z=3$，$x-y+5z=1$，求 $x^2+y^2+z^2$ 达到最小值时 x，y，z 的值。

思路： 由已知条件将 x、y 都化为 z 的函数，再将 $x^2+y^2+z^2$ 变为一元函数来求其最值。

解： $\begin{cases}x+y+z=3\\x-y+5z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2-3z\\y=1+2z\end{cases}$

$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2=4-12z+9z^2+1+4z^2+4z^2+z^2$$
$$=14z^2-8z+5.$$

当 $z=-\frac{b}{2a}=-\frac{-8}{28}=\frac{2}{7}$ 时，极小值：$\frac{4ac-b^2}{4a}=$

$\frac{4\times 14\times 5-64}{4\times 14}=3\frac{6}{7}$。此时，$x=1\frac{1}{7}$，$y=1\frac{4}{7}$，$z=\frac{2}{7}$。

例6 在 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，而且 $x+2y=1$ 的时候，求 $2x+3y^2$ 的最大值和最小值。

解： 令 $z=2x+3y^2$，则 $z=3y^2+2(1-2y)=3y^2-4y+2=3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$，由 $y\geqslant 0$ 及 $x=1-2y\geqslant 0$，得 $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$。又当 $y=\frac{2}{3}$ 时，z 取极小值，故在 $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$ 上 z 单调减少。因此，当 $y=0$ 时，$z=3\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}=2$ 为 $2x+3y^2$ 的最大值，当

$y=\frac{1}{2}$时，$z=3\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$为$2x+3y^2$的最小值。

例7 求三元函数$w=xy+yz+zx$的最小值，其中x、y、z为实数，且满足约束条件$x^2-yz-8x+7=0$，$y^2+z^2+yz-6x+6=0$。

思路：变换约束条件，采用代入消元法，使三元函数转化成一元函数的最值问题来解决。

解：由约束条件知$yz=x^2-8x+7$，$(y+z)^2=yz+6x-6=(x^2-8x+7)+6x-6=(x-1)^2$，$y+z=\pm(x-1)$，$z=-y\pm(x-1)$，代入$yz$中，$y^2\pm(x-1)y+(x^2-8x+7)=0$，由于$y$是实数，$\therefore$ $(x-1)^2-4(x^2-8x+7)\geqslant 0$，即$1\leqslant x\leqslant 9$，这是$x$的允许值的范围。

再将yz和$y+z$代入$w=xy+yz+zx$中消去变量y、z，使函数w变成为一个变量x的一元函数。

$$w=x(y+z)+yz=\pm x(x-1)+(x^2-8x+7)$$
$$=\begin{cases}2x^2-9x+7=2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{25}{8},\\-7x+7.\end{cases}$$

若$w=2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$，当$x=\frac{9}{4}$时，$w_{最小值}=-\frac{25}{8}$。

若$w=-7x+7$，当$x=9$时，$w_{最小值}=-50$。

总之，在区间$[1,9]$上，当$x=9$时，w的最小值为-50。

例8 若$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$，问$x$、$y$、$z$为何值时，$p=x^2+y^2+z^2$的值最小，并求最小值。

解： 设 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}=k$，则 $x=2k+1$，$y=2k-1$，$z=3k+2$，$\therefore p=(2k+1)^2+(2k-1)^2+(3k+2)^2=17k^2+12k+6=17\left(k+\frac{6}{17}\right)^2+\frac{66}{17}$，$\therefore k=-\frac{6}{17}$，即 $x=\frac{5}{17}$，$y=-\frac{29}{17}$，$z=\frac{16}{17}$ 时，$p=\frac{66}{17}$ 是最小值。

（三）练习题

1．选择题：函数 $y=\frac{6x^2+6x+2}{2x^2+2x+1}$ （　　）

(A) 有最大值和最小值．(B) 有最大值，没有最小值．

(C) 有最小值，没有最大值．

(D) 既没有最大值，也没有最小值．

2．求函数 $y=\frac{x+2}{x^2+x+1}$ 的极大值或极小值．

3．x，y，z 为实数，且 $\begin{cases} x+2y-z=21 \\ x-y+2z=12, \end{cases}$ 问 x、y、z 为何值时，$w=x^2+y^2+z^2$ 的值最小？

4．设 $\frac{ax+b}{x^2+1}$ 的极大值为4，极小值为 -1．求 a、b 的值．

5．求函数 $y=\frac{4x+3}{x^2+1}$ 的极值．

6．设 x，y 为正整数，且 $xy=24$，求 $u=\frac{1}{x^2+y^2}$ 的最大值．

7. x、y为正数，且$xy=x+y$，求$x+y$的最小值。

8. 设方程$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\sqrt{k}$有实根，求$k$的极值。

（四） 答案与提示

1. (c);

2. $yx^2+(y-1)x+(y-2)=0$，∵x为实数，

∴ $\Delta=(y-1)^2-4y(y-2)\geqslant 0$，解之，得$1-\frac{2}{\sqrt{3}}\leqslant y\leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{3}}$，$y_{极小值}=1-\frac{2}{\sqrt{3}}$，此时$x=-\sqrt{3}-2$，$y_{极大值}=1+\frac{2}{\sqrt{3}}$，此时$x=\sqrt{3}-2$。

3. 用z表x、y代入a函数w，求一元二次函数的最小值。当$x=11$，$y=7$，$z=4$时，函数最小值为18。

4. 令$\frac{ax+b}{x^2+1}=k$，则$kx^2-ax+k-b=0$。∵x为实数，∴$\Delta=a^2-4k(k-b)\geqslant 0$。∵$k$有极大值与极小值时，∴可令$a^2-4k(k-b)=0$，∴$k=\frac{2b\pm\sqrt{4b^2+4a^2}}{4}=\frac{b\pm\sqrt{b^2+a^2}}{2}$，

即$8=b-\sqrt{b^2+a^2}\cdots$①，$-2=b-\sqrt{b^2+a^2}$②，

解之，得$\begin{cases}b=3\\a=4,\end{cases}$ $\begin{cases}b=3\\a=4.\end{cases}$

5. 令$\frac{4x+3}{x^2+1}=k$，则$kx^2-4x+k-3=0$。∴x为实数，

$\therefore \Delta = 16 - 4k(k-3) \geqslant 0$，即$k^2 - 3k - 4 \leqslant 0$．解之得$-1 \leqslant k \leqslant 4$．$\therefore k$的最大值为4，最小值为$-1$．

6．$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy = 48 + (x-y)^2$．

$\because x$、y为正整数，且$xy = 24$，故$x - y$的最小值为2，$x^2 + y^2$的最小值为52，$\therefore \dfrac{1}{x^2 + y^2}$的最大值为$\dfrac{1}{52}$．

7．令$x + y = m$，则$y = m - x$．代入原式得$x(m-x) = m$，$\therefore x^2 - mx + m = 0$，$x = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$．$\because x$、$y$为正数，$\therefore m$为正数．并且必须$m^2 - 4m \geqslant 0$，即$m \geqslant 4$．$\therefore m$的最小值为4，即$x + y$的最小值为4．

8．$\begin{cases} \sqrt{1+x} \geqslant \sqrt{1-x}, \\ 1 + x \geqslant 0, \\ 1 - x \geqslant 0, \end{cases}$ 解之得$0 \leqslant x \leqslant 1$．

$\therefore$ k的极大值为2，k的极小值为0．

三　恒等式及恒等变形

恒等变形在数学中是一种很重要的代数变换，应用十分广泛，且对培养技巧和灵活性，是颇为有益的。

（一）基本原理

基本概念

1．恒等

如果两个代数式，不管其中的字母取（使两式都有意义的）什么值，这两个代数式的值都相等，就称这两个代数式恒等。

2．恒等变形

把一个代数式变换成另一个和它恒等的代数式，称为恒等变形。

3．恒等式

表示两个式子恒等的等式称为恒等式。

4．多项式恒等的判定定理

如果两个多项式合并同类项后对应项系数都相等，那么这两个多项式恒等。

5．多项式恒等的性质定理

如果两个多项式恒等，那么它们合并同类项后，对应项系数都相等。

（二） 范例与方法

第一 整式及分式的变形

例1 若$b^2+bc=2ac$，$9a^2=6ab+7bc$、求$a:b:c$的值。

思路：变换题设条件，利用代换消元，可达到解题目的。

解：由$b^2+bc=2ac$可得$c=\dfrac{b^2}{2a-b}$，代入$9a^2=6ab+7bc$，化简得$18a^3-21a^2b+6ab^2-7b^3=0$，$3a^2(6a-7b)+b^2(6a-7b)=0$，$(3a^2+b^2)(6a-7b)=0$，$3a^2+b^2=0$或$6a-7b=0$。$3a^2+b^2=0$时，必有$a=b=c=0$。这时对$a:b:c$来说没有意义，舍去。

当$6a-7b=0$时，有$a:b=7:6$，再由$c=\dfrac{b^2}{2a-b}=\dfrac{3b^2}{6a-3b}=\dfrac{3b^2}{7b-3b}=\dfrac{3}{4}b$。即$b:c=4:3$。

$\therefore\quad a:b:c=14:12:9$。

例2. 已知a、b、c为非零实数，$a^2+b^2+c^2=1$，$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+3=0$，求$a+b+c$的值。

思路：由第二个式去分母，得$(a+b+c)(ab+bc+ca)=0$，再由上式可找到$a+b+c$的值的解题途径。

解：由$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+3=0$，去分

母得$(a+b+c)(ab+bc+ca)=0$，$\therefore a+b+c=0$或$ab+bc+ca=0$。又 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=1$，$\therefore (a+b+c)^2=1$，则$a+b+c=\pm 1$，则$a+b+c$ 的值是 0 或 1 或 -1。

例3 已知 $x+y=1$，$xy=2$，$a+b=3$，$ab=4$，且$m=ax+by$，$n=bx+ay$，求m^3+y^3。

思路：变换结论，利用已知。

解：
$$
\begin{aligned}
m^3+n^3&=(ax+by)^3+(bx+ay)^3\\
&=a^3x^3+b^3y^3+b^3x^3+a^3y^3+3abxy(ax+by)\\
&\quad+3abxy(bx+ay)\\
&=a^3(x^3+y^3)+b^3(x^3+y^3)+3abxy(ax+by\\
&\quad+bx+ay)\\
&=(a^3+b^3)(x^3+y^3)+3abxy(x+y)(a+b)\\
&=(a+b)[(a+b)^2-3ab](x+y)[(x+y)^2\\
&\quad-3xy]+3abxy(x+y)(a+b)\\
&=3(3^2-12)\times 1\times(1^2-6)+3\times 4\times 2(1\times 3)=117.
\end{aligned}
$$

例4 已知a，b，c，满足$a+b+c=0$，$abc=8$，试判断$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的值的符号。

解：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$，又由 $(a+b+c)^2=0$得$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=ab+bc+ca$，$\therefore ab+bc+ca\geqslant 0$。又$abc=8>0$，$\therefore a$，$b$，$c$均不为零。$\therefore ab+bc+ca>0$，$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

>0。因此，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的值的符号为正。

例5 求证：$\frac{2a-b-c}{a^2-ab-ca+bc}+\frac{2b-c-a}{b^2-ab-cb+ca}$

$$+\frac{2c-a-b}{c^2-ac-bc+ab}=0.$$

证：左边$=\left(\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}\right)+\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}\right)$

$$+\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-b}\right)=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-b}$$

$$+\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a-c}-\frac{1}{b-c}=0,$$ ∴原式成立。

例6 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，求证 a、b、c 中必有二数互为相反数。

思路：由条件入手，代去分母，再进行整式变形。

证：由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，整理得

$$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc=0.$$

$$(a^2c+b^2c+2abc)+(ab^2+a^2b)+(ac^2+bc^2)=0,$$

$$c(a+b)^2+ab(a+b)+c^2(a+b)=0.$$

$$(a+b)[ac+bc+ab+c^2]=0.$$

$$(a+b)(b+c)(a+c)=0,$$

$a+b=0$或$b+c=0$或$a+c=0$。

∴ a、b、c中必有两数互为相反数。

例7 已知$N=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$，求$N$。

解： $\because$ $N=1+\frac{1}{1+N}$，$N-1=\frac{1}{N+1}$，$N^2-1=1$，

$N^2=2(\because N>0)$，$\therefore N=\sqrt{2}$。

例8 设有n个实数x_1、x_2、$x_3\cdots$、x_n，其中每一个不是$+1$，就是-1，且$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0$，

试证：n是4的倍数。

证： 设$y_1=\frac{x_1}{x_2}$，$y_2=\frac{x_2}{x_3}$，$\cdots$，$y_{n-1}=\frac{x_{n-1}}{x_n}$，$y_n=\frac{x_n}{x_1}$，则$y_1$，$y_2\cdots y_{n-1}$，$y_n$中每一个不是$+1$就是$-1$，由于$y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+y_n=0$，所以其中$+1$的数目与$-1$的数目相等，记为$k$个，则有$n=2k$，从而$y_1y_2\cdots y_{n-1}y_n=(-1)^k$，但$y_1\cdot y_2\cdots y_{n-1}\cdot y_n=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdots\frac{x_n}{x_1}=1$，即$(-1)^k=1$，故$k$为偶数，即存在整数$m$，使$k=2m$，于是$n=2k=4m$是4的倍数。

例9 若x^3+px^2+qx+r能被ax^2+bx+c整除（$abc\neq 0$）求证：$\frac{ap-b}{a}=\frac{aq-c}{b}=\frac{ar}{c}$。

思路： 运用待定系数法，比较恒等式两边的系数，即可得证。

证：设 $x^3+px^2+qx+r=(ax^2+bx+c)\left(\frac{x}{a}+h\right)$，则

$$x^3+px^2+qx+r=x^3+\left(\frac{b}{a}+ah\right)x^2$$

$$+\left(\frac{c}{a}+hb\right)x+ch,$$

$\therefore\quad \frac{b}{a}+ah=p,\quad \frac{c}{a}+bh=q, r=ch,$

$\therefore\quad ah=\frac{ap-b}{a}=\frac{aq-c}{b}=\frac{ar}{c}$。

第二　根式的恒等变形

例10　计算 $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$。

思路：将根号内的式子配成完全立方式，将外层根号去掉，通过计算即可得到结果。

解：$\because\quad 5\sqrt{2}+7=(\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}+1)^3$，

同理　$5\sqrt{2}-7=(\sqrt{2}-1)^3$

$\therefore\quad \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$。

【说明】　这种将根号内的式子配成完全平方式或完全立方式，再将外层根号去掉的方法，通常称配方法。

例11　证明：$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$。

思路：利用韦达定理。

证：设 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=A$，$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=B$，

易知　$A\cdot B=\sqrt[3]{400-392}=2$。解一元二次方程

$x^2-4x+2=0$，得$x_1=2+\sqrt{2}$，$x_2=2-\sqrt{2}$。

$\because\quad x_1^3=(2+\sqrt{2})^3=20+14\sqrt{2}$，$x_2^3=(2-\sqrt{2})^3$

$=20-14\sqrt{2}$。

$\therefore\quad x_1=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=A$，$x_2=\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=B$。

故由韦达定理知 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$。

【说明】 若 A、B 均为根式，如果 $A\cdot B=N$，而要证 $A+B=M$（M 为常数），这时可作一元二次方程 $x^2-Mx+N=0$，设此方程的两根为x_1,x_2，若有 $x_1=A$，$x_2=B$，则由韦达定理知 $A+B=x_1+x_2=M$，从而 $A+B=M$ 为恒等式。

例12 设 $a\geqslant\frac{1}{8}$，求证：

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{8}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a+1}{3}}}=1。\tag{1}$$

思路：对要证根式恒等式的部分根式作如下代换 设 $\sqrt{\frac{8a-1}{3}}=A$，$\because a\geqslant\frac{1}{8}$，$\therefore A\geqslant0$，可求得 $a=\frac{3A^2+1}{8}$。

代入左边，可将根式化简。

证：设$\sqrt{\frac{8a-1}{3}}=A$，$\quad\because a\geqslant\frac{1}{8}$，$\therefore A\geqslant0$，

$\therefore\quad a=\frac{3A^2+1}{8}$，则$\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}=\frac{(A^2+3)A}{8}$，故

$$左边=\sqrt[3]{\frac{3A^2+1}{8}+\frac{(A^2+3)A}{8}}+\sqrt[3]{\frac{3A^2+1}{8}-\frac{(A^2+3)A}{8}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{(1+A)^3}{8}}+\sqrt[3]{\frac{(1-A)^3}{8}}=\frac{1+A}{2}+\frac{1-A}{2}=1=\text{右边。}$$

因此（1）为恒等式。

【说明】 此即1956年北京市数学竞赛题第二题的第2题。

例13 设 y 是与 $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}}+\sqrt[3]{2}$ 最接近的整数，求 $\sqrt{3-2\sqrt{y}}$ 的值。

解： $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}}+\sqrt[3]{2}=\sqrt{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1}+\sqrt[3]{2}=$ $\sqrt[3]{2}+1$，而 $1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}=1.414\cdots$，因此与 $\sqrt[3]{2}$ 最接近的整数是1，故与 $\sqrt[3]{2}+1$ 最接近的整数是2．将 $y=2$ 代入，$\sqrt{3-2\sqrt{y}}=\sqrt{2}-1$。

例14 若 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$，求分式

$$\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+3}{x^2-8x+15}\text{的值。}$$

解： $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{4^2+\sqrt{3}^2-8\sqrt{3}}$

$$=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}=4-\sqrt{3}.$$

$\therefore\quad (x-4)^2=3\Rightarrow x^2-8x+15=2$，

原式 $=x^2+2x-1+\dfrac{18-20x}{x^2-8x+15}$，以 $x=4-\sqrt{3}$ 代入，得：原式 $=18-8\sqrt{3}+2(4-\sqrt{3})+\dfrac{18-20(4-\sqrt{3})}{2}$

$$=18+8+9-40-8\sqrt{3}-2\sqrt{3}+10\sqrt{3}=-5.$$

【说明】 分式相除降低次数，在求值时是常用的方法。

例15 设$\sqrt{19-8\sqrt{3}}$的整数部分为x，小数部分为y。试求$x+y+\frac{1}{y}$的值。

解： $\because$ 原式$=\sqrt{4^2-2\times4\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=4-\sqrt{3}=2+(2-\sqrt{3})$，而$0<2-\sqrt{3}<1$，$\therefore x=2$，$y=2-\sqrt{3}$。$\therefore x+y+\frac{1}{y}=2+2-\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=4-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=6$。

第三　指数式和对数式的恒等变形

例16 化简$\left[x(1-x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right]\div[(1-x)^{\frac{1}{3}}$

$$\times(1-2x+x^2)^{-1}]。$$

思路： 利用有理指数幂使运算简化。

解： 原式$=\frac{x(1-x)+x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\div\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)^2}=\frac{x(1-x)+x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}$

$$\times\frac{(1-x)^2}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}=\frac{x}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\times(1-x)^{\frac{5}{3}}=x。$$

例17。 若$60^a=3$，$60^b=5$，求$12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$的值。

解： $\because$ $a=\log_{60}3$，$b=\log_{60}5$，$\therefore 1-a-b=\log_{60}4$，$2(1-b)=2\log_{60}12$。$\frac{1-a-b}{2(1-b)}=\frac{\log_{60}4}{2\log_{60}12}=\frac{\log_{60}2}{\log_{60}12}$

$=\log_{12}2$。

$\therefore$ $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}=12^{\log_{12}2}=2$。

例18 求$\dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\dfrac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}$

$$+\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}\text{的值。}$$

解： 三个分式的分子、分母分别乘以x^{-a}、x^{-b}、x^{-c}得$\dfrac{x^{-a}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}$、$\dfrac{x^{-b}}{x^{-b}+x^{-c}+x^{-a}}$、$\dfrac{x^{-c}}{x^{-c}+x^{-a}+x^{-b}}$。而这三个分式与对应的原分式相等。

$$\therefore\quad \text{原式}=\frac{x^{-a}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}+\frac{x^{-b}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}$$

$$+\frac{x^{-c}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}=\frac{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}=1。$$

例19 对表达式$A=\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^nx^{n^2}}}$

$$+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{a^{n^2}x^n}}-b$$

进行变换，然后求当 $x=\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$时$A$的值。

思路： 将表达式A中的根式变换成分数指数，能使变换方便简化。

解： $A=\sqrt[n]{x^{\frac{n^2}{n+1}}\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)}+\sqrt[n]{a^{\frac{n^2}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}\right)}$

$$-b=\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}}\left(\sqrt[n]{x^{\frac{n^2}{n+1}}}+\sqrt[n]{a^{\frac{n^2}{n+1}}}\right)$$

$$-b=\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}-b$$

当 $x=\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}=0$ 时，

即　$x^{\frac{n}{n+1}}=b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}$或 $x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}=b^{\frac{n}{n+1}}$，

则　$A=\left(b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}-b=0$。

例20　x、y、z是实数，且$xyz\neq0$，当$5x+4y+2z=0$，$8x^3+27y^3+125z^3-90xyz=0$时，求$\log_8\left|\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\right|$的值。

解： $\because 8x^3+27y^3+125z^3-90xyz=(2x)^3+(2y)^3+(5z)^3-3(2x)(3y)(5z)=\frac{1}{2}(2x+3y+5y)[(2x-3y)^2+(3y-5z)^2+(5z-2x)^2]$

有（Ⅰ）$\begin{cases}5x+4y+2z=0\\2x-3y=3y-5z=5z-2x=0,\end{cases}$

（Ⅱ）$\begin{cases}5x+4y+2z=0\\2x+3y+5z=0.\end{cases}$

由（Ⅰ）解得$x=y=z=0$，与已知条件$xyz\neq0$矛盾，故舍去。由（Ⅱ）解得$x:y:z=2:(-3):1$。令$x=2t$，$y=-3t$，$z=t$。则$\log_8\left|\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\right|=\log_8\left|\frac{-7t^2}{14t^2}\right|=\log_8\frac{1}{2}$

$$=-\frac{1}{3}.$$

例21　已知a、b、c为实数，$(a\neq0)$且满足关系式$\lg m^{3a}+\lg m^{2c}=2\lg m^b$（$m>0$，$m\neq1$）。

求证： $ax^2+bn+c=0$恒有实根。

思路： 变换条件，将对数式化为指数式，再运用判别式可得证。

证： $\lg m^{3a}+\lg m^{2c}=2\lg m^{b}$，即$3a\lg m+2c\lg m=2b\lg m$。

$3a+2c=2b$，$b=\dfrac{3a+2c}{2}$，$b^2-4ac=\dfrac{9a^2+4c^2+12ac}{4}-4ac$

$=\dfrac{9a^2+4c^2-4ac}{4}=\dfrac{a^2-4ac+4c^2+8a^2}{4}=\dfrac{1}{4}(a-2c)^2+$

$2a^2>0$。

$\therefore\ ax^2+bx+c=0$恒有实数根。

第四　条件等式证明

要从一个（或一些）条件等式推出另一个（或一些）等式，这仍属代数恒等变形问题，解题关键在于灵活运用恒等变形，找出条件和结论之间的联系。一般常有下列几种方法：

1．代入法

例22　若$x>0$，$y>0$，且$x-2\sqrt{xy}-15y=0$。

求证： $\dfrac{x+\sqrt{xy}+2y}{x-2\sqrt{xy}+y}=2$。

证： 由$x-2\sqrt{xy}-15y=0$，得$(\sqrt{x}-5\sqrt{y})(\sqrt{x}+3\sqrt{y})=0$，$\because\sqrt{x}+3\sqrt{y}\neq0$，$\therefore x=25y$。

$$左式=\frac{25y+\sqrt{25y^2}+2y}{25y-2\sqrt{25y^2}+y}=\frac{25y+5y+2y}{25y-10y+y}$$

$$=\frac{32y}{16y}=2。$$

故得证。

【说明】 解条件等式的问题，当条件直接代入行不通

时，变换条件便成为问题的关键，变换方法有：①将已知条件平方、立方或运用乘法公式变形；②将已知条件运用因式分解变形等。这就告诉我们要认真审题，思索解题途径，从而恰当地变换条件，以达到解题的目的。

2．设参法

例23 若$a:x=b:y=c:z$，求证：$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}=\frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2}$。

证： 令$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k$，则$a=kx$，$b=ky$，$c=kz$，则左边$=k^3(x+y+z)$，右边$=k^3(x+y+z)$。故得证。

【说明】 当条件等式是几个连续等式时，常引进一个参量（k）来处理，这也是一种换元方式。

例24 已知$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，

求证：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。

思路： 已知条件和要证的等式中有六个字母，而它们的变化是倒数关系，因此使用参数等量代换，减少字母的个数。

证： 令$u=\frac{x}{a}$，$v=\frac{y}{b}$，$w=\frac{z}{c}$，则$u+v+w=1$，$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$。∴ $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{uv+vw+wu}{uvw}=0$，

从而$u^2+v^2+w^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu)=(u+v+w)^2=1$。

∴ 所证等式成立。

【说明】 以上两题是引进参数等量代换，能把复杂的化简与证明转化为简捷的解法。

3. 消去法

例25 已知$ax+by=0$，$cx^2+dxy+ey^2=0$，$x\neq0$，$y\neq0$，则$a^2e+b^2c=abd$，试证之。

思路： 在两个条件式中会有a，b，c，d，e，x，y，而结论中只含有a，b，c，d，e，于是，可以设想，由条件式消去x，就能得到要证的关系。

证： 由$x=-\frac{b}{a}y$，代入第二个式子，$c\left(-\frac{b}{a}y\right)^2+dy\cdot\left(-\frac{b}{a}y\right)+ey^2=0$，$\frac{cb^2}{a^2}-\frac{bd}{a}+e=0$，$cb^2-abd+a^2e=0$，$\therefore a^2e+b^2c=abd$。

（三）练 习 题

1. 选择题

（1）已知$\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}$，则$\sqrt{4x+x^2}$的值是

（ ）

$(A)\ a-\frac{1}{a}$。$(B)\ \frac{1}{a}-a$。$(C)\ a+\frac{1}{a}$。(D) 以上都不对。

(2) 已知实数 x、y、z，满足$\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+z^2-z+\frac{1}{4}=0$，则 $(z+y)^x$的值是（　　）

(A) 2. (B) 4. (C) $\sqrt{2}$. (D) $2\sqrt{2}$.

(3) 把代数式 $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$根号外的因式移入根号内，则原式等于（　　）

(A) $\sqrt{1-a}$. (B) $\sqrt{a-1}$. (C) $-\sqrt{a-1}$.
(D) $-\sqrt{1-a}$.

(4) 已知$\lg a=1.02$，则$0.01^{0.01}$的值（　　）

(A) a. (B) $\frac{1}{a}$. (C) $10a$. (D) $\frac{1}{10a}$.

(5) 如果$\log_7[\log_3(\log_2 x)]=0$，那么$x^{-\frac{1}{2}}$等于（　　）

(A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. (C) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. (D) 以上都不对.

2. 填空题

(1) 若$a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$，则$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值为____.

(2) 已知$\frac{4^x}{2^{x+y}}=8$及$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}}=243$，其中 x、y 为实数，则$xy=$____.

(3) $x=(\log_8 2)^{\log_2 8}$，则$\log_3 x=$____.

(4) 若$\lg 3=a$，则$\lg(3+3^{-1})=$____.

3. 当$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p+q}=0$，求$\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}$的值。

4. 若$x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$，求分式$\dfrac{x^6+14x^3+50}{x^2+2x+2}$的值。

5. 设a，b，c，d都是整数，且$m=a^2+b^2$，$n=c^2+d^2$，则mn也可以表成两整数的平方和，试证明之，

6. 已知$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$，求证：

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

7. 已知$x^{2a}=2\sqrt{2}+3$，求证：$\dfrac{x^{3a}+x^{-3a}}{x^a+x^{-a}}=5$。

8. 证明：如果方程$x^2+mx+n=0$的一个根是另一个根的平方，那么系数之间存在关系：

$$m^3-n(3m-1)+n^2=0.$$

（四） 答案与提示

1. (1) B； (2) C； (3) D； (4) D； (5) D。

2. (1) 15； (2) 4； (3) -3； (4) $1-a$。

3. 由已知得$(p+q)q-(p+q)p-pq=0$，即$q^2-pq-p^2=0$。除以p^2得$\left(\dfrac{q}{p}\right)^2-\left(\dfrac{q}{p}\right)-1=0$，$\therefore \dfrac{q}{p}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。

当$\dfrac{q}{p}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$时，$\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\sqrt{5}$；

当$\dfrac{q}{p}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$时，$\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$。

4. $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\Rightarrow x^3=5\sqrt{2}-7$. $\therefore (x^3+7)^2=50$.

又$(\sqrt{2}-1)^3=5\sqrt{2}-7\Rightarrow x=\sqrt{2}-1$. $\therefore\ (x+1)^2=2$.

原式$=\dfrac{(x^3+7)^2+1}{(x+1)^2+1}=\dfrac{50+1}{2+1}=17$.

5. $n\cdot m=(a^2+b^2)\ (c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd+b^2c^2+a^2d^2+2abcd=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$.

$\because$ a, b, c, d是整数, $\therefore ac-bd$和$bc+ad$也是整数。

$\therefore$ $m\cdot n$可表示成两个整数的平方和。

6. 左边$=\sqrt{\sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})}$

$$+\sqrt{\sqrt[3]{y^4}(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})$$

$$=(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^{\frac{3}{2}}=a.$$由此得 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

7. 左式$=\dfrac{(x^a+x^{-a})(x^{2a}-x^ax^{-a}+x^{-2a})}{x^a+x^{-a}}=x^{2a}+x^{-2a}$

$-1=(2\sqrt{2}+3)+\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3}-1=2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+3-1$

$=5$。得证。

8. 设方程的一个根是α, 另一个根是α^2, 则有

$$\begin{cases}\alpha+\alpha^2=-m & ①\\ \alpha\cdot\alpha^2=n & ②\end{cases}\quad 即\begin{cases}\alpha+\alpha^2=-m & ③\\ \alpha^3=n & ④\end{cases}$$

③的两边分别立方得 $\alpha^3+3\alpha^4+3\alpha^5+\alpha^6=-m^3$。即 $\alpha^3+\alpha^6+3\alpha^3(\alpha+\alpha^2)=-m^3$。将③、④代入上式得 $n+n^2+3n(-m)=-m^3$。即$m^3-n(3m-1)+n^2=0$。

四 一元二次不等式及应用

（一） 基本原理

1. 基本概念

（1）不等式；（2）不等式的解集；（3）解不等式；（4）一元二次不等式；（5）一元一次不等式组；（6）绝对值不等式。

2. 不等式性质

（1）$a>b \Longleftrightarrow a-b>0$，

$a<b \Longleftrightarrow a-b<0$，

$a=b \Longleftrightarrow a-b=0$。

（2）传递性：$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$。

（3）加法单调性：$a>b$，$a+c>b+c$，

（4）乘法单调性：$a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$。

$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$。

（5）乘法法则：$a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$。

（6）乘方法则：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$，$a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$（$n$为自然数）。

3. 几个基本不等式

（1）a、b是实数时，$a^2+b^2 \geqslant 2ab$（等号在$a=b$时成立）。

（2）a_1，a_2，…，$a_n>0$时，$a_1+a_2+\cdots$

$+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$. （等号仅在$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立）

（这个不等式称为均值定理）.

4. 一元二次不等式的解法

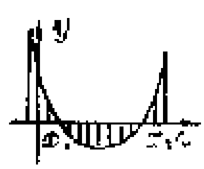
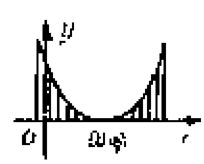
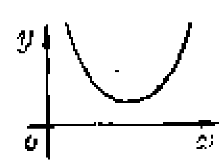
（1）利用不等式组

分解（把一元二次不等式写成一般形式，把左边的二次三项式分解因式）；

化组（利用积的符号法则转化成为不等式组）；

求组解、定原解。

（2）图象解法

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$x<x_1$或$x>x_2$	$x\neq x_1$	全体实数
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$x_1<x<x_2$	无　　解	无　　解

（二）范例与方法

1. 一元二次不等式

例1　若 $x^2-5x+6<0$，解方程$|x-4|+|x+1|=5$。

思路：用不等式组或图象解法求得不等式的解集，在这个解集的条件下，将方程的绝对值符号去掉，求出其解。

解：∵　$x^2-5x+6<0$ 的解集为 $2<x<3$，

当 $2<x<3$ 时，原方程变为 $4-x+x+1=5, 5=5$。这说明，当 $2<x<3$ 时，x 的一切实数值都是这个方程的根，因此原方程的解集为 $2<x<3$。

例2：解不等式 $56x^2-ax-a^2<0$。

思路：可用图象解法求其解集。

解：令 $56x^2-ax-a^2=0$，解得两根为 $\frac{a}{7}$ 和 $-\frac{a}{8}$。

故(1) 当 $a>0$ 时，$\frac{a}{7}>-\frac{a}{8}$，解集为 $-\frac{a}{8}<x<\frac{a}{7}$。

(2) 当 $a<0$ 时，$\frac{a}{7}<-\frac{a}{8}$，解集为 $\frac{a}{7}<x<-\frac{a}{8}$。

(3) 当 $a=0$ 时，原不等式化为 $56x^2<0$，解集为空集。

【说明】 在解含字母系数的一元二次不等式时，要根据字母的不同值先比较两根的大小，再分别写出它们的解集。

例3 当 k 取何值时，对任何实数 x，不等式 $kx^2-(k-2)x+k>0$ 才成立。

思路：要二次三项式的值恒大于零，必须 $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$。

解：$\begin{cases} k>0 \\ \Delta=(k-2)^2-4k^2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k>0 \\ 3k^2+4k-4>0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} k>0 \\ k<-2 \text{ 或 } k>\frac{2}{3} \end{cases}$。

$\therefore$ 当 $k>\frac{2}{3}$ 时，不等式 $kx^2-(k-2)x+k>0$。

例4 已知方程 $4x^2-2ax+2a-3=0$ 没有实根，化简 $\sqrt{\frac{a^2}{4}-4a+3}+\left|6-\frac{a}{2}\right|$。

思路：此化简关键是去绝对值符号。去绝对符号要依据 a 的取值范围，a 的取值范围由已给方程没有实数根，即 $\Delta<0$ 所给定。

解：$\because$ 方程 $4x^2-2ax+2a-3=0$ 没有实根。

$\therefore$ $\Delta=(-2a)^2-4\times4\cdot(2a-3)$

$=a^2-8a+12<0$。

故 $2<a<6$。

原式 $=\sqrt{\frac{1}{4}(a^2-16a+64)}+\left|\frac{1}{2}(12-a)\right|=\frac{1}{2}|a-8|$

$+\frac{1}{2}|12-a|$

在 $2<a<6$ 时，原式 $=\frac{1}{2}(8-a)+\frac{1}{2}(12-a)=10-a$。

2. 一元二次不等式的应用

用解一元二次不等式（组）的方法求代数式、指数式和对数式中字母的取值范围。用解一元二次不等式的思想去解决有关根式、方程、二次三项式等数学问题。

例5 求下列各式中 x 的取值范围：

(1) $y=\sqrt{(x^2-6x+9)(6x-x^2-5)}$；

(2) $y=\lg(x^2-3x-4)$；

(3) $y=\frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x^2+2x-3}$。

解：(1) 要使根式有意义，必须 $-(x^2-6x+9)(x^2-6x+5)\geqslant 0\cdots$①

$\because\ x^2-6x+9=(x-3)^2\geqslant 0$，$\therefore$ ①式即 $x^2-6x+5\leqslant 0$，即 $1\leqslant x\leqslant 5$。

(2) 要使对数式有意义，必须 $x^2-3x-4>0$。解这个不等式得 $x<-1$ 或 $x>4$。

(3) 要使分式有意义，必须 $\begin{cases}2+x-x^2\geqslant 0 & ①\\ x^2+2x-3\neq 0 & ②\end{cases}$

由①得 $-1\leqslant x\leqslant 2$，由②得 $x\neq -3$，$x\neq 1$。
故 x 的取值范围为 $-1\leqslant x\leqslant 2$，且 $x\neq 1$。

【说明】 求代数式或指数式、对数式中字母的取值范围的方法为：把使原式有意义的一些限制条件化为不等式，求这些不等式的公共解集，就是字母的取值范围。

例6 (1) 试比较 $\dfrac{x-2}{x-1}$ 与 $\dfrac{x-3}{x-2}$ 的大小；

(2) 已知 $x<0$，$-1<y<0$，将 x，xy，$\dfrac{1}{xy}$，xy^2 按由小到大的顺序排列。

思路：比较两代数式的大小时，就是看两代数式之差是大于零还是小于零，或是等于零。若差大于零，则减式小于被减式；若差小于零，则减式大于被减式；若差等于零，则减式与被减式相等。通常称为作差法比较大小。

解：(1) $\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{(x-2)^2-(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)}$

$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

由差式可见，差式的分子为1，因此差式不可能为零，故两代数式不可能相等！即

$$\frac{x-2}{x-1}\neq\frac{x-3}{x-2}.$$

分析差式的分母，当$x<1$，$x>2$或$x<2$，$x>1$时$(x-1)(x-2)<0$，又∵ $x<1$与$x>2$是相矛盾的，故不存在。∴ 只有$1<x<2$时，$\frac{x-2}{x-1}-\frac{x-3}{x-2}<0$，即$\frac{x-2}{x-1}<\frac{x-3}{x-2}$。当$x>2$或$x<1$时，$(x-1)(x-2)>0$，此时$\frac{x-2}{x-1}-\frac{x-3}{x-2}>0$，即$\frac{x-2}{x-1}>\frac{x-3}{x-2}$。

(2) ∵ $x-xy=x(1-y)$，且$x<0$，$y<0$。∴ $x(1-y)<0$，故$x<xy$。

∵ $xy^2-xy=xy(y-1)<0$。∴ $xy^2<xy$。

∵ $x-xy^2=x(1+y)(1-y)<0$。∴ $x<xy^2$。综上，得$x<xy^2<xy<\frac{1}{xy}$。

例7 x为任何实数值，m为何值时，二次三项式$(m^2+4m-5)x^2-2(m+1)x+3$是正值？

思路：根据题设条件 x为任何实数，二次三项式是正值，则判别式$\triangle<0$，且必须注意此时二次项系数应是大于零的。

解：由题设得$\begin{cases}[-2(m+1)]^2-4\cdot(m^2+4m-5)\cdot3<0\\ m^2+4m-5>0\end{cases}$

即$\begin{cases}-m^2-5m+8<0 & (1)\\ m^2+4m-5>0 & (2)\end{cases}$

解(1)得 $m<\frac{-5-\sqrt{57}}{2}$，$m>\frac{-5+\sqrt{57}}{2}$。

解(2)得 $m<-5, m>1$。

∴ 解集是 $m<\frac{-5-\sqrt{57}}{2}$ 或 $m>\frac{-5+\sqrt{57}}{2}$。

例8 对角线不超过90条的凸多边形中，求边数最多的多边形。

思路：设 $n(n\geq 4)$ 为多边形的边数，这个多边形对角线数为 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条，再根据题设条件，可得其解。

解：依题意，$\frac{n(n-3)}{2}<90$，∴ $4\leq n<15$。

满足该不等式的最大整数 $n=14$。

这个多边形是十四边形。

例9 对于$\triangle ABC$，两边之和比其余一边分别大 $k-2$，k，$k+2$，求使$\triangle ABC$ 为钝角三角形时的整数 k 的值。

思路：利用三角形边的关系：两边之和大于第三边，通过解不等式可得其解。

解：设 a，b，c，为$\triangle ABC$ 的三边长，则

$$\begin{cases}b+c-a=k-2\\ c+a-b=k\\ a+b-c=k+2,\end{cases}$$ 解得 $a=k+1$，$b=k$，$c=k-1$。

最长边为 a，其对角 A 为钝角。从而 $b^2+c^2<a^2$，∴$k^2+(k-1)^2<(k+1)^2$，∴ $k^2<4k$，∵ $k>0$，故 $k<4$。而

a、b、c 为三角形之三边，$b+c>a$，$\therefore$ $k+(k-1)>k+1$，$\therefore$ $k>2$。于是满足 $2<k<4$ 的整数为 $k=3$。

例10 设不等式 $ax^2+5x+b>0$ 的解为 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，求 a，b。

解： $\because$ $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ 是二次不等式的解集，

$$\therefore\ \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0,\ \therefore\ 6x^2-5x+1<0,$$

两边乘 -1，$-6x^2+5x-1>0$。因这与 $ax^2+5x+b>0$ 一致，故 $a=-6$，$b=-1$。

例11 当 a 为何值时，方程 $x^2-ax+(a^2-4)=0$ 的两根都是正数？

解： 要使方程两根都是正数时，

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ x_1+x_2>0\\ x_1\cdot x_2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-4(a^2-4)\geqslant 0\\ a>0\\ a^2-4>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{4}{3}\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}\sqrt{3}\\ a>0\\ a>2 \text{ 或 } a<-2\end{cases}\Rightarrow 2<a\leqslant\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

故当 $2<a\leqslant\frac{4}{3}\sqrt{3}$ 时，方程的两根都是正数。

【说明】 在方程讨论中，一元二次方程一般不解方程，而是利用根的判别式、韦达定理及二次函数的图象得到字母的不等式组，再解这个不等式组求出字母的取值范围。

例12 向m取什么样的正整数时，不等式$\frac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}>m$对于一切$x$值都成立。

思路：按题意$m>0$，分式的分母x^2+x+1对于一切x值都是大于零的，这是因为$a=1>0$，抛物线图象开口向上，且$\triangle=b^2-4ac=1-4<0$，图象与x轴无交点，所以不等式去分母时，不等号不反向。

解：$\because$ 对于一切x的值，$x^2+x+1>0$，$\therefore$ $3x^2+2x+2>m(x^2+x+1)$，$(3-m)x^2+(2-m)x+(2-m)>0$。

又$\because$ 对一切x值上述不等式都成立；

$$\therefore \begin{cases} 3-m>0 \\ \Delta=(2-m)^2-4(3-m)(2-m)<0 \\ m>0. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 0<m<3 \\ m<2\text{或}m>\frac{10}{3}. \end{cases}$$

$\therefore$ $0<m<2$。满足$0<m<2$的正整数为$m=1$。

（二） 练 习 题

1. 选择题：

(1) 如果不等式$ax^2+8ax+21<0$的解集是$-7<x<-1$，则a的值是（　　）

(A) 1。(B) 2。(C) 3。(D) 4。

(2) 当$m^2<-m$时，$|m-\sqrt{m^2}|$的值等于（　　）

(A) 0。(B) $2m$。(C) $-2m$。(D) -2。

(3) 不等式$6x^2+5x<4$的解集为（　　）

(A) $-2<x<1$。(B) $-\frac{4}{3}<x<\frac{1}{2}$。

(C) $-\frac{1}{2}<x<\frac{4}{3}$。(D) $x<\frac{1}{2}$或$x>-\frac{4}{3}$。

(4) 方程$(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2=0$有实数根，则a的取值范围是（　　）

(A) $-3\leqslant a\leqslant 1$。(B) $-3\leqslant a<1$。

(C) $-3<a\leqslant 1$。(D) $-3<a<1$。

(5) 若$4x^2-4x-15\leqslant 0$，则根式$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$可化简为（　　）

(A) $4x-2$。(B) 8。(C) ± 8。(D) $4x+8$。

(6) 如果$c>1$，$a=\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$，$b=\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$，那么a、b的大小关系是（　　）

(A) $a>b$。(B) $a\geqslant b$。(C) $a=b$。(D) $a<b$。

2. 填空题：

(1) 若方程$x^2-2x+m^2-1=0$有实根，则m的取值范围是____。

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$与$\sqrt{3}+\sqrt{6}$的大小关系是____。

(3) 不等式$2x+3-x^2>0$的解为____。

(4) 如果不等式$\frac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$，对于一切实数$x$都成立，那么$k$的取值范围是____。

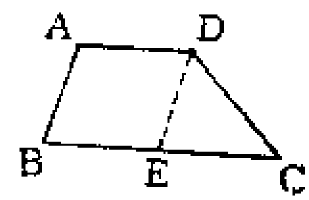


图 4—1

(5) 如图4—1所示，已知$ABCD$

是凸四边形，那么 x 的取值范围是 ____。

(6) 比较 a^4-b^4 与 $4a^3(a-b)$ 的大小是 ____。

3. 求不等式 $\dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}>\lambda$ 对于一切 x 都成立的 λ 的值的范围。

4. 已知 $4x^2-5x-6<0$，求 $\sqrt{x^2-6x+9}+|x+1|$ 的值。

5. 解不等式 $\dfrac{4x-x^2}{|2x-3|}\geqslant 0$。

6. m 为何值时，关于 x 的二次方程

$(m^2-1)x^2+(m+1)x+1=0$ 有两个实根？

7. a 为何值时，x 为任意实数，不等式

$ax^2+3ax+a+2>0$ 都成立？

8. 若方程 $(k+1)x^2+(2k-1)x+(k-1)=0$ 没有实根，求证方程 $(k-3)x^2-2(k+3)x-(k+5)=0$ 必有不相等的实根。

9. 解方程 $|x^2-3x|+|2x+6|=12$。

10. 解关于 x 的不等式 $x^2-\left(m+\dfrac{1}{m}\right)x+\left(m-\dfrac{1}{m}\right)<0$

11. m 是什么实数时，方程 $(1-m^2)x^2+2mx-1=0$ 的两个根都在 0 和 1 之间。

12. 求满足 $x^2-4xy+8y^2-2x+2=0$ 的 x、y 的实数值。

13. 求使抛物线 $y=x^2-2x-3$ 落在直线 $y=x+4$ 下方的 x 值的范围。

14. a、b为正数，比较a^3-b^3与$3a^2(a-b)$的大小。

15. 设a、$a+1$、$a+2$为钝角三角形的三边，求a的取值范围。

16. a、b为何值时不等式$ax^2+abx+b>0$的解是$1<x<2$？

17. 方程$(k-2)x^2+(2k-1)x-3k+5=0$的二根异号，且正根的绝对值较大，求整数k。

18. 一篮苹果分给若干个小孩，每人2个，还剩37个，每人6个，则最后一人不够6个。问有多少个小孩与多少个苹果？

（四）答案与提示

1. (1)C；(2) C；(3) D； (4) B；(5) B； (6) D。

$\because$ $a=\sqrt{c+1}-\sqrt{c}=\dfrac{1}{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}$，

而由$c>1$知道$\sqrt{c+1}+\sqrt{c}>\sqrt{c}+\sqrt{c-1}$，$\therefore$ $a<b$。

2. (1) $-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}$；(2) $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$；(3) $-1<x<3$；(4) $1<k<3$；(5) $2<x<12$；(6) $a^4-b^4\leqslant 4a^3(a-b)$。

3. 由题意得$\begin{cases}3-\lambda>0\\(2-\lambda)^2-4(3-\lambda)(2-\lambda)<0,\end{cases}$ 解得$\lambda<2$。

4. 4。

5. $0\leqslant x<\dfrac{3}{2}$及$\dfrac{3}{2}<x\leqslant 4$。

6. $-1\leqslant m\leqslant\dfrac{5}{3}$，且$m\neq 1$。

7. $0<a<\frac{8}{5}$.

8. 由前一个方程没有实根，有$\Delta_1<0$，解得$k>\frac{5}{4}$. 后一个方程的判别式$\Delta_2=4(k+3)^2+4(k-3)(k+5)$
$=8(k^2+4k-3)=8[k-(2+\sqrt{7})][k-(-2-\sqrt{7})]$，当$k>\frac{5}{4}$时，$\Delta_2>0$。故后一个方程必有不等实根。

9. 当 $x<3$ 时，$x^2-3x-(2x+6)=12$；

当 $-3\leqslant x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 3$ 时，$x^2-3x+(2x+6)=12$；

当 $0<x<3$ 时，$-(x^2-3x)+(2x+6)=12$。

三种情况解得原方程的实根为 $x=\pm 2$，$x=3$。

10. $\Delta=\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-4\left(m-\frac{1}{m}\right)=\left(m-\frac{1}{m}-2\right)^2$，

又有 $x_1=m-1$，$x_2=\frac{1}{m}+1$。

(1) 当 $x_1>x_2$，即 $m-1>\frac{1}{m}+1$，$\frac{m^2-2m+1}{m}>0$，解得$1-\sqrt{2}<m<0$ 或 $m>1+\sqrt{2}$.

这时，原不等式的解是$1+\frac{1}{m}<x<m-1$。

(2) 当 $x_1<x_2$ 即 $\frac{[m-(1+\sqrt{2})][m-(1-\sqrt{2})]}{m}<0$时，解得 $m<1-\sqrt{2}$ 或 $0<m<1+\sqrt{2}$.

这时，原不等式的解是 $m-1<x<1+\frac{1}{m}$。

(3) 当 $x=x_2$ 时 即 $m=1\pm\sqrt{2}$ 时，原不等式无解。

11. 由原方程解得两根为 $x_1=\frac{1}{m-1}$，$x_2=\frac{1}{m+1}$.

由题意
$$\begin{cases}0<\frac{1}{m-1}<1\\ 0<\frac{1}{m+1}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m-1>0\\ \frac{2-m}{m-1}<0\\ m+1>0\\ \frac{m}{m+1}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>1\\ m<1\text{或}m>2\\ m>-1\\ m<-1\text{或}m>0.\end{cases}$$

即(1) $\begin{cases}m>1\\ m<1\\ m>-1\\ m<-1\end{cases}$ 或(2) $\begin{cases}m>1\\ m>2\\ m>-1\\ m>0.\end{cases}$

而(1) 无解，(2) 的解为 $m>2$，$\therefore m>2$.

12. $x=2$， $y=\frac{1}{2}$. 将所给的方程整理成关于 x 的方程 $x^2-2(2y+1)x+8y^2+2=0$.

13. 由题设知 $x^2-2x-3<x+4$，解得 $\frac{3-\sqrt{37}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{37}}{2}$.

14. $3a^2(a-b)-(a^3-b^3)=(a-b)[3a^2-(a^2+ab+b^2)]$
$=(a-b)(2a^2-ab-b^2)=(a-b)^2(2a+b)$.

$\therefore$ $a=b$ 时，二式相等；

$a\neq b$ 时，$3a^2(a-b)>(a^3-b^3)$.

15. $\begin{cases}a+(a+1)>a+2\\a^2+(a+1)^2<(a+2)^2\end{cases}$，解得$1<a<3$.

16. 根据已知条件知，$a<0$，1、2是二次三项式$ax^2+abx+b$的根．求得$a=-1.5$，$b=-3$.

17. ∵二根之积为负数，二根之和为正数，

$$\frac{5-3k}{k-2}<0$$

$$\therefore\quad \frac{2k-1}{2-k}>0$$

$$(2k-1)^2-4(k-2)(5-3k)>0.$$

解之得$0.5<k<\frac{5}{3}$，∴$k=1$.

18. 设有x个小孩，y个苹果，则

$$\begin{cases}y=2x+37\cdots\cdots\cdots\cdots①\\y-6(x-1)<6\cdots\cdots②\\0\leqslant y-6(x-1)\cdots\cdots③\end{cases}$$

将①中的y代入②、③式求得

$$\frac{37}{4}<x<\frac{43}{4}.\quad\therefore\quad x=10,\ y=57.$$

五　解三角形

（一）基本原理

1．基本概念

三角函数的定义。

2．三角函数间的关系

倒数关系　$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$

商数关系　$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$。

平方关系　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$。

3．正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。（$R$是$\triangle ABC$外接圆半径）

4．余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

5．射影定理

$$a=b\cos C+c\cos B,$$
$$b=c\cos A+a\cos C,$$
$$c=a\cos B+b\cos A.$$

6. 三角形面积公式

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

（二） 范例与方法

1. 几何量的计算

例 1 设$\triangle ABC$内接于半径为2的圆，其三边之比为$BC:CA:AB=7:5:3$，试求：(1) $\cos A$、$\sin A$之值；(2) BC的值；(3) $\triangle ABC$的面积。

思路： 利用余弦定理、正弦定理、面积公式。

解： 因$BC:CA:AB=7:5:3$，故可设$BC=7k$，$CA=5k$，$AB=7k$，（k为常数）。

(1) 由余弦定理，$\cos A=\dfrac{CA^2+AB^2-BC^2}{2CA\cdot AB}$

$$=-\frac{1}{2}.$$

由$\cos A=-\dfrac{1}{2}$，以及$\cos^2A+\sin^2A=1$，

有$\sin^2A=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore\ \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（$\because \sin A>0$）。

(2) 由正弦定理，$\dfrac{BC}{\sin A}=2\times 2$，

$\therefore BC=4\sin A=2\sqrt{3}$。

(3) 由$BC=7k=2\sqrt{3}$，$k=\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$，

$\therefore\ CA=\dfrac{10\sqrt{3}}{7}$，$AB=\dfrac{6\sqrt{3}}{7}$。

从而 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{BC\cdot CA\cdot AB}{4R}=\dfrac{45\sqrt{3}}{49}$。

【说明】 本例由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，推得 $S_{\triangle ABC}$ $=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ab\cdot\dfrac{c}{2R}=\dfrac{abc}{4R}$。从而又得到一个面积公式 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{abc}{4R}$。

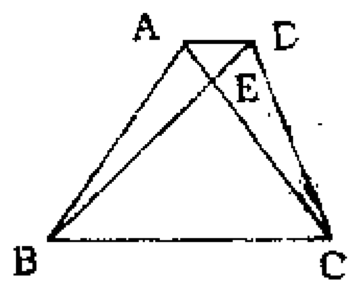


图 5—1

例 2 已知梯形 $ABCD$，AC 和 BD 相交于 E，$BE:ED=3:1$，两底 AD、BC 与对角线 BD 的和为 20，$\angle ADB=60°$，梯形 $ABCD$ 的面积为 $24\sqrt{3}$，求其各边的长。

思路： 题意涉及边角关系，先用面积关系，而后再用余弦定理求梯形各边。

解： $\because ABCD$为梯形，$AD//BC$，$\therefore\angle DBC=\angle ADB$ $=60°$，从而$\dfrac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin 60°+\dfrac{1}{2}BD\cdot BC\cdot\sin 60°=$ $24\sqrt{3}$，即 $BD(AD+BC)=96$ ① 又 $AD+BC+BD=$ 20 ②，由①、②解得 $BD=12$，$AD+BC=8$ ③ 或$BD=8$，$AD+BC=12$ ④

$\because AD//BC$，$\therefore\triangle AED\backsim\triangle CEB$，$\therefore BC:AD=BE:ED=3:1$⑤ 由③、⑤解得 $AD=2$，$BC=6$。由余弦定理得

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos\angle ADB$$
$$= 2^2 + 12^2 - 2\times 2\times 12\times \cos 60^\circ = 124,$$

$AB = 2\sqrt{31}$，同理 $CD = 6\sqrt{3}$，由④、⑤解得 $AD = 3$，$BC = 9$，同理 $AB = 7$，$CD = \sqrt{73}$，∴梯形 $ABCD$ 各边的长 $AB = 2\sqrt{31}$，$BC = 6$，$CD = 6\sqrt{3}$，$AD = 2$；或 $AB = 7$，$BC = 9$，$CD = \sqrt{73}$，$AD = 3$。

例 3 如图5—2，设 E、F 分别为正 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 上的点，$\angle ABF = 15^\circ$，$\angle ACE = 45^\circ$，求 $\angle AEF$ 的正弦值，已知 $\sin 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$。

思路： 欲求 $\angle AEF$ 的正弦值，借助于正弦定理，通过题给条件角的关系，寻找相关三角形的面积比找到边角关系，再用余弦定理确定三角形的边 EF 的长。

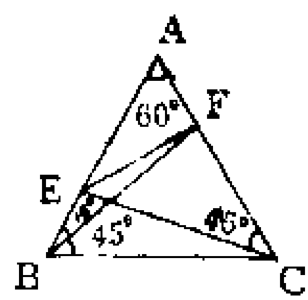


图 5—2

解： $AF:FC = S_{\triangle BAF}:S_{\triangle BCF}$

$= BA\cdot BF\sin 15^\circ : BC\cdot BF\cdot\sin 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{2}}{2} = (\sqrt{3} - 1):2.$$

从而，可设 $AF = \sqrt{3} - 1$，$FC = 2$，由余弦定理，

$$EF^2 = 2^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2\times 2\times(\sqrt{3} - 1)\cdot\cos 60^\circ$$
$$= 10 - 4\sqrt{3}.$$

由正弦定理，$\sin\angle AEF = \frac{AF}{EF}\cdot\sin 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{(4-2\sqrt{3})(10+4\sqrt{3})}{100-48}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{16-4\sqrt{3}}{52}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{26}\sqrt{39(4-\sqrt{3})}$$

【说明】 在题给条件不是基本元素，那就需要从这些条件求出所需要的基本元素，把已知条件转化成解三角形的基本类型，然后再求未知元素；如果从已知条件不易求出基本元素，那就设法求出基本元素间的关系。通过解方程或方程组求出未知元素。

2. 解应用题

例 4 如图 5—3，某渔船在海面A处看见距离$10\sqrt{3}$海里北偏东 30° 方向有一灯塔C，距离$15\sqrt{6}$海里北偏西 75° 方向有灯塔B，渔船由A向正北航行到D处，再看灯塔B在西偏南 30° 方向，灯塔C与D处相距多少海里？C在D处的什么方向？

思路：根据题意正确作图，要注方向角，如北偏东 30°、北偏西75°、西偏南30°。

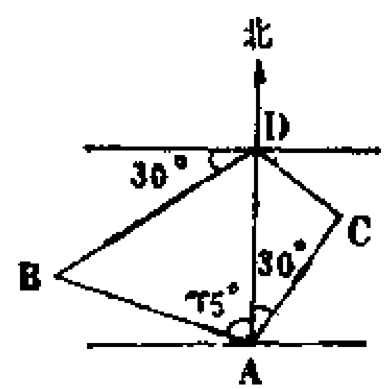


图 5—3

解：在$\triangle ABC$中，可求得$\angle BDA=60°$，$\angle B=45°$，由正弦定理，得$\frac{AD}{\sin45°}=\frac{AB}{\sin60°}$，

将$AB=15\sqrt{6}$代入，得$AD=30$。再由余弦定理，得

$DC=\sqrt{AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos30°}$

$$=\sqrt{(15\sqrt{6})^2+(10\sqrt{3})^2-2\times15\sqrt{6}\times10\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$=10\sqrt{3}$

$\therefore\quad DC=AC$，$\quad\therefore\quad\angle ADC=30^\circ$。

答：A、D 相距 30 海里，C 在 D 处南偏东 30° 方向。

例 5 如图5—4，某人在平直的道路 ABC 上的 A 点，观察道路同侧的两物体 P、Q 与 A 在同一直线上，且 $\angle CAP=\alpha$，这人沿道路前进 a 米到 B，测得 $\angle PBQ=\alpha$，又前进 a 米到 C 点，测得 $\angle PCQ=\alpha$，求 PQ 的长。

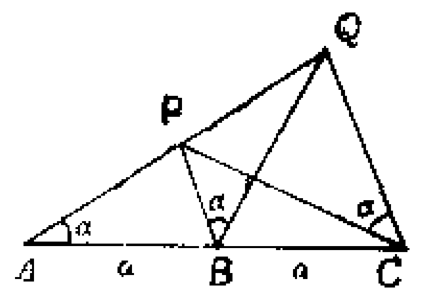


图 5—4

思路：由题意作图 3—4，$\angle PBQ=\angle PCQ$，则 B、C、Q、P 四点共圆。运用割线定理可表示含 AP、PQ 的关系式，在 $\triangle AQC$ 中再用余弦定理可求出 AQ 的表示式，由上两个关系式建立起方程组，便可求出 PQ 的长度。

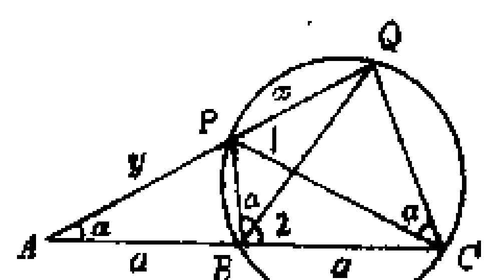


图 5—5

解：$\because\ \angle PBQ=\angle PCQ=\alpha$，$\therefore P$、$B$、$C$、$Q$ 四点共圆。

如图 5—5，设 $AP=y$，$PQ=x$，则 $y(y+x)=a(a+a)=2a^2$ ①

$\because\quad\angle 1=\angle 2$，又 $\angle 1=\angle QAC+\angle ACP=\angle ACP+\alpha=\angle C$，$\therefore\angle 2=\angle C$，$\therefore\quad QB=QC$，在 $\triangle QAB$ 中，

$QB^2=(x+y)^2+a^2-2a(x+y)\cdot\cos\alpha$，同理在$\triangle QAC$中，
$QC^2=(x+y)^2+(a+a)^2-2(x+y)(a+a)\cdot\cos\alpha$，即得

$$3a^2-2a(x+y)\cdot\cos\alpha=0,\quad 3a-2(x+y)\cdot\cos\alpha=0,$$

$$\therefore\quad x+y=\frac{3a}{2\cos\alpha}\text{②}$$

②代入①，得 $y\cdot\frac{3a}{2\cos\alpha}=2a^2$，

$$\therefore\quad y=\frac{4a\cos\alpha}{3}$$，把 y 值代入②得

$$x=\frac{3a}{2\cos\alpha}-\frac{4a\cos\alpha}{3}=\frac{9a-8a\cos^2\alpha}{6\cos\alpha}.$$

答：PQ 的长是$\frac{9a-8a\cos^2\alpha}{6\cos\alpha}$．

例 6 P、Q是海上的两个灯塔，从航海图上测知，以PQ为弦，含圆周角为45°的弓形弧内是危险区，内有许多暗礁，一海轮开始时见两灯塔都在它的北60°东，海轮向东航行一段距离后，见灯塔恰在它的正北，灯塔Q在它的北$m°$东。$\left(\sin m°=\frac{\sqrt{57}}{19}\right)$问海轮继续向东航行有否触礁危险？

思路：正确作出示意图3—6，海轮继续向东航行有否触礁危险，就转化为圆心O到直线AB的距离是大于等于还是小于圆的半径的问题了。

解：如图5—6，设$AB=\sqrt{3}a$，在$\text{Rt}\triangle ABP$中，
$AP=\frac{AB}{\cos 30°}=2a$，$PB=AB\text{tg}30°=a$，在$\triangle PBQ$中，

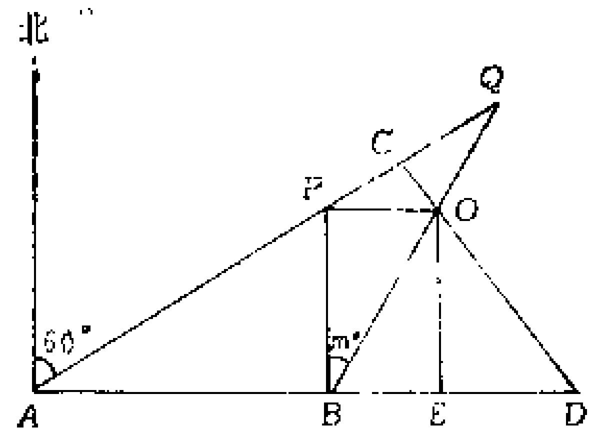


图 5—6

$$\frac{PQ}{BQ}=\frac{\sin m^\circ}{\sin 120^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{57}}{19}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{19}},$$ 令 $PQ=2x$,

则 $BQ=\sqrt{19}x$, $\because PQ=2x$, 则 $BQ=\sqrt{19}x$,

$\because BQ^2=BP^2+PQ^2-2BP\cdot PQ\cdot\cos 120^\circ$, $\quad\therefore 19x^2=a^2+4x^2+2ax$, $15x^2-2ax-a^2=0$, $\therefore\quad x=\frac{a}{3}$ 或 $x=-\frac{a}{5}$ (舍去), 则 $PQ=\frac{2}{3}a$.

设以 PQ 为弦, 含圆周角为 45° 的弓形弧的圆心(在 PQ 下方) 为 O, 则 $\angle POQ=90^\circ$, 过 O 作 PQ 的垂线交 PQ 于 C, 交 AB 延长线于 D,

则 $AC=AP+\frac{1}{2}PQ=2a+\frac{a}{3}=\frac{7}{3}a$, $CD=AC\cdot\operatorname{tg}30^\circ=\frac{7}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{9}a$. 而 $\triangle OQP$ 为等腰三角形, $OC=\frac{1}{2}PQ=\frac{1}{3}a$, $\therefore OD=CD-OC=\frac{7\sqrt{3}-3}{9}a$, 过 O 作 $OE\perp AD$,

E 为垂足，则 $OE=OD\cdot\sin 60^\circ=\frac{7\sqrt{3}-3}{9}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=$

$\frac{7-\sqrt{3}}{6}a$，而以 O 为圆心的 $\overset{\frown}{PQ}$ 的半径为 $OP=\sqrt{2}\cdot OC=$

$\frac{\sqrt{2}}{3}a$。

又 $OE-OP=\frac{7-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}a>0$，$OE>OP$。即圆心 O 到直线 AB 的距离大于圆半径 OP，也就是说，直线 AB 上的点都在圆 O 外，所以海轮继续向东航行没有危险。

3. 判定三角形的形状

例 7 在$\triangle ABC$ 中，a、b、c 表示三边，且 c 为最大边，如果 $ac\cdot\cos A+bc\cdot\cos B<4S$，其中 S 为$\triangle ABC$ 的面积，求证：$\triangle ABC$ 是锐角三角形。

思路： 把题中的边和角的关系转化成边的关系，再进行代数式的恒等变形，通过确定边的关系进而确定角的关系来判定三角形的形状。

解： 因为 c 为最大边，则$\angle C$ 是最大角，由余弦定理知，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

$$\therefore\quad ac\cdot\cos A+bc\cdot\cos B=\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2b}$$

$$+\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2a}<4s,$$

又$\because\quad s=\frac{1}{2}ab\sin C$，$\therefore\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2b}$

$$+\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2a}<2ab\sin C\leqslant 2ab,$$

$\because a$、b 均大于 0，$\therefore a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)<4a^2b^2$，即$(a^2+b^2)c^2<(a^2+b^2)^2$，得$c^2<a^2+b^2$，再由余弦 定理，得$a^2+b^2-2ab\cos C<a^2+b^2$，$\therefore\cos C>0$，即$\angle C$是锐角，故$\triangle ABC$ 是锐角三角形。

【说明】 利用正、余弦定理判断三角形形状时，如果条件等式中出现的是角的关系，一般把它们转化为边的关系；如果是边的关系，则转化为角的关系，如果两者都有，则把它们统一化成边或角的关系。

例 8 在$\triangle ABC$ 中，已知 $\operatorname{tg}A:\operatorname{tg}B=a^2:b^2$，试判定这个三角形的形状。

思路：这类问题既可以从边入手，也可以从角的关系入手进行讨论。

解：
$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\frac{\frac{a}{2R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\frac{b}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$
$$=\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2},$$

由等比定理$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}$，整理

$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$。

则①$a^2=b^2$，　$\therefore a=b$。

②$a^2+b^2=c^2$　$\therefore$原三角形为等腰或直角三角形。

例 9 已知$\triangle ABC$是角 A 为 60° 的锐角三角形，在

$\triangle ABC$ 内部同时满足 $PA \leqslant PB$，$PA \leqslant PC$ 的点 P 的全体所构成的区域为 G，$\triangle ABC$ 的面积为区域 G 面积的三倍时，$\triangle ABC$ 为何种三角形？

思路： 由正、余弦定理将题中给的 $\angle A = 60°$，$S_{\triangle ABC} = 3S_G$ 转化成边的关系，再经过代数式的恒等变形，通过确定边的关系来判定三角形的形状。

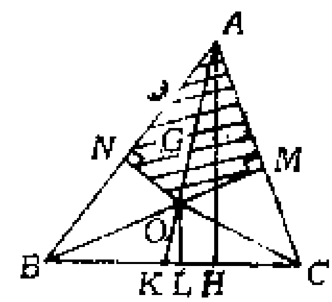


图 5—7

解： 如图 5—7 设 $BC = a, CA = b, AB = c$，$\triangle ABC$ 的外心为 O，两边 AC、AB 的中点分别为 M、N 时，G 为四边形 $ANOM$（因 P 为 $\triangle ABC$ 的内点，故应去掉 AM、AN，面积可视为相同）

由 $\dfrac{a}{\sin 60°} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2 \cdot OA$。

得 $OA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$，$\sin B = \dfrac{\sqrt{3}\,b}{2a}$，$\sin C = \dfrac{\sqrt{3}\,c}{2a}$。

又由 $\angle AOM = \angle B$，$\angle AON = \angle C$ 及余弦定理，四边形 $ANOM$ 面积 $= S_{\triangle AOM} + S_{\triangle AON} = \dfrac{1}{2}OA^2 \cdot \sin B\cos B + \dfrac{1}{2}OA^2 \cdot \sin C\cos C = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}\,b}{2a} \cdot \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \dfrac{\sqrt{3}\,c}{2a} \cdot \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{12}bc$，从而 $a^2(b^2 + c^2) = b^4 + c^4$，将 $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ 代入上式 $bc(b-c)^2 = 0$，故 $b = c$，$\triangle ABC$ 是正三角形。

4. 三角在几何证明中的应用

例10 如图 5—8，在$\triangle ABC$中，M是BC边的中点，$\angle A$的平分线交BC于D，过A、D、M三点作圆，分别交AB、AC于E、F两点，求证：$BE=CF$。

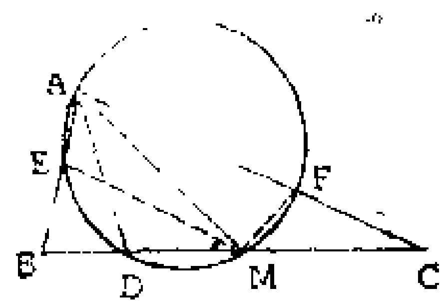


图 5—8

思路：证明两线段相等的方法很多，我们先把EM、FM放在两三角形中考察，因M是BC的中点，易想到EM、FM。显而易见$\triangle BME$、$\triangle CMF$不全等，然而若能证明$\dfrac{BE}{BM}=\dfrac{CF}{CM}$也可达到目的。

证：连ME、MF，$\because\ \angle BAD=\angle CAD$，又$\angle BME=\angle BAD$，$\angle CMF=\angle CAD$，$\therefore\ \angle BME=\angle CMF$，在$\triangle BME$和$\triangle CMF$中，$\dfrac{BE}{\sin\angle BME}=\dfrac{BM}{\sin\angle BEM}$，

$\dfrac{CF}{\sin\angle CMF}=\dfrac{CM}{\sin\angle CFM}$，$\because\angle AFM+\angle AEM=180°$，

$\therefore\ \sin\angle BEM=\sin\angle AFM=\sin(180-\angle CFM)=\sin\angle CFM$，$\therefore\ \dfrac{BE}{BM}=\dfrac{CF}{CM}\ \because BM=CM$，$\therefore BE=CF$。

【说明】 在本题中与圆有关的相等角、互补角甚多，可见圆成为正弦定理在几何中应用的一个最重要的场所之一。

例11 设四边形的相对二边相等，如图 5—9，$AD=BC$，F、E分别是AB及DC的中点，直线EF与AD及BC的延长线分别交于H及G，求证：$\angle AHF=\angle BGF$。

思路： 通过正弦定理将边的关系、转化成角的关系。

解： 设 $AD=BC=l$，$HD=m$，$GC=n$，

则 $\dfrac{DE}{\sin\angle 1}=\dfrac{m}{\sin\angle HED}$，$\dfrac{EC}{\sin\angle 2}=\dfrac{n}{\sin\angle GEC}$，

$\therefore\quad m\sin\angle 1=n\sin\angle 2$。

同理$(l+m)\sin\angle 1=(l+n)\sin\angle 2$，

$\therefore\quad l\sin\angle 1=l\sin\angle 2$，$\therefore\quad \sin\angle 1=\sin\angle 2$，

$\because\quad \angle 1$、$\angle 2$是锐角，$\therefore\quad \angle 1=\angle 2$。

【说明】 此题证法较多，这里只给出了三角证法，这足已显示出此种证法比单纯几何证法简捷。

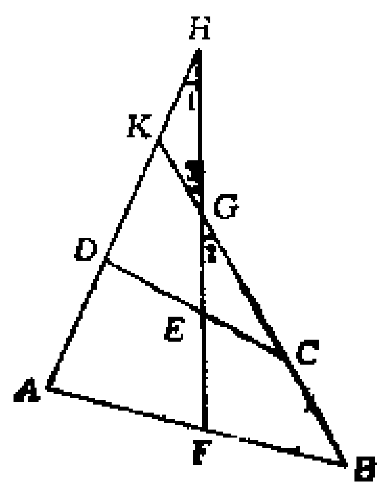


图 5—9

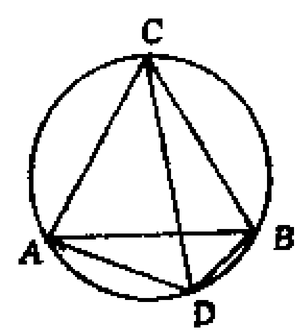


图 6—10

例12 如图 5—10，在正三角形 ABC 外接圆的劣弧$\overset{\frown}{AB}$上任取一点 D，求证：

(1) $DA+DB=DC$；(2) $DA\cdot DB=DC^2-AB^2$。

思路： 应用余弦定理将正三角形角的关系转化成边的关系，再用构造成一元二次方程法，借助韦达定理可得证。

证： 在$\triangle CDA$ 和 $\triangle CDB$ 中用余弦定理。

$$CA^2=DC^2+DA^2-2DC\cdot DA\cos 60^\circ,$$

$CB^2=DC^2+DB^2-2DC\cdot DB\cos60°$.

$\because CA=CB=AB$，以上两式变为

$DA^2-DC\cdot DA+(DC^2-AB^2)=0$ ①

$DB^2-DC\cdot DB+(DC^2-AB^2)=0$ ②

比较①、②，知 DA、DB 是方程

$x^2-DC\cdot x+(DC^2-AB^2)=0$ 的两个根.

由韦达定理，得

$DA+DB=DC$，$DA\cdot DB=DC^2-AB^2$.

【说明】 本题要注意到新证结论的形式与一元二次方程的根与系数的形式是一致的，因此只要证明 DA，DB 是方程 $x^2-DC\cdot x+(DC^2-AB^2)=0$ 的两根即可.

例13 如图 5—11，已知：直角△ABC 中 E、F 是斜边 BC 的三等分点。求证：$AE^2+AF^2=\frac{5}{9}BC^2$.

思路：在 △ABE 和 △ACF 中分别使用余弦定理.

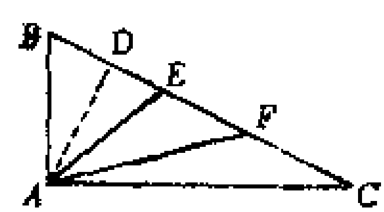


图 5—11

证 由余弦定理

$AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cdot\cos B$ ①

$AF^2=AC^2+CF^2-2AC\cdot CF\cdot\cos C$ ②

①+②得 $AE^2+AF^2=AB^2+AC^2+BE^2+CF^2-2AB\cdot BE\cdot\cos B-2AC\cdot CF\cdot\cos C$

$$=BC^2+\frac{1}{9}BC^2+\frac{1}{9}BC^2-\frac{2}{3}BC$$

$$(AB\cdot\cos B+AC\cdot\cos C)$$

$$=BC^2+\frac{2}{9}BC^2-\frac{2}{3}BC^2$$

$$\left(\frac{AB^2}{BC}+\frac{AC^2}{BC}\right)$$

$$=\frac{11}{9}BC^2-\frac{2}{3}BC^2=\frac{5}{9}BC^2.$$

例14 设P是$\triangle ABC$内的一点，且使$\angle PAC=\angle PBA=\angle PCB=\frac{\pi}{6}$，求证：$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\sqrt{3}$.

证：在$\triangle ABC$中，由余弦定理：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\cdot\sin A}$. 设$s$为$\triangle ABC$的面积，

则 $\operatorname{ctg}A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4s}$，同理可得

$$\operatorname{ctg}B=\frac{a^2+c^2-b^2}{4s},\quad \operatorname{ctg}C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4s}.$$

$\therefore\ \operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\frac{b^2+c^2-a^2}{4s}+\frac{a^2+c^2-b^2}{4s}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4s}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4s}$.

另一方面，在$\triangle PBC$中，由余弦定理得 $\cos\angle PCB=\frac{a^2+z^2-y^2}{2az}$，$\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{a^2+z^2-y^2}{2az\cdot\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{a^2+z^2-y^2}{4s_1}$. 即

$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\frac{a^2+z^2-y^2}{4s_1}$……①

s_1 为$\triangle PBC$的面积，同理可得$\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=\frac{b^2+x^2-z^2}{4s_2}$ …②

$\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=\frac{c^2+y^2-x^2}{4s_3}$ …③。s_2、s_3 分别为$\triangle PAC$和$\triangle PAB$的面积。将①+②+③整理得

$$4(s_1+s_2+s_3)\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=a^2+b^2+c^2.$$

$$\therefore\quad \frac{a^2+b^2+c^2}{4s}=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},$$

即$\mathrm{ctg}\,A+\mathrm{ctg}\,B+\mathrm{ctg}\,C=\sqrt{3}$。

（三）练 习 题

1. 选择题

(1) $\triangle ABC$中，若$\sin 2A=\sin 2B$，则$\triangle ABC$是 （　）

(A) 等腰三角形。 (B) 直角三角形。

(C) 等腰直角三角形。

(D) 等腰三角形或直角三角形。

(2) $\triangle ABC$中，$a=3$，$b=4$，$S_{\triangle}=3$，则$\angle C$等于 （　）

(A) $30°$。 (B) $60°$。 (C) $30°$ 或$150°$。 (D) $60°$或$120°$。

(3) 三角形的三边长分别为a，b，$\sqrt{a^2+b^2+ab}$，则最大角是（　）

(A) 锐角。 (B) $90°$。 (C) $120°$。 (D) $150°$。

(4) 在$\triangle ABC$中，设$\cos B\cdot \mathrm{tg} C<0$，则$\triangle ABC$是 ( )

(A) 锐角三角形. (B) 直角三角形.

(C) 钝角三角形. (D) 等腰直角三角形.

(5) 等腰三角形中，一腰上的高长$\sqrt{3}$，这条高与底边的夹角为60°，则此三角形面积为 ( )

(A) $\sqrt{3}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 2. (D) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

2. 填空题

(1) $\triangle ABC$中，$A=60°$，$b=10$，$c=5(\sqrt{3}+1)$，则$S_{\triangle ABC}=$____.

(2) 已知$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，$a=15$，$\angle C=75°$，则$\angle B=$____，$b=$____.

(3) 设$\triangle ABC$的三边为a，b，c，且$\frac{b}{c-a}-\frac{a}{c+b}=1$. 则$\triangle ABC$中最大角的度数=____.

(4) 等腰三角形底边长10cm，周长为36cm，则底角的余弦值是____.

(5) 已知$\triangle ABC$中$a=4$，$b=8$，$\angle A=30°$. 这个三角形有__解.

3. 如图5—12，在$\triangle ABC$中，已知$\angle A=30°$，$AC=AB=2$，设D为过点B的$\triangle ABC$之外接圆的直径与边AC的交点. 求二线段AD与DC长之比；

$$\left(\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right).$$

4. 如图5—13，直径$AB=6$的半圆上一点C，$\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{CB}$

$=1:2$，PC、PB 分别切半圆于 C、B 两点。

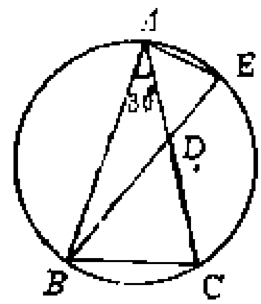


图 5—12

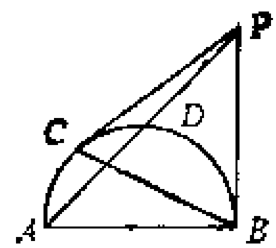


图 5—13

(1) 求证$\triangle PBC$为正三角形；(2) 求PA、PD的长。

5. 已知正方形 $ABCD$ 内一点 E，E 到 A，B，C 三点的距离之和的最小值为$\sqrt{2}+\sqrt{6}$，求此正方形的边长。

6. $\triangle ABC$ 中，$(a+b):(b+c):(c+a)=3:4:5$ 时，求 $\sin A:\sin B:\sin C$。

7. 在$\triangle ABC$中，若 $A>B>C$，且$2B=A+C$，它的最大边和最小边的长是方程 $3x^2-27x+32=0$ 的两个根，求这三角形内切圆的面积。

8. 甲、乙两船同时从 A 出发，甲船以每小时16 浬的速度沿北偏东 30° 的方向航行，乙船先以每小时 20 浬的速度沿正东方向航行至 B 处，然后以每小时 28 浬的速度沿一新航向继续航行，与甲船在 C 处相遇，此时甲航了 32 浬，问乙船共航行了多少浬。

9. 在$\triangle ABC$中，设 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，并且 $\sin A=2\sin B\cos C$，试判定$\triangle ABC$ 的形状。

10. 在$\triangle ABC$中，设 $\sin C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$，试判定$\triangle ABC$ 的形状。

11．设二次函数 $y=(a+b)x^2+2cx-(a-b)$ 中 a、b、c 为$\triangle ABC$ 的三条边．

(1) 当角 B 为钝角时，证明这个二次函数的图象与 x 轴没有交点；

(2) $x=-\frac{1}{2}$时，y 有最小值 $-\frac{a}{2}$，试判定$\triangle ABC$ 的形状．

12．如图 5—14，已知凸四边形边长分别为 a、b、c、d，对角线相交所成的锐角为 45°，若 S 为四边形的面积．求证：

$$S=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}.$$

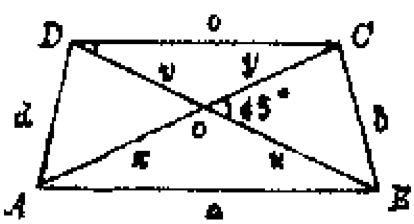


图 5—14

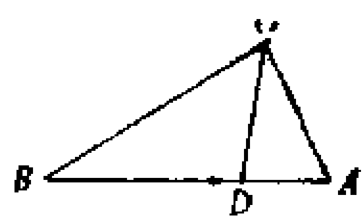


图 5—15

13．在$\triangle ABC$ 中，D 为 AB 边上一点，$AB=2AC==4AD$，如图 3—15．求证：$BC=2CD$．

14．设 K 是三角形 ABC 中 BC 边上任意一点，

证明：$AC^2\cdot BK+AB^2\cdot CK=BC(AK^2+BK\cdot KC)$．

15．线段 AB 与$\odot O$ 相交于 C、D，且 $AC=BD$，AE 切$\odot O$ 于 E，BF 切$\odot O$ 于 F，EF 与 AB 相交于 N，

求证：$CN=DN$．

（四）答案与提示

1．(1) D；(2) C；(3) C；(4) C；(5) A．

2. (1) $\frac{25(3+\sqrt{3})}{2}$; (2) $45°$; $5\sqrt{6}$; (3) $120°$;

(4) $\frac{5}{13}$; (5) 一解。

3. 由题设可求得$\angle ABD = 15°$，由正弦定理，

$$\frac{AD}{\sin 15°} = \frac{AB}{\sin 135°} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}，得 AD =$$

$\sqrt{3}-1$， $DC = 3-\sqrt{3}$。

则 $\frac{AD}{DC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$。

4. (1) 连结 AC，$\angle PCB = \angle CAB = 60°$，又$PC = PB$，$\therefore \triangle PBC$ 为正三角形；(2) $PA = 3\sqrt{7}$，$PD = \frac{9\sqrt{7}}{7}$。

5. 如图 5—16，连 AE，BE，CE，以B为旋转中心，把$\triangle AEB$逆时针旋转 $60°$，得到$\triangle FGB$，易知$\triangle BEG$为正三角形，$GE = EC$，于是$AE+BE+CE = FG+GE+EC$，此和的极小值应当取线段 CF 之长，因而 $FC = \sqrt{2}+\sqrt{6}$。令正方形边长为x，在$\triangle FBC$ 中，$FC^2 = BC^2+FB^2-2BC\cdot FB\cos\angle FBC$，即 $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = x^2+x^2-2x^2\cos 150°$，整理并解得$x = 52$（舍负）。

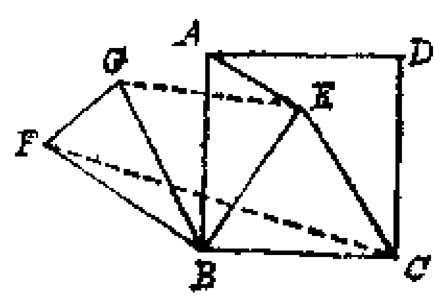


图 5—16

6. $\sin A:\sin B:\sin C = a:b:c = 2:1:3$。

7. 如图5—17由$2B = A+C$，得$B = 60°$，$A+C = 120°$，

$\because$ a、c 为方程 $3x^2-27x+32=0$ 的两根，由韦达定理 $\begin{cases}a+c=9,\\ ac=\dfrac{32}{3},\end{cases}$ $\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac=49$，则 $b=7$，由内切圆性质知 $a+c-b=2BD=2$。

在$\triangle BOD$ 中，$OD\perp BD$，$r=OD=BD\cdot \mathrm{tg}\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

则内切圆面积 $S=\pi r^2=\dfrac{\pi}{3}$。

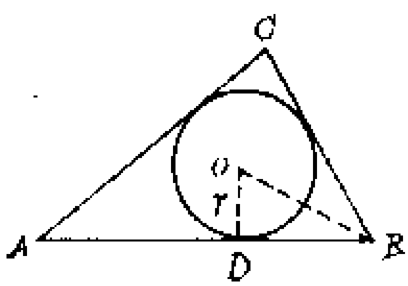


图 5—17

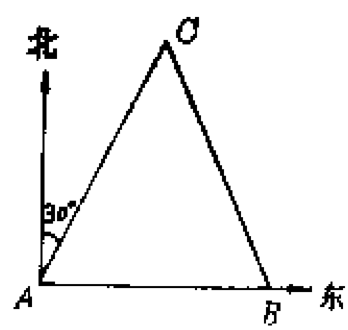


图 5—18

8. 如图 5—18，两船从 A 出发到 C 相遇所用时间为 2 小时，设乙船从 A 到 B 用 $3x$ 小时，则乙船从 B 到 C 用 $3(2-x)$小时，依题意有 $[28(2-x)]^2=32^2+(20x)^2-32\times 20x$。整理得 $2x^2-13x+11=0$ 解得 $x_1=1$，$x_2=5.5$（不合题意，舍去）

$\therefore$ 乙船共航行了 $20+28=48$（浬）。

9. $\because$ $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，$\therefore (b+c)^2-a^2=3bc$，$b^2+c^2-a^2=bc$，两边同除以 $2bc$，得$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，即$\cos A=\dfrac{1}{2}$，$\therefore A=60°$。又$\because \sin A=2\sin B\cos C$，

$\therefore \frac{a}{2R}=2\times\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，$a^2=a^2+b^2-c^2$，$\therefore b=c$，因此$\triangle ABC$是等边三角形。

10. 直角三角形，$(C=90°)$。

11. (1) $\because B$是钝角，$\therefore \cos B=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ac}<0$，

即$a^2+b^2-c^2<0$，$\because \Delta=4c^2+4(a+b)(a-b)=4(a^2+c^2-b^2)<0$。$\therefore$抛物线与$x$轴没有交点。

(2) $\because x=-\frac{1}{2}$时，y有最小值$-\frac{a}{2}$，

$$\begin{cases}-\dfrac{2c}{2(a+b)}=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{-4(a^2-b^2)-4c^2}{4(a+b)}=-\dfrac{a}{2}\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}a+b=2c\cdots①\\ a^2+2c^2-2b^2=ab\cdots②\end{cases}$$

①代入②，得$a=b$，将$a=b$ 代入①，得$c=b$。
因此，$\triangle ABC$是正三角形。

12. 所设符号如图5—14所示，$S=\frac{1}{2}(x+y)(u+v)\sin45°$

$=\frac{1}{2}(xu+yu+yv+xv)\sin45°$ ①

由余弦定理，并注意$\cos135°=-\cos45°$，得

$x^2+u^2+2xu\cos45°=a^2$ ②

$u^2+y^2-2uy\cos45°=b^2$ ③

$y^2+v^2+2yv\cos45°=c^2$ ④

$x^2+v^2-2xv\cos45°=d^2$ ⑤

②－①＋④－⑤，得$2\cos45°(xu+yu+yv+xv)=a^2-b^2+c^2-d^2$。与①比较，并注意$\sin45°=\cos45°$，得

$$S=\frac{1}{2}(xu+yu+yv+xv)\sin45°$$

$$=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}.$$

13．令$AD=1$，则$AC=2$，$AB=4$，依余弦定理，在$\triangle ADC$中，$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos A=2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cdot\cos A=5-4\cos A$在$\triangle ABC$中，$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A=2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cos A=4(5-4\cos A)=4\cdot DC^2$，$\therefore BC=2DC$。

14．根据余弦定理

$$\cos\angle AKB=\frac{AK^2+BK^2-AB^2}{2AK\cdot BK}$$

和$\cos\angle AKC=\dfrac{AK^2+CK^2-AC^2}{2AK\cdot CK}$，

因$\cos\angle AKB+\cos\angle AKC=0$，即$AC^2\cdot BK+AB^2\cdot CK=(AK^2+BK\cdot CK)(BK+CK)=BC(AK^2+BK\cdot CK)$。

15．作$BH//AE$交EF于H，则$BH=BF$，又BF AE，由正弦定理，设$\angle NFB=\beta$，则$\angle NEA=180°-\beta$，设$\angle BNF=\alpha$，则$\angle ANE=\alpha$，在$\triangle BNF$中，$\dfrac{BF}{\sin\alpha}=\dfrac{BN}{\sin\beta}$（1）在$\triangle ANE$中，$\dfrac{AE}{\sin\alpha}=\dfrac{AN}{\sin(180°-\beta)}$（2）

比较（1）、（2）可得$AN=BN$于是$CN=DN$。

六 相似三角形

相似形是全等形的深入和发展，是平面几何中最基本的内容之一，其中包含最基本的方法。

（一）基本原理

1. 比例的性质：

(1) 基本性质 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$。

(2) 合比定理 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。

(3) 分比定理 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$。

(4) 合分比定理 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$。

(5) 等比定理 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$ $(b,d\cdots,n$均$\neq0)$

$\Rightarrow\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}\,(b+d+\cdots+n\neq0)$。

2. 平行线分线段成比例定理

三条平行线截两条直线，所得的四条线段对应成比例。

推论 平行于三角形一边的直线和另两边（或其延长线）相交所得的三角形各边和原三角形各边对应成比例。

3. 相似多边形

（1）定义

（2）相似比　两个相似多边形对应边的比，叫做这两个相似多边形的相似比（相似比等于1的相似多边形就是全等多边形）.

（3）相似多边形的性质

①对应角相等，对应边成比例；

②周长的比等于它们的相似比；

③面积的比等于它们的相似比的平方。

4. 相似三角形

（1）相似三角形的判定定理

①两对应角相等的两个三角形相似；

②两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似；

③三边对应成比例的两个三角形相似；

④三角形被一边的平行线所截的三角形和原三角形相似。

（2）相似三角形的性质

①对应角相等，对应边成比例；

②对应高、对应中线、对应角平分线的比，内切圆的半径、外接圆半径的比，都等于相似比；

③周长的比等于它们的相似比；

④面积的比，等于相似比的平方。

5. 三角形内、外角平分线定理

三角形的内（外）角平分线内（外）分对边所得的两条线段和夹这角的两条边对应成比例。

它是研究成比例线段问题的重要依据，它的证明中，添加平行线转移线段的方法，是证明比例线段时常用的辅助线。

6. 射影定理

直角三角形中，斜边上的高是两条直角边在斜边上的射影的比例中项；每一条直角边是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项。

（二） 范例与方法

1. 比和比例线段

例1. 在梯形$ABCD$中，上底$DC=a$，下底$AB=b$，对角线AC、BD交于O，过O点作$EF//AB$，分别交AD、BC于E、F。求证：

$$EO=OF=\frac{ab}{a+b}.$$

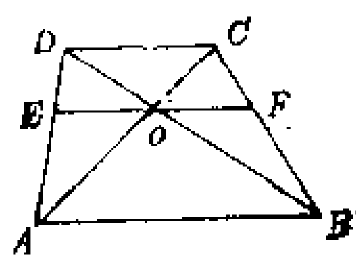


图 6—1

思路： 运用平行线截得线段成比例定理可证得结果。

证： 如图6—1，∵ $EF//AB//CD$，

∴ $\frac{EO}{a}=\frac{EA}{DA}$，$\frac{EO}{b}=\frac{DE}{DA}$，上两式相加，得

$EO\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1$，∴ $EO=\frac{ab}{a+b}$，同理可得$OF=\frac{ab}{a+b}$.

∴ $EO=OF=\frac{ab}{a+b}$.

例 2 在$\square ABCD$中，AB边上有两点E、F，$AE=EF=FB$，DB、DF分别与CE交于

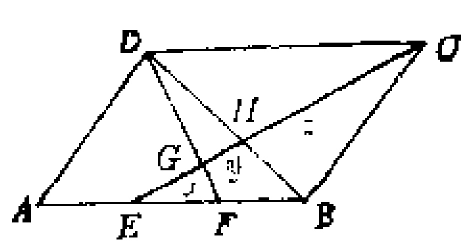


图 6—2

H、G。求：$EG:GH:HC$

解 如图6—2，设 $AB=CD=3a$，$EG=x$，$GH=y$，$HC=z$，则 $AE=EF=FB=a$。

$\because$ $AB//CD$，$\therefore$ $\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{a}{3a}=\dfrac{1}{3}$ (1)

$$\frac{z}{x+y}=\frac{3a}{2a}=\frac{3}{2} \quad (2)$$

由(1)得 $\dfrac{x}{x+y+z}=\dfrac{1}{4}$(3)，由(2)得 $\dfrac{z}{x+y+z}=\dfrac{3}{5}$ (4)

(3)÷(4)得 $\dfrac{x}{z}=\dfrac{5}{12}$，即 $x=\dfrac{5}{12}z$，代入(1)得

$\dfrac{z}{y+z}=\dfrac{4}{5}$，$\therefore$ $y=\dfrac{3}{12}z$，$\therefore$ $x:y:z=5:3:12$。

例3 如图6—3，已知在 $\triangle ABC$ 中，$AD=DC$，C_1、C_2 为 CB 的两个三等分点，分别连接 C_1A、C_2A 交 BD 于 D_1、D_2。

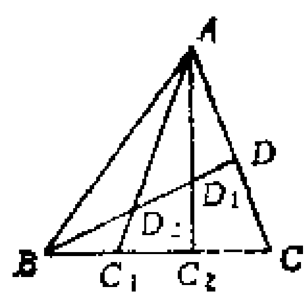


图 6—3

求：(1) $\dfrac{S_{\triangle AD_1D_2}}{S_{\triangle AC_1C_2}}=?$

(2 如四等分 BC，分点由 C 顺次为 C_1、C_2、C_3 时，$\dfrac{S_{\triangle AD_1D_2}}{S_{\triangle AC_1C_2}}=?$

(3) 如 n 等分 BC，分点由 C 起顺次为 C_1、C_2、C_3、…时，$\dfrac{S_{\triangle AD_1D_2}}{S_{\triangle AC_1C_2}}=?$

解：如图6—4，设 C_1、C_2、C_3、…、C_{n-1} 顺次将 CB 分

为 n 等分，过 D 引 $DF//BC$，分别交 AC_1、AC_2 于 E、F。

$\because$ $DF//BC$，$AD=DC$，$C_1,C_2,C_3,\cdots,C_{n-1}$ 为 n 个等分点，$\therefore$ $\dfrac{BD_1}{D_1D}=\dfrac{BC_1}{DE}=\dfrac{\dfrac{n-1}{n}\cdot BC}{\dfrac{1}{2n}\cdot BC}=2(n-1)$，

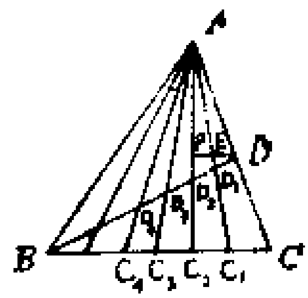


图 6—4

$$\frac{BD_2}{D_2D}=\frac{BC_2}{DF}=\frac{\dfrac{n-2}{n}\cdot BC}{\dfrac{1}{n}\cdot BC}=n-2.$$

$$\frac{BD}{D_1D}=\frac{BD_1+D_1D}{D_1D}=\frac{2(n-1)+1}{1}=2n-1,$$

$$\frac{BD}{D_2D}=\frac{BD_2+D_2D}{D_2D}=\frac{n-2+1}{1}=n-1.$$

$\therefore D_1D_2=DD_2-DD_1=\dfrac{BD}{n-1}-\dfrac{BD}{2n-1}=\dfrac{n}{(n-1)(2n-1)}$

$\cdot BD$. $\dfrac{D_1D_2}{BD}=\dfrac{n}{(n-1)(2n-1)}$，又 $\because$ $\dfrac{D_1D_2}{BD}$

$=\dfrac{S_{\triangle AD_1D_2}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{S_{\triangle AD_1D_2}}{\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}}$.

$$\therefore\quad S_{\triangle AD_1D_2}=\frac{nS_{\triangle ABC}}{2(n-1)(2n-1)},$$

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle AD_1D_2}}{S_{\triangle AC_1C_2}}=\frac{\dfrac{nS_{\triangle ABC}}{n(n-1)(2n-1)}}{\dfrac{S_{\triangle ABC}}{n}}=\frac{n^2}{n(n-1)(2n-1)} \tag{1}$$

令 $n=3$，(1) 式 $=\dfrac{3^2}{2(3-1)(2\times3-1)}=\dfrac{9}{20}$.

令 $n=4$，(1) 式 $=\dfrac{4^2}{2(4-1)(2\times4-1)}=\dfrac{8}{21}$.

答：(1) $\dfrac{9}{20}$；(2) $\dfrac{8}{21}$；(3) $\dfrac{n^2}{n(n-1)(2n-1)}$.

2. 线段比例式和等积式的证明

例 4 如图 6—5，已知 Rt△ABC ($AC>BC$)，斜边 AB 中点为D，过 D 作斜边的垂线交 AC 于 E，交 BC 延长于 F，连接 DC，求证：$DC^2=DE\cdot DF$.

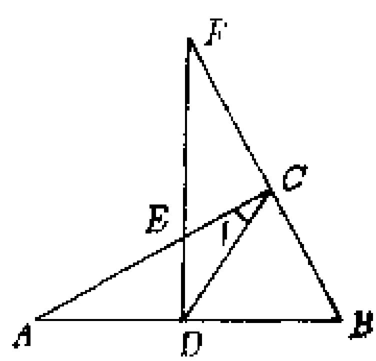


图 6—5

思路： 将等积式$DC^2=DE\cdot DF$，适当转化为比例式：$DC:DE=DF:DC$，使用"三点定形法"，寻找两相似三角形△DEC∽△DCF.

证： 在 Rt△ABC 中，DC 是斜边 AB 上的中线，

∴ $DC=DA$，$\angle 1=\angle A$，∵ $DF\perp AB$，∴ $\angle DEC=\angle DCF$，因此 △DEC∽△DCF，$DC:DE=DF:DC$，

即 $DC^2=DE\cdot DF$.

【说明】（1）所谓"三点定形法"，即分别由等式两边的比中不同三个字母为顶点，确定两三角形.（2）利用相似三角形证明比例式是一基本思想方法，通常等积式宜先转化为比例式再行证明，且应注意尽可能使比例式两边的对应线段分别只有三个不同的端点，以使"三点定形".（3）三角法常可提供简捷易行的证法.

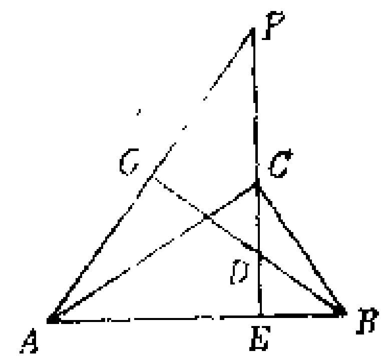


图 6—6

例 5 已知：如图6—6，CE是直角三角形斜边AB上的高，在EC的延长线上任取一点P，连结AP，自B作$BG\perp AP$，交AP于G，交CE于D.
求证：$CE^2=ED\cdot EP$.

思路：寻找过渡比（积）.

证 在$\mathrm{Rt}\triangle DEB$和$\mathrm{Rt}\triangle PGD$中，$\angle EDB=\angle GDP$，
$\therefore$ $\angle EBD=\angle DPG$，$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle AEP\backsim\mathrm{Rt}\triangle DEB$，
则 $\dfrac{AE}{EP}=\dfrac{ED}{EB}$，$AE\cdot EB=ED\cdot EP$.（1），在$\mathrm{Rt}\triangle ACB$中，$CE\perp AB$，
$\therefore$ $CE^2=AE\cdot EB(2)$，由(1)、(2)有 $CE^2=ED\cdot EP$.

【说明】（1）比例（等积）式所涉及线段在同一直线上时，不可能直接构成两相似三角形，必须寻找"过渡比(积)"，将线段的比"转移"，常使其构成两个相似三角形.（2）除相似形性质定理、平行线分线段成比例定理及推论外，三角形内角平分线性质定理，射影定理及圆幂定理是证明此类问题的重要定理.

例 6 在四边形$ABCD$中，$\angle B=\angle D=90°$，从对角线AC上一点M，作$MP\perp BC$于P，作$MQ\perp AD$于Q，求证：$\dfrac{MP}{AB}+\dfrac{MQ}{CD}=1$。

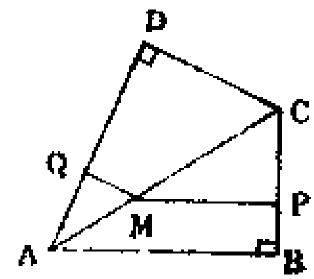


图 6—7

思路：两个分式和为1，应化为$\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}=1$，即只须证$b+c=a$即可。

证：∵ $\angle D=90°$，$MQ\perp AD$，

∴ $\triangle AMQ\backsim\triangle ACD$，

∴ $\dfrac{MQ}{CD}=\dfrac{AM}{AC}$。同理，$\triangle CMP\backsim\triangle CAB$，

$$\frac{MP}{AB}=\frac{CM}{CA}.$$

故 $\dfrac{MP}{AB}+\dfrac{MQ}{CD}=\dfrac{CM}{CA}+\dfrac{AM}{CA}=\dfrac{CM+MA}{CA}=\dfrac{CA}{CA}=1$。

因此 $\dfrac{MP}{AB}+\dfrac{MQ}{CD}=1$。

例 7 如图6—8，已知$\triangle ABC$中，$BD=DC$，E为AB上任意一点，CE交AD于F。

求证：$\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{2AE}{BE}$

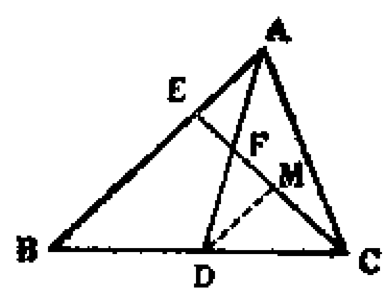


图 6—8

思路：造相似三角形。

证：过D作$DM//AB$交CE于M，

则 $\triangle AEF \backsim \triangle FDM$，∴ $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{AE}{DM}$，∵ $BD=DC$，

∴ $CM=ME$，且 $DM=\dfrac{1}{2}BE$，∴ $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{AE}{\dfrac{1}{2}BE}$，

即 $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{2AE}{BE}$。

【说明】 证线段成比例时，常添加平行线为辅助线，可以产生相似三角形或成比例的线段。

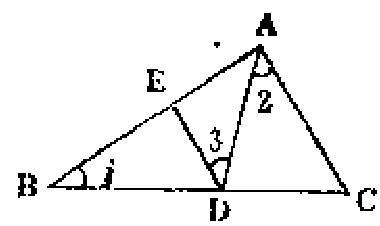


图 6—9

例 8 如图6—9，$\triangle ABC$中，D、E分别是边BC，AB上的点，且$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，如果$\triangle ABC$，$\triangle EBD$，$\triangle ADC$的周长依次为$m, m_1, m_2$。证明 $\dfrac{m_1+m_2}{m}\leqslant\dfrac{5}{4}$。

证一：设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，

则 $m=a+b+c$，∵ $\angle 1=\angle 2=\angle 3$，∴ $ED//AC$，得 $\triangle ABC\backsim\triangle EBD\backsim\triangle DAC$，由$\triangle DAC\backsim\triangle ABC$，得 $\dfrac{DC}{b}=\dfrac{AD}{c}=\dfrac{AC}{a}=\dfrac{b}{a}$。

$m_2=DC+AD+AC=\dfrac{b}{a}(a+b+c)$。同时$BD=a-DC$

$=\dfrac{a^2-b^2}{a}$，由$\triangle EBD\backsim\triangle ABC$，得$\dfrac{ED}{b}=\dfrac{BE}{c}=\dfrac{BD}{a}$

$=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$，$m_1=ED+BE+BD=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}(a+b+c)$。因而，

$$\frac{m_1+m_2}{m}=\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{b}{a}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}=-\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}.$$

证二：设 $BC=a$，$AC=b$，$\because\ \angle 1=\angle 2=\angle 3$，

$\therefore\ ED//AC$。得 $\triangle AEC\backsim\triangle EBD\backsim\triangle DAC$。

则 $\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{AC}{BC}$，则 $DC=\dfrac{b^2}{a}$，$BD=BC-DC=$

$a-\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{a^2-b^2}{a}$，因而$\dfrac{m_1}{m}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$，

即 $DC=\dfrac{b^2}{a}$，$BD=BC-DC=a-\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{a^2-b^2}{a}$，因而

$\dfrac{m_1}{m}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$，$\dfrac{m_2}{m}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{b}{a}$，

$$\therefore\ \frac{m_1+m_2}{m}=\frac{m_1}{m}+\frac{m_2}{m}=\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{b}{a}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}$$

$$=-\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}.$$

3．相似三角形的应用

1．证线段和角相等

例 9 已知：$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，AE平分$\angle CAB$交于BC于E，$CD\perp AB$于D和AE交于F，$MF//AB$交BC于M。求证：$CE=MB$。

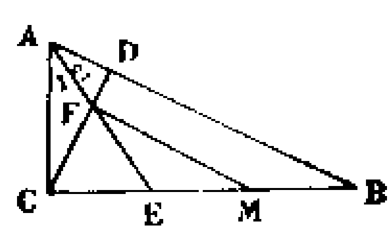


图 6—10

证：如图 6—10，

$\because FM//AB$，

$\therefore\ \dfrac{CM}{MB}=\dfrac{CF}{FD}$. $\because\ \angle 1=\angle 2$, $\therefore\ \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{AB}{AC}$,

$\dfrac{CF}{FD}=\dfrac{AC}{AD}$. 在Rt$\triangle ACB$中，$CD\perp AB$，

$\therefore\ AC^2=AD\cdot AB$，即$\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AB}{AC}$. $\therefore\ \dfrac{CM}{MB}=\dfrac{CF}{FD}$

$=\dfrac{BE}{EC}$，$\dfrac{CM+MB}{MB}=\dfrac{BE+EC}{EC}$，即$\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{BC}{EC}$，

$\therefore\ MB=EC$。

【说明】 利用比例关系证明线段相等，其基本思路是：证得一个比例式，使其中的前项相等（或相同）则后项也必相等。

例10 如图6—11，从等腰Rt$\triangle ABC$的斜边BC上的一点P，作$PD\perp AB$于D，$PE\perp AC$于E，连CD与PE交于M，连BE与PD交于N。求证：$PM=PN$。

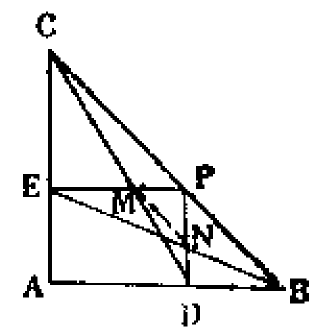


图 6—11

思路：由题设知$\triangle PEC$为等腰直角三角形，如果有$PM=PN$，则PMN亦为等腰直角三角形，于是连结MN，证明$MN//BC$，即可得证。

证：连结MN，$\because\ PM//AB$，$\therefore\ \dfrac{DM}{CM}=\dfrac{PB}{PC}$.

又 $DP//AC$，$\therefore\ \dfrac{DN}{AE}=\dfrac{BN}{BE}$，$\dfrac{PN}{EC}=\dfrac{BN}{BE}$，

$\therefore\ \dfrac{DN}{AE}=\dfrac{PN}{EC}$，即 $\dfrac{DN}{PN}=\dfrac{AE}{CE}$.

又 $\frac{AE}{CE}=\frac{PB}{PC}$，$\frac{PB}{PC}=\frac{MD}{MC}$，∴ $\frac{DN}{PN}=\frac{DM}{CM}$，

∴ $MN//CP$，$\angle NMP=\angle EPC=45°$，

故 $PM=NP$。

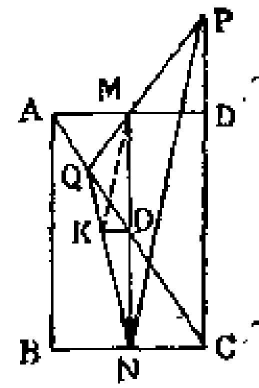


图 6—12

例 11 如图6—12，在矩形$ABCD$中，点M是AD的中点，N是BC的中点，P是CD的延长线上的一点，PM交AC于Q，求证：$\angle QNM=\angle MNP$。

思路：欲证$\angle QNM=\angle MNP$，连结MK，证$KM//NP$，再证$\triangle MKN$是等腰三角形即可。

证：设矩形的中点为O，过O引BC的平行线交QN于K。在$\triangle PQC$中，∵ $MO//PC$，∴$\frac{QM}{MP}=\frac{QO}{OC}$，

在$\triangle QNC$中，∵ $KO//NC$，∴ $\frac{OQ}{OC}=\frac{QK}{KN}$。

∴ $\frac{QM}{MP}=\frac{QK}{KN}$，∴ $KM//NP$，

∴ $\angle MNP=\angle KMN$。

∵ $\triangle KMN$是等腰三角形，∴$\angle KMN=\angle QNM$，

∴ $\angle QNM=\angle MNP$。

2，证垂直

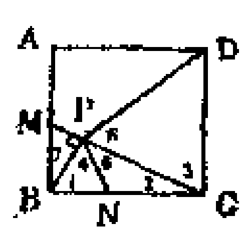


图 6—13

例 12 如图6—13，在正方形$ABCD$中，M为AB边上的一点，N为BC边上的一点，且$BM=BN$，自B作BP垂直

MC 于 P。求证：$DP\perp NP$。

思路：要证 $DP\perp NP$，只需证$\angle 5+\angle 6=90°$，而本题已知$\angle 4+\angle 6=90°$。这样只需证$\angle 4=\angle 5$，$\angle 4$ 位于$\triangle BPN$中，$\angle 5$位于$\triangle PCD$中，这两个三角形显然不会全等。但若能证出它们相似，也能达到证出$\angle 4=\angle 5$的目的。

证：$\because$ $BP\perp MC$，$\angle 2=\angle 7$（同为$\angle 1$的余角），则$Rt\triangle BPM\backsim Rt\triangle CPB$。于是$\frac{BP}{BM}=\frac{PC}{BC}$，由$BM=BN$，

$BC=DC$，$\therefore$ $\frac{BP}{BN}=\frac{PC}{DC}$。又 $\angle 1=90°-\angle 2=\angle 3$，

$\therefore$ $\triangle BPN\backsim\triangle CPD$，

$\therefore$ $\angle 4=\angle 5$，而$\angle 4+\angle 6=90°$，于是$\angle 5+\angle 6=90°$，$\therefore$ $DP\perp NP$。

例 13 如图6－14，已知：DE 平分$\triangle ABC$的顶角A的外角，$BD\perp DE$，$CE\perp DE$，DC 和 BE 交于 F。求证：$AF\perp DE$。

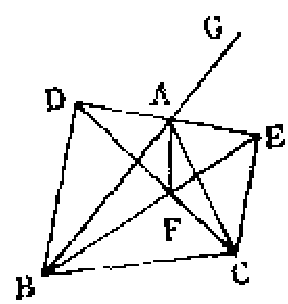


图 6－14

思路：欲证 $AF\perp DE$，只要证$AF//EC$ 即可。

证：$\because$ $BD\perp DE$，$CE\perp DE$，$\therefore$ $BD//DE$。

$\therefore$ $\triangle BDF\backsim\triangle EFC$，$\frac{DF}{FC}=\frac{DB}{EC}$，

又$\because$ DE平分$\angle CAG$，$\therefore$ $\triangle ABD\backsim\triangle AEC$。

$\frac{DB}{EC}=\frac{DA}{AE}$，则 $\frac{DF}{FC}=\frac{DA}{AE}$，$\therefore$ $AF//EC$。

3．证平行

例 14 如图6—15，过▱$ABCD$的对角线BD上任一点O引$EH//AD$，交AB于E，交CD于H；过O引$KF//DC$交AD于K，交BC于F。过C引射线交OF于P，交OE于Q。求证：$BP//DQ$。

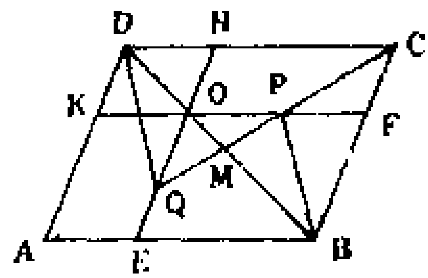


图 6—15

思路：欲证$BP//DQ$，只要证$\triangle BMP\backsim\triangle DMQ$就可达到目的。

证：设CQ与BO相交于M。$\because$ $EH//BC$，

则 $\triangle BMC\backsim\triangle OMQ$，于是 $\dfrac{MB}{MO}=\dfrac{MC}{MQ}$ （1）

$\because$ $KF//CD$，$\therefore$ $\triangle MOP\backsim\triangle MDC$，则

$\dfrac{MO}{MD}=\dfrac{MP}{MC}$ （2）

（1）×（2），得 $\dfrac{MB}{MD}=\dfrac{MP}{MQ}$，$\therefore$ $\triangle BMP\backsim\triangle DMQ$，

$\therefore$ $BP//DQ$。

例15 如图6—16，线段EF在▱$ABCD$内，且$EF//AB$，AE与BF的延长线相交于M，DE与CF的延长线相交于N。

求证：$MN//AD$。

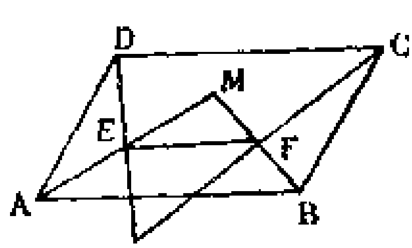


图 6—16

证：∵ $EF//AB$，则 $\frac{ME}{MA}=\frac{EF}{AB}$。

∵ $EF//CD$，则 $\frac{NE}{ND}=\frac{EF}{CD}$，又 $AB=CD$，于是

$$\frac{ME}{MA}=\frac{NE}{ND}\Rightarrow\frac{ME}{MA-ME}=\frac{NE}{ND-NE},$$

即 $\frac{ME}{EA}=\frac{NE}{ED}$，∴ $MN//AD$。

（三）练　习　题

1．选择题

（1）如图6—17，在$\triangle ABC$中，F点分AC边成1:2的比，G是BF的中点，AG的延长线交BC于E，那么E分BC边成的比是（　　）

（A）1:2。（B）2:5。（C）4:11。（D）1:3。

（2）如图6—18，要使$\triangle ACD\backsim\triangle BCA$，下列各式中必须成立的是（　　）

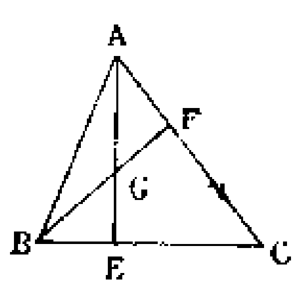


图　6—17

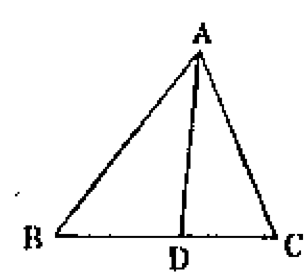


图　6—18

（A）$\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BC}$。　（$B$）$\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{AC}$。

（C）$CD^2=AD\cdot BD$。（D）$AC^2=CD\cdot CB$。

(3) 如图6—19，G 是$\triangle ABC$ 的重心，若 $S_{\triangle EFG}=1$，则 $S_{\triangle ABC}$ 为（　）

(A) 14。(B) 12。(C) 10。(D) 8。

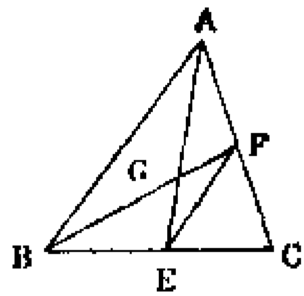


图 6—19

(4) 在$\triangle ABC$ 中，过BC的中点D作BC的垂线交AB于E，交 CA 的延长线于F，且 $EF:DF=1:2$，则 $AF:CF$ 等于（　）

(A) 1:2。(B) 1:3。(C) 1:4。(D) 2:3。

(5) 在直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 为直角，$CD\perp AB$，且 $S^2_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle ADC}$，那么 $AC:AB$的值等于（　）

(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。(B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$。(C) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$。(D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$。

(6) 梯形$ABCD$，$AD//BC$，$AD=a$，$BC=b(b>a)$，E、F分别是AD、BC的中点，AF与 BE 相交于 G，CE 与 DF 相交于 H，那么 GH 的长是（　）

(A) $\frac{1}{2}(a+b)$。(B) $b-a$。(C) $\sqrt{ab}$。(D) $\frac{ab}{a+b}$。

2. 填空题

(1)如图4—20，设$\triangle ABC$ 的面积为 1，$AD=\frac{1}{m}AB$，$BE=\frac{1}{n}BC$，$CF=\frac{1}{p}CA$，则$\triangle DEF$ 的面积是______。

(2) 三角形的一边长为18，在三角形内引一线段平行于

此边成为一梯形，它的面积为原三角形面积的$\frac{1}{3}$，则此线段长为____。

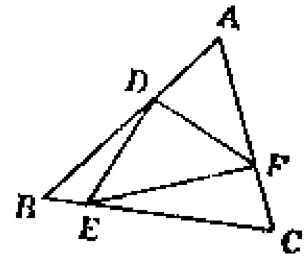


图 6—20

（3）两个相似三角形内切圆半径之比是1:2，那么两个三角形面积之比是____。

（4）如图6—21，已知$DE//FG//BC$，且$AD:DF:FB=2:3:4$，则$S_{\triangle ADE}:S_{四边形DFGE}:S_{四边形BCGF}=$____。

（5）如图6—22，正方形$ABCD$的一边$AB=12$，$DE=EM=5$，$PQ\perp AE$，那么$PM:MQ=$____。

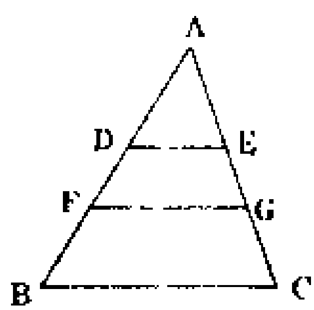


图 6—21

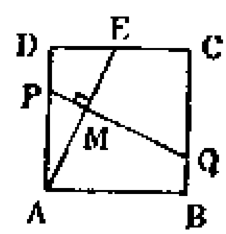


图 6—22

3. 已知，$x\neq0$，且$x:y:z=\frac{1}{5}:\frac{2}{3}:\frac{1}{4}$，求$\frac{x+2y-5z}{x-2y+5z}$的值。

4. 在$\triangle ABC$中，$AB=BC=a$，$AC=b$，$\angle A$、$\angle C$的平分线交对边于N、M，求MN的长。

5. 如图6—23，在$\triangle ABC$中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，且$CD$、$CE$三等分$\angle ACB$，求$AD:DE:$

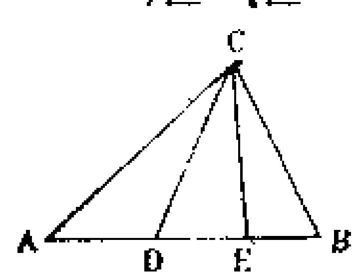


图 6—23

EB。

6．如图6—24，已知：E是▱$ABCD$的边DC的延长线上的一点，AE交BD、DC于F、G，求证：$FA^2=FE\cdot FG$。

7．如图6—25，已知梯形$ABCD$中，$AB//DC$，E是DC中点，直线BE交AC于F，交AD的延长线于G，求证：$EF\cdot BG=BF\cdot EG$。

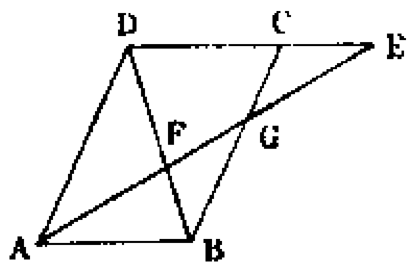


图 6—24

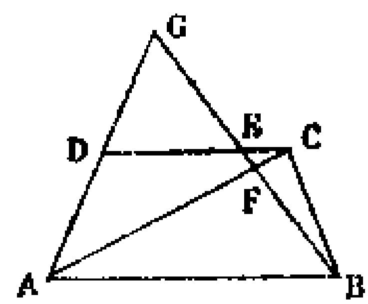


图 6—25

8．如图6—26一直线截△ABC的三边BC、CA、AB或其延长线于L、M、N，如图6—25，则$\dfrac{AN}{NB}\cdot\dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MA}=1$。

9．如图6—26，在△ABC中，AD是$\angle BAC$的平分线，BP是$\angle CBA$的平分线，延长BA到E，使$AE=AC$。求证：$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{AP}{PD}$。

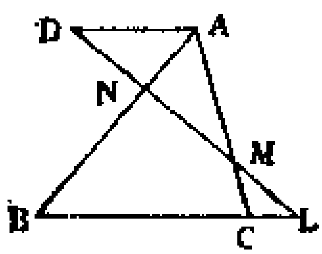


图 6—26

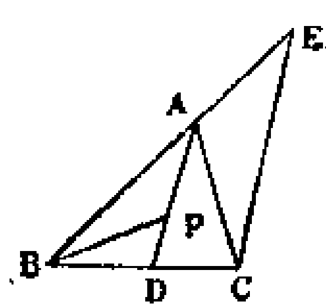


图 6—27

10. 如图6—28，$AD\perp BD$于D，$DE\perp AB$于E，$DF\perp AC$于F，求证：$\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AB}{AF}$。

11. 如图6—29，在$\triangle ABC$中，$AC=2AB$，AD平分$\angle A$，$DF//BA$，$DE//CA$，延长FE交CB的延长线于G，求证：$GE=EF$。

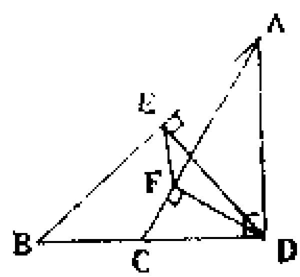


图 6—28

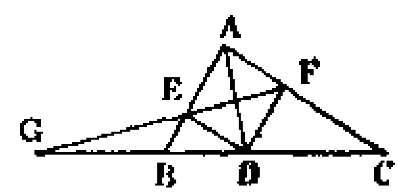


图 6—29

12. 如图6—30，已知AD是$\triangle ABC$中$\angle BAC$的平分线，E是DC上的一点，$DE=BD$，$EF//AC$和AD相交于F，求证：$EF=AB$。

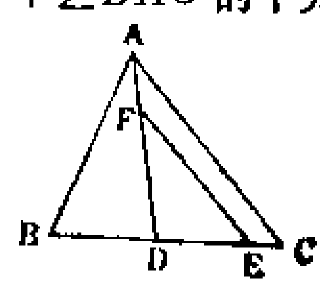


图 6—30

13. 如图6—31，$\triangle ABC$中，中线BE与角平分线AD交于K，$BL//KC$，交AC的延长线于L，求证：$LC=AB$。

14. 如图6—32，$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AD是底边BC上的高，$DE\perp AC$于E，取DE的中点F，连AF，交BC于G，连BE，求证：$AG\perp BE$。

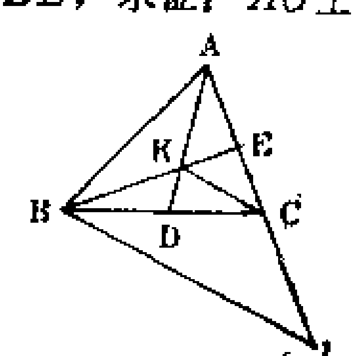


图 6—31

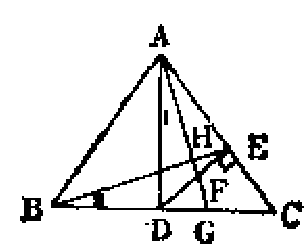


图 6—32

15. 如图6—33，已知：AD是Rt$\triangle ABC$斜边BC上的高，$\angle ABD$的平分线BP交AD于M，$\angle DAC$的平分线AN交CD于N，求证：$MN//AC$。

16. 等腰$\triangle ABC$底边BC上的高为AD，M、N是AD上的点，且$\angle ABM=\angle MBN=\angle NBC$，连$CN$并延长交$AB$于$E$，连$EM$，如图6—34，求证：$EM//BN$。

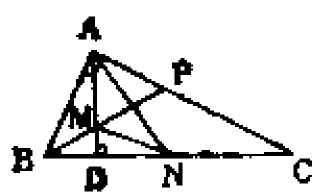


图 6—33

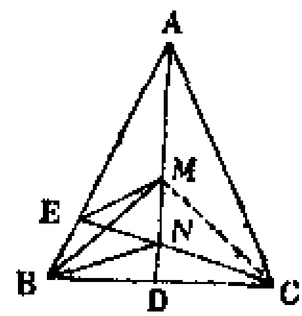


图 6—34

（四）答案与提示

1. (1) B；(2) D；(3) B；(4) B；(5) A；(6) D。

2. (1)$\dfrac{mnp+m+n+p-mn-np-pm}{mnp}$；(2) $6\sqrt{6}$；

(3) 1:4；(4) 4:21:56；(5)10:21。

3. 设$\dfrac{x}{\frac{1}{5}}=\dfrac{y}{\frac{2}{3}}=\dfrac{z}{\frac{1}{4}}=k$，$2\dfrac{3}{4}$。

4. $BN:NC=a:b$，$BM:MA=a:b$，$BN:NC=BM:MA$，$MN//AC$，由$\triangle BMN\backsim\triangle ABC$，得$MN:AC=BN:BC:=a:b$，由$BN:(NC+BN)=a(a+b)$，得$BN=\dfrac{b^2}{a+b}$，

由$MN:b=\dfrac{a^2}{a+b}:a$，得$MN=\dfrac{ab}{a+b}$。

5. 2:1:1.

6. ∵ $ABCD$是平行四边形，∴ $\triangle GFB\backsim\triangle AFD$，$\triangle DEF\backsim\triangle BFA$，∴ $\frac{FG}{FA}=\frac{FB}{FD}$，$\frac{FE}{FA}=\frac{FD}{FB}$，

∴ $\frac{FG}{FA}\cdot\frac{FE}{FA}=1$，∴ $FA^2=FE\cdot FG$.

7. ∵ $AB//DC$，∴ $\triangle FEC\backsim\triangle FBA$，$\triangle GDE\backsim\triangle GAB$，∵ E是DC的中点，∴ $EC=ED$，

∴ $\frac{EF}{BF}=\frac{EC}{AB}=\frac{ED}{BA}=\frac{EG}{BG}$，故 $EF\cdot BG=BF\cdot EG$.

8. 作$AD//BC$，交直线LN于D，

∵ $\triangle ANP\backsim\triangle BNL$，∴ $\frac{AN}{BN}\left(=\frac{ND}{NL}\right)=\frac{DA}{LB}$…①，

∵ $\triangle AMD\backsim\triangle CML$，∴ $\frac{CM}{AM}\left(=\frac{ML}{MD}\right)=\frac{LC}{DA}$…②，

①×② $\frac{AN}{BN}\cdot\frac{CM}{AM}=\frac{LC}{LB}$，则$\frac{AN}{BN}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$.

9. AD平分$\angle BAC$，$\angle BAC=2\angle E$，∴ $\angle DAC=\angle ACE$，∴ $AD//EC$，$\frac{AB}{BD}=\frac{BE}{BC}$，又$\angle ABP=\angle PBD$，$\frac{AP}{PD}=\frac{AB}{BD}$，∴ $\frac{BE}{BC}=\frac{AP}{PD}$.

10. 设法证夹公共角 $\angle FAE$ 两边对应成比例. 逆应用射影定理之结论，可得$\frac{AE}{AF}=\frac{AD^2}{AB}\div\frac{AD^2}{AC}=\frac{AC}{AB}$.

11. 因 AD 平分$\angle$A，故 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，又因为 $AC=2AB$，故$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，又因为 $AC=2AB$，故$\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$。因 $DE//CA$，故$\frac{BD}{DC}=\frac{BE}{EA}$，即$\frac{BE}{EA}=\frac{1}{2}$，因 $DF//BA$，$DE//CA$，故 $EA=DF$，故$\frac{BE}{DF}=\frac{1}{2}$，又$DF//BA$，故$\frac{BE}{DF}=\frac{GE}{GF}=\frac{1}{2}$，故$GE=EF$。

12. $\because$ $\angle BAD=\angle CAD$，$\therefore$ $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$，又 $\because$ $\triangle ADC\backsim\triangle FDE$，$\therefore$ $\frac{EF}{AC}=\frac{DE}{CD}$，又 $DE=BD$，$\therefore$ $\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{AC}$，$\therefore$ $AB=EF$。

13. 设法证 $\frac{LC}{CE}=\frac{AB}{AE}$。

14. $\angle ADF=\angle BCE$，有$BC=2DC$，故有$\frac{AD}{DF}=\frac{BC}{CE}$，即 $\frac{AD}{\frac{1}{2}DE}=\frac{2DC}{CE}$，即$\frac{AD}{DE}=\frac{DC}{CE}$，$\therefore$ $\triangle AFD\backsim\triangle BEC$，则$\angle 1=\angle 2$，可证 $AH\perp BE$。

15. 注意 $AM:MD=AB:BD=AC:AD=CN:ND$。

16. 证 M 是$\triangle AEC$ 的内心，而 EM 是$\angle AEC$ 的平分

线，可得$\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{AE}{EN}$，由于$\angle ENB=2\angle NBC=\angle EBN$，有$\triangle EEN$是等腰三角形，即得$EB=EN$，以下可证得。

七　梅涅劳斯定理

梅涅劳斯(Menelaus)是公元一世纪时的希腊数学家兼天文学家，他首先发现了对证共线点问题很有用处，且对证其他几何问题也很有用处，被后人以他名字来命名的定理。

（一）基本原理

1．梅涅劳斯定理：在$\triangle ABC$的三边BC, CA, AB（或其延长线）与一直线相交于D，E，F，那么

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

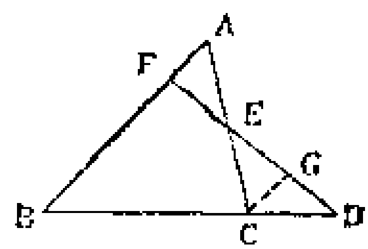


图 7—1

证：过C点作$CG//AB$交FD于G，$\because\ \frac{BD}{DC}=\frac{BF}{CG}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{CG}{AF}$，

$$\therefore\ \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{BF}{CG}\cdot\frac{CG}{AF}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

应用这个定理的关键是找出三角形ABC来，为了后面叙述方便起见，不妨把这样的三角形称作梅氏三角形，这样的直线称作梅氏直线。

2．梅涅劳斯定理的逆定理：如果点D、E、F分别在$\triangle ABC$的边BC、CA和AB（或其延长线）上，且

$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，则 D、E、F 三点在一条直线上。

（二）范例与方法

梅氏定理和它的逆定理是解决许多有关比例线段及共线点等问题的有力工具，只要运用恰当，可以不添辅助线或少添辅助线，就能应刃而解，下面来介绍它们的应用。

1. 有关比例线段的计算或证明

例1 $\triangle ABC$ 中，F 为 AC 上的一点，且 $\frac{AF}{FC}=\frac{1}{2}$，$G$ 为 BF 的中点，连 AG 并延长交 BC 于 E，求 $\frac{BE}{EC}$ 的值。

思路： 选择 $\triangle BCF$ 为梅氏三角形，将 AE 看成梅氏直线，由梅氏定理即可得到结果。

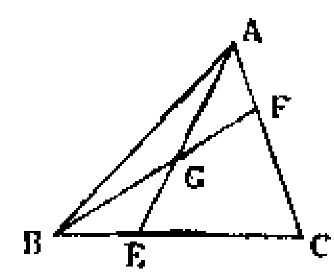


图 7—2

解： ∵ $\frac{AF}{FC}=\frac{1}{2}$，$\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}$，

将 $\triangle BCF$ 视为梅氏三角形，将 AE 看成梅氏直线，由梅氏定理得：$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CA}{AF}\cdot\frac{FG}{GB}=1$，又∵ G 是 BF 的中点，即 $\frac{FG}{GB}=1$，∴ $\frac{BE}{EC}=\frac{AF}{CA}=\frac{1}{3}$。

【说明】 本例中若选择 $\triangle ACE$ 为梅氏三角形，BF 为梅氏直线，得 $\frac{EB}{BC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GE}=1$，问题就不易解决。可见解

决此类问题的技巧是恰当的选择梅氏三角形和梅氏直线，使所得结论中出现目标比值。

例 2 如图7－3，设AD为$\triangle ABC$的一条中线，引任一直线CF交AD于E，交AB于F，证明：$\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{2AF}{FB}$。

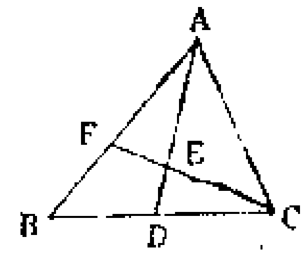


图 7—3

思路：选择$\triangle ABD$为梅氏三角形，CEF为梅氏直线，应用梅氏定理可得证。

证：将$\triangle ABD$看成梅氏三角形，CEF看成梅氏直线，由梅氏定理知，

$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DE}{EA}=1$。由已知，$BC=2CD$，

$\therefore\quad \dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{2CD}{CD}\cdot\dfrac{DE}{EA}=1$，即有$\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{2AF}{FB}$。

【说明】 本题证法很多，但用梅氏定理可不作辅助线，优越性是十分明显的。

例 3 如图7－4，设等腰三角形ABC的边长为a，D是底边BC上的中点，过D作任一直线交两腰（或延长线）于E、F，则$\dfrac{1}{AE}+\dfrac{1}{AF}$为定值。

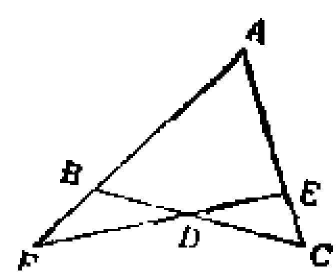


图 7—4

思路：在$\triangle ABC$中，$AB=AC=a$，将$\dfrac{1}{AE}+\dfrac{1}{AF}$变形为$\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{a}{AE}+\dfrac{a}{AF}\right)$，$\dfrac{a}{AE}$即$\dfrac{AC}{AE}$，$\dfrac{a}{AF}$即$\dfrac{AB}{AF}$，因而可用梅

氏定理得解。

证：将$\triangle BFD$看作梅氏三角形，AC看作梅氏直线，则有$\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DE}{EF}\cdot\frac{FA}{AB}=1$，$\because$ $\frac{BC}{CD}=2$，$\therefore$ $\frac{AB}{FA}=\frac{2DE}{EF}$ (1)同理，将$\triangle DCE$看作梅氏三角形，AB看作梅氏直线，则有$\frac{DF}{FB}\cdot\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CB}{BD}=1$，得 $\frac{AC}{EA}=\frac{2DF}{EF}$ (2)，(1)+(2)得

$\frac{a}{FA}+\frac{a}{EA}=\frac{2(DE+DF)}{EF}=\frac{2EF}{EF}=2$，$\therefore$ $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{2}{a}$（定值）

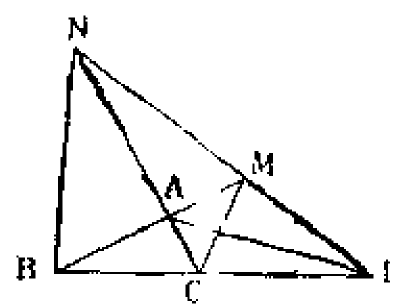


图 7—5

【说明】 证几何定值问题，梅氏定理无疑也是一个有力的工具。

2．有关三点共线问题

例 4 不等边三角形三个外角平分线与对边延长线的交点在一条直线上。

思路：以三角形外角平分线的性质为桥梁，找满足梅氏定理逆定理的条件，问题即可得证。

证：如图7—5，$\triangle ABC$ 的三个外角平分线与其对边分别交于L、M、N。$\because AL$是$\triangle ABC$外角的平分线，

$\therefore$ $\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}$，同理，$\frac{CN}{NA}=\frac{BC}{AB}$，$\frac{AM}{MB}=\frac{AC}{BC}$，

$\therefore$ $\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AM}{MB}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1$，由梅氏定理的逆定理知$L$、$M$、$N$在一条直线上。

【说明】 梅氏定理的逆定理是证三点共线的工具之一。

例 5 如图7—6，过任意$\triangle ABC$三个顶点A，B，C作它的外接圆的切线，分别和BC，CA，AB的延长线交于P，Q，R，则P，Q，R三点共线。

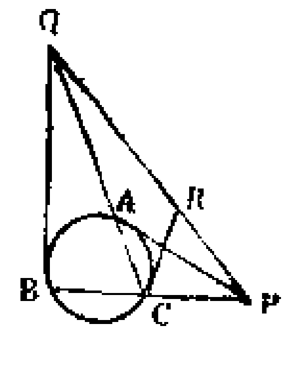


图 7—6

思路：利用相似三角形得到对应边的比，再找满足梅氏定理逆定理的条件即可奏效。

证：$\because$ CR切圆于C，$\therefore\triangle BCR\backsim\triangle CAR$，从而$\dfrac{RC}{RA}=\dfrac{BR}{RC}=\dfrac{BC}{AC}$。同理有$\dfrac{AQ}{QB}=\dfrac{QB}{QC}=\dfrac{AB}{BC}$，

$\dfrac{CP}{AP}=\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AC}{AB}$。 $\therefore$ $\left(\dfrac{RC}{RA}\cdot\dfrac{AQ}{QB}\cdot\dfrac{CP}{AP}\right)$

$\left(\dfrac{BR}{RC}\cdot\dfrac{QB}{QC}\cdot\dfrac{AP}{PB}\right)=\left(\dfrac{BC}{AC}\cdot\dfrac{AB}{BC}\cdot\dfrac{AC}{AB}\right)^2=1$，即 $\dfrac{AQ}{QC}\cdot\dfrac{CP}{PB}$

$\cdot\dfrac{BR}{RA}=1$。

由梅氏定理的逆定理知，P，Q，R三点共线。

另证：如图7—6知，$\triangle ABP$和$\triangle CAP$有相同的高，

$\therefore$ $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle CAP}}$。

又因为AP是过A点的$\triangle ABC$的外接圆的切线，

$\therefore\angle ABP=\angle CAP$，从而$\triangle ABP\backsim\triangle CAP$，由此得

$\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle CAP}}=\dfrac{AB^2}{CA^2}$，从而有$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{AB^2}{CA^2}$。

同理，$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{BC^2}{AB^2}$，$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{CA^2}{BC^2}$。$\therefore \dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}$ $=\left(\dfrac{AB}{CA}\cdot\dfrac{BC}{AB}\cdot\dfrac{CA}{BC}\right)^2=1$。$\because$ P,Q,R 三点分别在边 BC，CA，AB的延长线上，由梅氏定理的逆定理可知，P，Q，R 点共线。

例 6 设两三角形的对应顶点的连线交于一点，则对应边（或延长线）的交点共线。

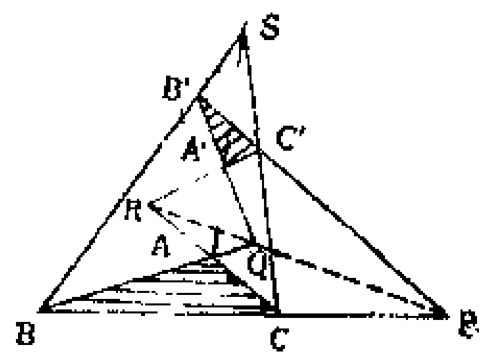


图 7—7

思路：根据图形特点，P，Q，R 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 的延长线上，则可对 $\triangle ABC$ 应用梅氏定理，如将$\triangle SBC$ 视为梅氏三角形，$PC'B'$视为梅氏直线，应用梅氏定理即可打开证明的思路。

证：$\triangle SBC$被直线 $PC'B'$ 所截，由梅氏定理，得

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CC'}{C'S}\cdot\frac{SB'}{B'B}=1。\quad(1)$$

$\triangle SCA$ 被直线 $RC'A'$ 所截，由梅氏定理得

$$\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AA'}{A'S}\cdot\frac{SC'}{C'C}=1\quad(2)$$

$\triangle SAB$ 被直线 $QA'B'$所截，由梅氏定理得

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BB'}{B'S}\cdot\frac{SA'}{A'A}=1。\quad(3)$$

(1) ×(2) ×(3) 得：$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CR}{RA}\cdot\dfrac{AQ}{QB}=1$，由梅氏逆定理知 P,Q,R 三点共线。

【说明】 这个命题叫做笛沙格定理，它在几何及其应用上都具有重要意义。

（三） 练 习 题

1．在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，在AB上取点D，又在AC的延长线上取E点，使$CE=BD$，连结DE交BC于G点，求证：$DG=GE$。

2．E为$\triangle ABC$中AC边上的中点，过E的任一直线交AB于F，交BC的延长线于D，求证：$\frac{AF}{BF}=\frac{CD}{BD}$。

3．已知$\triangle ABC$中，D是CB的延长线上的一点，E是AC上的一点，$BD=AE$，DE交AB于F，求证：$DF\cdot BC=AC\cdot EF$。

4．已知D、E分别是$\triangle ABC$的边AB、AC上的点，$BD=CE$，DE的延长线交BC的延长线于F，求证：$\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{FD}$。

5．$\triangle ABC$中，E、F为BC的三等分点，中线BM分别交AE、AF于N、Q，求：$S_{\triangle AQM}:S_{\triangle ANQ}:S_{\triangle ABN}$。

6．经过$\angle XOY$的平分线上的一点A，任作一直线与OX、OY分别相交于P、Q，求证：$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$等于定值。

7．已知P是正方形$ABCD$对角线的交点，AF平分$\angle BAC$，$DH\perp AF$，H为垂足，DH交AP于G，交AB于E，则$BE=2PG$。

8．三角形两角的平分线及第三角的外角平分线，与各

自的对边（或延长线）相交，求证这三个交点共线。

9. 在$\triangle ABC$中，D、E分别是BC、CA上的点，且$BD:DC=m:1$，$CE:EA=n:1$，AD与BE相交于F，则$\triangle ABF$的面积等于$\triangle ABC$面积的几倍。

（四） 答案与提示

1. 将$\triangle ADE$看成梅氏三角形，BC看成梅氏直线，

则 $\frac{AB}{BD}\cdot\frac{DG}{GE}\cdot\frac{EC}{CA}=1$，$\because$ $AB=AC$，$CE=BD$，

$\therefore$ $\frac{DG}{GE}=1$，即$DG=GE$。

2. $\triangle ABC$被直线FD所截，由梅氏定理，得

$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，$\because$ E是AC的中点，$AE=EC$，

$\therefore$ $\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{DC}=1$，即 $\frac{AF}{BF}=\frac{CD}{BD}$。

3. $\triangle CDE$被直线AB所截，由梅氏定理，得

$\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CA}{AE}\cdot\frac{EF}{FD}=1$，$\because$ $BD=AE$，$\therefore$ $\frac{CA}{BC}\cdot\frac{EF}{FD}=1$，

即$\frac{DF}{EF}=\frac{AC}{BC}$。

4. $\triangle ADE$被直线BF所截，由梅氏定理，得$\frac{AB}{BD}\cdot$

$\frac{DF}{FE}\cdot\frac{EC}{CA}=1$，$\because$ $BD=CE$，$\therefore$ $\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{FD}$。

5. $\triangle BCM$被直线AE所截，由梅氏定理，得

$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MN}{NB}=1$，∵ $\frac{BE}{EC}=\frac{1}{2}$，$AM=MC$，∴ $\frac{AM}{AC}=\frac{1}{2}$，∴ $\frac{MN}{NB}=1$，同理可得，$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MQ}{QB}=1$，$\frac{BF}{FC}=2$，$\frac{CA}{AM}=2$，∴ $MQ=\frac{1}{4}BQ=\frac{1}{5}BM$，$NB=\frac{1}{2}BM=\frac{5}{10}BM$，$NQ=\frac{3}{10}BM$。

∴ $S_{\triangle AQM}:S_{\triangle ANQ}:S_{\triangle ABN}=MQ:QN:NB=2:3:5$。

6. 作$MN\perp OA$交OX于N，OY于M，由已知得$AM=AN$，$OM=ON$，$\triangle AMQ$被直线OX所截，由梅氏定理，得 $\frac{MO}{OQ}\cdot\frac{QP}{PA}\cdot\frac{AN}{NM}=1$，又 $MN=2AN$，

∴ $\frac{MO}{OQ}=\frac{2PA}{QP}$，同理可得，$\frac{NO}{OP}=\frac{2AQ}{PQ}$，∴ $\frac{MO}{OQ}+\frac{NO}{OP}=\frac{2PA}{QA}+\frac{2AQ}{PQ}=2$，∴ $\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{2}{ON}$（定值）。

7. 易证$\triangle AEG$是等腰三角形（$AE=AG$），$\triangle ABP$被直线DE所截，则$\frac{BD}{DP}\cdot\frac{PG}{GA}\cdot\frac{AE}{ED}=1$，又∵ $BD=2DP$，即$BE=2PG$。

8. 如图7—8，由角平分线性质易知：$\frac{BC}{AB}=\frac{CE}{EA}$，$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$，$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{FC}$，∴ $\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AD}{DB}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1$。由梅氏逆定理知$D$、$E$、$F$三点共线。

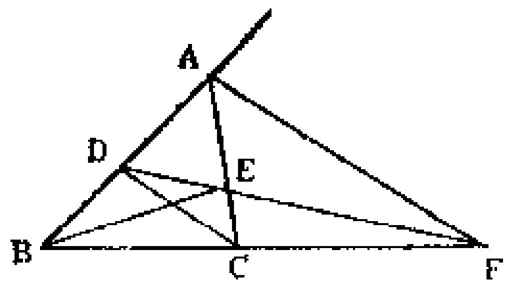


图 7—8

9. $\because \dfrac{CB}{BD} \cdot \dfrac{DF}{FA} \cdot \dfrac{AE}{EC} = 1$, $\dfrac{m+1}{m} \cdot \dfrac{DF}{FA} \cdot \dfrac{1}{n} = 1$,

$\therefore \dfrac{DF}{FA} = \dfrac{mn}{m+1}$, $\dfrac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABD}} = \dfrac{m+1}{mn+m+1}$, 又 $S_{\triangle ABD} = \dfrac{m}{m+1} S_{\triangle ABC}$, $\therefore$ $S_{\triangle ABF} = \dfrac{m}{mn+m+1} S_{\triangle ABC}$.

八 塞瓦定理

塞瓦（Ceva）定理，对于解决共点线问题有独特的功效，并在讨论其他问题时也有重要作用。

（一）基本原理

1. 塞瓦定理：如图8—1，设O是$\triangle ABC$内任意一点，AO，BO，CO分别交对边于N，P，M，

则 $\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CP}{PA}=1$。

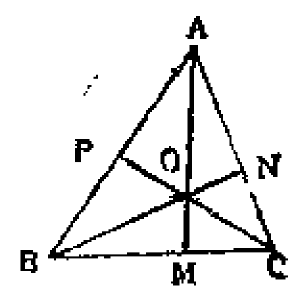


图 8—1

证：$\triangle CAM$被直线POB所截，得$\dfrac{CP}{PA}\cdot\dfrac{AB}{MB}\cdot\dfrac{MO}{OC}=1$，又由于$\triangle CMB$被直线$AON$所截，得$\dfrac{CO}{OM}\cdot\dfrac{AM}{AB}\cdot\dfrac{BN}{NC}=1$，两式相乘即得

$\dfrac{CP}{PA}\cdot\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}=1$。

塞瓦定理的证法很多，读者可自行寻求证明。

2. 塞瓦定理的逆定理：设M，N，P分别在$\triangle ABC$的边AB，BC，CA上，且满足$\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CP}{PA}=1$，则$AN$，$BP$，$CM$相交于一点。

证：应用同一法容易证得本定理的结论。如图8—2，事

实上，设直线BP、CM相交于O，连AO并延长与BC相交于N'，则由塞瓦定理，得$\frac{BN'}{N'C}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AM}{MB}=1$，又由已知条件$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$，推得$\frac{BN'}{N'C}=\frac{BN}{NC}$，再由比例性质容易推得$N'C=NC$，即$N'$与$N$重合，得$AD$、$BE$、$CF$三线共点。

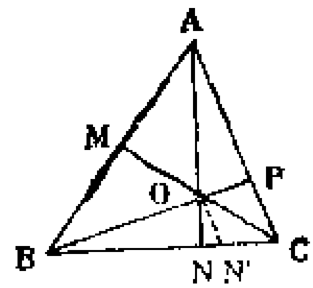


图 8—2

（二） 范例与方法

例1. 如图8—3，$\triangle ABC$中，E是中线AD上的任意一点，连BE并延长交AC于M，连CE并延长交AB于N，则$MN//BC$。

思路：$\triangle ABC$中，三线BM、CN、AD相交于E，会自然想到使用塞瓦定理，思路顿开。

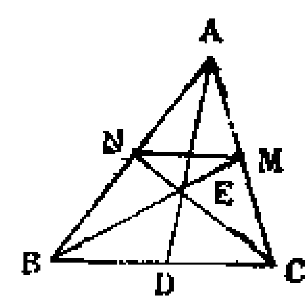


图 8—3

证： ∵ 在$\triangle ABC$中，AD、BM、CN相交于一点E，由塞瓦定理得，$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$，

∵ $BD=CD$，∴ $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{CM}{MA}=1$，即 $\frac{AN}{NB}=\frac{AM}{CM}$，

$\therefore\quad MN//BC$。

例 2 求证：三角形三条高线共点。

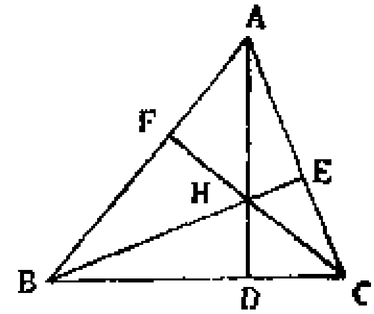


图 8—4

思路： 应用余切函数找满足塞瓦定理的逆定理的条件，问题即可解决。

证： 如图 8—4，设 AD、BE、CF 分别为$\triangle ABC$三边上的高，则$\frac{BD}{DC}=\frac{\operatorname{ctg}B}{\operatorname{ctg}C}$(1)，

$\frac{CE}{EA}=\frac{\operatorname{ctg}C}{\operatorname{ctg}A}$(2)，$\frac{AF}{FB}=\frac{\operatorname{ctg}A}{\operatorname{ctg}B}$(3)。

$$(1)\times(2)\times(3):\quad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{\operatorname{ctg}B}{\operatorname{ctg}C}\cdot\frac{\operatorname{ctg}C}{\operatorname{ctg}A}\cdot\frac{\operatorname{ctg}A}{\operatorname{ctg}B}$$

$=1$。$\therefore$ 由塞瓦定理的逆定理得 AD、BE、CF 三线共点。

例 3 如图 8—5，设$\triangle ABC$的内切圆与三边BC、CA、AB分别切于R、S、T，求证：AR、BS、CT交于一点。

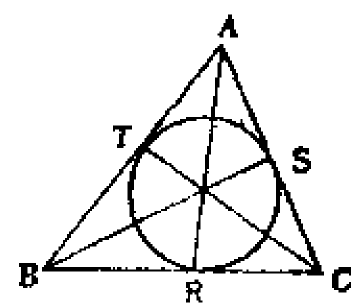


图 8—5

思路： 运用塞瓦定理的逆定理，又用切线长定理即可找到满足塞瓦逆定理的条件。

证： $\because\quad AS=AT,\ BT=BR,\ CR=CS$，

$$\therefore\quad \frac{BR}{RC}\cdot\frac{CS}{SA}\cdot\frac{AT}{TB}=1,$$

$\therefore\quad CT$、BS、AR 交于一点。

（三）练 习 题

1．证明三角形的角平分线交于一点。

2．已知M、N分别是四边形$ABCD$的对角线AC、BD的中点，直线MN交AB、BC、CD、DA（或延长线）于P、Q、R、S，求证：$\frac{AP}{BP}=\frac{CQ}{BQ}=\frac{CR}{DR}=\frac{AS}{DS}$。

3．在$\triangle ABC$中，X与X'、Y与Y'、Z与Z'各是BC、CA、AB上的等截点，设AX、BY、CZ三线交于一点P，则AX'、BY'、CZ'三线或交于一点P'或互相平行。

4．在$\triangle ABC$中，AM为BC上的中线，AD为角A的平分线交BC于D，作$BE\perp AD$的延长线，垂足为E，BE交AM的延长线于N，求证：$DN//AB$。

5．如图8—6，在四边形$ABCD$中，$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ABC$的面积比是3:4:1，点M、N分别在AC、CD上，满足$AM:AC=CN:CD$，并且B、M、N共线，求证：M与N分别是AC与CD的中点。

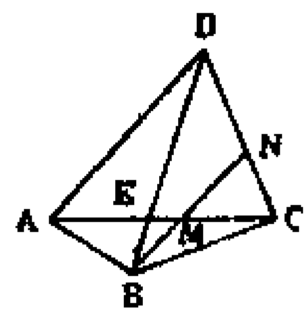


图 8—6

6．在$\triangle ABC$的边上向外作三个正方形，A_1，B_1，C_1是正方形中的边BC，CA，AB对边的中点。求证：直线AA_1，BB_1，CC_1，相交于一点。

（四）答案与提示

1．如图8—7，设AD、BE、CF是$\triangle ABC$的三条角平分

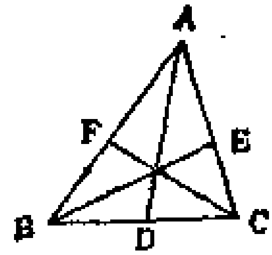


图 8—7

线，则有$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB}$，$\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{CB}$，相乘得

$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$。∴ AD、BE、CF交于一点。

2. ∵ $\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$，又∵ $AM=CM$，

∴ $\frac{AP}{BP}=\frac{QC}{BQ}$，同理$\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DN}{NB}=1$，∵ $BN=DN$，

∴ $\frac{QC}{BQ}=\frac{CR}{RD}$，$\frac{DR}{RC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AS}{SD}=1$，$AM=CM$，

∴ $\frac{AS}{SD}=\frac{RC}{DR}$，∴ $\frac{AP}{BP}=\frac{QC}{BQ}=\frac{RC}{DR}=\frac{AS}{SD}$。

3. 由塞瓦定理得：$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$，∵ $BX=CX'$，

$XC=BX'$，$CY=AY'$，$YA=Y'C$，$AZ=BZ'$，$ZB=Z'A$，

∴ $\frac{CX'}{BX'}\cdot\frac{AY'}{Y'C}\cdot\frac{BZ'}{Z'A}=1$。由塞瓦逆定理，得$AX'$、$BY'$、

CZ'三线共点(或互相平行)。

4. 延长EM交AB于G，延长AC、BE交于F，易知

$\triangle ABF$，是等腰三角形，且$BE=EF$，∵ $BM=MC$，

$\because$ $ME//CF$，$BG=GA$，应用塞瓦定理有

$\frac{BN}{NE}\cdot\frac{ED}{DA}\cdot\frac{AG}{GB}=1$，$\therefore$ $\frac{BN}{NE}=\frac{DA}{DE}$，$\therefore$ $DN//AB$。

5. 设 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r$，$(0<r<1)$。

$\because$ $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ABC}=3:4:1$，$\therefore\frac{BE}{BD}=\frac{1}{7}$，

$\frac{AE}{AC}=\frac{3}{7}$，$\frac{EM}{MC}=\frac{r-\frac{3}{7}}{1-r}$，$\frac{CN}{ND}=\frac{r}{1-r}$，$\frac{DB}{BE}\cdot\frac{EM}{MC}\cdot$

$\frac{CN}{ND}=1$。

即 $\frac{r}{1-r}\cdot7\cdot\frac{1-\frac{3}{7}}{1-r}=1$。得 $r=\frac{1}{2}$，$\therefore$ M 与 N 分别是 AC 与

CD 的中点。

6. 如图8—8，设 AA_1，BB_1，CC_1 交边 BC，CA，AB 的交点分别记为 A_2，B_2，C_2。

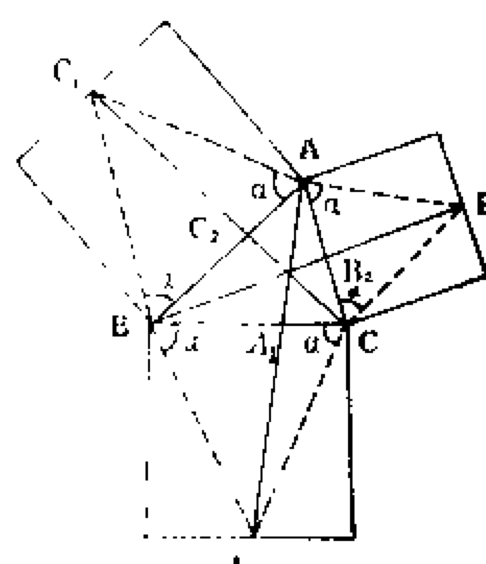


图 8—8

$$\frac{BA_2}{A_2C}=\frac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle ACA_1}}=\frac{AB\cdot BA_1\cdot\sin(B+\alpha)}{CA\cdot CA_1\cdot\sin(C+\alpha)}=\frac{AB}{CA}\cdot$$

$\frac{\sin(B+\alpha)}{\sin(C+\alpha)}$，同理，$\frac{CB_2}{B_2A}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{\sin(C+\alpha)}{\sin(A+\alpha)}$，

$$\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin(A+\alpha)}{\sin(B+\alpha)}.$$

三式相乘，得 $\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}\cdot\frac{AC_2}{C_2B}=1$.

$\therefore$ AA_1，BB_1，CC_1 交于一点.

九　三角形的垂心

（一）基本原理

1. 定理：从三角形的各顶点向其对边所作的三条垂线交于一点。

证　设BC上的高AD与AC上的高BE相交于H，连CH并延长交AB于F，又连DE。

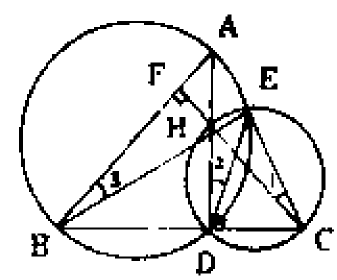


图　9—1

$\because$　$\angle HDC=\angle CEH=90^\circ$，$\therefore$　H、D、C、E四点共圆，故$\angle 1=\angle 2$；

又$\angle ADB=\angle BEA=90^\circ$，$\therefore$　A、B、D、E四点共圆，故$\angle 2=\angle 3$。$\therefore$　$\angle 1=\angle 2=\angle 3$。

而　$\left.\begin{array}{l}\angle 3+\angle BAE=90^\circ\\ \angle 1+\angle BAE=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\angle CFA=90^\circ$，即$CF\perp AB$，

即$\triangle ABC$三条高线AB、BE、CF共点。

H称为$\triangle ABC$的垂心。

若$\triangle ABC$是锐角三角形，垂心在$\triangle ABC$内，则H,A,B,C各为$\triangle DEF$的内心和旁心，若$\triangle ABC$是钝角三角形，垂心在$\triangle ABC$外，则钝角顶A和B,C,H各为$\triangle DEF$的内心和旁心。

2. $\triangle ABC$的三个顶点与垂心H具有下面的性质：

A,B,C,H构成一垂心组。

何谓垂心组呢？设有四点，任一点是其余三点连成的三角形的垂心，称这四点为一垂心组。

证：如图9—1，设AD，BE，CF是$\triangle ABC$的三条高，交于垂心H。

对于$\triangle ABH$，由$AE\perp BH$，$BD\perp AH$，$HF\perp AB$，$\therefore AE$，BD，HF是$\triangle ABH$的三条高，它们交于一点，即为C。$\therefore$ C是$\triangle ABH$的垂心、A是$\triangle BCH$的垂心。$\therefore A,B,C$，H构成一垂心组。

3．垂三角形和垂足三角形

三个垂足构成的$\triangle DEF$称为$\triangle ABC$的垂三角形。

垂足三角形：设P是$\triangle ABC$内一点，P向三边BC,CA，AB引垂线PA_1，PB_1，PC_1以垂足为顶点的三角形$A_1B_1C_1$称为$\triangle ABC$关于“垂点”P的垂足三角形。

显然，当P是垂心时，垂足三角形为垂三角形。

（二） 范例与方法

例 1 在$\triangle ABC$的边AB，AC上向形外作正方形$ABEF$，$ACGH$，又作$AD\perp BC$。求证：AD、BG、CE三线共点。

思路：欲证AD、BG、CE三线共点，只要证O是$\triangle KBC$的垂心，即要证$KB\perp EC$，$KC\perp BG$，问题立刻得到解决。

证：如图9—2，在DA的延长线上取$AK=BC$，连KB，KC，设AD，CE交于O。

在$\triangle EBC$，$\triangle BAK$中，$\angle 1+\angle 2=90°$，$\angle 1+\angle ABD=90°$，$\therefore$ $\angle 2=\angle ABD$。从而$\angle EBC=\angle BAK$。

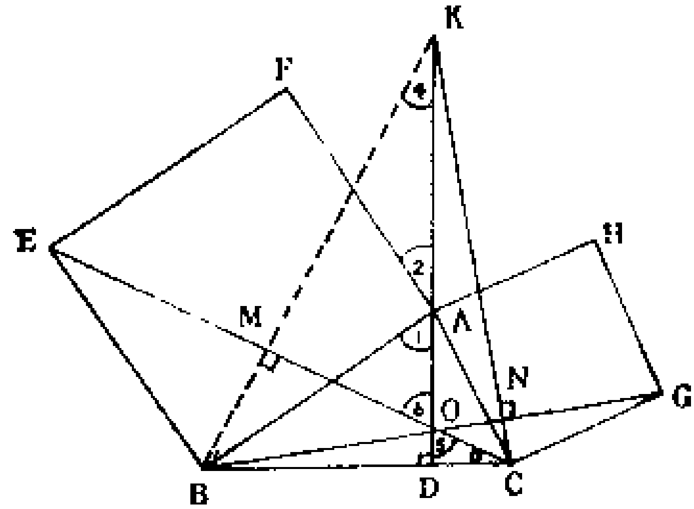


图 9—2

又∵ $BE=BA$，$AK=BC$，∴ $\triangle EBC\cong\triangle BAK$，

∴ $\angle 3=\angle 4$。又∵ $\angle 3+\angle 5=90^\circ$，∴ $\angle 3+\angle 6=90^\circ$。故$\angle 4+\angle 6=90^\circ$，即$KB\perp EC$。同理可证：$KC\perp BG$，∴ O为$\triangle KBC$的垂心。∴ AD、BG、CE三线共点。

例 2 若三角形的内接三角形的两边与原来三角形的一边分别成等角，则这个内接三角形是原来三角形的垂三角形。

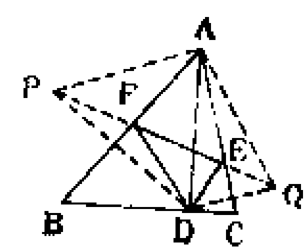


图 9—3

思路：欲证$\triangle DEF$是$\triangle ABC$的垂三角形，通过构造两个全等三角形的方法来实现，这种方法称为造全等三角形法。

证：如图9—3，连AD，延长EF，使$FP=FD$，则$\angle AFE=\angle PFB$。但由题设$\angle AFE=\angle BFD$，∴ $\angle PFB=\angle BFD$，∴ $\angle AFP=\angle AFD$。又$FP=FD$，$AF=AF$，∴ $\triangle APF\cong\triangle ADF$。于是$AP=AD$…①，且$\angle APF=\angle ADF$…②，在$FE$的延长线上，取$EQ=ED$。同理可证，$AQ=AD$…③，且$\angle ADE=\angle AQE$…④，于是

由①、③得$AP=AQ$。∴ $\angle APQ=\angle AQP$，即$\angle APF=\angle AQE$。又由②、④得$\angle FDA=\angle EDA\cdots$⑤，又由题设知$\angle FDB=\angle EDC$。从而可得$\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$，即$AD\perp BC$。同理，连结$BE$、$CD$，可证$BP\perp AC$，$CF\perp AB$。∴ $\triangle DEF$是$\triangle ABC$的垂三角形。

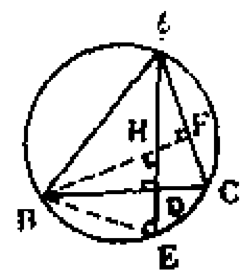


图 9—4

例 3 如图 9—4，设$\triangle ABC$的垂心为H，连结AH并延长和外接圆及边BC的交点分别为E、D，则$HD=DE$。

思路：欲证$HD=DE$，只要证$\triangle BEH$是等腰三角形即可。

证：连结BH，再连结BH并延长交AC于F，则$\angle AFD=90^\circ=\angle ADB$。∴ A、F、D、B四点共圆。∴ $\angle FAD=\angle FBD$。又$\angle CAD=\angle CBE$，∴ $\angle FBD=\angle EBD$，即$\angle HBD=\angle EBD$。又$BD\perp HE$。∴ $\triangle BEF$是以HE为底边的等腰三角形。∴ D是HE的中点，即$HD=DE$。

例 4 **证明**：三角形的垂心到一顶点的距离等于自其外接圆的圆心到这顶点对边距离的 2 倍。

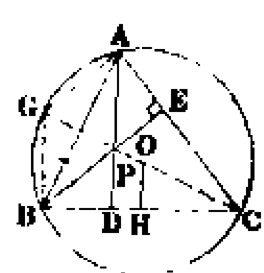


图 9—5

已知 见图9—5，ABC内接于⊙0，P为$\triangle ABC$的垂心，$OH\perp BC$。

求证：$AP=2OH$。

思路：设法使OH成为一个三角形中位线，再证明AP等于这个三角形的第三边的一半，再进一步证明四边形$BGAP$为平行四边形，问题即解决。

证：过 O 和 C 作直径 CG，连接 B、G 和 A、G。

$\because$ $\angle GBC = 90°$，$\angle GAC = 90°$（直径上的圆周角是直角），又 $\because$ $\angle ADB = 90°$，$\angle AEB = 90°$，$\therefore$ $AD//GB$，$GA//BE$，$\therefore AGBE$ 为平行四边形，$\therefore$ $AP = BG$。又 $\because$ H 是 BC 的中点，$\therefore OH = \frac{1}{2}BG$，即 $BG - 2OH$，$\therefore AP = 2OH$。

例 6 证明三角形三边的中点、三条高线的垂足、垂心与顶点连结线的中点，这九点共圆。

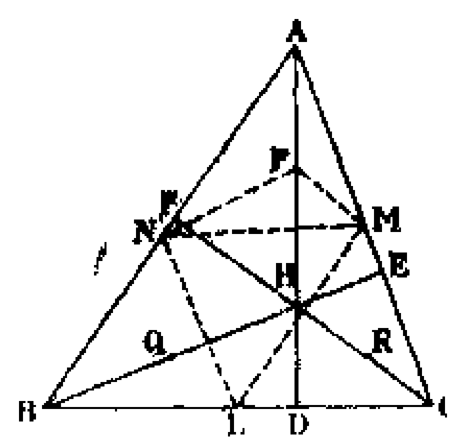


图 9—6

已知M、在 $\triangle ABC$ 中，H 是垂心，L、N分别是三边 BC、CA、AB 的中点，D、E、F 分别是这三边上三条高线的垂足，P、Q、R分别是 HA、HB、HC 三线段的中点（如图 9—6）。求证：L、M、N、D、E、F、P、Q、R 九点共圆。

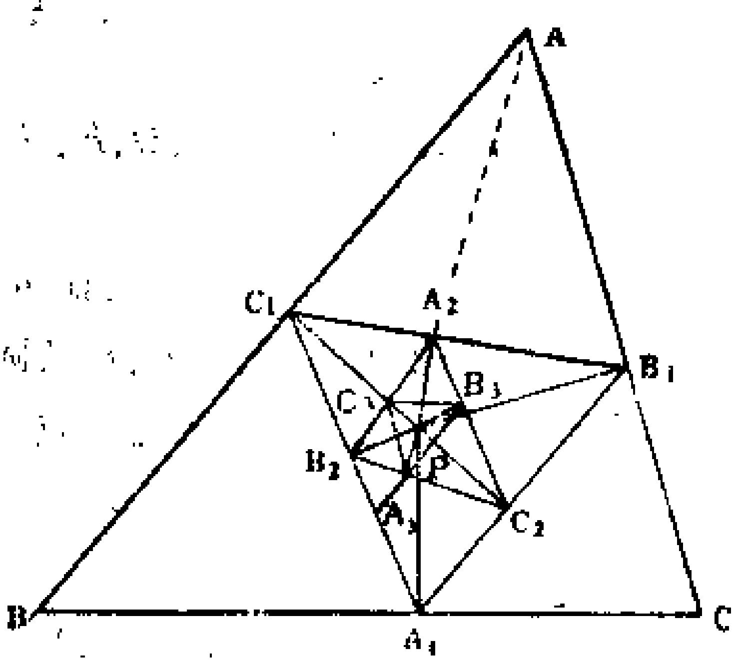
思路：设三边的中点为L、M、N，若能先证明这三点与 D 点四点共圆，则可用同法证明这三点与 E、F 共圆，若能再证这三点与 P 点共圆，则用同法也可证这三点与Q、R共圆。因这样的六个圆公有 L、M、N三点，故实际上是同一个圆。

证：(1) 如图9—6，连LN、MN、MD，则$MN//BC$，$LN//AC$。$\therefore$ $LNMC$ 是平行四边形，于是$\angle LNM = \angle C$。$\because$ $MD = MC$，则 $\angle LNM = \angle C = \angle MDC$。

∴ L、N、M、D四点共圆。同理L、N、E、M四点及L、N、F、M四点都分别共圆。

(2) 又连NP、PM、LM，则$NP//BE$，$PM//CF$。∴ $\angle NPM=\angle FHE$，又∵ $LNAM$是平行四边形，于是$\angle NLM=\angle A$。 又$\angle FHE+\angle A=180°$，
∴ $\angle NPM+\angle NLM=180°$。∴ L、N、P、M四点共圆。同理L、M、N、Q四点及L、N、M、R四点也分别共圆。但以上各个圆都过L、M、N三点，因此L、M、N、D、E、F、P、Q、R九点都在同一个圆LMN上。

例 6 设$\triangle ABC$中的内点P得到垂足三角形为$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_1B_1C_1$关于P的第二个垂足三角形为$\triangle A_2B_2C_2$，第三次又产生了对于$\triangle A_2B_2C_2$的垂足三角形$\triangle A_3B_3C_3$，求证：$\triangle A_3B_3C_3\backsim\triangle ABC$。



附 9—7

证： 连PA，∵ $PB_1\perp AB_1$，$PC_1\perp AC_1$，∴ P在

AB_1C_1的外接圆上，同理，P也在$\triangle A_2B_1C_2$，$\triangle A_3B_3C_2$，$\triangle A_2B_2C_1$和$\triangle A_3B_2C_3$的外接圆上。∴ $\angle C_1AP=\angle C_1B_1P_1=\angle A_2B_1P=\angle A_2C_2P=\angle B_3C_2P_1=\angle B_3A_3P$，又$\angle PAB_1=\angle PC_1B_1=\angle PC_1A_2=\angle PB_2A_2=\angle PB_2C_3=\angle PA_3C_3$。∴ $\angle C_1AP=\angle PAB_1=\angle B_3A_3P+\angle PA_3C_3$，即是$\angle BAC=\angle B_3A_3C_3$，同理$\angle ACB=\angle A_3C_3B_3$，$\angle CBA=\angle C_3B_3A_3$。

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A_3B_3C_3$。

（三）练 习 题

1. 三角形的外心、垂心和重心在一条直线上，并且外心到垂心的距离等于垂心到重心距离的一半。

2. 设$\triangle ABC$的垂心为H，AE为$\triangle ABC$的外接圆的直径，连结EH，则直线EH过BC的中点M，且$ME=MH$。

3. 设$\triangle ABC$的垂心为H，若垂三角形DEF的外接圆和HC的交点为G，则$HG=CG$。

4. 设$\triangle ABC$的三条高线为AD、BE、CF，D、E、F分别为垂足，其垂心为H，若$\triangle HBC$的外接圆和AB、AD、AC或延长线的交点分别为K、L、M，则$AF=FK$，$AD=DL$，$AE=EM$。

（四）答案与提示

1. 如图9—8，从外心O向BC作垂线OM，M为垂足，由例4知$OM=\frac{1}{2}AH$。设OH和AM的交点为G，则$\triangle OMG$

$\backsim\triangle AHC$，∴ $AG:GM=AH:OM=2:1$，但 AM 为 $\triangle ABC$ 的中线，∴ G 是这个三角形的重心。∴ O、G、H 在同一直线上。又 $OG:GH=OM:AH=1:2$，∴ $OG=\frac{1}{2}GH$。

2. 如图9—9，设$\triangle ABC$的，外心为O，作$OM\perp BC$，垂足为M，则M是BC的中点，∴ $OM=\frac{1}{2}AH$，

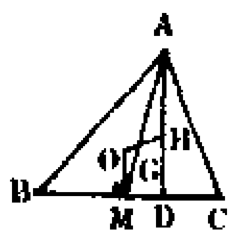


图 9—8

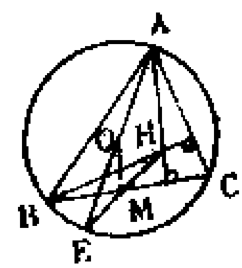


图 9—9

又 $AO=OE=\frac{1}{2}AE$，$AH//OM$，∴ H、M、E在一直线上，又 O是AE的中点，∴ M为HE的中点，即 $ME=MH$。

3. 如图 9—10，连结 DG，则$\angle HDG=\angle HDE+\angle EDG$。但是$\angle HDE=\angle HDF$，∴ $\angle HDG=\angle HDF+\angle DFG=\angle DHG$。

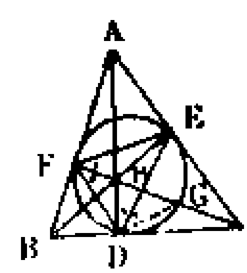


图 9—10

∴ $GD=GH$。又∵ $\angle HDC=90°$，故$HG=CG$。

4. 由例3，圆 HBC 和圆 ABC 相等。连结 KC，则$\angle AKC=\angle BAC$。∴ $\triangle CAK$ 是以 AK 为底边的等腰

三角形，$\because$ $AB \perp CF$，$\therefore$ $AF = FK$。同理，$AE = EM$。$\because$ A 和 L 关于 BC 是对称的，$\therefore$ $AD = DL$。

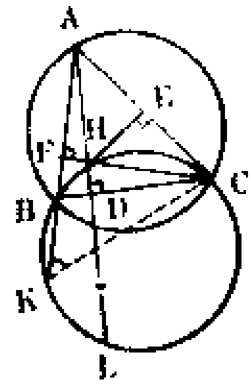


图 3—10

十 圆

（一） 基本原理

1. 圆的性质

（1）定义 平面内到定点的距离等于定长的点的集合叫做圆。

不在同一直线上的三点确定一个圆。

（2）性质 圆是轴的对称图形，任何一条直径所在的直线都是它的对称轴。圆也是中心对称图形，圆心是它的对称中心。

①垂径定理：垂直于弦的直径必平分弦和弦所对的弧，以及它的逆定理。

②在同圆或等圆中，两个圆心角、圆心角所对的弧、弦、弦心距中任何一组量相等，则其余对应的量也都相等。

2. 直线和圆的位置关系

（1）由圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系，能确定直线与圆的位置关系：

$d>r\Leftrightarrow$相离；$d=r\Leftrightarrow$相切，$d<r$相交。

（2）切线的判定

①切线定义 直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆相切，这条直线叫做圆的切线，唯一公共点叫做切点。

②切线的判定

(i) 如果圆心到直线的距离等于半径，那么此直线是圆的切线。

(ii) 经过半径的外端点并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。

(3) 切线的性质

①圆心到切线距离等于圆的半径；

②圆的切线垂直于过切点的半径；（其逆命题也成立）

③从圆外一点引圆的两条切线，切线长相等。

(4) 与圆有关的角

①圆心角、圆周角、弦切角定义。

②数量关系：圆心角的度数等于所对弧的度数；圆周角的度数等于同弧（或等弧）所对的圆心角的度数的一半；弦切角的度数等于它所夹的弧所对的圆周角的度数。

(5) 和圆有关的比例线段

①相交弦定理：经过圆内一点引两条弦，各弦被这点所分成的两段的积相等。

推论：从圆上一点向直径引垂线，这垂线之长就是直径被垂足分成的两线段的比例中项。

②切割线定理：从圆外一点向圆引切线与割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项。

③割线定理：从圆外一点向圆引诸割线，这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积皆相等。

上述三个定理的逆命题成立，并且是证明四点共圆的工具。

3. 圆与圆的位置关系

设有$\odot O_1$，$\odot O_2$，其半径为r_1，r_2，且$r_1>r_2>0$，两圆位置关系如下：

$O_1O_2>r_1+r_2 \Longleftrightarrow$相离，$O_1O_2=r_1+r_2 \Longleftrightarrow$相外切；

$r_1-r_2<O_1O_2<r_1+r_2 \Longleftrightarrow$相交；$O_1O_2=r_1-r_2 \Longleftrightarrow$相内切；

$0<O_1O_2<r_1-r_2 \Longleftrightarrow$相内含；$O_1O_2=0 \Longleftrightarrow$同心。

两圆相交时，连心线垂直平分公共弦；两圆相切时，在切点处有公共切线，连心线必过切点。两圆的外公切线长相等；相离两圆的内公切线长相等。

4. 圆与多边形

(1) 圆与三角形

三角形有且只有一个外接圆，其三边垂直平分线的交点是外接圆的圆心，称为三角形的外心。

三角形有且只有一个内切圆，三内角平分线交点是内切圆的圆心，称为三角形的内心。

(2) 圆与四边形

①圆的内接四边形

圆内接四边形对角互补；圆内接四边形的任一外角等于它的内对角；反过来，如果一个四边形的一组对角的和等于180°，那么这四边形内接于圆；如果一个四边形的一个外角等于它的内对角，那么这四边形内接于圆。

这两条是证四点共圆的依据。

证四点共圆还有下面的定理：在定线段同侧与两端点连线所夹角相等的两点与线段端点共圆。

②圆的外切四边形

圆外切四边形对边和相等，其逆命题也成立。

(3) 圆与正多边形

各边相等、各角也相等的多边形叫做正多边形。正多边形必有外接圆与内切圆。

正 n 边形的半径和边心距把正 n 边形分成$2n$不全等的直角三角形。由此，正多边形的计算问题可以归结为直角三角形的有关计算问题。

5．圆的度量

$c=2\pi R$，$l=\dfrac{n\pi R}{180}$，$s=\pi R^2$，$A=\dfrac{n}{360}\cdot\pi R^2=\dfrac{1}{2}lR$。其中$R$是圆的半径，$c$为圆的周长，$s$为圆的面积，$A$为这圆上的一个扇形的面积，$l$为这扇形的弧长，$n$为这弧的度数。

（二） 范例与方法

1．证角和线段相等

例1 如图10—1，$\odot O$中四边形$ABCD$的对边AD、BC的延长线交于E，$\angle AEB$的平分线EF交AB于F，AC、BD分别与FE交于K、H，AC、BD交于G点，过G点作$GM\perp HK$于M。求证：$\angle HGM=\angle MGK$。

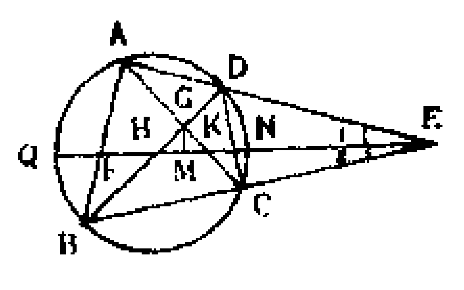


图 10—1

思路：欲证$\angle HGM=\angle MGK$，只要证$\angle GHM=\angle GKM$即可。

证：设FE交$\odot O$于N，又延长EF交$\odot O$于Q。$\because \angle 1 = \angle 2$，$\therefore \overset{\frown}{AQ} - \overset{\frown}{DN} = \overset{\frown}{BQ} - \overset{\frown}{CN}$。$\therefore \overset{\frown}{BQ} + \overset{\frown}{DN} = \overset{\frown}{AQ} + \overset{\frown}{CN}$，$\therefore \angle QHB = \angle NKC$，$\therefore \angle GHM = \angle GKM$，而$\angle HMG = \angle KMG = 90°$，$\therefore \angle HGM = \angle MGK$。

例2 凸五边形$ABCDE$中，$\angle ABC = \angle ADE$，$\angle AEC = \angle ADB$。求证：$\angle BAC = \angle DAE$。

思路：要证$\angle BAC = \angle DAE$，在$\triangle ABC$与$\triangle ADE$中，由于$\angle ABC = \angle ADE$，只需证$\angle ACB = \angle AED$即可。

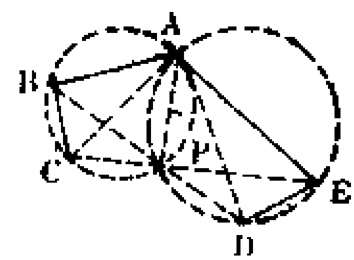


图 10—2

设对角线BD与CE相交P，连AP，则发现$\angle AEP$与$\angle ADP$是在线段AP同侧的两个相等的角，因此A、P、D、E四点共圆，$\angle APB = \angle AED$。

要证$\angle ACB = \angle AED$，只需证$\angle ACB = \angle APB$，只需证A、B、C、P四点共圆，这只需$\angle ABC = \angle APE$即可。

由于已知$\angle ABC = \angle ADE$，又$\angle APE = \angle ADE$（A、P、D、E共圆）$\therefore \angle ABC = \angle APE$显然成立，于是问题思路沟通。

证：如图10—2，设BD、CE相交于P，连AP，由于$\angle AEP = \angle ADP$，所以A、P、D、E四点共圆，因此，$\angle APE = \angle ADE = \angle ABC$，所以$A$、$P$、$C$、$B$四点共圆，所以$\angle BAC = \angle BPC = \angle DPE = \angle DAE$。

例3 $\triangle ABC$中，$\angle BAC = 90°$，延长线CA到F，过F

作$FP\perp BC$于P，交AB于E，过A作$\triangle ABC$外接圆的切线AD，交FP于D，求证：$DE=DF$。

思路：仔细分析图形，就会发现图形中有一个对角互补的四边形，这个可推得A、B、P、C四点共圆，而$\angle 1$是这个圆的外角，应有$\angle 1=\angle C$，而$\angle 2$是$\triangle ABC$的外切圆的弦切角，应有$\angle 1=\angle 2$，进一步推得$AD=DE$。又可推得$\angle 3=\angle F$，$AD=DF$，到此便推出$DE=DF$。

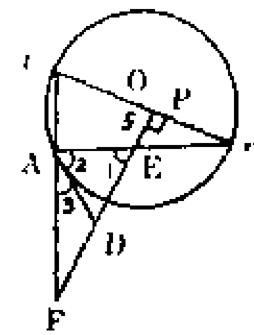


图 10—3

证：在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$；又$FP\perp BC$，A、E、P、C四点共圆，则$\angle 1=\angle C$。在$\odot O$中$\angle 2=\angle C$，$\therefore \angle 1=\angle 2$，则$DE=DA$。在$Rt\triangle FAE$中，$\angle 2+\angle 3=90°$，$\angle 1+\angle F=90°$，又$\angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle 3=\angle F$，$\therefore AD=DF$。则$DE=DF$。

例4 如图10—4，四边形$ABCD$内接于一圆，其两对边AD和BC交于M，$\odot MDC$与直线AB交于E和F，求证：$ME=MF$。

思路：证明$ME=MF$，在$\odot MDC$中找出$\angle MEF=\angle MFE$，便可达到目的。

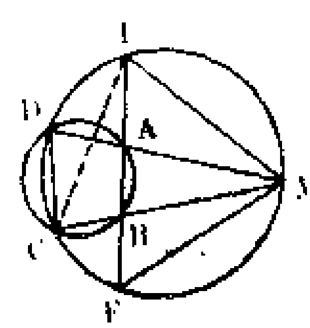


图 10—4

证：$\because$ $ABCD$内接于一圆，$\therefore \angle MAB=\angle DCB$，$\because$ C，D，E，M，F共圆，$\therefore \angle ECB=\angle EFM$，连$CE$，$\angle DCE=\angle EMA$。$\because \angle MAB$是$\triangle AME$的外角，$\therefore \angle MAB=\angle FEM+\angle EMA$。$\because \angle MAB=\angle DCE+$

$\angle ECM=\angle DCE+\angle EFM=\angle EMA+\angle EFM$.

$\therefore \angle FEM=\angle EFM$，$\therefore ME=MF$.

【说明】 1. 在圆中证明角或线段相等，比在直线形中又增加了一些条件，如和圆有关的角的度量定理，在推证角的相等方面，常起着很大的作用；2. 解题时，加辅助线必须从解题的需要出发。有时由于思路不一，加辅助线的方法各异，要认真体会每条辅助线所起的作用。

2. 圆中的比例线段

例5 如图10—5，从⊙O外的M点引圆的两条切线，切点为A、B，P为弦AB上任意一点，$MQ\perp OP$于Q，求证：$OA^2=OP\cdot OQ$。

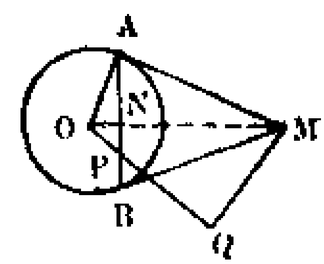


图 10—5

思路：要证$OA^2=OP\cdot OQ$，就要寻找中间"积"，即找到$\triangle ONP\backsim\triangle OQM$。可达到寻找中间"积"的目的，证题的思路也就畅通了。

证：连OM交AB于N，则$OA^2=ON\cdot OM$，又$\triangle OPN\backsim\triangle OMQ$，$\therefore ON:OP=OQ:OM$，即$OP\cdot OQ=ON\cdot OM$，$\therefore OA^2=OP\cdot OQ$。

例6 如图10—6，已知：AD是$\triangle ABC$的高，延长AD交$\triangle ABC$的外接圆于H，以AD为直径交AB于E，交AC于F，EF交AD于G，求证：AD是AG和AH的比例中项。

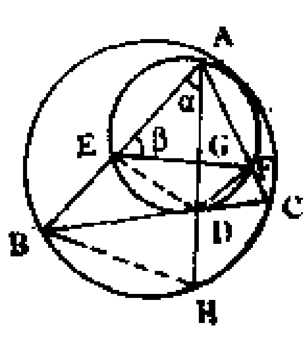


图 10—6

思路：想找出两个相似三角形，一次证得结论是不成

的，考虑到这个图形有直径，应考虑“直径上的圆周角是直角”这一定理，再在这三角形中要考虑射影定理。

证：连结DE和DF，$\because AD\perp BC$，AD是小圆的直径，$\therefore DE\perp AB$，$DF\perp AC$，$\therefore AD^2=AB\cdot AE$，$AD^2=AC\cdot AF$，$\therefore AB\cdot AE=AC\cdot AF$，即$\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{AC}{AE}$，$\angle\alpha=\angle\alpha$，$\therefore$

$\triangle ABC\backsim\triangle AFE$，$\therefore\angle\beta=\angle C$，连结$BH$，$\because\angle H=\angle C$，$\angle\beta=\angle H$，而$\angle BAH=\angle GAE$，$\therefore\triangle ABH\backsim\triangle AGE$，$\therefore\ \dfrac{AB}{AG}=\dfrac{AH}{AE}$，即$AB\cdot AE=AG\cdot AH$。

例7 设圆内接四边形$ABCD$两双对边AB与CD，AD与BC延长后分别交于E、F，过E、F分别作圆的切线EP、EQ，P、Q为切点。

求证：$EF^2=EP^2+EQ^2$。

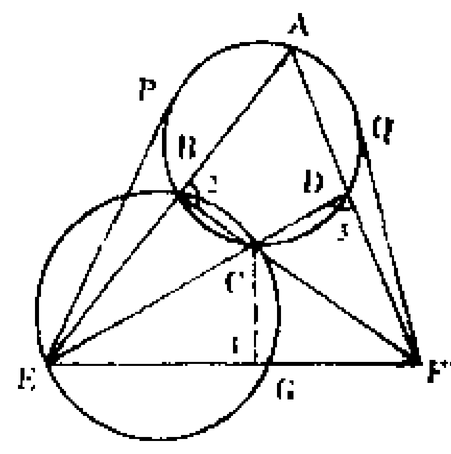


图 10—7

思路：根据图形特点，有圆的割线、切线，再用四点共圆，不难打开证题的思路。

证：如图10—7，过E、B、C三点作圆与EF交于一点G，连结CG，则$\angle1=\angle2=\angle3$，$\therefore C$、G、F、D四点共圆，$\therefore EG\cdot EF=EC\cdot ED=EP^2$，$GF\cdot EF=CF\cdot BF=FQ^2$，两式相加，得$EF^2=EP^2+FQ^2$。

【说明】 证题时，观察图中有关元素的位置、特点，并充分利用已知条件和图形性质，这是很重要的。证有关圆中

的比例线段的基本思路是：如证比例式（或等积式）可借助于相似三角形，可利用平行线和有关的比例线段定理，还可以利用面积的比、面积计算、三角计算等。只有这样，在遇到具体问题时，才能较快思考出解决问题的办法。

3. 证明垂直和平行

例8 如图10—8，已知：$\triangle ABC$ 的高BE、CF。求证$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$的半径$OA\perp EF$。

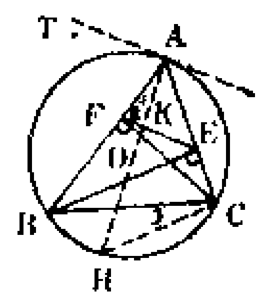


图 10—8

思路一：过A作$\odot O$的切线AT，只要证得$AT//EF$，问题即得证。

思路二：要证$AK\perp EF$，从证$\angle AKE=90^\circ$入手，这要借助圆中已有的直角，即必然想到延长AO与圆交于H，再连接CH，则$\angle ACH=\text{Rt}\angle$。要证$\angle AKE=\angle ACH$，问题就归结到找$K$、$H$、$C$、$E$共圆的条件，即找$\angle H=\angle AEK$证明就顺利的得到解决了。

证一：作$\odot O$的切线AT，由B、C、E、F四点共圆，得$\angle TAB=\angle ACB=\angle 2$，$\therefore TA//FE$，而$OA\perp TA$，$\therefore OA\perp EF$。

证二：延长AO交$\odot O$于H，连结HC。由B、C、E、F共圆，得$\angle H=\angle FBC=\angle AEK$，$\therefore K$、$H$、$C$、$E$四点共圆，$\angle AKE=\angle ACH=90^\circ$，$\therefore OA\perp EF$。

例9 如图10—9，已知：P是$\odot O$外一点，PA切$\odot O$于A，B是PA的中点，割线BCD顺次交$\odot O$于C、D，直线PC、PD分别交圆E、F，求证：$EF//PA$。

思路：要证$EF//PA$，可考虑证$\angle B=\angle BPC$，$\therefore\angle E$

$=\angle D$，所以可考虑证$\angle D=\angle BPC$，可考虑证$\triangle PBC\backsim\triangle PBD$。再从已知$PA$切$\odot O$于$A$这一已知条件出发，有

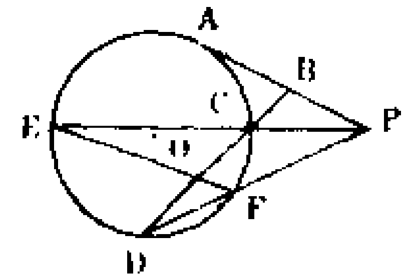


图 10—9

$\because\ BA^2=BC\cdot BD$，又$BA=PB$，$\therefore PB^2=BC\cdot BD$，即$\dfrac{PB}{BD}=\dfrac{BC}{PB}$，而$\angle PBC=\angle PBD$，$\therefore\triangle PBC\backsim\triangle PBD$。

证： $\because\ BA^2=BC\cdot BD$，$BA=PB$，

$\therefore\ \triangle PBC\backsim\triangle PBD$，则$\angle D=\angle BPC$。

$\because\ \angle E=\angle D$，$\therefore\angle E=\angle BPC$，$\therefore EF//PA$。

例10 如图10—10，已知AB是$\odot O$的弦，C、D在AB上，且$AC=CD=DB$，E、F在$\odot O$上，且$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FB}$，连结$EC$、$FD$，并延长交于$S$点，又连结$SA$、$OE$，求证：$SA//OE$。

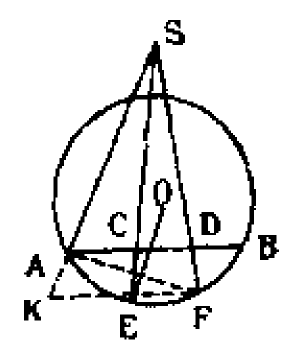


图 10—10

证： 连AF，$\therefore OE\perp AF$，由$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$，得$EF=AE$，由已知$AC=CD$，若延长线$SA$、$FE$交于$K$点，由$AD//KF$，可得$\dfrac{AC}{KE}=\dfrac{SC}{SE}=\dfrac{CD}{EF}$，$\therefore KE=EF$，再连结$AE$，又由$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}$得$AE=EF$，$\therefore AE=EF=KE$，于是$\angle KAF=90°$，$\therefore SA\perp AF$，从而得$SA//OE$。

4. 证明四点共圆

例11 如图10—11，已知：PA、PB切$\odot O$于A、B，PCD交$\odot O$于C、D，OP、AB相交于E，求证：O、E、C、

D四点共圆。

思路：根据图形特点，证明的目标是如何确定 $\angle PEC = \angle D$。这就要想到 $\triangle PEC$ 是否能与 $\triangle PDC$ 相似？这两个三角形要相似的话除了有一个公共角外，再就是去寻找对应边的比 $\frac{PC}{PO}=\frac{PE}{PD}$，要找这样的一个比例式成立，就得借助于切割线定理和在 Rt$\triangle PAO$ 中应用射影定理。

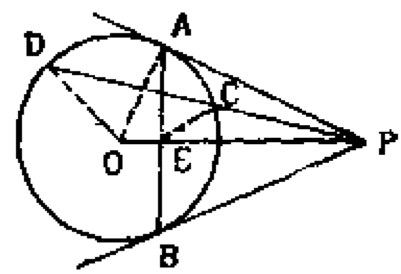


图 10—11

证：$\because PA$切$\odot O$于A，PB切$\odot O$于B，

$\therefore PA^2 = PC \cdot PD \cdots (1)$ 且$PA = PB$，$\angle OPA = \angle OPB$，

$\therefore OP \perp AB$于E，连结OA，则$OA \perp PA$，$\therefore \angle OAP$是直角，

$\therefore PA^2 = PE \cdot PO \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2)

由 (1)、(2) 得 $PC \cdot PD = PE \cdot PO$，$\therefore$ $\frac{PC}{PO}=\frac{PE}{PD}$，连结$CE$、$OD$，$\because \angle CPE = \angle DPO$，$\therefore \triangle PCE \backsim \triangle POD$，

$\therefore \angle PEC = \angle D$，

$\therefore O$、E、C、D四点共圆。

【说明】 ①四点共圆问题，常借助于圆内接四边形的判定定理及推论（对角互补的四边形内接于一个圆）。

②如果两个点在一条线段的同旁，并且和这条线段的两个端点连线所夹的角相等，那么这两个点和这条线段的两个端点在同一个圆上。

③割线定理的逆命题也是证四点共圆问题的依据。

例12 四边形 $ABCD$ 内接于圆，另一圆的圆心在边 AB 上且与其余三边相切，求证：$AD+BC=AB$.

思路： 本题利用对称性，四点共圆可设计多种证法，现举二例。

证一： 在 AB 上取点 M，使 $MB=BC$，连 OD、OC、MD 和 MC.

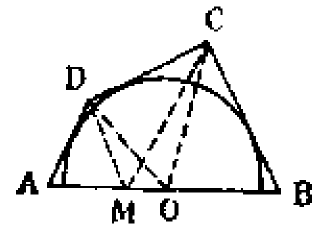


图 10—12

$\because\ \angle CMB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B)$

$=\frac{1}{2}\angle CDA=\angle CDO$，$\therefore C、D、M、O$ 四点共圆（如图10—12）。因此，

$\angle AMD=\angle OCD=\frac{1}{2}\angle DCB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)$.

故 $\angle AMD=\angle ADM$，$AM=AD$，从而得到

$AB=AM+MB=AD+BC$.

证二： 延长 AD 到 M，使 $AM=AO$，在 BC 上取点 N，使 $BN=BO$（如图 10—13），于是

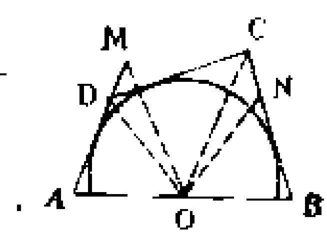


图 10—13

$\angle ONB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B)=\frac{1}{2}\angle ADC$

$=\angle ODC$.

$\angle DMO=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=\frac{1}{2}\angle DCB=\angle DCO$.

$\therefore\ D、O、N、C$ 和 $M、D、O、C$ 分别四点共圆，从而 $M、D、O、N、C$ 五点共圆，$\because \angle CON=\angle ONB-\angle OCB=\angle ADO-\angle M=\angle DOM$，故得 $MD=CN$，从而有 $AB=$

$AO+OB=AM+BN=AD+DM+BN=AD+BC$。

【说明】 此题是26届IMO试题，由各种思路展开可得多种初等方法。

例13 已知O是锐角三角形ABC的外心，BE，CF为AC、AB边上的高，自垂足E、F分别作AB、AC的垂线，垂足为G、H，EG、FH相交于K。

(1) 试证A、K、O三点共线；

(2) 若$AK=KO$，求$\angle A$。

解：(1) 如图10—14，连EF、AK、GH，并过A作$\odot O$的切线AT，则B、C、E、F四点共圆，E、F、G、H四点共圆。$\therefore \angle TAC=\angle ABC=\angle HEF$，$\angle CAK=\angle HGE=\angle HFE$，$\because FH\perp AC$，

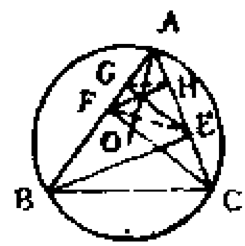


图 10—14

$\therefore \angle KAT=\angle TAC+\angle CAK=\angle HEF+\angle HFE=90°$，即$KA\perp AT$，连$OA$，$\because AT$是$\odot O$的切线，$\therefore OA\perp AT$。故$A$、$K$、$O$三点共线。

(2) $\because \angle AGH=\angle AEF=\angle ABC$，$\therefore \triangle AGH\backsim\triangle ABC$，$AG=AE\cdot\cos A=AB\cdot\cos^2 A$，故相似比为$\dfrac{AG}{AB}=\cos^2 A$，又$AK$为$\triangle AHG$的外接圆直径，故$\triangle AHG$的外接圆半径为$r=\dfrac{1}{2}AK$，由①已证$A$，$K$，$O$共线，及$AK=KO$，故$r=\dfrac{1}{4}AO$，即$\dfrac{r}{AO}=\dfrac{1}{4}$，而$\dfrac{AG}{AB}=\dfrac{r}{AO}$，$\therefore \cos^2 A=\dfrac{1}{4}$，$\cos A=\pm\dfrac{1}{2}$（舍负值），$\therefore \angle A=60°$。

5. 证明切圆问题

例14 如图10—15，若以 AB 为直径的半圆内，有一个小圆切 AB 于 E，切半圆于 G，连接 AG 交小圆于 F，$FD\perp AB$ 于 D 交半圆于 C，求证：$AC=AE$。

思路：连结 A、C 和 B、C，有 (1) $AE^2=AF\cdot AG$； (2) $AC^2=AD\cdot AB$。

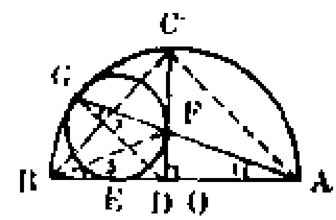


图 10—15

下面只需证明 $AF\cdot AG=AD\cdot AB$，把上式改写成比例式：$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AB}{AG}$。只需证出 $\triangle ABF\backsim\triangle ADG$ 即可。$\because B$、D、F、G 四点共圆，$\therefore\angle2=\angle3$，又 $\angle1=\angle1$ $\therefore\triangle ABF\backsim\triangle ADG$。

证：连接 A、C 和 B、C，则有 $AE^2=AF\cdot AG$ (1)，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中由射影定理有 $AC^2=AD\cdot AB$ (2)

又 $\because FD\perp AD$，$\angle FDB=90°$，连结 BG，则 $\angle AGB=90°$，故 B、D、F、G 共圆，则 $\angle2=\angle3$，又有 $\angle1=\angle1$，$\therefore\triangle ABF\backsim\triangle ADG$。$\therefore\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AB}{AG}$，即 $AF\cdot AG=AD\cdot AB$。故有 $AE^2=AC^2$，

$\therefore\quad AE=AC$。

例15 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 半径相等，两圆外切于 A 点。$\odot O_3$ 的半径是前两圆半径的两倍，且与 $\odot O_1$ 切于 B 点，而与 $\odot O_2$ 交于 P、Q 两点。

求证：直线 AB 通过 P 点或 Q 点。

证：如图10—16，$\odot O_1$ 与 $\odot O_3$ 内切，且 $\odot O_3$ 的半径为 $\odot O_1$ 半径的两倍，所以 BO_3 是 $\odot O_1$ 直径，$\angle BAO_3=90°$，

设直线 AB 交O_2于D点。

$\because \angle BAO_1=\angle DAO_2$，$AO_1=AO_2$，$\therefore$ 等腰$\triangle BAO_1$与等腰$\triangle DAO_2$全等，$AB=AD$，于是$\triangle BO_3D$中，AO_3即是高线又是中线，故$\triangle BO_3D$是等腰三角形。所以$BO_3=DO_3$，B点在$\odot O_3$上，因而D点也在$\odot O_3$上。即D点与P点或Q点重合，也即直线AB通过P点或Q点。

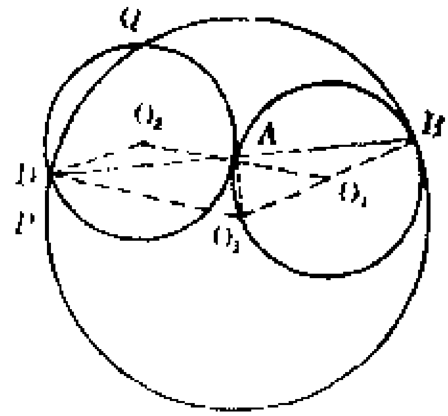


图 10—16

例16 如图10—17，中心为A、B、C的三个圆彼此相切且与直线l相切，中心为A、B、C的圆的半径分别通过a、b、c表示，求证：$\dfrac{1}{\sqrt{c}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}$。

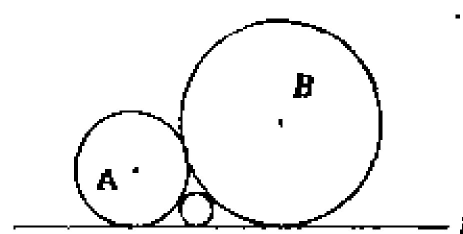


图 10—17

证：点A、B、C在直线l上的射影分别表示为A_1，B_1，C_1。设C_2是点C在直线AA_1上的射影。对$\triangle ACC_1$应用勾股定理，得$CC_2^2=AC^2-AC_2^2$，也就是$A_1C_1^2=(a+c)^2-(a-c)^2=4ac$，类似可得，$B_1C_1^2=4bc$和$A_1B_1^2=4ab$，因为$A_1C_1+C_1B_1=A_1B_1$，则有$\sqrt{ac}+\sqrt{bc}=\sqrt{ab}$，

即$\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$。

6. 计算问题

例17 如图10—18，已知$ABCDE$是$\odot O$内接五边形，

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DE}:\overset{\frown}{EA}=1:2:2:3:4$，且$AC+BD=1$，求弓形$ABC$的面积。

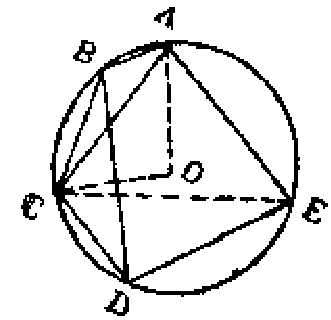


图 10—18

思路一：所求$S_{弓形ABC}=S_{扇形AOC}-S_{\triangle AOC}$，故需求出$\odot O$的半径$R$，及圆心角$AOC$。

解一：由题设可求出$\overset{\frown}{AB}=30°$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=60°$，$\overset{\frown}{DE}=90°$，$\overset{\frown}{EA}=120°$，故知$\angle AOC=90°$，且$AC=\sqrt{2}R$，$BD=\sqrt{3}R$，

$\because\ AC+BD=1$，$\therefore\ \sqrt{2}R+\sqrt{3}R=1$，$\therefore R=\sqrt{3}-\sqrt{2}$．$S_{弓形ABC}=\frac{1}{4}\pi R^2-\frac{1}{2}R^2=\frac{\pi-2}{4}\cdot(5-2\sqrt{6})=\frac{5-2\sqrt{6}}{4}\cdot(\pi-2)$。

思路二：若没考虑到AC、BD可看作是圆内接正方形与正三角形之一边之长。

解二：设$AC=x$，$BD=1-x$，又AE与BD在同圆中对等弧，故$AE=BD$，连CE，则在$\triangle ACE$中，

$\frac{AC}{\sin\angle AEC}=\frac{AE}{\sin\angle ACE}$，即$\frac{x}{\sin45°}=\frac{1-x}{\sin60°}$，解得

$x=\sqrt{6}-2$，即$AC=\sqrt{6}-2$。则可解得。

【说明】 解计算题要注意联系已知量与未知量之间的关系，而关系的建立依然是要充分利用已知条件和充分利用有关图形的性质。

例18 如图10—19，边长为a的正方形$ABCD$，M是AD的中点，P是$\triangle MBC$的外心，求$\triangle PBC$内切圆的半径的长。

思路：由于P是$\triangle MBC$的外心，故P在BC的垂直平分线上，也就是在这正方形的对称轴MN上，且$PM=PB=PC$。

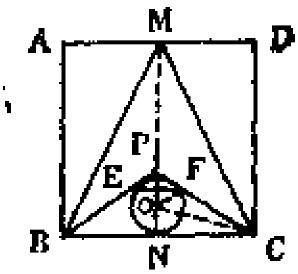


图 10—19

设$\triangle PBC$的内切圆$\odot O$切PB、PC于E、F，由于PN是等腰三角形PBC底上的高，故O在PN上，且$\odot O$切BC于N，求$\odot O$半径r的长有三条思路：

(1) 连OF，则$OF\perp PC$于是由相似三角形可得$\dfrac{OF}{NC}=\dfrac{PO}{PC}$，这里需先求出$PC$、$PN$的长。

(2) 连OC，则OC平分$\angle PCN$，于是由三角形内角平分线性质可得$\dfrac{PO}{ON}=\dfrac{PC}{CN}$，这里仍需先求出$PC$、$PN$的长。

(3) 设$\triangle PBC$的面积为S，周长之半为l，则$r=\dfrac{S}{l}$，求面积需知高PN的长，求周长需知一腰PC的长。

由此可见，解题的关键，在于先求PC、PN的长。

解 设PC为x，则$PN=a-x$，在$\mathrm{Rt}\triangle PNC$中，

$(a-x)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=x^2$，解得$x=\dfrac{5}{8}a$，即$PC=\dfrac{5}{8}a$，

$PN=\dfrac{3}{8}a$，由$\mathrm{Rt}\triangle PFO\backsim\mathrm{Rt}\triangle PNC$，有$\dfrac{OF}{NC}=\dfrac{PO}{PC}$，

$$\frac{OF}{\frac{a}{2}}=\frac{\frac{3}{8}a-r}{\frac{5}{8}a},\quad 18r=3a,\quad \therefore r=\frac{1}{6}a.$$

【说明】 运用计算方法解决几何问题，往往效果较好。

尤其在几何命题中已知条件和结论涉及到角、线段较多时，可以先列出各个量之间的关系式，然后应用代数法来推算。

（三） 练 习 题

1．选择题

（1）半径为13和半径为5的两个圆相交，圆心距为12，则这两圆公共弦长为（　　）

$(A)\ 3\sqrt{11}$．$(B)\ \frac{65}{6}$．$(C)\ 4\sqrt{6}$．$(D)\ 10$．

（2）如图10—20，所有小圆的周长之和 S 与大圆的周长 L 的关系（小圆圆心均在大圆的一条直径上且如图相切）是（　　）

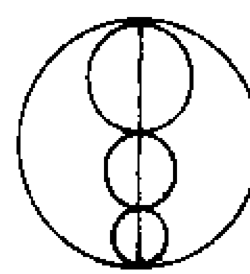


图　10—20

$(A)\ S>L$．$(B)\ S=L$．

$(C)\ S\geqslant L$．$(D)\ S<L$．

（3）如果 a、b、c 分别是正六边形的一条边、最短的对角线和最长的对角线，那么有（　　）

$(A)\ c^2=a^2+b^2$．$(B)\ c=a+b$．$(C)\ b=\frac{c+a}{2}$．

$(D)\ b=\sqrt{ac}$．

（4）如图 10—21，PA，PB，DE 分别切$\odot O$于A、B、C．圆O的半径为6cm，PO长为10cm，那么$\triangle POE$的周长是（　　）

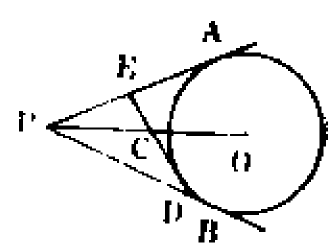


图　10—21

(A) 16cm．(B) 14cm．(C) 12cm．(D) 10cm．

(5) 一个半径为 r 的圆内切于一个直角等腰三角形，一个半径为 R的圆外接于这个三角形，那么$\frac{R}{r}$等于（　　）

(A) $1+\sqrt{2}$。(B) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$。(C) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$。

(D) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$。

2. 填空题

(1) 四个同心圆，最小圆和三个圆环面积都相等，则它们的半径之比为____。

(2) $\triangle ABC$的周长为18，内切圆半径为$\frac{2}{3}\sqrt{6}$，一边之长为6，则这边上的高的长为____。

(3) 圆内接正方形的一边截出的小弓形面积是$(2\pi-4)$ cm^2，则正方形边长为____

(4) MN 为$\odot O$ 的直径，NK 为切线，割线KM与$\odot O$交于G，若 $MG=GK$，则$\angle M=$____。

(5) $\odot O$的外切直角梯形$ABCD$中，$AB//DC$、$\angle A=90°$，E、F、G、H分别是各边与$\odot O$相切的切点，上底DC的长是 3cm，下底AB的长是 6cm，那么$\odot O$ 的半径是____ cm。

3. 如图10—22，$\triangle ABC$的外切于$\odot O$于D、E、F，从D点作 BC 的平行线交AE于G，交EF于H。求证：$DG=GH$。

4. 如图10—23，已知圆内接四边形 $ABCD$ 的两边 AD 和BC 相交于 E，$EM//AC$，交BD的延长线于M，MT是

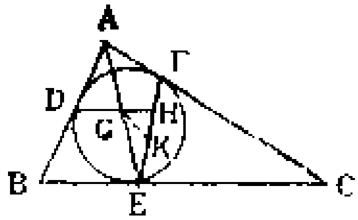


图 10—22

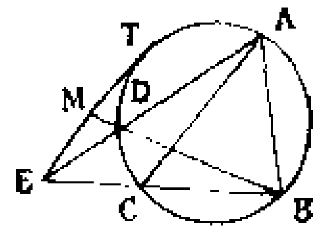


图 10—23

切线，T是切点，求证：$MT=ME$。

5．如图10—24，已知：半径$OB\perp OC$，CD是$\odot O$的切线，D是切点，BD交OC于A，CO与$\odot O$交于E，求证：$CA=CD$。

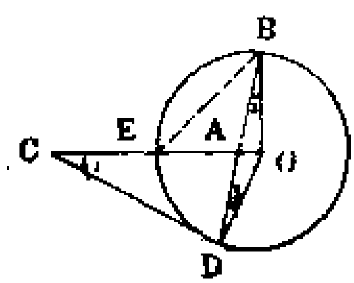


图 10—24

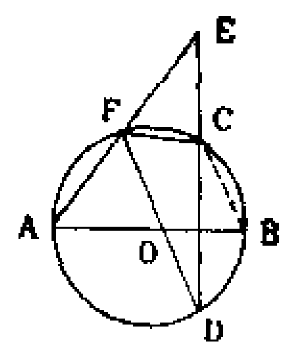


图 10—25

6．如图10—25，已知AB是$\odot O$的直径，弦$CD\perp AB$，E是DC延长线上一点，连结AE交$\odot O$于F，求证：$\angle EFD=\angle AFC$。

7．如图10—26，AB为$\odot O$的弦，CA、CB与$\odot O$分别切于A、B，P为$\odot O$上任意一点，$PD\perp AB$于D，$PE\perp CB$于E，$PF\perp CA$于F，求证：$PD^2=PE\cdot PF$。

8．如图10—27，$ABCD$为圆内接四边形，过AB上一点M，引MP、MQ、MR分别垂直于BC，CD，AD，连结PR，MQ相交于N，求证：$\dfrac{PN}{NR}=\dfrac{BM}{MA}$。

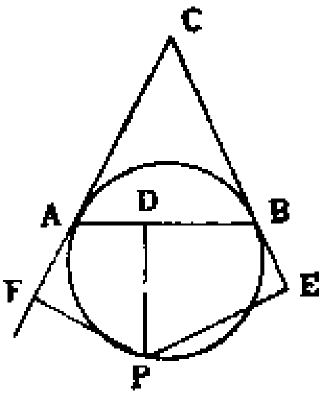


图 10—26

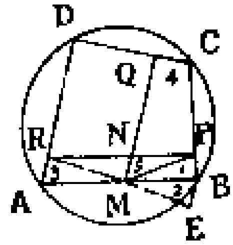


图 10—27

9. 如图10—28，自圆外一点P作圆的切线PA和割线PBC，A为切点，过A作弦$AD//PC$交圆于D，$AD=AP$，连DC、AC，求证：$AC^2-AD\cdot BC=AP\cdot PB$。

10. 如图10—29，AC、BC是$\odot O$的两条切线，P是两切点连线AB的延长线上的一点．连结OP交$\odot O$于Q，过C作OP的垂线CD，垂足为D，求证：$OQ^2=OD\cdot OP$。

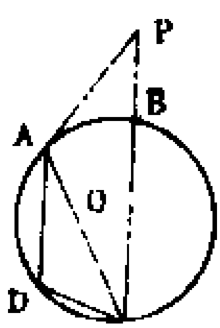


图 10—28

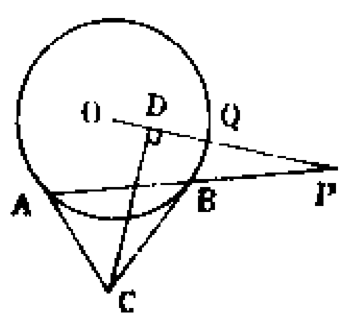


图 10—29

11. 如图10—30，$\odot M$与$\odot O$相交于A、B两点，点M在$\odot O$上，$\odot O$的弦MC分别与弦AB、$\odot M$交于D、E两点，求证：① $\triangle AMC\backsim\triangle CBD$；② $MA^2=MD\cdot MC$；③E是$\triangle ABC$的内心。

12. 如图10—31，以$\odot O$的圆周上一定点A为圆心作一圆，自$\odot O$的圆周上任意一点P至$\odot A$引两切线交$\odot O$于Q，

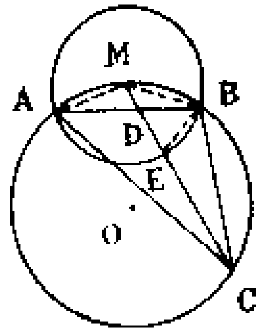


图 10—30

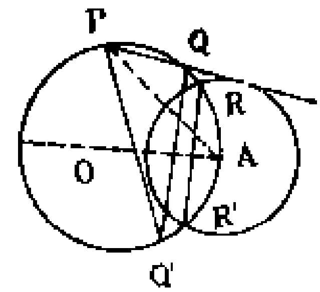


图 10—31

Q'，求证：不论 P 点位置如何，QQ' 和两圆公共弦 RR' 总平行。

13. 已知点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，AD 为 BC 边上的高，以 AD 为直径作 O' 交 AB 于点 E，交 AC 于点 F，求证：(1) 四边形 $BCFE$ 内接于圆；(2) $OA\perp EF$。

14. 锐角 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，D 是垂足，AM 平分 $\angle BAC$，$CF\perp AM$，$BE\perp AM$，F、E 是垂足，若 G 是 BC 的中点，求证：E、G、F、D 四点共圆。

15. 如图10—32，已知 C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，弦 CD，CE 分别交 AB 于 F、G 点．求证：D、E、G、F 共圆。

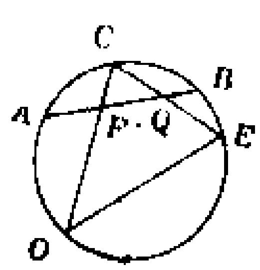


图 10—32

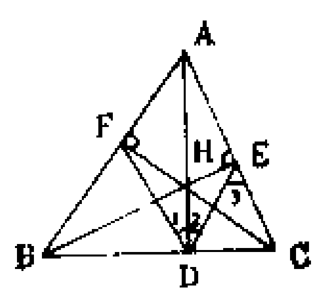


图 10—33

16. 如图10—33，已知锐角三角形三高线为 AD、BE、CF，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，求证：HD 平分 $\angle EDF$。

17. 如图10—34，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于 P，从 $\odot O_1$ 上一

点 A 向$\odot O_2$引切线AB，B为切点，连AP并延长交$\odot O_2$于C，$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径分别为r_1、r_2，求证：

$$\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{r_1+r_2}{r_1}$$

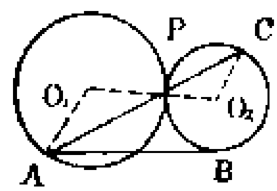


图 10—34

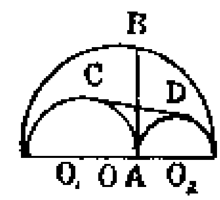


图 10—35

18. 如图10—35，A 是半圆O上任一点，过A引直径的垂线交圆O于B，CD 是半圆O_1和半圆O_2的公切线。求证：AB与CD互相平分。

19. 如图10—36，AB、AC为圆A内交角为60°的两半径，于AC上取一点P，以P为圆心，PC 为半径作圆，恰与以 AB为直径的圆互相外切，求证：$AP:AC=4:5$。

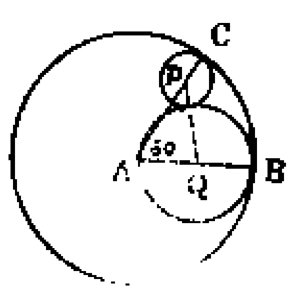


图 10—36

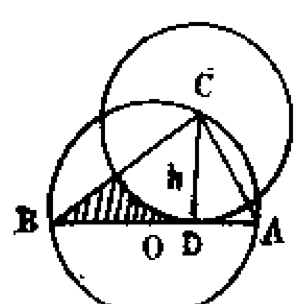


图 10—37

20. 如图 10—37，AB 为直径的圆半径等于 a，在上半圆上有一动点 C，以 C为中心与AB相切的圆将△ABC 切去一部分的面积为S，试求S的最大值。

（四） 答案与提示

1. （1）D； （2）B； （3）A； （4）A； （5）A。

2. （1）$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}:2$； （2）$2\sqrt{6}$； （3）4cm；

（4）45°； （5）2。

3. 作$GK//AC$交EF于K，可证$GK=GH$，又设$AD=a$，$DB=b$，可证$DG=GK=\frac{ab}{a+b}$.

4. ∵MT是切线，∴$MT^2=MD\cdot MB$。

又可证$\triangle MED\backsim\triangle MBE$，可推得$ME^2=MD\cdot MB$。

由上二式可得证$MT=ME$。

5. 连OD，∵$OB\perp OC$，CD是⊙O的切线，则可证$\angle 1=\angle 2$，$OD\perp CD$，∴$\angle CDA=90^{\circ}-\angle 1=90^{\circ}-\angle 2=\angle BAO=\angle CAD$，故$CA=CD$。

6. 连结BC，则$\angle EFC=\angle ABC$，又由圆周角$\angle ABC$与$\angle AFD$对的弧分别是$\overset{\frown}{AFC}$、$\overset{\frown}{AD}$，由已知直径$AB\perp CD$，可证$\overset{\frown}{AFC}=\overset{\frown}{AD}$，于是$\angle AFD=\angle ABC$。故$\angle EFD=\angle AFC$。

7. 先证明$\triangle PBE\backsim\triangle PAD$，与$\triangle PBD\backsim\triangle PAF$。

8. 先证$\triangle BEM\backsim\triangle ARM$。有$\frac{EM}{MR}=\frac{BM}{MA}$. 再由$M$、$P$、$B$、$E$四点共圆，有$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，又由$M$、$P$、$C$、$Q$四点共圆，有$\angle 3=\angle 5$，故$\angle 1=\angle 5$，∴$PE//MN$。因此$\frac{PN}{NR}=\frac{EM}{MR}$. 故可得证。

9. 证$\triangle ADC \backsim \triangle PAC$。

10. 连结OC，交AB于E，再连结OB，证D、E、C、P四点共圆。

11. (1) $\left.\begin{array}{r}\text{连结}BM \Rightarrow AM = BM \\ \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle ACM = \angle BCM \\ \angle CBD = \angle CMA\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \triangle AMC \backsim \triangle CBD$。

(2) $\left.\begin{array}{r}\angle ACM = \angle DAM \\ \angle M = \angle M\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMD \backsim \triangle DAM \Rightarrow MA^2$

$= MD \cdot MC$。

(3) 连结 BE 易证，$\angle CBE = \frac{1}{2}\angle AMC \Rightarrow \angle ABE$

$= CBE$，

由 (1) CM是$\angle ACB$的平分线，故E为$\triangle ABC$的内心。

12. 连结 PA，作$\odot O$ 的直径 AB，由切线性质知$\angle 1 = \angle 2$，于是$\overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{AQ'}$，$\therefore \overset{\frown}{BPQ'} = \overset{\frown}{BQ'}$，故直径 BA 垂直平分QQ'，又BA垂直平分RR'、$\therefore QQ' // RA'$。

13. 如图10—38，(1) 连DE、DF，有$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，$\angle FED = \angle FDC$。同理$\angle 1 + \angle FED = 90°$，$\angle 2 + \angle FDC = 90°$，故$\angle 1 = \angle 2$，四边形$BCFE$内接于圆。

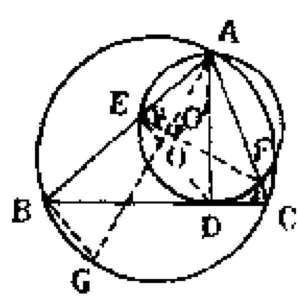


图 10—38

(2) 延长AO交$\odot O$于G，交EF于P点。$\angle ABG = 90°$，$\angle AGB = \angle 2 = \angle 1$，在$\triangle AEP$和$\triangle AGB$中，$\because \angle EAP = \angle GAB$，$\angle 1 = \angle AGB$，$\therefore \angle APE = \angle ABG = 90°$。故$AO \perp EF$。

14. 连FG、DE，延长CF交AB于N，由AM平分$\angle BAC$，$CF\perp AM$，可证$NF=FC$，又$BG=GC$得$GF\parallel AB$，从而得$\angle GFE=\angle BAE$。又由$AD\perp BC$，$BE\perp AM$得B、E、D、A四点共圆，$\therefore \angle BAE=\angle BDE$于是$\angle GFE=\angle BDE$得证。

15. 连结DE、$\angle CGF \overset{m}{=} \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BE})=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}$

$+\overset{\frown}{BE})=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CBE} \overset{m}{=} \angle D$，

$\therefore$ D、E、G、F共圆。

16. 先证A、F、D、C四点共圆，得$\angle 1=\angle 3$，

再证E、H、D、C四点共圆，得$\angle 2=\angle 3$，

则$\angle 1=\angle 2$而得证。

17. $\because AB^2=AP\cdot AC$，$\therefore \dfrac{AC^2}{AB^2}=\dfrac{AC^2}{AP\cdot AC}=\dfrac{AC}{AP}$。

再证$\triangle AO_1P\backsim\triangle CO_2P$，则$\dfrac{PC}{AP}=\dfrac{r_2}{r_1}$，$\dfrac{PC+AP}{AP}=\dfrac{r_1+r_2}{r_1}$，

即$\dfrac{AC}{AP}=\dfrac{r_1+r_2}{r_1}$，故$\dfrac{AC^2}{AB^2}=\dfrac{r_1+r_2}{r_1}$。

18. $\because CD=2\sqrt{Rr}$，$AB=2\sqrt{Rr}$，设AB、CD相交于E，则$ED=AE=EC=EB$，$\therefore AB$、CD互相平分。

19. $PQ=\dfrac{R}{2}+r$，在$\triangle APQ$中，$PQ^2=AP^2+AQ^2-2AP\cdot AQ\cos 60°$，$\left(\dfrac{R}{2}+r\right)^2=(R-r)^2+\left(\dfrac{R}{2}\right)^2-2(R-r)\dfrac{R}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$，化简得$\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{2}$。

$$\frac{AP}{AC}=\frac{R-r}{R}=1-\frac{r}{R}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

20．取$\triangle ABC$的高$CD=h$为自变量，则

$$S=ah-\frac{\pi}{4}h^2=-\frac{\pi}{4}\left(h-\frac{2a}{\pi}\right)^2+\frac{a^2}{\pi},\quad 0\leqslant h\leqslant a,\quad 0<\frac{2a}{\pi}<a,$$

∴当$h=\frac{2a}{\pi}$时，$S_{最大}=\frac{a^2}{\pi}$。

十一　托勒密定理

托勒密（Ptolemy）是公元二世纪希腊的一位数学家，托勒密对于有关线段的计算作出了很多贡献，他还是三角学的先驱者之一。

（一）基本原理

1. 托勒密定理：圆内接凸四边形两组对边的乘积的和，等于两对角线的乘积，（如图 11—1，即证：$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$）。

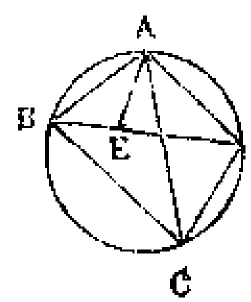


图 11—1

证：过 A 作一射线 AE 交 BD 于 E，使 $\angle BAE=\angle CAD$，又∵ $\angle ABE=\angle ACD$，∴ $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$，于是 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}$，即 $AB\cdot CD=AC\cdot BE$（1），又∵ $\angle ACB=\angle ADE$，$\angle BAC=\angle EAD$，∴ $\triangle ABC\backsim\triangle AED$，于是 $\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AD}$，即 $BC\cdot AD=AC\cdot DE$（2），(1)＋(2)得 $AD\cdot BC+AB\cdot CD=AC(BE+DE)=AC\cdot BD$。

2. 托勒密定理的逆定理：若凸四边形的两对角线的乘积，等于它的两组对边乘积之和，则此四边形可内接于圆。

证：如图 11—2，作 $\angle BAE=\angle DAC$，作 $\angle ABE=$

$\angle ACD$，由作法得$\triangle ABE \backsim ACD$，$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}\cdots(1)$，

$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}\cdots(2)$，由（1），$AB\cdot CD=AC\cdot BE\cdots$（3），在$\triangle ABC$和$\triangle AED$中，$\because$ $\angle BAC=\angle DAE$和（2）成立，$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle AED$，得$\frac{BC}{ED}=\frac{AC}{AD}$，即

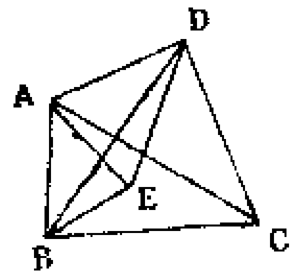


图 11—2

$AD\cdot BC=AC\cdot ED\cdots(4)$，（3）+（4）得$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC(BE+ED)$．又$\because AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$，$\therefore BE+ED=BD$，于是$E$在$BD$上，$\angle ABE$和$\angle ABD$重合，$\therefore\angle ABD=\angle ACD$，故$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆。

托勒密定理及其逆定理的证法有数种．这里是用作图，通过两组三角形相似，找到线段的关系式而解决的，其逆定理的证明，仍可用同一法。

（二） 范例与方法

例1 证明正三角形外接圆上的任一点至三顶点的距离，其长者必等于其余二者之和。

思路：运用托勒密定理和正三角形三边相等的条件可得证。

证：如图11—3，设$\triangle ABC$是正三角形，D是其外接圆$\overset{\frown}{BC}$上的任一点，连DA、DB、DC，由托勒密定理得

$AD\cdot BC=AB\cdot CD+AC\cdot BD$，

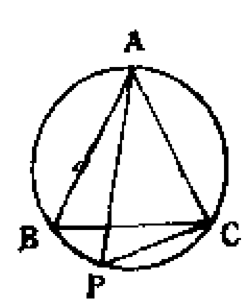


图 11—3

$\because AB=BC=CA$，$\therefore AD=DB+DC$。

【说明】 本例的证法很多，用托勒密定理无疑是最简捷的一种，读者不妨自己比较。

例2 若正三角形外某一点至三顶点的距离中，最长者等于其余二者之和，则该点必在此正三角形的外接圆上。

思路：从题目的条件 $AP=PB+PC$ 来看，为了探求满足托勒密定理的条件，两边同乘以 BC 就十分自然了。进而应用等量代换便获证。

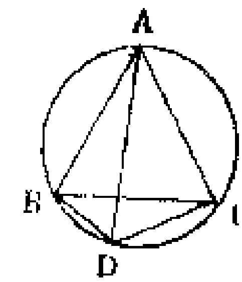


图 11—4

证：如图11—4，只要证明 A、B、C、P 四点共圆即可。

$\because$ $AB=BC=AC$，由条件 $AP=PB+PC$，二边乘以 BC，得 $AP\cdot BC=BC\cdot PB+BC\cdot PC$，即 $AP\cdot BC=AC\cdot PB+AB\cdot PC$，由托勒密逆定理知 A、B、C、P 四点共圆，即 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上。

【说明】 托勒密逆定理是证明四点共圆的又一重要工具。

例3 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直，求证：$2S_{ABCD}=AB\cdot CD+BC\cdot AD$。

思路：从证明的目标分析，右边应用托勒密定理即等于两条对角线之积，而条件告诉我们两条对角线互相垂直，这就很容易转化为面积问题。

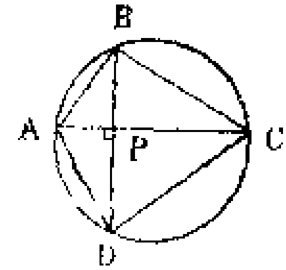


图 11—5

证：如图11—5，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是圆的内接四边形，$\therefore$ 由托勒密定理得，$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$，$\because$ $2S_{ABCD}=2$ $(S_{\triangle ABD}+$

$S_{\triangle BCD}) = AP \cdot BD + PC \cdot BD = (AP + PC) \cdot BD = BD \cdot AC$.

$\therefore S_{ABCD} = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

例4 在$\triangle ABC$中，AD为高，过D向AC、AB分别作垂线，垂足依次为M、N，过A作$\angle BAE = \angle DAC$．且满足$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot AE$，则$A$、$B$、$C$、$E$共圆．

思路： 要证A、B、C、E四点共圆只要证：$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$，只要证：$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$，即$AE = \frac{AB \cdot AC}{AD}$，

$\because$ $2S_{\triangle ABC} = DM \cdot AC + DN \cdot AB$．又$2S_{\triangle ABC} = MN \cdot AE = MN \cdot \frac{AB \cdot AC}{AD}$，从而$DM \cdot AC + DN \cdot AB = \frac{AB \cdot AC}{AD} \cdot MN$，

$\therefore MN = \frac{AD}{AB} \cdot DM + \frac{AD}{AC} \cdot DN \cdots (1)$．又$\because AD^2 = AN \cdot AB = AM \cdot AC$（射影定理）得$\frac{AD}{AB} = \frac{AN}{AD}$，$\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AD}$代入(1)式，得$MN = \frac{AN}{AD} \cdot DM + \frac{AM}{AD} \cdot DN$，只需证$MN \cdot AD = AN \cdot DM + AM \cdot DN$即可．事实上，$\because DM \perp AC$，$DN \perp AB$，$A$、$M$、$D$、$N$四点共圆，由托勒密定理得$MN \cdot AD = AN \cdot DM + AM \cdot DN$．

证： 如图11—6，$\because DM \perp AC$，$DN \perp AN$，$\therefore$ A、M、N、D四点共圆，由托勒密定理得：$AD \cdot MN = AN \cdot DM + AM \cdot DN$，$MN = \frac{AN}{AD} \cdot DM +$

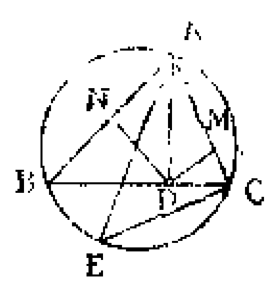


图 11—6

$\frac{AM}{AD}\cdot DM$，注意 $AD^2=AN\cdot AB=AM\cdot AC$，$\therefore MN=\frac{AD}{AB}$ $\cdot DM+\frac{AD}{AC}\cdot DN$，通分得 $AB\cdot AC\cdot MN=AD\ (AC\cdot DM$ $+AB\cdot DN)$。又 $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}MN\cdot AE=\frac{1}{2}\ (DM\cdot AC+DN$ $\cdot AB)$，$\therefore AB\cdot AC\cdot MN=AD\cdot MN\cdot AE$，得 $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}$，又已知 $\angle BAE=\angle DAC$，$\therefore\triangle ABE\backsim\triangle ADC$，得 $\angle AEB$ $=\angle ACB$。$\therefore A$、B、C、E 四点共圆。

【说明】 本例是应用托勒密定理间接证明共圆问题。在这里托勒密定理仅起了桥梁作用，而不作为证四点共圆的工具，务必请读者注意。

例5 已知 $ABCD$ 是圆的内接四边形，且 AB 为直径，若 $AD=a$，$DC=b$，$BC=c$，则 AB 为方程 $x^2-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$ 的一个根。

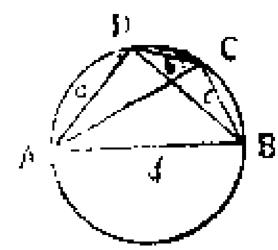


图 11—7

思路：对圆内接四边形应用托勒密定理，将对角线的乘积转化为边的关系，同时注意到例中直径上的圆周角是直角，因此应用勾股定理即可达到转化的目的，证明中采用"两边平方"的想法即可奏效。

证：如图11—7，设 $AB=d$，$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于圆，$\therefore$ 由托勒密定理得：$AC\cdot BD=bd+ac$。两边平方得：$AC^2\cdot BD^2=b^2d^2+a^2c^2+2abcd$，又 $\because AC^2=d^2-c^2$，$BD^2=d^2-a^2$，$\therefore d^4-(a^2+b^2+c^2)d^2+2abcd=0$，$\because d\neq 0$，$\therefore d^3-(a^2+b^2+c^2)d-2abc=0$。即 AB 为方程

$x^2-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$ 的一个根。

（三） 练 习 题

1. 试用托勒密定理证明勾股定理。

2. 从距离已知圆的圆心为 m 的一点 P，向圆引两条切线，设圆半径为 r，求两切点间的距离。

3. 如图 11—8，四边形 $ABCD$ 和 $APQD$ 都是平行四边形，且 $\angle PAB=\angle PCB$，求证：$PQ\cdot CD=PC\cdot DQ+PD\cdot CQ$。

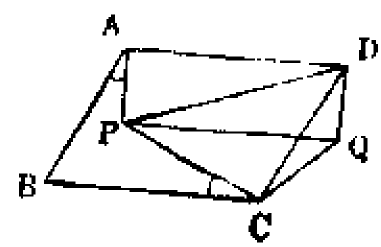


图 11—8

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A:\angle B:\angle C=4:2:1$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$（提示：作 $\triangle ABC$ 的外接圆）

5. 已知四边形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{6}$，$BC=3-\sqrt{3}$，$CD=2\sqrt{6}$，$DA=2\sqrt{3}$，$BD=3+\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{3}$，试证 A、B、C、D 四点共圆（提示：应用托勒密逆定理）

6. 过▱$ABCD$ 的顶点 A 作圆，分别交 AB、AC、AD 于 E、F、G，则 $AE\cdot AB+AG\cdot AD=AF\cdot AC$。

（四）答案与提示

1. 以斜边中点 O 为圆心，斜边的一半长为半径作外接圆，延长 CO 交外接圆于 D，显然 $ABCD$ 是外接圆的内接矩形，由托勒密定理得 $AC\cdot BD+AD\cdot BC=AB\cdot CD$。

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$。

2. $\because O$、P 及两切点四点共圆，由托勒密定理得 $x\cdot r=2r\sqrt{m^2-r^2}$，$x=2\sqrt{m^2-r^2}$，即为所求两切点间的距离。

3. $\because PQ \perp\!\!\!\!= BC \perp\!\!\!\!= AD$，$\therefore \angle BAP=\angle CDQ$，$\angle PCB=\angle CPQ$，$\because \angle PAB=\angle PCB$. $\therefore \angle CDQ=\angle CPQ$，从而$P$、$C$、$Q$、$D$四点共圆，由托勒密定理得 $PQ\cdot CD=PC\cdot DQ+PD\cdot CQ$。

4. 作$\triangle ABC$ 的外接圆 O，并在圆上截取 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AB}$。$\because \angle A:\angle B:\angle C=4:2:1$，$\therefore \overset{\frown}{AB}\ \ \overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{BDC}=1:2:4$，$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}=\frac{3}{7}\odot O$ 的长，$CD=BC=a$，同理得 $AD=AC=b$。由托勒密定理得 $AB\cdot DC+BD\cdot AC=BC\cdot AD$，即$bc+ac=ab$，$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$。

5. $\because$ $AC\cdot BD=2\sqrt{3}(3+\sqrt{3})=6\sqrt{3}+6$。

$$BC\cdot AD+AC\cdot CD=(3-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}=6\sqrt{3}+6.$$

$\therefore$ 由托勒密定理 A、B、C、D 四点共圆。

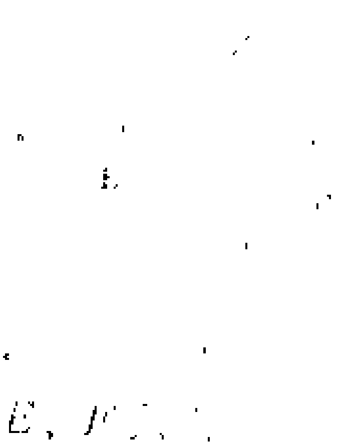
6. $\because$ $\triangle EFG \backsim \triangle ADC$，$\therefore \frac{EF}{AD}=\frac{EG}{AC}=\frac{FG}{DC}=\frac{FG}{AB}$，又由托勒密定理知：$AE\cdot FG+AG\cdot EF=AF\cdot EG$，$\therefore AE\cdot AB+AG\cdot AD=AF\cdot AC$。

十二　西姆松定理

三角形外接圆上任意一点到三边所在直线上的垂足共线。这条直线叫做该点对于该三角形的西姆松线。十九世纪时，通常认为这是罗伯特·西姆松发现，而实际上是1797年由华莱士发现的，把这直线归于西姆松的名下，则是因为它是西姆松在几何概念的典型代表。

（一）　基本原理

1. 西姆松定理：从$\triangle ABC$的外接圆周上一点P，向AB、BC、CA引垂线，其垂足分别为D、E、F，则D、E、F共线。



证明：如图12-1，连结DE、EF、PB、PC。∵　$\angle PDB=\angle PEB=90°$，∴　B、P、E、D四点共圆，则$\angle 1=\angle 2$。同理可证，P、F、C、E四点共圆，则$\angle 3=\angle 4$。又∵　$\angle 5=\angle ABP$，∴　$\angle 2=\angle 3$。∴　$\angle 1=\angle 4$，即D、E、F三点共线。

2. 西姆松定理的逆定理。由$\triangle ABC$外一点P，向其三边AB、BC、CA引垂线PD、PE、PF，D、E、F是它们的垂足。如果D、E、F三点共线，则A、B、P、C四点共圆。

证：∵B、P、E、D及P、F、C、E分别四点共圆，$\therefore$ $\angle DEB=\angle DPB$，$\angle CPF=\angle CEF$。又∵ D、E、F共线，$\therefore$ $\angle DEB=\angle CEF$，$\therefore$ $\angle CPF=\angle DPB$。又∵ A、D、P、F四点共圆，$\therefore$ $180°-\angle A=\angle DPF$ $=\angle DPC+\angle CPF=\angle DPC+\angle DPB=\angle BPC$，故$A$、$B$、$P$、$C$四点共圆，即$P$在$\triangle ABC$的外接圆上。

（二） 范例与方法

例1 已知如图 12—2，四边形$ABCD$内接于一圆，求证$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$。

思路：运用西姆松定理求证。

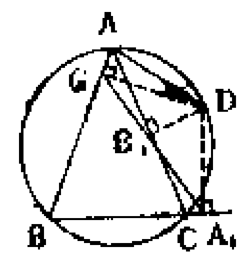


图 12—2

证：过D作$\triangle ABC$三边BC、CA、AB的垂线，垂足分别是A_1、B_1、C_1。∵ A、C_1、B_1、D共圆，且AD是直径，则$\dfrac{B_1C_1}{\sin BAC}=AD$。设$\triangle ABC$的外接圆半径为$R$，则

$$\frac{a}{\sin BAC}=2R,\quad \therefore\quad B_1C_1=a\cdot\frac{AD}{2R}.$$

同理，$C_1A_1=b\cdot\dfrac{BD}{2R}$，$A_1B_1=C\cdot\dfrac{CD}{R}$.

由西姆松定理，A_1、B_1、C_1三点共线，$\therefore$ $A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1$，则有$\dfrac{c\cdot CD}{2R}+\dfrac{a\cdot AB}{2R}=\dfrac{b\cdot BD}{2R}$，

即$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$。

【说明】 本例作为西姆松线的应用例，它是托勒密定理，前面给出的托勒密的证明不是用西姆松定理，用的是相

似理论，这两种方法同学们必须掌握。

例2 三角形一边上的高线足向其他两边和两高所作垂线的四个垂足共线。

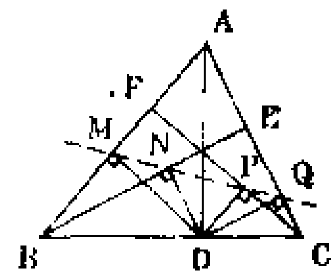


图 12—3

已知 如图12—3，AD、BE、CF是$\triangle ABC$的三条高，D点向AB、BE、CF、CA所作垂线的垂足分别是M、N、P、Q。

求证 M、N、P、Q四点共线。

思路 运用西姆松定理先证M、P、Q三点共线，再证M、N、Q三点共线，即可达到目的。

证明 显然，D在$\triangle AFC$的外接圆上，M、P、Q是D点向$\triangle AFC$的三条边AF、FC、CA所作的三条垂线足，由西姆松定理知M、P、Q三点共线。同理可证M、N、Q三点共线，∴ M、N、P、Q四点共线。

例3 外接圆上任意一点的西姆线平分该点和垂心的连线。

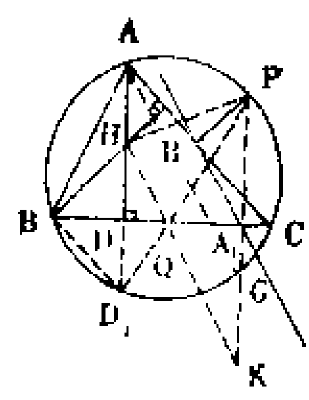


图 12—4

已知 如图12—4，P是$\triangle ABC$外接圆上的任一点，A_1B_1是关于P点的西姆松线，H是垂心。

求证：A_1B_1通过PH的中点M。

证：延长高AD交外接圆于D_1，连BD_1，由P、A、B、D_1四点共圆，得$\angle D_1BD=\angle CAD$。又∵ $\angle CAD$和$\angle HBD$是$\angle C$的余角，∴ $\angle CAD=\angle HBD=\angle D_1BD$，于是$DD_1=HD$，即$\triangle D_1BH$是等腰

三角形。

延长垂线PA_1交外接圆于G，再延到K，使$A_1K=A_1P$，连PD_1与KH，由$PK\perp BC$，$HD\perp BC$，及$HD=D_1D$，得PD_1与KH的交点Q在BC上，且$\triangle QHD_1$和$\triangle QPK$都是等腰的。

$\because\quad \angle D_1HK=\angle PKH=\angle D_1PG=\angle D_1AG$，

$\therefore\quad HK//AG//A_1B_1$。

由于A_1是PK的中点，$\therefore\quad A_1B_1$必过PH的中点M。

【说明】 这是斯坦纳（Steiner）定理。

例4 卡诺（Carnot）定理　通过$\triangle ABC$外接圆上的一点P，引与三边BC、CA、AB分别成同向等角（即$\angle PDB=\angle PEC=\angle PFB$）的直线$PD$、$PE$、$PF$，与三边的交点分别为$D$、$E$、$F$，则$D$、$E$、$F$三点共线。

已知 如图12—5，P是三角形ABC外接圆上任一点，D、E、F分别在三边BC、CA、AB或其延长线上，且有$\angle PDB=\angle PEC=\angle PFB$。求证：$D$、$E$、$F$三点共线。

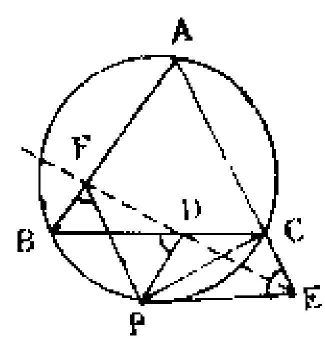


图　12—5

思路 当PD、PE、PF分别和三边BC、CA、AB互相垂直时，就是西姆松定理，所以，这个定理的证明就采用与西姆松定理证明的相似方法。

证： 首先，由B、P、D、F四点共圆知，$\angle PDF+\angle PBF=180°$，同时，由$A$、$B$、$P$、$C$四点共圆，得$\angle PBF=\angle PCE$。又$P$、$D$、$C$、$E$四点共圆，则有$\angle PCE=\angle PDE$。于是，

由$\angle PCE=\angle PBF$，得$\angle PDE=\angle PBF$，∴ $\angle PDE+\angle PDF=180°$，即$D$、$L$、$F$三点共线。

【说明】 卡诺定理是西姆松线的一个推广。

（三）练 习 题

1．$\triangle ABC$的外接圆上的一点P的关于边BC、CA、AB的对称点和$\triangle ABC$的重心H在同一条（与西姆松线平行的）直线上。

2．设$\triangle ABC$是圆O的内接等边三角形，P是圆上任意一点，则P的西姆松线平分半径OP。

（四） 答案与题示

1． 利用例 3 的结论。

2． 利用例 3 的方法。

十三 平几中的最值问题

（一） 基本原理

1．几何中的基本最值性质主要有：

（1）两点的所有连线中，直线段最短。

（2）一定点与一条定直线上的点的所有连线中，垂线段的长最短。

（3）定圆的所有弦中，直径最长。

（4）两条平行线所夹的线段中，垂直于这两条平行线的线段最短。

（5）在周长为定值的所有封闭曲线中，圆的面积最大。

（6）在周长为定值的 n 边形中，以正 n 边形的面积最大。

（7）在面积为定值的所有封闭曲线中，圆的周长最小。

（8）在面积为定值的 n 边形中，正 n 边形的周长最小。

（9）底边和顶角一定的所有三角形中，等腰三角形的面积最大，周长最长。

（10）底边和周长一定的所有三角形中，等腰三角形的面积最大。

2．代数法求几何最值的基本理论

（1）一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ （$a\neq0$） $x\in R$

i 当$a>0$，且$x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

ii 当$a<0$，且$x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

（2）三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$

$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$。

（二） 范例与方法

例1. 在直线MN的同侧有一定点A及一定圆O，试在MN上求一点Q，在圆周上求一点P，使$AQ+QP$最短。

思路： 假设P'是圆上任意一点，Q'是直线MN上任意一点，则$AQ'P'$是一条折线，作A点的对称点，把折线变为直线。

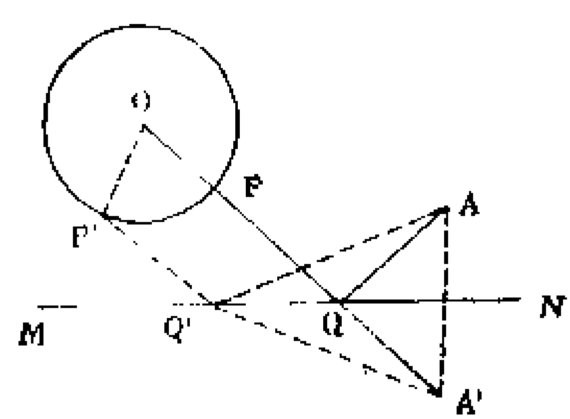


图 13—1

解： 作点A关于直线MN的对称点A'，连结OA'，交圆O于P点，交直线MN于Q点则P点与Q点为之所求。这里$AQ+QP=A'P$。显然$A'Q'+P'Q'>A'P$，即$AQ'+Q'P'>AQ+QP$。

【说明】 在求线段的和与差的最值时，我们往往采用对

称的方法，把折线化为直线来求其最值。

例2 在已知$\triangle ABC$内，作内接矩形$DEMN$，使一边DE在最大边BC上，顶点M、N分别在边AC、AB上，试确定矩形$DEMN$的位置，使对角线DE长最短。

思路： 由于线段DM的大小是由矩形$DEMN$的位置来决定的。设法把矩形$DEMN$平移到一个特殊的位置，为此把它的D点平移到B点，这时矩形$DEMN$变为$DE'M'N'$，如图13—2，$DM=BM'$，CM'与BN'相交于A'，连结AA'，显然有$AA'//MM'//BC$，可知A'是与矩形$DEMN$位置无关的定点，所以$A'C$是一条固定的线段，因此要使DM最短，即要使BM'最短我们只需确定B到线段$A'C$的最短线的位置，这一点很容易作到。

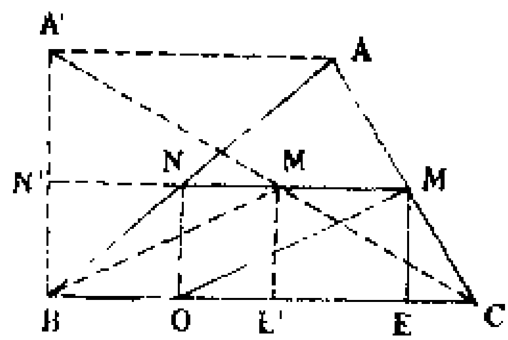


图 13—2

解： 依据以上分析过B点作BC的垂线BA'，过A点作BC的平行线AA'，直线BA'与AA'相交于A'点。连结$A'C$，过B点作$BM'\perp A'C$，交$A'C$于M'点，过M'作平行于BC的直线，交AB，AC分别于M，N两点，再分别过M，N作BC的垂线，分别交BC于E，D，则矩形$DEMN$为之所求。

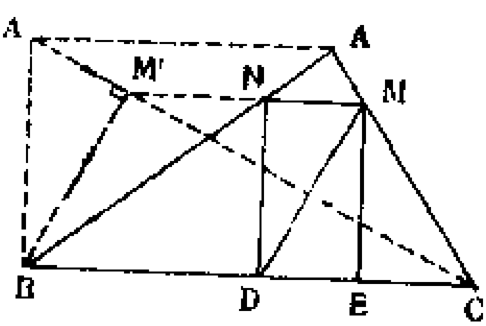


图 13—3

【说明】 在求几何最值时，如果涉及到的图形是变化

的，我们可以先考虑其图形所在的某个特殊位置，来分析所要求的最值的变化情况，然后再整体考虑加以解决。

例3 已知点 P 为$\angle A$ 内一定点，过 P 作一条直线与$\angle A$ 两边分别交于 B 和 C，问怎样才能使 $BP\cdot PC$ 最小。

思路： 由于要求 $BP\cdot PC$ 的最小值，我们很容易把 $BP\cdot PC$与圆内两条相交弦的乘积联系起来，即使BC 是$\angle A$ 内某圆的弦，而这个圆的圆心显然应在$\angle A$的平分线上，且 BC 作为圆内的弦应具有其特殊性，这样才能使 $BP\cdot PC$ 最小。这就自然的考虑到 BC 与角分线垂直的情况。

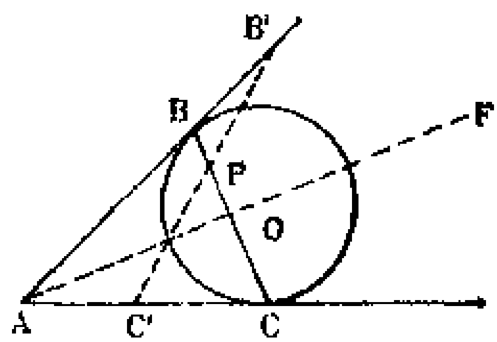


图 13—4

解： 作$\angle A$ 的平分线 AF，如图 6—4。过 P 点作AF的垂线，分别交$\angle A$ 的两边于 B 和 C 则直线 BC 即为所求。过 P 点再作一直线交$\angle A$ 的两边于 B' 和C'。因为$BC\perp AF$，故存在一个圆心在 AF 上且分别与 AB，AC切于B、C两点的圆，记为圆 O，圆 O 与 $B'C'$ 交于 D 和 E，则 $BP\cdot PC=DP\cdot PE<B'P\cdot PC$，由此知 $BP\cdot PC$ 最小。

【说明】 在求最值中，可以把所要求的最值根据其形式上的特点，把它与几何的基本性质结合起来，由此来解决最值问题。

例4 设有一直角 MON，试在ON，OM 边上及角内各求一点 A，B，C，使 $BC+CA=l$，l 为定长，且使四边形 $ABCD$ 的面积最大。

思路： 由于 $BC+CA=l$（定长），且 $BC+CA$ 是四边形 $ABCO$ 周长的一半，设想利用周长与面积的最值性质来求四边形 $ABCO$ 的面积。

解： 如图13—5，将四边形 $ABCO$ 以 OM 为对称轴得到五边形 $ACBC_1A_1$，再以 ON 为对称轴则得到如图 13—6，所示的八边形 $ACBC_1A_1C_2B_1C_3$，而这个八边形的周长为定值 $4l$，因此该八边形为边长是 $\frac{1}{2}l$ 的正八边形时面积最大，显然这时四边形 $ABCO$ 的面积也最大，从而四边形 $ABCO$ 当 A、C、B 为正八边形在第一象限内的三个顶点面积最大，这时 $OA=OB=OC=\frac{l}{4}\sin\frac{\pi}{8}$。

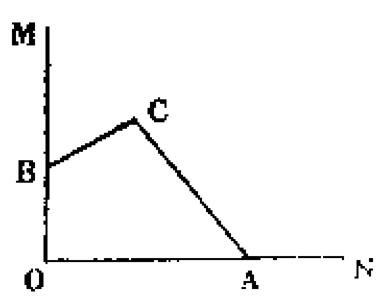


图 13—5

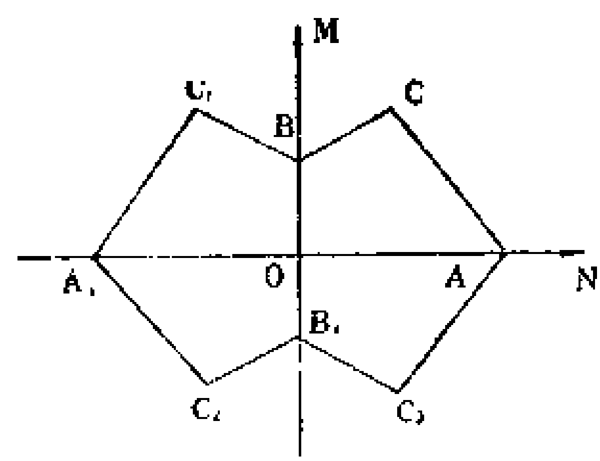


图 13—6

例5 若凸四边形 $ABCD$ 的三边之和 $AB+BC+CD=l$ 为定值，试确定四边形 $ABCD$ 面积最大时的形状。

思路： $AB+BC+CD=l$ 为定值，若以 AD 为对称轴则可构成一个周长为定值的六边形。

解： 以 AD 为对称轴，作四边形 $ABCD$ 的对称图形

$AB'C'D$，这时六边形 $AB'C'DCB$ 是一个定长为 $2l$ 的六边形。如图6—7，因此当这个六边形是正六边形时，它的面积最大，此时四边形 $ABCD$ 的面积也达到最大。所以四边形 $ABCD$ 面积最大时，AB，BC，CD 是以 $\frac{1}{3}l$ 为边长的正六边形的三条边，AD 是这个正六边形对角线。

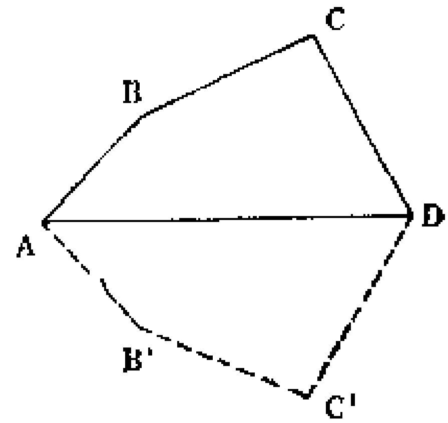


图 13—7

【说明】 已知边的关系求面积的最值时，我们往往采用对称的方法构成一个周长为定值的多边形，再利用几何最值的性质去求最值。

例6 已知正五边形的边长是1，试求在这个正五边形内的三角形面积的最大值。

思路：求面积的最大值，只需找到最大面积的三角形，为此考虑五边形中三角形的位置，即三角形三个顶点的位置。

解：假定 $\triangle ABC$ 的两个顶点 B、C 的位置已固定，由图13—8可以看出，要使 $\triangle ABC$ 的面积最大，顶点 A 必须在正五边形的边界上。所以要使 $\triangle ABC$ 的面积达到最大值，它的三个顶点都必须在正五边形的边界上。

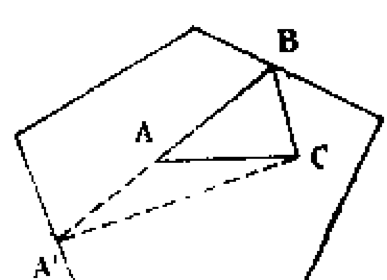


图 13—8

若 $\triangle ABC$ 的三个顶点都在正五边形的边界上，再次固定 B、

C 两个顶点，由图 13—9，可以看出要使 $\triangle ABC$ 的面积最大，顶点 A 必定取在正五边形的顶点上。所以要使 $\triangle ABC$ 的面积达到最大值，它的三个顶点必须都在正五边形的顶点上。而这种顶点在正五边形顶点上的三角形，只有本质上不同的两种情况，（如图13—10，图13—11）

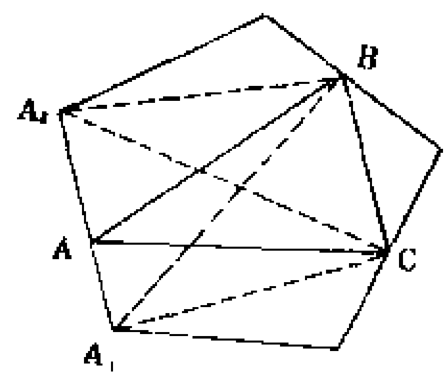


图 13—9

显然在图 6—11 的情况下 $\triangle ABC$ 的面积最大。不难计算 $S_{max}=\frac{1}{4}tg72°$。

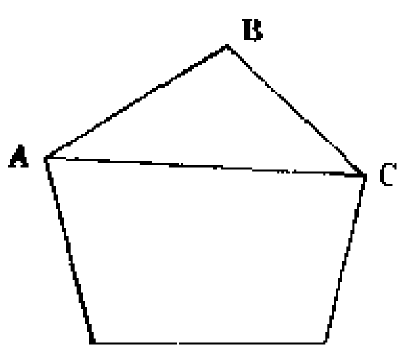


图 13—10

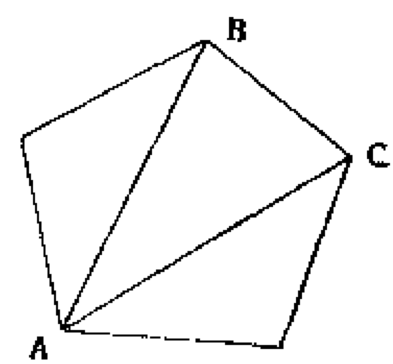


图 13—11

【说明】 在求最值时，如果变量或不确定的因素较多，我们可设法固定其中的某些变量或不定因素，使之变量减少，由此来求出其最值。

例7 已知$\triangle ABC$ 的内角 $A>B>C$，在$\triangle ABC$ 内（包括边界）找一点 P，使 P 到三边的距离之和为最大。

思路： P 是$\triangle ABC$ 内的任意一点，当 P 变化时，显然 P 到$\triangle ABC$ 三边的距离 PD、PE、PF 都在变化，为了方

便，我们将其中的某个固定下来考察其和的最大值的情况。

解：如图13—12，先将PD的长固定下来，这时P点只在线段$B'C'$上变动．因此$PD+PE+PF$的最大值问题转化为求$PE+PF$的最大值问题。作$C'N\perp AB$，$PN'\perp C'N$，则$PF=NN'$，

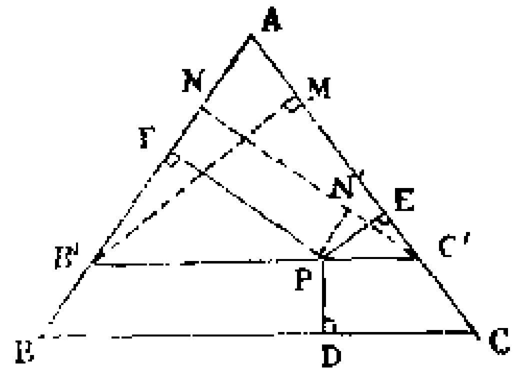


图 13—12

又∵ $\angle N'PC'=\angle B$，$\angle EC'P=\angle C$，$\angle B>\angle C$

∴ $PE\leqslant C'N'$（P与C'重合时取等号）

∴ $PE+PF\leqslant C'N$

因此当PD固定P点在C点时$PD+PE+PF$取得最大值。

当P点在$\triangle ABC$内变化时，PD变动时，使$PD+PE+PF$达到最大值的点P只需在AC边上找即可，由$\angle A>\angle C$，及上述讨论可知C点是使$PD+PE+PF$取最大值时的点。

【说明】 在变量较多的求最值问题中，可先固定某个变量，对其它变量进行讨论，然后再讨论固定下来的变量变动时的情况，进而求得最值。

例8 三个工厂分别座落在$\triangle ABC$的三个顶点A，B，C处，其中$\angle A>\angle B>\angle C$，三个工厂的公用工人宿舍位于此三角形的内心$O$处，笔直的公路连接着$A$，$B$，$C$，$O$这四处中的每两处，公共汽车从$O$处启程将工人分别送到他们的工作地点$A$，$B$，$C$处，而后回到$O$处，求汽车的最短行车路线。

思路：把汽车所有可能走的路线都写出来，然后利用题中所给的角的关系，证明其中的某一条路线最短。

解：如图13—13，汽车行走的路线如以下六种：

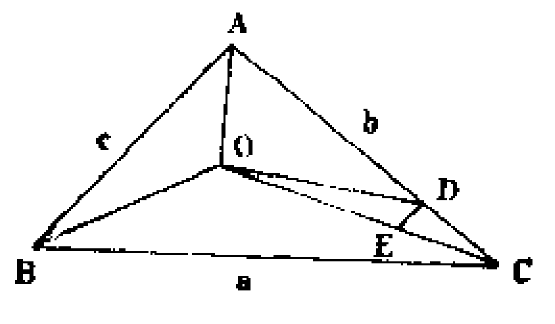


图 13—13

S_1 $O \to A \to B \to C \to O$；

S_2 $O \to A \to C \to B \to O$；

S_3 $O \to B \to A \to C \to O$；

S_4 $O \to C \to B \to A \to O$；

S_5 $O \to B \to C \to A \to O$；$S_6$ $O \to C \to A \to B \to O$

而$S_1 = S_4$，$S_2 = S_5$ $S_3 = S_6$下面比较S_1，S_2.S_3的长度。

$\because$ $\angle A > \angle B > \angle C$ $\therefore$ $a > b > c$

$\because$ $AC > AB$，在AC上取一点D，使$AD = AB = C$

$\because$ $OC > OB$，在OC上取一点E，使$OE = OB$，连结OD，DE。$\because$ $AB = AD$，$\angle BAO = \angle DAO$

$\therefore$ $\triangle AOB \cong \triangle AOD$，$\therefore$ $OD = OB = OE$

又$\because$ $\triangle ODE$是等腰三角形，$\therefore$ $\angle DEC > 90° > \angle CDE$

$\therefore$ $CD > CE$，即$b - c > OC - OB$，$\therefore$ $OC + C < OB + b$

$\therefore$ $S_1 < S_2$。同理$S_3 < S_1$

$\therefore$ S_3（或S_6）是最短行车路线。

【说明】 对于与三角形有关的最短线问题，我们往往是把所有可能的路线都例出来然后利用几何知识加以判断。

例9 如图13—14，在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$AC = 4$，$BC = 3$，D是AB上的动点，以CD为边作正方形$DCEF$，使E，F与B在CD的两侧．问D在何处时，五边形$BDEFC$的

面积最小，最小值是多少。

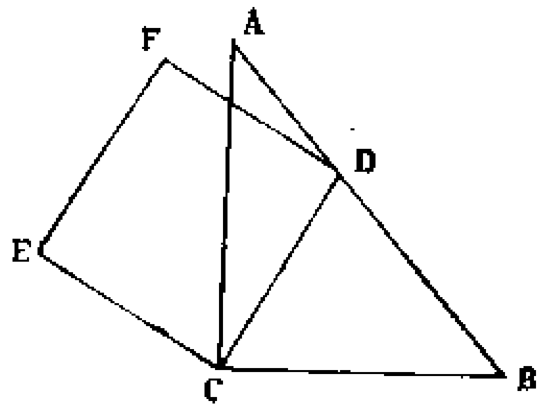


图 13—14

思路： 由于 D 点动，因此 CD 的长变这样引起了五边形面积的变化。设 $DB=x$，利用二次函数的最值来解决此题。

解： 设 $BD=x$，则 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times x\times 3\times\sin B=\frac{6}{5}x$，

在 $\triangle DBC$ 中，由余弦定理

$$CD^2=x^2+3^2-2x\cdot 3\cdot\cos B=x^2-\frac{18}{5}x+9。$$

$\therefore$ $S_{正方形CDEF}=x^2-\frac{18}{5}x+9。$

$\therefore$ $S_{五边形BDEFC}=S_{\triangle BDC}+S_{正方形CDEF}$

$$=\frac{6}{5}x+x^2-\frac{18}{5}x+9$$

即 $S_{五边形BDEFC}=x^2-\frac{12}{5}x+9。$

$\therefore$ 当 $x=\frac{\frac{12}{5}}{2}=\frac{6}{5}$ 时，$S_{\min}=\left(\frac{6}{5}\right)^2-\frac{12}{5}\times\frac{6}{5}+9$

$=7\frac{14}{25}$.

因此当 $BD=\frac{6}{5}$ 时，五边形 $BDEFC$ 有最小值，最小值为 $7\frac{14}{25}$.

【说明】 用代数法解决最值问题，需通过观察选出一个变量，设其为 x，进而找出一个一元二次函数，利用二次函数的最值情况求其最值。

例10 在$\triangle ABC$中，$BC=5$，$AC=7$，$AB=8$，P 是 AC 上的动点，$PD//AB$，$PE//CB$，PD、PE分别交BC，AB 于 D、E 两点，问 P 点在何处时，平行四边形 $PEBD$ 的面积最大，最大值是多少？

思路： P 点变动可设 $PC=x$，再利用已知条件把 x 与 BE，BD 联系起来，用$S=BD\cdot BE\cdot\sin B$来解。

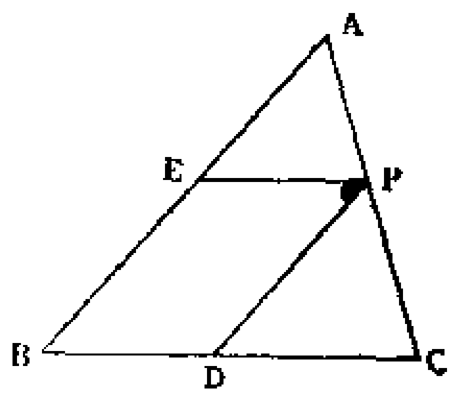


图 13—15

解： 设$PC=x$，如图13—15，

$\because\ \triangle CPD\backsim\triangle CAB$，

$\therefore\ \frac{PD}{AB}=\frac{PC}{AC}$，即$\frac{PD}{8}=\frac{x}{7}$ $\therefore\ PD=\frac{8}{7}x$，

同理，$EP=\frac{5}{7}(7-x)$.

又在$\triangle ABC$中，$\cos B=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\times8\times5}=\frac{1}{2}$，$\therefore\ \angle B=60°$.

$S_{\square PEBD}=BE\cdot BD\cdot\sin B=\frac{8}{7}x\cdot\frac{5}{7}(7-x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=-\frac{20\sqrt{3}}{49}x^2+\frac{20\sqrt{3}}{7}x$$

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{-\frac{20\sqrt{3}}{7}}{2\cdot\left(-\frac{20\sqrt{3}}{49}\right)}=\dfrac{7}{2}$ 时，$S_{\square PEBD}$最大，最大值为$5\sqrt{3}$。由于$x=\dfrac{7}{2}$，$AC=7$，所以这时P点是AC的中点。

【说明】 用代数法求最值，在选取变量时，它可能与所求的最值之间没有明显的关系，这时我们可以利用其图形的几何性质找出它们之间的关系。

例11 五边形$ABCDE$中，$AB=8$，$BC=4$，$DE=5$，$AE=6$，$\angle A=\angle B=\angle E=90°$，若在$CD$上取一点$N$作$NL\perp AB$，$NM\perp AE$，得一内接矩形$NMAL$，求所得矩形的最大面积与最小面积。

思路： 由已知条件把五边形补成一个矩形，比较两个矩形。设某个变量构造一元二次函数。

解：如图13—16，将五边形补成矩形$ABEF$。延长MN交BF于G。

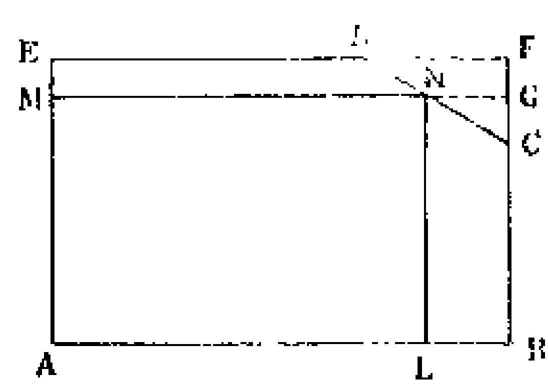


图 13—16

设$NG=x$，$CG=y$，则$S_{LNMA}=(8-x)(4+y)$。

又$\because$ $\triangle NCG\backsim\triangle DCF$ $\therefore$ $\dfrac{CG}{CF}=\dfrac{NG}{DF}$，即$\dfrac{y}{6-4}$

$= \frac{x}{8-5}$ ∴ $y = \frac{2}{3}x$。

∴ $S_{ENMA} = (8-x)\left(4+\frac{2}{3}x\right) = -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{98}{3}$.

∵ N 点在 CD 上，∴ $0 \leqslant x \leqslant 4$。

∴ 当 $x=1$、$y=\frac{2}{3}$时，S_{ENMA}的面积最大，最大面积为 $\frac{98}{3}$.

∴ 当 $x=4$、$y=\frac{8}{3}$时，S_{ENMA}的面积最小，最小值为$\frac{80}{3}$.

【说明】 利用一元二次函数求几何最值，有时我们也可以设两个（或两个以上）变量再利用几何性质最终统一为一个变量。并且在求最值过程中还要注意自变量 x 的取值范围与实际意义是否相一致。

（三）练 习 题

1. 选择题

(1) 三所学校分别位于 $\triangle ABC$ 的三个顶点处，而其垂心 H 处恰有一所邮局。如图6—17，已知$\angle A > \angle B > \angle C$且$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 都为锐角，A，B，C，H，每两处之间均有笔直公路相通，今有一邮递员从邮局出发到三所学校投递报刊，最后回到邮

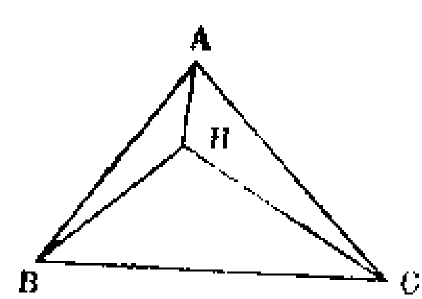


图 13—17

局，则他行程的最短路线是（　　）

(A) $H\to C\to A\to B\to H$，(B) $H\to A\to B\to C\to H$。

(C) $H\to B\to C\to A\to H$，(D) 以上都不对。

(2) 如图6—18点 P、Q、R 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA上，且 $BP=PQ=QR=RC=1$，那么$\triangle ABC$ 的面积的最大值是（　　）

(A) $\sqrt{3}$。(B) 2。(C) 3。(D) $\sqrt{5}$。

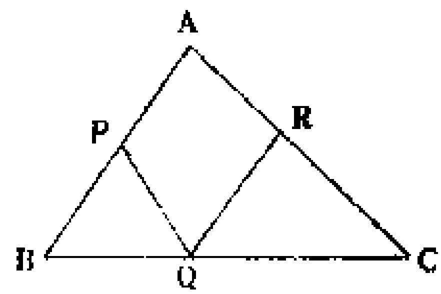


图 13—18

2. 填空题

(1) 如图 13—19，在正方形 $ABCD$ 中，E在 BC 上，$BE=2$、$CE=1$，P 在 BD 上，则 PE 和 PC 的长度之和最小可达到 ___。

(2) 在$\triangle ABC$ 中，经过 BA的四个五等分点的四条平行于BC的直线，将$\triangle ABC$ 分成五个部分，若$\triangle ABC$ 的面积为 a，则五部分最大的面积是 ____。

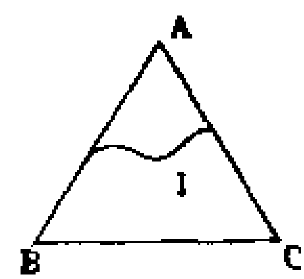


图 13—19

3. 已知在锐角 MON 的一边 ON 上有两点 A、B，试在 OM 上求一点 P，使$\angle APB$ 最大。

4. 已知直线 MN 的异侧有两点 A，B，过A、B 求作一圆，使圆截 MN 所得的弦 CD 最短。

5. 如图13—19，曲线 l将正三角形 ABC 分成两个等面积的部分，试确定曲线 l 长度的最小值。

6. 已知锐角$\angle BAC$，及角内一定圆 O，试在角的两边

AB、BC 及圆周上各求一点 Q、R、P，使得$\triangle PQR$的周长最小。

7. 如图 13—20，平面上有一定点 P，考虑所有可能的正三角形 ABC，其中 $AP=3$，$BP=2$，问 CP 的最大长度是多少？

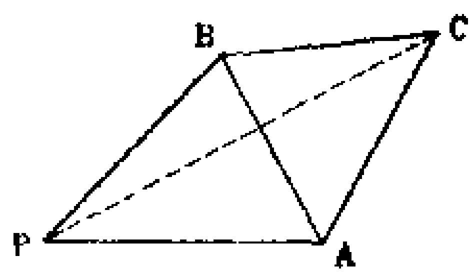


图 13—20

8. AB 为半径等于 a 的圆的直径，在上半圆上有一动点 C，以 C 为圆心与 AB 相切的圆将 $\triangle ABC$ 切去一部分，若剩下部分的面积为 S，求 S 的最大值。

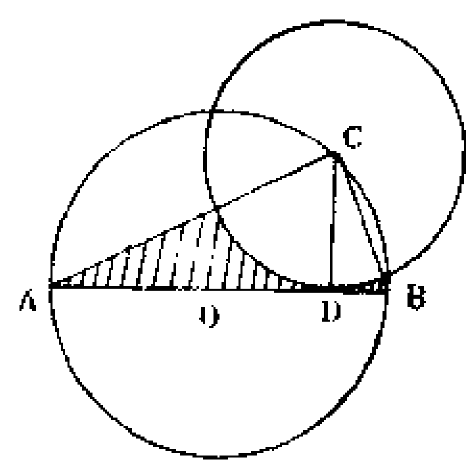


图 13—21

9. 如图 13—22，在$\triangle ABC$中 D、E 分别是边 BC、AB 上的点，且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$，如果 $\triangle ABC$、$\triangle EBD$、$\triangle ADC$ 的周长依次为 m、m_1、m_2，求 $\frac{m_1+m_2}{m}$ 的最大值。

10. 两个正三角形内接于一个半径为 r 的圆，记其公共部分的面积为 S，如图13—23，求 S 的最小值。

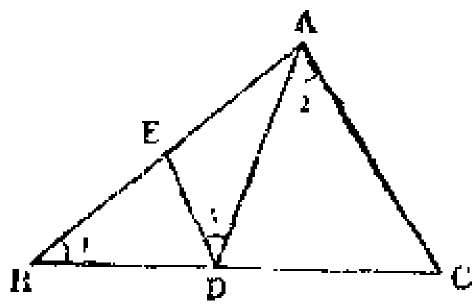


图 13—22

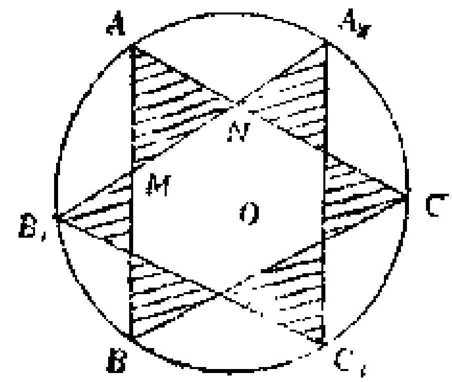


图 13—23

（四） 答案与提示

1. (1) C.(2)B.记$\triangle APR$、$\triangle BQP$、$\triangle CRQ$、$\triangle PQR$的面积分别为S_1、S_2、S_3、S_4.则S_1、S_2、S_3、S_4均不大于$\frac{1}{2}$，作$\triangle PQR$关于PR轴对称图形，可证$S_1\leqslant S_4$，于是

$$S_{\triangle ABC}=S_1+S_2+S_3+S_4\leqslant 4\times\frac{1}{2}.$$

当$AB=AC=2$，$\angle A=90°$时，$S_{max}=2$，故选B.

2. (1) $\sqrt{13}$.(2) $\frac{9}{25}a$.

3. 过A，B和OM上一定的圆中，只有与OM相切的圆使$\angle APB$最大。此时P为切点，且$OP^2=OA\cdot OB$，于是点P可以作出。

4. 设MN与AB交于E，作$EF\perp MN$，再作AB的中垂线，它们相交于O，则以O点为圆心，以OA为半径的圆即为所求。

5. 将$\triangle ABC$连续翻折六次，得如图13—24所示图形。

曲线 l 形成一封闭曲线，而它围成的面积为定值，所以此时的封闭曲线为圆时周长最小，因此所求曲线是以 A 为圆心以 R 为半径的在 $\triangle ABC$ 内部的一段圆弧，其中 $R^2=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}a^2$、$a$ 为 $\triangle ABC$ 的边长。

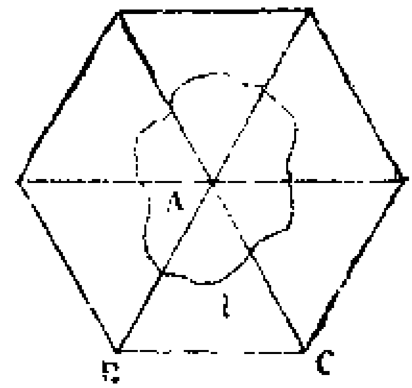


图 13—24

6. 如图13—25，当 P 固定时，要使 $\triangle PQR$ 的周长最小。作 P 关于 AC 的对称点 P_2，P 关于 AB 的对称点 P_1，则 P_1、P_2 也固定。连 P_1P_2 交 AB、AC 于 Q_1、R_1，这时显然 $\triangle PQ_1R_1$ 周长最小。

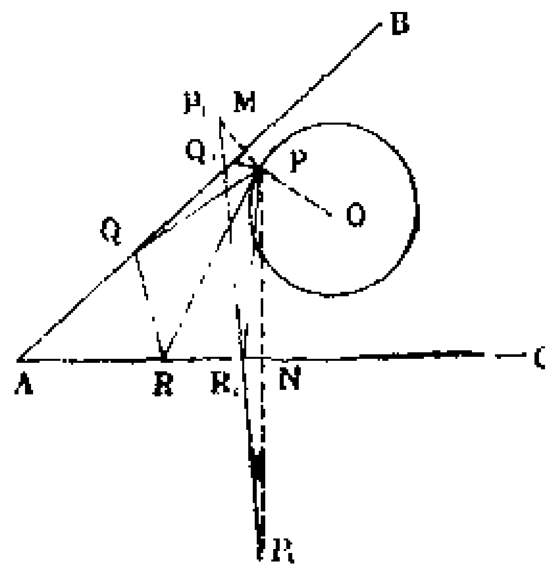


图 13—25

现在再确定 P 点的位置，使 P_1P_2 最小。设 PP_1 与 AB 交于 M，PP_2 与 AC 交于 N，则这时有 $MN=\frac{1}{2}P_1P_2$，又由于 $PM\perp AB$，$PN\perp AC$，所以 A、M、P、N 四点共圆，且这个圆的直径为 AP，由正弦定理 $MN=AP\cdot\sin\angle BAC$，$\therefore\ P_1P_2=2MN=2AP\sin\angle BAC$。又 $\because\ \angle BAC$ 为定角，$\therefore$ 要使 P_1P_2 最短，只需 AP 最短，连结 OA 与圆的交点即为 P 点。

综上所述，连结线段 OA 交圆于 P 点，分别作 P 关于

AB 和 AC 的对称点 P_1、P_2，连结 P_1P_2 交 AB 于 Q 点，交 AC 于 R 点，则此三点为之所求。如图13—26。

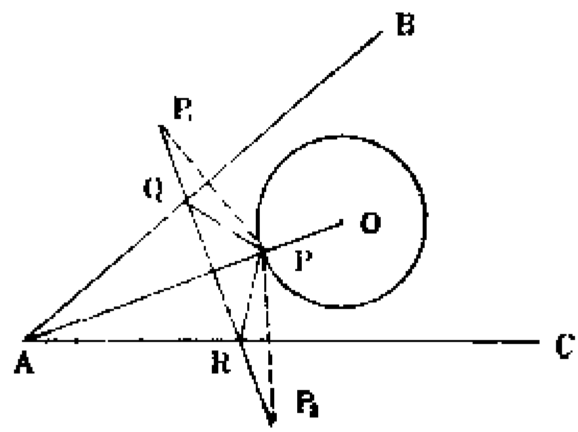


图 13—26

7. 如图13—27，取一定点 A，使 $AP=3$，则 B 在以 P 为圆心，以 2 为半径的圆上。将 $\triangle APB$ 绕点 A 旋转 $60°$，得到 $\triangle ACP'$，则点 C 在以 P' 为圆心，以 2 为半径的圆上（这时对称的在 PA 的下方还有一圆），这样问题转化到当 C 在圆 P' 上运动时，CP 何时最长，显然，只有当 C 是圆 P' 的过 PP' 的那条直径的另一个端点时，CP 最长，这时 $CP=5$。

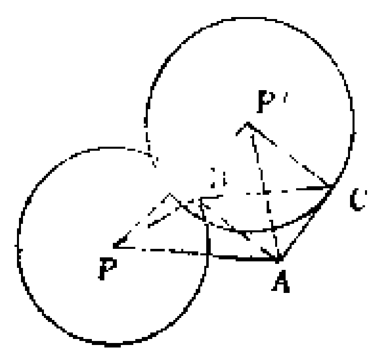


图 13—27

8. 设 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高 $CD=x$，则 $S=ax-\frac{\pi}{4}x^2$。

当 $x=\frac{2a}{\pi}$ 时，$S_{最大}=\frac{a^2}{\pi}$。

9. 由已知 $DE /\!/ AC$，∴ $\triangle EBD \backsim \triangle ABC \backsim \triangle DAC$。

∴ $\frac{m_1}{m}=\frac{BD}{DC}$，$\frac{m_2}{m}=\frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}$。

$$\therefore\quad \left(\frac{m_2}{m}\right)^2=\frac{DC}{AC}\cdot\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{BC}=1-\frac{BD}{DC}=1-\frac{m_1}{m}.$$

$$\therefore\quad \frac{m_1+m_2}{m}=\frac{m_1}{m}+\frac{m_2}{m}=1+\frac{m_2}{m}-\left(\frac{m_2}{m}\right)^2.$$

$\therefore$ 当$\frac{m_2}{m}=\frac{1}{2}$，即 $CD=\frac{1}{4}BC$时，

$\frac{m_1+m_2}{m}$取得最大值，最大值为$\frac{5}{4}$。

10. 由于 S 等于正三角形的面积减去三块阴影部分的面积（见图 6—23），由对称性可知三块阴影部分的面积相等。

$\because$ 整个图形关于OM，ON 对称，$\therefore$ 有$AM=B_1M$，$AN=A_1N$，故 $AM+MN+NA=A_1B_1=\sqrt{3}r$. 即$\triangle AMN$ 的周长为定值。所以$\triangle AMN$是正三角形时，$S_{\triangle AMN}$最大，这时 S 最小。

$$\therefore\quad S_{最小}=S_{\triangle A_1B_1C_1}-3S_{正\triangle AMN}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{3}r)^2$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\frac{\sqrt{3}}{2}r^2.$$

十四　几何中的变换问题

（一） 基本原理

1. 基本概念

（1） 合同变换：按照某种对应法则，将一个图形F变为另一个图形F'，若F与F'的形状大小是相同的，那么这种变换叫做合同变换。

（2） 平移变换：若图形F变成F'时，所有点移动的方向都一致，且移动的距离都相等，此时对应线段同向平行（或共线）且相等，这种把F变到F'的合同变换叫做平移变换。

（3） 旋转变换：若图形F变到F'时，其所有点（O点除外）都绕着某一定点O旋转某一给定的角度α，这种把F变为F'的合同变换叫做旋转变换。定点O称为旋转中心，角α称为旋转角。

特别地，当$\alpha=180°$时，旋转变换也称为中心对称变换。

2. 基本性质

（1） 平移变换的性质

①若A的对应点A'，B的对应点B'，则$AA'=BB'$。

②对应线段平行且相等，对应角相等。

③平移变换下，共线点仍为共线点。

(2) 旋转变换的性质

①旋转变换下，对应线段相等，对应角相等。

②旋转变换下，两对应直线的夹角等于旋转角。

(二) 范例与方法

例1 已知 P 是平行四边形 $ABCD$ 内一点，且 $\angle PAB = \angle PCB$。求证：$\angle PBA = \angle PDA$。

思路：为了找到四个角，$\angle PAB$，$\angle PCB$，$\angle PBA$，$\angle PDA$ 之间的关系，把 $\triangle ABP$ 平移使 AB 与 CD 重合，然后利用已知条件 $\angle PAB = \angle PCB$，证明结论成立。

证：如图 14—1，$\because AD \mathrel{\underline{\parallel}} BC$，将 $\triangle ABP$ 平移使 AB 与 CD 重合，$\triangle ABP$ 平移到 $\triangle CDQ$，连结 PQ，则 $AD // PQ // BC$。

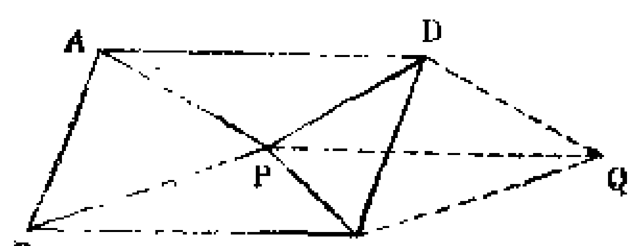


图 14—1

$\because \angle PAB = \angle QDC$，$\angle PCB = \angle QPC$，$\angle PAB = \angle PCB$，

$\therefore \angle QDC = \angle QPC$。

$\therefore P$、C、Q、D 四点共圆。

$\therefore \angle QCD = \angle QPD$，又 $\because \angle QCD = \angle PBA$，

$\angle QPD = \angle PDA$.

$\therefore \quad \angle PBA = \angle PDA$.

【说明】 平移变换是把定长、定向的线段重新定位，而当所给的几何图形中，如存在平行线及相等的线段时，在证题中往往采用这种变换方法。

例2 在已知三角形 ABC 的两条边 AB 和 AC 上，分别找出点 D 和 E，使 $AD = CE$，且 $DE // BC$。

思路： 假设点 D 和 E 已找到，平移 EC 到 DF，则 $AD = DF = EC$，所以 $\angle 1 = \angle 2$，又 $DF // AC$，所以 $\angle 1 = \angle 3$，即 AF 为 $\angle BAC$ 的平分线。

作法： 如图14—2，作 $\angle BAC$ 的平分线 AF 交 BC 于 F，过 F 作 FD 平行于 AC 交 AB 于 D，过 D 作 $DE // BC$ 交 AC 于 E，则 D，E 为所求的两点。

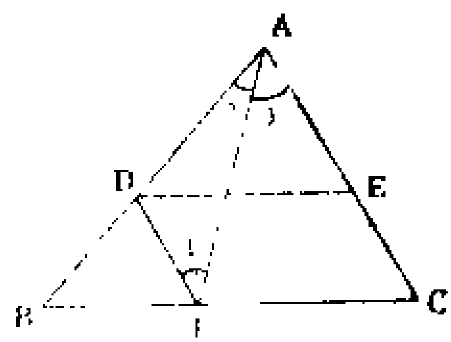


图 14—2

例3 已知直线 $l_1 // l_2$，又它们的外侧各有一定点 A，B，求作：连结 A，B 且满足下列条件的最短长度的折线，要求该折线在平行线 l_1，l_2 之间的线段 CD 与已知直线 l_3 平行。

思路： 因为夹在 l_1，l_2 内的线段 CD 是定向且定长的。故最短折线仅需使 $AC + BD$ 最短，可将点 A 按 CD 方向平移 CD 长的距离这时 A 变为 A'，则本题转化为使 $A'B$ 最短的问题。

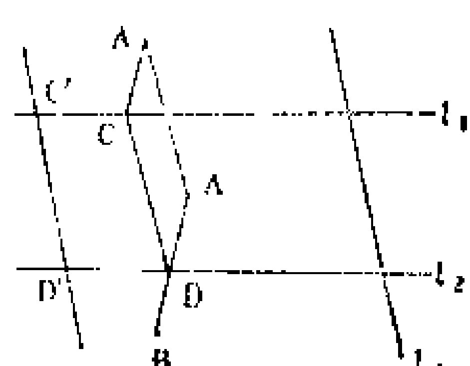


图 14—3

作法：任作一条直线 $C'D'$ 平行于直线 l_3，如图 7—3，按 $C'D'$ 的方向，距离为 $C'D'$，平移 A 点到 A'，连结 $A'B$ 交 l_2 于 D 点，过 D 作 $DC//C'D'$，交 l_1 于 C。再连结 AC，则折线 $ACDB$ 为满足条件的最短长度的折线。

【说明】 在作图题中，如果存在定长或定向，及有相等线段时，往往采用平移的方法来解决。

例4 已知$\angle PQR$为定角，A、B 分别是 QP，QR 上任意两点，如图 14—4 所示，若 $AA_1=BB_1$，$A_1A_2=B_1B_2$，且M、M_1、M_2分别是AB、A_1B_1、A_2B_2 的中点

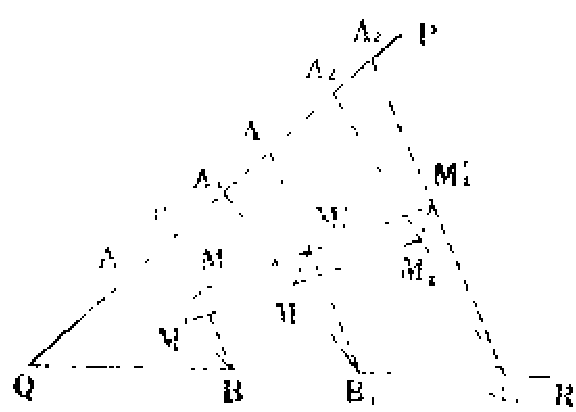


图 14—4

求证：M、M_1、M_2三点在同一直线上。

思路：由已知$\triangle A_1QB_1$ 与$\triangle A_2QB_2$ 均为等腰三角形，则M_1、M_2 在$\angle PQR$ 的平分线上。可用平移方法使$\triangle AQB$，$\triangle A_1QB_1$、$\triangle A_2QB_2$ 中的 M，M_1，M_2 移至三个共顶角的等腰三角形中。

证：（1）若 $QA=QB$，则$\triangle QAB$，$\triangle QA_1B_1$，$\triangle QA_2B_2$ 均为等腰三角形，故 M，M_1，M_2 均在$\angle PQR$ 的平分线上。

(2) 若 $QA \neq QB$，不妨设 $QB - QA = d > 0$，在 QP 上取 $QA' = QB$，即沿 QP 方向距离为 d 平移 A 至 A'，同样按此方法平移 A_1 到 A_1'，A_2 到 A_2'，则 $A'B$，$A_1'B_1$，$A_2'B_2$ 的中点 M'，M_1'，M_2' 在同一直线上。再按 PQ 方向，距离为 $\frac{d}{2}$，分别平移 M'，M_1'，M_2' 则可得到 M，M_1，M_2。由平移的性质，因为 M'，M_1'，M_2' 在同一直线上，所以 M，M_1，M_2 在同一直线上。

【说明】 在有些情况下，证明三点共线及角、边相等这类问题时，往往利用平移的性质，转而证明与其相关的问题。

例5 在正三角形 ABC 内有一点 P，已知 $PA = 10$，$PB = 8$，$PC = 6$，求正三角形的边长。

思路： 虽然 PA，PB，PC 的长度已知，并且正三角形的内角为 60°，但内角被 PA，PB，PC 把三内角分开了，可采用旋转变换，使其内角在某一三角形中出现，再求其边长。

解： 如图 14—5，以 C 为中心将 $\triangle CPA$ 逆时针旋转60°得到 $\triangle CP'B$。连结 PP'，这时 $BP' = AP = 10$，$P'C = PC = PP' = 6$。又∵ $PB = 8$，∴ $\angle BPP' = 90°$。又∵ $\angle P'PC = 60°$，∴ $\angle BPC = 150°$。

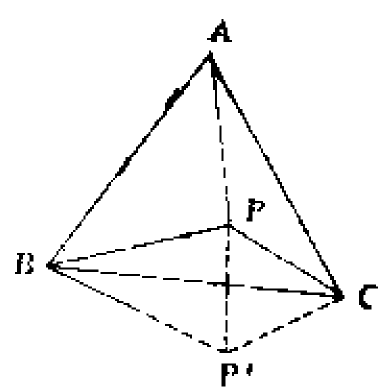


图 14—5

$$\therefore \quad BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cdot \cos 150°,$$

$\therefore\quad BC^2=8^2+6^2+2\times8\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=100+48\sqrt{3}$.

$\therefore\quad BC=2\sqrt{25+12\sqrt{3}}$.

即正三角形 ABC 的边长为 $2\sqrt{25+12\sqrt{3}}$.

【说明】 当题设条件不能直接利用时，可用旋转变换的方法，使之能够直接利用，而旋转的角度尽可能找使图形中某些线段重合的角度。

例6 在正方形 $ABCD$ 的边 CD，CB 上各有一点 E，F，且 $\angle EAF=45°$，求证：$DE+FB=EF$。

思路： DE，FB 是两条分开的线段，可把 $BE+FB$ 变为一条线段的长度，再证这一线段与 EF 相等，这只需将 $\triangle ADE$ 旋转90°。

证： 如图14—6，以 A 为旋转中心，将 $\triangle ADE$ 逆时针旋转90°得到 $\triangle ABE'$，这时有 $DE+BF=BE'+BF=FE'$，由旋转变换的性质有 $\angle EAE'=90°$，

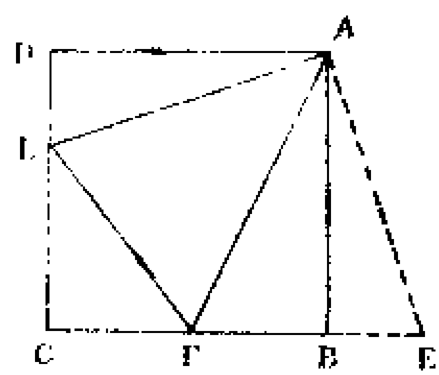


图 14—6

又由已知 $\angle EAF=45°$，

$\therefore AF$ 是 $\angle EAE'$ 的角平分线，

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle AE'F$，$\therefore FE'=EF$。

$\therefore DE+FB=EF$。

【说明】 在题设所给的条件比较分散时，可利用旋转变换，把条件集中到一起。

例7 如图14—7，以 $\triangle ABC$ 各边为底边，向外侧作顶

角为120°的等腰三角形$\triangle ABD$，$\triangle BCF\triangle CAE$，求证：$\triangle DEF$为正三角形。

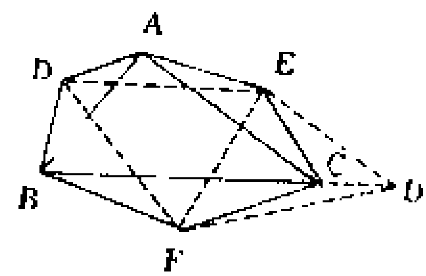


图 14—7

思路：题设中给出了角度，要证$\triangle DEF$是正三角形，可设想证其内角均为60°，因为$\angle DAE+\angle ECF+\angle FDB=60°$，可将这三个三角形拼凑成有公共顶点的图形，这可采用旋转120°的方法完成。

证：以E为旋转中心，将$\triangle EAD$逆时针旋转120°，得到$\triangle ECD'$。再将$\triangle FBD$以F为旋转中心顺时针旋转120°，显然旋转后D与D'重合。

由旋转性质可知$\angle DED'=\angle DFD'=120°$，

$\triangle DFE\cong\triangle D'FE$，$\therefore\angle DEF=\angle D'EF=60°$，

同理：$\angle DFE=60°$，$\therefore\angle EDF=60°$，

$\therefore$ $\triangle DEF$为正三角形。

【说明】 在旋转变换中，有时可以采用多次旋转，使题设中不易沟通的地方联系起来，达到解题所需要的条件。

例8 在任意凸四边形$ABCD$中，求证：$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$

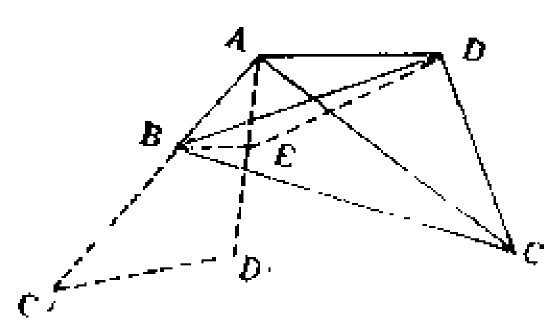


图 14—8

思路：把结论中涉及到的各个量利用旋转变换集中到一起，再利用三角形相似证明。

证：如图14—8，将$\triangle ADC$以A点为旋转中心顺时针旋转，使旋转角为$\angle CAB$，

则$\triangle ADC$旋转到$\triangle AC'D'$位置。

A, B, C'在同一条直线上，过点B作$BE//C'D'$，交AD'于E点。

连结ED，则$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore\quad \dfrac{BE}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$，即$AB\cdot CD=AC\cdot BE$。

同理$AD\cdot BC=AC\cdot DE$，

$\therefore\quad AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC(BE+DE)\geqslant AC\cdot BD$，

$\therefore\quad AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD$。

【说明】 在证明角相等或线段成比例时在某些不易找出证题思路时，往往可采用旋转变换，构造出相似三角形。

例9 已知$\triangle ABC$中，CD是中线，在边AC上取一点E，使$AE=\dfrac{2}{3}AC$，连结BE交CD于O。求证：$OE=\dfrac{1}{4}BE$。

思路： 要证$OE=\dfrac{1}{4}BE$，可采用旋转180°的方法构造出平行线，利用平行线截得比例线段定理来证明。

证： 如图14—9，以D为旋转中心，将$\triangle ABC$旋转180°，则A点变到B点，C点变到C'，O点变到O'，E点变到E'。

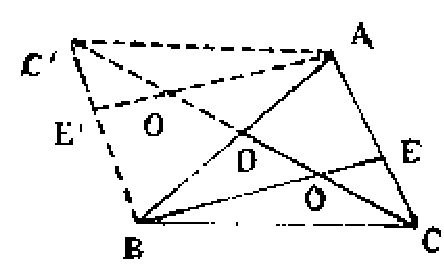


图 14—9

由旋转变换的性质有$O'E'\perp\!\!\!\!\!=OE$，

$\therefore\quad \dfrac{OE}{BO}=\dfrac{O'E'}{BO}=\dfrac{E'C'}{BC'}=\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore\ OE=\dfrac{1}{3}$

BO,

$\therefore\ OE=\frac{1}{4}BE$.

【说明】 在旋转变换中，旋转 180° 是找平行线常用的方法。

例10 设 $ABCDE$ 为凸五边形，AD 是一条对角线，已知$\angle EAD>\angle ADC$，$\angle EDA>\angle DAB$，
求证：$AE+ED>AB+BC+CD$。

思路： 利用三角形中三条边的关系来证明。首先采用旋转变换使 $AB+BC+CD$ 能够用某个三角形的边长之和来表示，为此连结 AD，以 AD 的中点为对称中心，将 $ABCD$ 旋转180°，然后把 $AB+BC+CD$ 与 $AE+ED$ 进行比较。

证： 如图 14—10，连结 AD，取 AD 的中点 O。

以 O 点为旋转中心，将四边形 $ABCD$ 旋转 180°，则点 A 变到 D 点；点 D 变到 A 点，得到四边形 $AC'B'D$，且在 $\triangle EAD$ 内部（由已知）。延长 AC' 交 ED 于 P 点，延长 DB' 交 AP 于 Q 点。$\therefore AE+EP>AP=AC'+C'Q+QP$

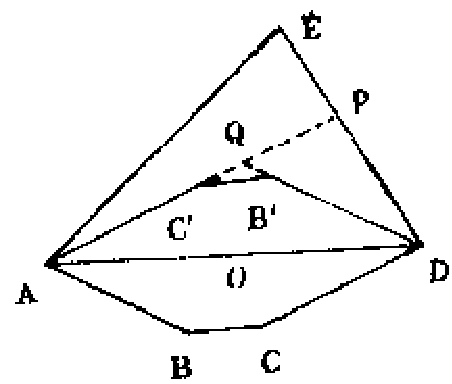


图 14—10

又$\because\ QP+PD>DQ=QB'+B'D$，$C'Q+QB'>C'B'$，

$\therefore\ AE+EP+PD>AC'+B'C'+B'D$。

又$\because\ AC'=CD$，$BC=B'C'$，$B'D=AB$，

$\therefore\ AE+ED>AB+BC+CD$。

【说明】 在进行旋转变换时，一般情况下要注意两点：①确定旋转中心；②确定旋转角度（一般为60°或90°或180°）及旋转方向。

（三） 练 习 题

1．河岸为两平行直线，在河两侧各有一个居民点，问在何处架桥（桥与河岸垂直），能使两岸居民来往路程最短。

2．如图14—11，在四边形$ABCD$中，$AB=CD$，E，F分别为AD与BC的中点，FE的延长线与BA的延长线交于G，FE的延长线与CD的延长线交于H，求证：$\angle BGF=\angle CHF$。

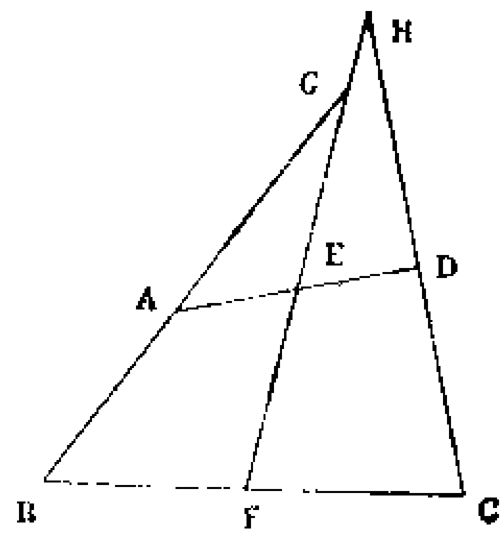


图 14—11

3．已知等腰梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$AB=DC$，又E，F分别在AB，CD上，且$AE=CF$。求证：

$EF\geqslant\frac{1}{2}(AD+BC)$。

4．位于同一平面的正三角ABC与正三角形CDE及正三角形EHK，（顶点依逆时针排列），两两有公共顶点C和E，且A、D、K三点在同一条直线上，$AD=DK$，求证：$\triangle BHD$是正三角形。

5．在$\triangle ABC$外，作正方形$ABEF$和正方形$ACGH$，

$AD\perp BC$，延长 DA 交 FH 于 M，求证：$FM=HM$。

6. 等腰$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 在$\triangle ABC$ 内，E 为 BD 的延长线上一点，且$\angle ADE=\angle AED=\angle C$，求证：$BD=CE$。

7. 以菱形的四边各为一边，向形外作正方形. 求证：它们的中心恰好是另一正方形的四个顶点。

8. 在四边形 $ABCD$ 中，设 M,N 分别为 AB 与CD 的中点，求证：$MN\leqslant\frac{1}{2}(AD+BC)$。

9. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的平分线交 BC 于D，M 为 BC 的中点，过 A，D，M 三点的圆交 AB 于 P，交 AC 于 Q，求证：$BP=CQ$。

10. 每一个三角形的三条中线为构成一个新的三角形，若记原来的三角形为H_1，H_1中的三条中线构成三角形H_2，用 H_2 的三条中线再构成三角形 H_3，求证：$H_1\backsim H_3$。

（四） 答案与提示

1. 设河宽为 $CD=d$，按DC方向，距离为d，平移点B到B'，连接 $B'A$，交l_1于E，过 E 作 $EF\perp l_1$，则 EF 为所架的桥。如图14—11所示。

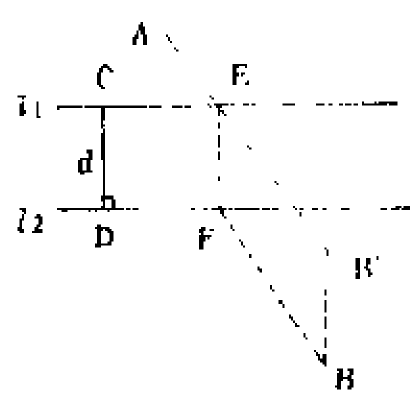


图 14—11

2. 如图14—12，将AB、CD 分别平移到EB'，EC' 位置，由平移的性质有$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，连结 BB'，$B'C$，BC'，

CC'，BF，$C'F$。

$\because$ E，F 分别是 AD 与BC的中点，

$\therefore$ $AE=BB'=ED=CC'$。

且又$\because$ $BB'/\!/AD/\!/CC'$，

$\therefore$ 四边形$BB'CC'$为平行四边形。

$\therefore$ $B'F=CF$。又$\because$ $AB=CD$，$\therefore B'E=EC'$，

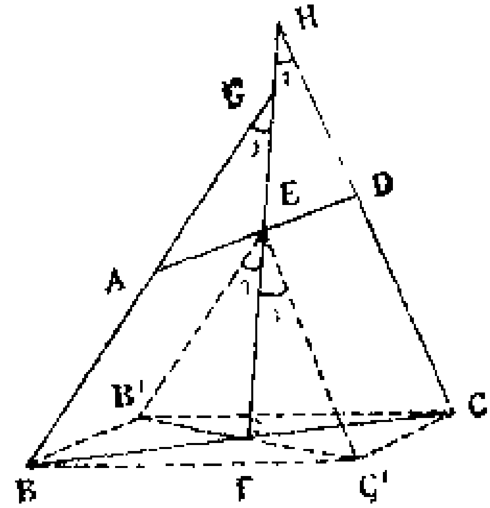


图 14—12

$\therefore$ $\triangle EFB'\cong\triangle EFC'$，$\therefore\angle 3=\angle 4$。

因而$\angle 1=\angle 2$，即$\angle BGF=\angle CHF$。

3. 如图 14—13，沿 BC 方向，距离为$AD+BC$，平移 AB到 $A'B'$，E的对应点为 E'，连结 $E'F$， 显然$AEE'A$为平行四边形。

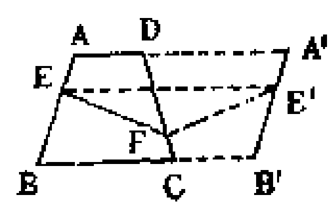


图 14—13

$\therefore$ $EE'=AD+BC$，易证 $E'F=EF$，

又$\because$ $EF+E'F\geqslant EE'$ $\therefore$ $EF\geqslant\frac{1}{2}(AD+BC)$。

4. 以 H 为旋转中心，将$\triangle HBE$顺时针旋转60°，再将$\triangle CAD$以 C 为中心，逆时针旋转60°，由此证明$BH=HD$，$\angle BHD=60°$，即可得出结论，见图14—14。

5. 将$\triangle AMF$以 A 点为中心旋转（逆时针）90°，将

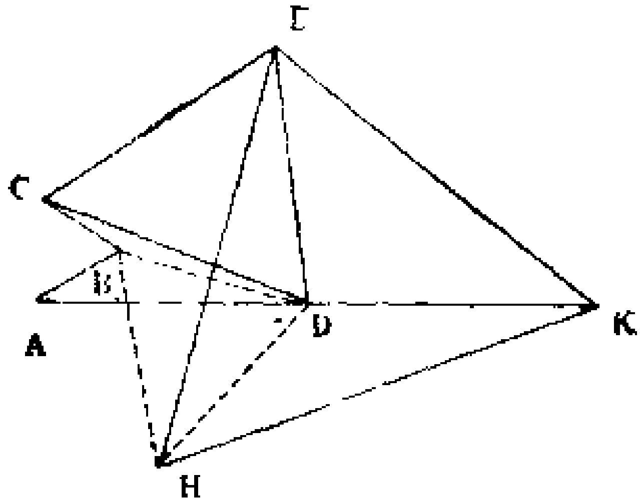


图 14—14

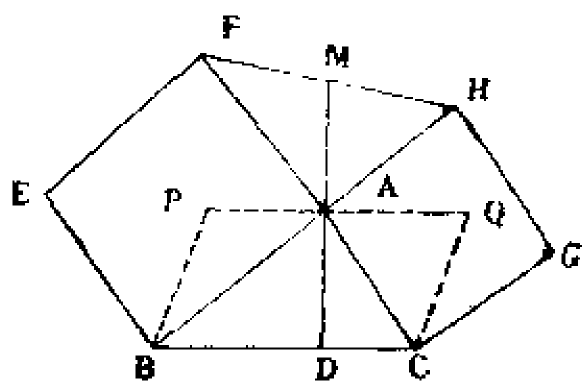


图 14—15

$\triangle AMH$ 以 A 点为中心顺时针旋转90°，逆时针旋转时M点对应到P点，顺时针旋转时M点对应到Q点，再证明四边形$BCQP$是平行四边形。由此有$FH=HM$，见图7—15。

6. $\triangle ACE$可由$\triangle ABD$以A为中心$\angle BAC$为旋转角旋转而得，故$BD=CE$，见图14—16。

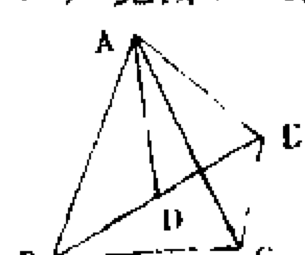


图 14—16

7. 设菱形$ABCD$以四边形向外作的正方形中心分别为O_1，O_2，O_3，O_4，如图14—17，以O_1为中心旋转90°，可把A点变换到B点，

再以 O_2 为中心旋转90°，可把 B 点变为 C 点，即 A 点可经过两次旋转变换到 C 点，而A 又可以O点为中心旋转180°变到C点。$\therefore OO_1=OO_2$，$AO=CO$，$\angle O_1OO_2=90°$。同理可证 $OO_2=OO_3=OO_4$，$\angle O_2OO_3=\angle O_3OO_4=\angle O_4OO_1=90°$，$\therefore O_1O_2O_3O_4$为正方形。

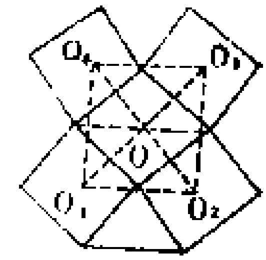


图 14—17

8. 如图14－18，以 N 为中心，旋转180°把B点变到A，M 变到 M'，C 变到C'，则有$MM'=2MN=DC'$。

9. 以 M 点为中心旋转180°，使 C 变到B，Q 变到Q'，如图14－19，则 $\angle BQ'M=\angle CQM=\angle APM$，$\therefore M$、$P$、$B$、$Q'$ 四点共圆。

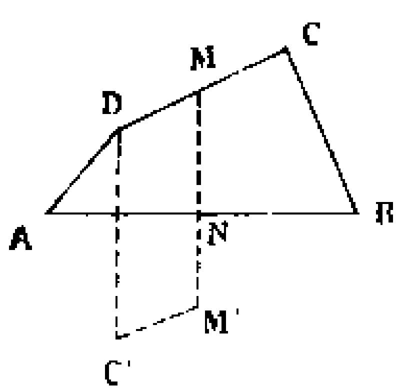


图 14—18

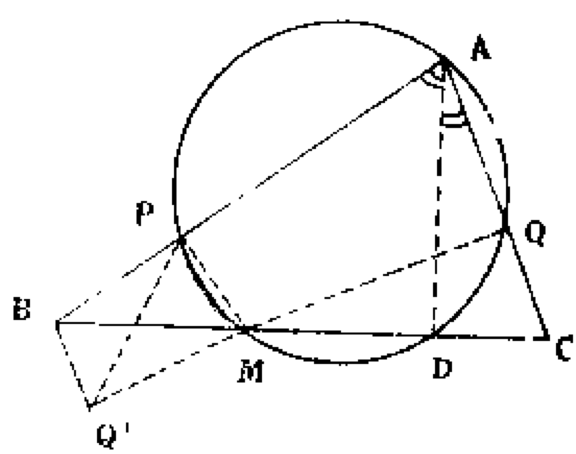


图 14—19

$$\therefore \quad \angle BQ'P=\angle BMP=\angle PAD=\angle DAQ=\angle DMQ$$
$$=\angle BMQ'=\angle BPQ',$$

$\therefore \quad BQ'=BP$，又$\because BQ'=CQ$，$\therefore BP=CQ$。

10. 设$\triangle ABC$三条中线分别为AA_1，BB_1，CC_1，沿BC_1方向，距离为BC_1平移 BC 到 C_1F，则BA_1FB_1为平行四边形，所以$A_1F=BB_1$，易证 A_1CFB_1 是平行四边形，所

以 $CF \perp\!\!\!\!= AC_1$，$\therefore AF = CC_1$，即 $\triangle AA_1F$ 为 H_2，故三角形的三条中线可构成新的三角形。

如图14—20。

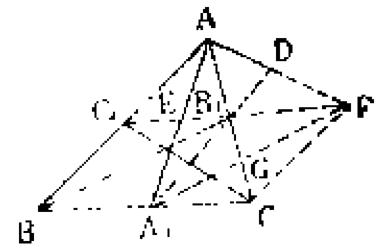


图 14—20

由上作法过程可知，EF 为 AA_1 上的中线且 $EF = \frac{3}{4}BC$，同理可证得 A_1D，AG 均为中线，分别等于 $\frac{3}{4}AB$，$\frac{3}{4}AC$，而由 EF，A_1D，AG，构成三角形 H_3，因为各边均为 H_1 对应边的 $\frac{3}{4}$，

$\therefore\ H \backsim H_3$。

十五　关于反证法问题

（一）基本原理

1．证明步骤

反证法是间接证法的一种．用反证法完成一个命题的证明，有三个步骤：

（1）反设　假定待证的结论不成立，也就是肯定原结论的反面。

（2）归谬　把反设作为辅助条件，添加到题设中去，然后从这些条件出发，通过一系列正确的逻辑推理，最终得出矛盾。

（3）结论　由所得矛盾说明原命题成立。

2．依据及分类

反证法的根据是"排中律"（在同一时间，同一关系下，对同一事物的两个相反的判断不能都假，必有一真；两者之间没有第三种中间性质的判断存在）．

当结论的反面只有一种情况时，只要否定这一种情况就能证明原结论正确，这种反证法叫做归谬法．当结论的反面有多种情况时，必须一一予以否定才能证明原命题的正确，这种反证法又叫穷举法。

3．矛盾形式

反证法导致矛盾有以下形式：

(1) 与已知条件矛盾.

(2) 与公理、定义、定理、推论、公式矛盾.

(3) 与反设矛盾.

(4) 自相矛盾.

（二） 范例与方法

1. 在代数中的应用

(1) 证明方程问题

例1 不解方程，求证方程 $x^2-1989x+1991=0$ 无整数根。

思路： 反设后，由于涉及根的问题，所以可考虑使用韦达定理，并注意利用整数的性质.

证：（反证）设方程有整数根 α，及另一根 β. 由韦达定理得 $\begin{cases}\alpha+\beta=1989 & (1)\\ \alpha\beta=1991 & (2)\end{cases}$. 由(1) 知 α、β 均为整数，且一奇一偶. 由(2) 知 α、β 均为奇数，故矛盾. ∴ 原方程无整数根。

【说明】 一般地，当结论由否定形式给出时，宜于用反证法证明。

例2 如果对于任意的正数 P，方程 $ax^2+bx+c+p=0$（a、b、c 为实数）有且只有正实根，求证 $a=0$。

思路： 此题用直接证法较难进行，故宜于从反面入手。反设后，应有两种情况，即使用穷举法。考虑到 P 是任意正数，所以应设想当 P 充分大时的状态，推出矛盾。

证：（反证）设 $a\neq0$，则有 $a>0$ 或 $a<0$。

①若 $a>0$，则二次函数 $y=ax^2+bx+c+p$ 的图象是开口向上的抛物线，$y_{最小值}=\dfrac{4a(c+p)-b^2}{4a}$，当 p 值增加时，抛物线沿 y 轴方向向上平移，当 p 充分大时，$y_{最小值}>0$，这时抛物线与 x 轴无交点，即方程 $ax^2+bx+c+p=0$ 无实根，与题设矛盾，∴ a 不能大于零。

②若 $a<0$，方程 $ax^2+bx+c+p=0$ 有一根是 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a(c+p)}}{2a}$，当 p 充分大时（只要 $c+p>0$），

则 $-b+\sqrt{b^2-4a(c+p)}>0$。∴ $x_1<0$ 与题设矛盾。∴ a 不能小于零。综上所述，只能有 $a=0$。

【说明】 四个“二次”（即二次函数，一元二次方程，一元二次不等式，二次三项式）之间，有着密切的联系，所以涉及“二次”的题目，要学会融汇贯通。

（2）证明数的问题

例3 设 p 是一个大于3的质数，对某个自然数 n，数 p^n 恰是一个20位数．证明：这个数中至少有三个数码是一样的。

思路：因为结论与数码个数有关，所以反设后，应抓住 p^n 是20位数的关键进行探索，推至与 p 的题设矛盾。

证：（反证）设 p^n 的20个数码中没有三个或三个以上是一样的，则至多有两个数码是同样的．从而0，1，2，……，9，这10个数码，在 p^n 的20位中，每个数码恰出现两次．（否则，p^n 将不足20位）．因此，数 p^n 的各位数码之和为 $2\times(0+1+2+\cdots+9)=90$，所以 p^n 可被3整除，于

是 p 可被 3 整除。但已知 p 为大于 3 的质数，故矛盾。所以 p^* 中至少有三个数码是一样的。

【说明】 某些关于"至少"、"至多"类型的命题，从结论的反面入手较易论证。

2. 在几何中的应用

(1) 证明常规问题

例 4 求证六条边都等于 1 的凸六边形至少有一条对角线的长不大于 $\sqrt{3}$。

思路： 由于边长均为 1，所以易得等腰三角形，其顶角恰为六边形的内角，这样，就建立起一种联系。故可反设后，考察和比较顶角的度数和与六边形的内角和。

证：（如图 15—1）假设该六边形的每条对角线的长都大于 $\sqrt{3}$，于是图中 $AC>\sqrt{3}$。作 $BM\perp AC$，垂足为 M。$\because$ $AB=BC$，$\therefore$ $AM=MC$。而 $AB=1$，$AC>\sqrt{3}$，$\therefore$ $\sin\angle ABM=\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AC}{2}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

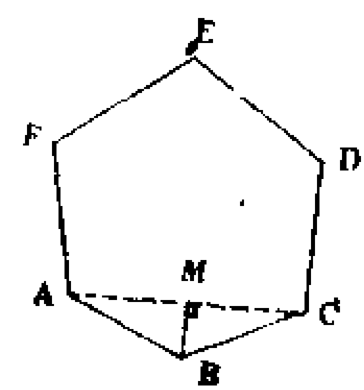


图 15—1

$\therefore$ $\angle ABM>60°$。同理 $\angle CBM>60°$，$\therefore$ $\angle ABC>120°$。同法可得该六边形的每一个内角都大于 $120°$，所以该六边形内角和大于 $720°$，而这与六边形的内角和等于 $720°$ 相矛盾。故原题得证。

【说明】 当结论所表达的数学现象不明显，用直接证法较困难，而在证明方向上从结论的反面入手又较易论证时，

宜采用反证法。

(2) 证明非常规问题

例 5 已知平面内有25个点，其中任何点中一定有两个点之间的距离小于1。证明：必有一个半径为1的圆，它至少包含这25个点中的13个点。

思路：先构造出两个圆，再结合抽屉原则和反证法证之。

证：在已给的25个点中任取一点 A，以 A 为圆心作一个半径为1的圆。如果所有的点都在这圆中，则命题已成立。反之，若不然，则圆外应有一已知点 B，且 $AB>1$，再以 B 为圆心作一半径为1的圆。再考察25点中的任一点 C，如 C 异于 A 或 B，并设它在两个所作圆之外，

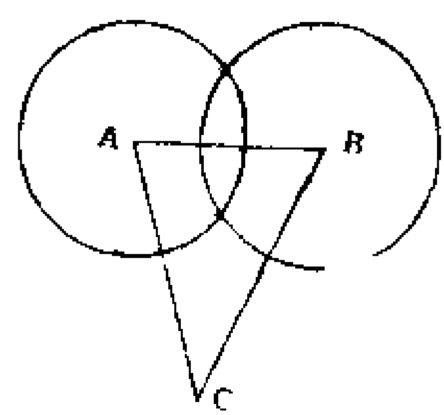


图 15—2

则有 $AC>1$，$BC>1$。因构造时 $AB>1$，所以与题设"任何三点一定有两个点之间的距离小于1"矛盾。故 C 必须在两个所作图的某一个之内。这样，25个点完全包含在这两个圆中。由抽屉原则知其中必有一个圆至少包含 $\left[\frac{25}{2}\right]+1$ 个点，即13个点。

【说明】 构造法的关键在于设法寻找及作出与问题对应的几何图形。而准确地寻找图形，在于对题设的深入剖析。

（三）练 习 题

1．已知 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$，求证：方程 $x^2+p_1x+q_1=0$……① $x^2+p_2x+q_2=0$……② 中至少有一个方程有实数根。

2．设实数 a、b、h 中至少有一个不为零，证明方程 $x^2-(a+b)x+ab-h^2=0$ 必有实根，并且至少有一个根不是零。

3．证明不存在整数 p、q 使得 $p^2=q^2+1990$。

4．求证：不存在这样的整数，把它的首位数字移到末位之后，得到的数是原数的两倍。

5．求证：凸多边形的锐角不能多于三个。

6．在凸四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB+BD\leqslant AC+CD$，求证：$AB<AC$。

7．已知三角形的两个角的平分线相等，求证：两角所对的边相等。

8．已知 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，直线 AP、BP、CP 分别交对边于 D、E、F。证明：在 $\frac{AP}{PD}$、$\frac{BP}{PE}$、$\frac{CP}{PF}$ 三个比中，至少有一个不大于 2，并且至少有一个不小于 2。

（四）答案与提示

1．反证 设方程①②都没有实数根，则由①得 $\triangle_1=p_1^2-4q_1<0$，由②得 $\triangle_2=p_2^2-4q_2<0$，两式相加得 $p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)<0$，∴ $p_1^2+p_2^2<4(q_1+q_2)=$

$4\cdot\frac{p_1p_2}{2}=2p_1p_2$，∴ $(p_1-p_2)^2<0$。这是不可能的。故原命题成立。

2．证： $\Delta=[-(a+b)]^2-4(ab-h^2)=(a-b)^2+4h^2\geqslant0$，∴ 方程必有实根。设 α、β 为方程的两实根，且 $\alpha=\beta=0$，则由韦达定理知 $\begin{cases}\alpha+\beta=a+b=0\\ \alpha\beta=ab-h^2=0\end{cases}$，解得 $b^2+h^2=0$，∴ $b=h=0$。∴ $a=0$。而这与 a、b、h 中至少有一个不为零矛盾。

3． 假设有整数 p、q，使 $p^2=q^2+1990$，则 $(p+q)(p-q)=1990$。当 p、q 同奇或同偶时，$p+q$、$p-q$ 都是偶数，所以 $(p+q)\cdot(p-q)$ 可被 4 整除。但 1990 不可被 4 整除，故矛盾。∴ p、q 同奇或同偶时，$(p+q)(p-q)\neq1990$。当 p、q 奇偶相异时，$p+q$、$p-q$ 都是奇数，因而 $(p+q)(p-q)$ 是奇数，但 1990 为偶数，故此时又有 $(p+q)(p-q)\neq1990$。综上所述，不存在整数 p、q 使 $p^2=q^2+1990$。

4． 假设存在这样的整数，则此整数至少有两位，因此可设原数共有 $n+1$ 位，n 是正整数。设原数为 A，它的首位数字是 a，划去首位数字以后剩下的数是 x，则 $A=10^n\cdot a+x$…①，把首位数字移到末位之后，所得的数是 $B=10x+a$，依题意 $B=2A$，即 $10x+a=2(10^n\cdot a+x)$，∴ $8x=(2\cdot10^n-1)a$…②，从②式得右边的乘积 $(2\cdot10^n-1)a$ 应该是8的倍数。但是因子 $2\cdot10^n-1$ 是奇数，所以 a 是 8 的倍数。而 a 是原数的首位数字，所以 $1\leqslant a\leqslant9$，由此得到 $a=8$。把 $a=8$ 代入②式，有 $x=2\cdot10^n-1>10^n$…③。另一方面，x 是从

原数A划去首位数字后得到的n位数，所以$x<10^n$…④，这里③式与④式互相矛盾。因而不存在这样的整数A，把它的首位数字移到末位数字之后，得到的数是原数的两倍。

5．证明：假设凸n边形（$n\geqslant4$）的锐角多于三个，则这n个内角中至少有4个角（不妨设为A_1、A_2、A_3、A_4）都是锐角，故有$A_1+A_2+A_3+A_4<360°$…①，设其余（$n-4$）个内角和为S，则 $S<(n-4)\cdot180°$…②，由①+②得$A_1+A_2+A_3+A_4+S<(n-2)\cdot180°$。但是，$n$边形$n$个内角和等于$(n-2)\cdot180°$，故产生矛盾。所以凸多边形的锐角不能多于三个。

6．反证 设$AB\geqslant AC$，于是$\angle\alpha\geqslant\angle\beta$。∵ $ABCD$是凸四边形（图8—3），∴ 对角线AC及BD都在形内。于是有$\angle BCD>\angle\alpha\geqslant\angle\beta>\angle DBC$，∴ $BD>DC$，故$AB+BD>AC+CD$，这与题设条件$AB+BD\leqslant AC+CD$矛盾。∴ $AB<AC$。

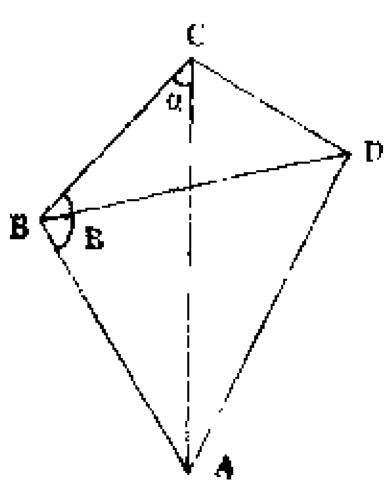


图 15—3

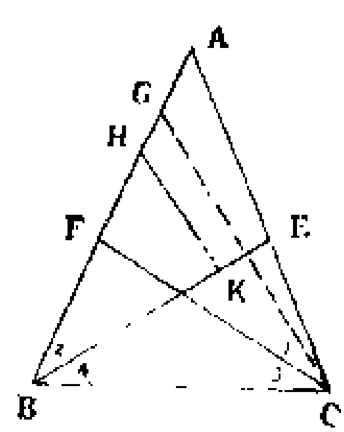


图 15—4

7．（图15—4）在$\triangle ABC$中，已知$\angle B$、$\angle C$的平分线$BE=CF$。设$AB\neq AC$不妨设$AB>AC$，则$\angle ACB>$

$\angle ABC$，得 $\angle ACF=\frac{1}{2}\angle ACB>\frac{1}{2}\angle ABC=\angle 2$，故可在 $\angle ACF$ 内作 $\angle 1=\angle 2$，且 $\angle 1$ 的一边 CG 交 AB 于 G。$\because\ \angle 3>\angle 4$，$\therefore\ \angle GCB>\angle GBC$。故 $GB>GC$，于是在 BG 上可取一点 H，使 $BH=CG$。过 H 作 CG 的平行线，交 BE 于 K，得 $\triangle HKB\backsim\triangle GFC$，$\therefore\ CF=BK$。因此 $BE>BK=CF$，与已知 $BE=CF$ 矛盾，故 $AB>AC$ 不可能。同理，$AB<AC$ 也不可能。由穷举法知只有 $AB=AC$。

8．略证（图15—5），假设 $AP>2PD$，$BP>2PE$，$CP>2PF\cdots$①，

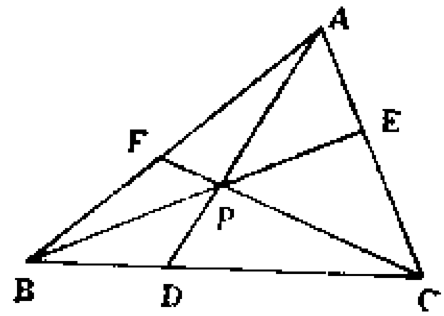


图 15—5

则 $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PD}{AD}=\frac{PD}{AP+PD}<\frac{PD}{2PD+PD}=\frac{1}{3}$。

同理，$\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}<\frac{1}{3}$，$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}<\frac{1}{3}$。

$$\therefore\quad \frac{S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

即 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}<1$ 不成立。$\therefore$ ①中的三个式子中至少有一个不成立，即至少有一个比式不大于2。同样，设 $AP<2PD$，$BP<2PE$，$CP<2PF$，也会得出矛盾的结果。$\therefore$ 三个比式中至少有一个不小于2。

十六　关于图形覆盖问题

（一）基本原理

1．有关定义

（1）我们可以把平面图形看成平面上点的集合，简称平面点集．而用来覆盖平面图形的东西平面纸片，可以看做是由一条封闭的平面曲线所包围的平面点集．（即为平面区域）．

（2）设 G 与 F 是两个平面点集，如果点集 F 的每一点都属于点集 G，则称点集 G 覆盖点集 F．如果点集 F 中至少有一点不属于 G，则称点集 G 不覆盖点集 F．

2．有关性质

（1）一张纸片 G 可以覆盖与它全等的平面图形．

（2）纸片 G 能覆盖 G_1，G_1 能覆盖 G_2，则 G 能覆盖 G_2．

3．基本定理

（1）如果能在平面上找到一点 O，使得点集 F 中的每一点与 O 的距离都不大于定值 r，则 F 必可被一个半径为 r 的圆纸片 G 所覆盖．

（2）A、B 为定点，α 为定角．若点集 F 中的每个点 P_i 都在 AB 的同侧，且与 A、B 所成视角，$\angle AP_iB\geqslant\alpha$，则点

集F被以AB为弦，含定角α的一个弓形纸片所覆盖。（如图16—1）

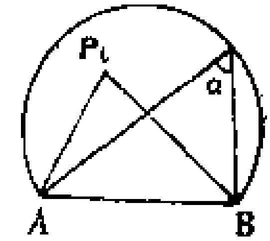


图 16—1

(3) 如果G与F都是平面区域，若F的面积大于G的面积，则G必不能覆盖F。

(4) 重迭原则：假定有n张纸片，它们的面积分别是A_1，A_2，A_3，…，A_n，如果我们把这n张纸片任意覆盖到一个面积为A的平面区域内部，若$A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n>A$，则至少有两张纸片发生重迭（即存在面积不为零的公共部分）。

（二）范例与方法

例1 桌面上放有一丝线做成的线圈m，它的周长为$2l$，则不管线圈形状如何，都可以被一个半径为$\frac{l}{2}$的圆纸片所覆盖。

思路：把问题特殊化。因为问题与线圈的形状无关，所以不妨把此丝线圈拉成一个矩形（如图16—2）。在矩形$ABCD$中，∵ 周长为$2l$，∴ $BA+AD=l$，$BC+CD=l$，即B、D把周长分成了相等的两部份。连结AC，BD设它们相交于O。∵ $BD<BC+CD$，

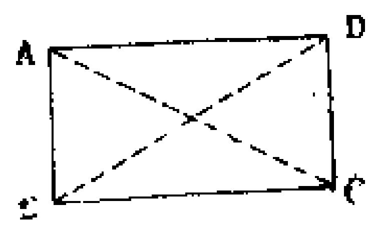


图 16—2

∴ $2OD<BC+CD$，$OD<\frac{1}{2}(BC+CD)=\frac{l}{2}$，而$OD=$

$OC=OA=OB$，∴ 以 O 为圆心，以 $\frac{l}{2}$ 为半径的圆纸片可以覆盖此矩形。由此得到证明方法。

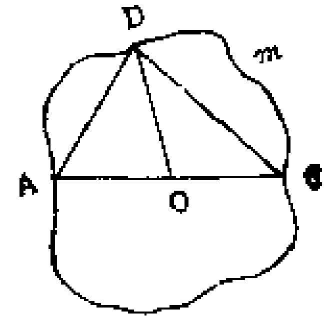


图 16—3

证：（如图 16—3）在 m 上取两点 A 及 C，使点 A 和 C 将曲线 m 分成等长的两段，则每段长为 l。设 O 是线段 AC 的中点，在 m 上任取一点 D，连结 DO、DA、DC。通过延长 DO 至 B，使 $DO=OB$，易证 $OD\leqslant\frac{1}{2}(DA+DC)$。（当 D 运动至与 C 重合时，等号成立）．∴ $OD\leqslant\frac{1}{2}(DA+DC)\leqslant\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DA}+\overset{\frown}{DC})=\frac{l}{2}$。由定理(1) 知以 O 为圆心，$\frac{l}{2}$ 为半径的圆纸片一定能覆盖整个曲线 m。

【说明】 从特殊性看问题，寻求解题思路，是很重要的一种数学思想方法。

例 2 $\triangle ABC$ 的最大边长为 a，则这个三角形必可被一半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 的圆纸片覆盖。

思路：在 $\triangle ABC$ 中，最大边 a 所对的角 A 也是最大角，则 $60^\circ\leqslant A<180^\circ$。所以只要作一含 60° 角的弓形弧，此弧所在圆便可覆盖 $\triangle ABC$。只须证此圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 即可。

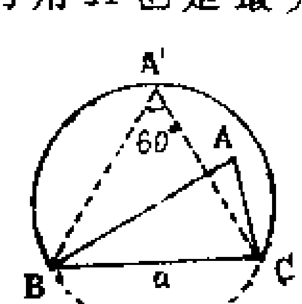


图 16—4

证：（如图16—4）以 $BC=a$ 为弦，在 A 点所在的一侧，作含 60° 角的弓形

弧。∵ $\angle BAC \geqslant 60°$，由定理(2)，∴ 这个弓形纸片一定覆盖$\triangle BAC$。取弓形弧中点A'，则$\triangle A'BC$为正三角形。但是这个弓形是正三角形$A'BC$外接圆的一部份，易计算边长为a的正三角形外接圆半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$。因而$\triangle ABC$必可被半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$的圆纸片覆盖。

【说明】 应用几何教材第二册中的轨迹6，可以解决一类的图形覆盖问题。

例3 证明面积为1的三角形不能被面积小于2的平行四边形所覆盖住。

思路：命题以否定形式给出，宜于用反证法。反设后，平移平行四边形的各边，使此三角形内接于平移后的平行四边形，再用分割面积的方法证之。

证：（反证）设面积为1的三角形ABC可以被一个面积小于2的平行四边形$LMNK$所覆盖，则$\triangle ABC$必在这个平行四边形的内部（如图16—5）。过B作PQ与LK平行，过A作$AR//MN$，则$\triangle ABC$内接于$\square PARQ$。因此$S_{\triangle ABC}<S_{\square PARQ}<S_{\square LMNK}<2$。过$C$作$CE//AR$交$PA$于$E$，连结$BE$，则$S_{\triangle CBD}\leqslant S_{\triangle CBE}=\frac{1}{2}S_{\square CQPE}$，

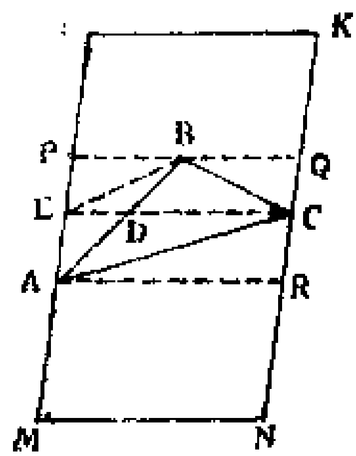


图 16—5

$S_{\triangle CAD} \leqslant S_{\triangle CAE} = \frac{1}{2} S_{\square CRAE}$，∴ $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CBD} + S_{\triangle CAD} \leqslant$

$\frac{1}{2} S_{\square CQPE} + \frac{1}{2} S_{\square CRAE} = \frac{1}{2} S_{\square PARQ}$。即$S_{\square PARQ} \geqslant 2S_{\triangle ABC} =$

$2 \times 1 = 2$ 与 $S_{\square PARQ} < 2$ 矛盾。∴ 面积为 1 的三角形不能被面积小于 2 的平行四边形所覆盖。

【说明】 本题证明所用的作外接平行四边形的构造方法，是解题中的一个重要技巧。

例 4 三张单位正方形的纸片散放到桌子上，其覆盖总面积恰等于 2 。证明：总有两个正方形纸片重迭部份面积不小于$\frac{1}{3}$。

思路： 由题意及重迭原则，知其中必有重迭。由于命题的结论出现"不小于"，所以宜于用反证法来证明。观察题目，题中给出的主要数据就是，"覆盖总面积恰等于 2"，所以反证要从这里入手寻找矛盾。即要在反设的基础上，估算三张纸片覆盖的总面积。

证： 三个正方形纸片面积为 3，但覆盖总面积为 2，根据重迭原则，其中必有重迭。反设命题结论不成立，则任意两个单位正方形纸片重迭部份面积都将小于$\frac{1}{3}$。把三个单位正方形纸片编号为①、②、③，估算它们覆盖的面积。（如图 16—6）∵ 第②与①重迭部分面积小于$\frac{1}{3}$，则①与②覆盖面积总

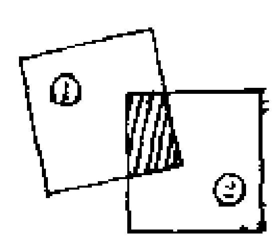


图 16—6

和大于$2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$；第③与①、②每一个重迭部份面积都小于$\frac{1}{3}$，故③与①、②重迭面积总计小于$\frac{2}{3}$。因此③在①、②之外占据面积大于$\frac{1}{3}$。故①、②、③覆盖总面积大于$\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=2$。即三个单位正方形覆盖总面积大于2。但题设覆盖总面积等于2，故矛盾，所以总有两个单位正方形纸片重迭部份面积不小于$\frac{1}{3}$。

【说明】 在图形覆盖问题上，也应注意与反证法等数学方法的联合应用。

（三）练 习 题

1．填空题

（1）单位正方形可以被半径不小于____的圆纸片所覆盖。

（2）边长为1的正三角形可以被半径不小于____的圆纸片所覆盖。

（3）周长为l的平行四边形可以被半径不小于____的圆纸片所覆盖。

2．求证：平行四边形能够被半径不小于较长对角线一半的圆纸片所覆盖。

3．求证：一个半径为$\frac{1}{6}$的圆能够被边长为1的正三角形

纸片所覆盖。

4. 证明：一个直径等于1的圆纸片不可能被两个直径小于1的圆纸片覆盖。

5. 证明用面积为 S，周长为 P 的凸四边形一定可以覆盖一个半径为 $\frac{S}{P}$ 的圆。

6. 证明边长为 2 的正方形必不能被三边分别为3、4、5的三角形所覆盖。

7. 五张面积为 1 的圆纸片散放到桌子上，其覆盖总面积恰等于3。证明：总有两张圆纸片重迭部分面积不小于 $\frac{1}{5}$。

（四） 答案与提示

1. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$；(3) $\frac{1}{4}$。

2. 证：（如图16－7）设平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于 O。不妨设 $BD \geqslant AC$，则 $OD \geqslant AO$。$\therefore$ $\angle 1 \geqslant \angle 2$。设 P 为 $\square ABCD$ 周界上任一点，不妨设 P 在 AD 上，则 $\angle 3 > \angle 1 \geqslant \angle 2$。$\therefore$ $OD \geqslant OP$，即 $OP \leqslant OD$。因此，以 O 为圆心，以 OD 为半径的圆纸片一定能覆盖 $\square ABCD$。即平行四边形能够被半径不小于较长对角线一半的圆纸片所覆盖。

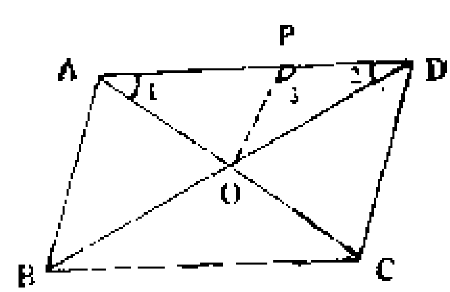


图 16—7

3. 证：首先求边长为1的正三角形的内切圆半径（如图16—8），$\mathrm{tg}30^\circ=\dfrac{r}{AD}=\dfrac{r}{\frac{1}{2}}$，

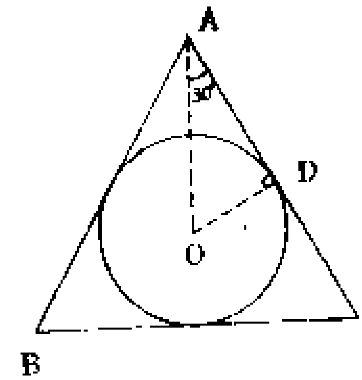


图 16—8

$\therefore\quad r=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

但$\dfrac{\sqrt{3}}{6}>\dfrac{1}{6}$。$\therefore$ 半径为$\dfrac{1}{6}$的圆能够被半径为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$的圆形所覆盖。而半径为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$的圆，又是边长为1的正三角形的内切圆，故可被其覆盖。由性质(2)知，半径为$\dfrac{1}{6}$的圆形能够被边长为1的正三角形纸片所覆盖。

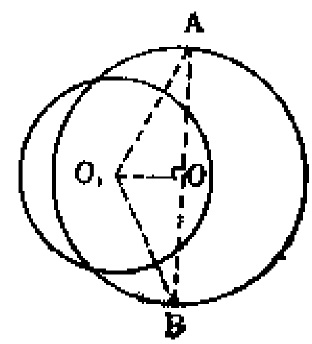


图 16—9

4. 证：（如图16—9）设$\odot O$的直径为1。先用直径小于1的纸片$\odot O_1$任意覆盖在$\odot O$上（如图16—9）。连结O_1O，过O作O_1O的垂线，交$\odot O$于A、B两点，则$AO_1\geqslant AO=\dfrac{1}{2}$，$BO_1\geqslant BO=\dfrac{1}{2}$。而$\odot O_1$半径小于$\dfrac{1}{2}$，可见未被盖住的部份中，两点间距离的最大值$AB=1$，故这未被盖住的部份不能被任一直径小于1的圆纸片（$\odot_{O_2}$）所覆盖住。所以一个直径等于1的圆不可能被两个直径小于1的圆纸片覆盖住。

5. 此题可以反过来思考，证明一个面积为S，周长为

P 的四边形 $ABCD$ 内一定可以放进一个半径为 $\frac{S}{P}$ 的圆。

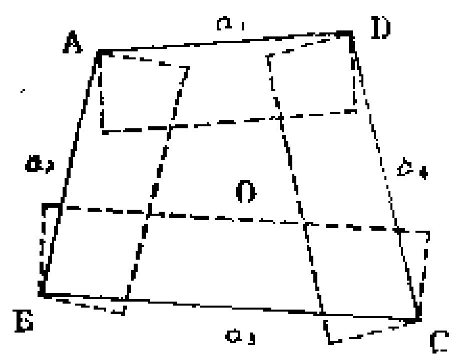


图 16—10

证： 分别以 a_1、a_2、a_3、a_4 为长（这里 $a_1+a_2+a_3+a_4=P$），以 $\frac{S}{P}$ 为宽，向四边形 $ABCD$ 内侧作四个矩形（如图 16—10），则这四个矩形总面积 $S'=a_1\cdot\left(\frac{S}{P}\right)+a_2\cdot\left(\frac{S}{P}\right)+a_3\cdot\left(\frac{S}{P}\right)+a_4\cdot\left(\frac{S}{P}\right)=(a_1+a_2+a_3+a_4)\cdot\frac{S}{P}=P\cdot\frac{S}{P}=S$。由于这四个矩形有重迭部分，所以这四个矩形覆盖的总面积小于 S。即四边形 $ABCD$ 不能被四个矩形覆盖，内部至少存在一点 O 不被覆盖。而 O 点到四边形 $ABCD$ 四边的距离 $>\frac{S}{P}$，因此以 O 为中心，以 $\frac{S}{P}$ 为半径的圆必在这个四边形内部，即这个四边形能覆盖半径为 $\frac{S}{P}$ 的圆。

6. 证： 由勾股定理逆定理知，三边分别为3、4、5的三角形，一定为直角三角形。设 Rt$\triangle ABC$，$AC=3$，$BC=4$，$AB=5$，现考虑 $\triangle ABC$ 的内接最大正方形的边长。设正方形 $DEFG$ 为内接于 Rt$\triangle ABC$ 的最大正方形。（如图 16—

11) 设其边长为 x，$GB=y$，
易证 $Rt\triangle GCD \backsim Rt\triangle BCA$
$Rt\triangle BFG \backsim Rt\triangle BCA$，

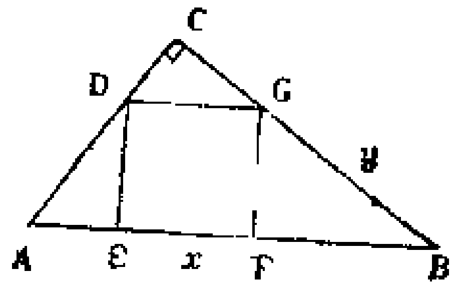


图 16—11

∴ 有 $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$，$\frac{x}{5}=\frac{4-y}{4}$，解得 $x=\frac{60}{37}<2$，故边长为 2 的正方形必不能被三边分别为 3、4、5 的三角形所覆盖。

7. 证：五个圆纸片面积为 5，而覆盖的总面积等于 3，据重迭原则，其中必有重迭。

假设命题结论不成立，则任意两个圆纸片的重迭部分面积都小于 $\frac{1}{5}$。把五张圆纸片分别编号为①、②、③、④、⑤。若②与①重迭部分面积小于 $\frac{1}{5}$，则②与①覆盖面积总和大于 $1+\frac{4}{5}$。若③与①、②每一个重迭部分面积都小于 $\frac{1}{5}$，则③与①、②重迭面积总计小于 $\frac{2}{5}$，∴ ③在①、②之外占据面积大于 $\frac{3}{5}$，则①、②、③覆盖面积总和大于 $1+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$。若④与①、②、③每一个重迭部分面积都小于 $\frac{1}{5}$，则④与①、②、③重迭面积总和小于 $\frac{3}{5}$。∴ ④在①、②、③之外占据面积大于 $\frac{2}{5}$，故①、②、③、④覆盖面积总和大于 $1+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$。若⑤与①、

②、③、④每一个重迭部分面积都小于$\frac{1}{5}$，则⑤与①、②、③、④重迭面积总计小于$\frac{4}{5}$。∴ ⑤在①、②、③、④之外占据面积大于$\frac{1}{5}$，故①、②、③、④、⑤覆盖面积总和大于$1+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=3$，与题设覆盖总面积等于3矛盾。故总有两张圆纸片重迭部份面积不小于$\frac{1}{5}$。

十七　趣味数学题举例

数学竞赛常有趣味性的问题，其形式和类型是新颖和有趣的，它能引起兴趣和考察应用知识的能力，同时也能锻炼思维的敏捷性和灵活性。这类问题涉及的数学知识比较多，解决的方法是特殊和智力、技巧性的，解这类题要仔细审题，认真分析题意，注意题中各量之间的关系，寻找解题的途径。

（一）　范例与方法

例 1　某机关组织 150 人去外地参观，这些人早 5 点钟才能出去，可是要赶乘火车，早 6 点55分必须到达车站。他们只有一辆大轿车，可乘 50 人，轿车每小时行驶 36 公里，机关离车站21公里。显然，所有路程都乘车，时间是来不及的，只能乘车和步行同时进行，如步行每小时走 4 公里，问应如何安排，使所有的人都能按时赶到火车站？

思路：把 150 人分成三批，每批 50 人，这些人合起来使大轿车行使 1 小时 55 分钟，每批人除坐车外，剩下路程则步行，所用时间也只能是 1 小时 55 分钟。

解：设每批人步行 x 小时，坐车 y 小时，

则有 $\begin{cases} x+y=\dfrac{115}{60} \\ 4x+36y=21, \end{cases}$　解得 $x=\dfrac{18}{12}$，$y=\dfrac{5}{12}$ 时，即步行 90 分钟，坐车 25 分钟，于是应该考虑第一批人坐车后步

行，大轿车中途折回接第二批人；第二批人应先步行后坐车，然后再步行，大轿车又中途折回接第三批人；第三批人应先步行，最后到达车站。

第一批人先坐车25分钟，然后步行90分钟到达车站；

第二批人先步行45分钟，然后坐车25分钟，再步行45分钟到达车站；

第三批人先步行90分钟，然后坐车25分钟到达车站。

例 2 某人到照相馆洗印照片x张，付$3y$元（x，y为正整数），他要走时，营业员告诉他说："你要再多洗10张的话，我就总共收你2元钱，这样相当于每洗一打（12张）你可节省8角钱。"求x,y。

思路： 根据题给条件，y只可能是1或2，再分别列出方程可求出x，y。

解： 若$y=1$，则有方程$12\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+10}\right)=0.8$，

化简得$x^2+25x-150=0$，$\therefore x_1=5,x_2=-30$（负值舍去）。

$\therefore x=5$，$y=1$。

若$y=2$，便有方程 $12\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x+10}\right)=0.8$，

$x^2+10x-300=0$，方程没有正整数解，故问题的解为$(x,y)=(5,1)$。

例 3 某煤矿某一年度产煤总量中，除每年以一定数量的煤作为民用、出口等非工业用途外，其余留作工业用煤，按照该年度某一工业城市的工业用煤总量为标准计算，可供这样的三个工业城用六年，四个这样的工业城市用五年（当然每

年都要除去非工业用煤的那一个定量）问如果只供这一个城市的工业用煤，可用多少年？

解一：设该煤矿本年度产煤总量为 x，每年非工业用煤定量为 y，该工业城市本年度工业用煤量为 z，并设只供这一个城市工业用煤可用 p 年。由题意得方程组

$$\begin{cases} x = 6\cdot(3z)+6y = 18z+6y & (1) \\ x = 5\cdot(4z)+5y = 20z+5y & (2) \\ p = \dfrac{x-py}{z}. & (3) \end{cases}$$

由（1）与（2）得 $y=2z$。（4）

从（1）、（3）、（4）三式消去 x、y、z，得 $p=30-2p$，故 $p=10$。

答：只供这一城市的工业用煤，可用10年。

解二：设该矿只按本年度该工业城市工业用煤总量供煤，而不供应非工业用煤，x 年用完该煤矿本年度所产的煤，而只按非工业用煤定量供煤，y 年可用完，依题意得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

解得 $x=30$，$y=15$，由此可知，如果只供应该城市的工业用煤，每年耗去该矿本年产量的 $\frac{1}{30}+\frac{1}{15}=\frac{1}{10}$，故按此法供煤可以用 $1\div\frac{1}{10}=10$（年）。

例 4 总重量为13.5吨的货物装在一批极轻的箱子里（箱子本身的重量可忽略不计），已知每个箱子所装货物都不超过350千克，证明：这批货物可用11辆载重量为1.5吨的汽车一次运完。

思路：如果仅由 $11\times1.5=16.5>13.5$，就认为结论正确，那就错了。因为货物是装箱的，每辆汽车不一定能满载。设计一种载运方案让每辆汽车尽可能多装货物，来证明本题。

解：按如下载运办法分装货物：第一辆汽车一直装到不超过1.5吨，但若再加一箱便超过1.5吨时为止，此时这辆汽车不能开走。再照此办理，为第2辆、第3辆、…汽车装货箱，直到第8辆装车，这时8辆汽车装货总重超过 $1.5\times8=12$（吨）。由于货物总重13.5吨，于是，余下的货物不足1.5吨，可把它全装在第9辆汽车上运走。

为了使前8辆汽车能开走，每辆汽车上应各取下一只箱子，一共取下8只箱子，每只箱子不超过350千克，4只箱子不超过 4×350（千克）$=1.4$（吨）。这样，剩下的2辆空车，各装4只箱子，就把全部箱子运走了。

例 5 一次数学竞赛出了 A、B、C 三道题目，25个学生每人至少能解出一道题目，在这些学生中不能解 A 而能解 B 的人数等于能解 C 的二倍；在能解 A 的学生中，至少还能解别的一题的人数比不能解别的题目的人数少一个，如果正好能解一道题目的学生之中，有一半不能解 A，问有多少学生正好能解出 B 这道题目？

解 用 $A,(AB),(ABC)$ 表示正好能解 A，A 与 B，A

与 B 与 C 的学生人数，则由问题的条件可以列出

$$A+B+C+(AB)+(BC)+(AC)+(ABC)=25 \quad (1)$$

$$B+(BC)=2(C+(BC)) \quad (2)$$

$$A-1=(AB)+(AC)+(ABC) \quad (3)$$

$$A+B+C=2(B+C) \quad (4)$$

其中 $A,B,C,(AB),(AC),(BC),(ABC)$ 当然都是非负整数。

由（1）和（3）得

$$2A+B+C+(BC)-1=25, \quad (5)$$

而（2）可写成 $(BC)=B-2C$， (6)

（4）可写成　$A=B+C$， (7)

由（4），（5），（6）得 $4B+C=26$，即 $C=26-4B$， (8)

代入（6）得 $(BC)=9B-52$ (9)

因为 $C\geqslant 0$，$(BC)\geqslant 0$，所以由（8）和（9）分别得

$$B\leqslant \frac{26}{4}=6\frac{1}{2}, \quad B\geqslant \frac{52}{9}=5\frac{7}{9}.$$

但 B 是整数，所以 $B=6$。

$B=6$ 这样的解是实际存在的，因为可解得

$A=8$，$B=6$，$C=2$，$(AB)=3$，$(AC)=2$，$(BC)=2$，$(ABC)=2$，都满足所列方程，所以，有 6 个学生正好能解出 B 这道题目。

例 6　副食商店里运到了大罐牛奶，售货员有一架缺少砝码的天平（在称盘中可以放牛奶瓶），并有 3 个一样的牛奶瓶，其中有两个是空的，另一个中盛有 1 千克牛奶，怎样才能在一个瓶中刚好装进 85 千克牛奶，而使用天平又不超过8

次？（假定牛奶瓶的容积超过85千克，又可按如下方式使天平：在天平的一端放上装有牛奶的瓶子，而在另一端放上空瓶，并往空瓶里注入牛奶使天平达到平衡）。

思路：先使两个空瓶都分别装入17千克牛奶，再将两瓶中的牛奶并入一瓶，盛为34千克，并使空着的瓶也装入34千克牛奶，这时三瓶分别装有34千克、34千克、17千克牛奶，再并入一瓶即是。

解：首先使用两次天平，使空着的两瓶都分别装入1千克牛奶。将其中的两瓶并入一瓶，成为2千克牛奶（这时不使用天平），第三次使用天平使空着的瓶子装进2千克牛奶，将其中两瓶分别装有2千克的并入一个瓶子使其装进4千克牛奶。第四次使用天平，使空着的瓶子装进4千克牛奶，将其中装4千克牛奶的两瓶并入一瓶使其装进3千克牛奶。第五次使用天平，使空着的瓶子装进16千克的牛奶，再将装16千克和1千克的两瓶并入1瓶，使其装进17千克牛奶，再使用两次天平，使得两个空着的瓶子都分别装进17千克牛奶，再将两瓶并入一瓶，成为34千克。最后一次使用天平，使刚才空出的瓶子也装进34千克牛奶，最终，只要将34千克、34千克、17千克牛奶并入一瓶就可以了。

【说明】 用类似的方法，可以在一个瓶内装入$(2^{n_1}+1)(2^{n_2}+1)\cdots(2^{n_k}+1)$千克牛奶，并只要使用
$N=(n_1+1)+\cdots+(n_k+1)$ 次天平，我们有 $85=(2^2+1)(2^4+1)$，及$N=8$。

例 7 原有雌雄各一的一对兔子，一月后生了一对雌雄各一的小兔子，这对小兔经过一个月就长成大兔，此后每

对大兔每月生一对雌雄各一的小兔，而每对小兔经过一个月又长成大兔，问半年后共繁殖成多少对兔子？

思路：利用递推关系法。

解：记 $a_0=1$ 表示原有的一对兔子。一个月后又生了一对小兔 $a_1=2$；第二个月后又生了一对小兔，$a_2=3$；第三个月后的兔子除了第二个月所有兔子外，又生了小兔，所生的小兔对数与第一个月的后兔子对数是对等的，因为正是这些兔子生的小兔，故 $a_3=a_2+a_1=3+2=5$，

同样，第四个月后的兔子对数除第三个月后的兔子a_3对外，还有本月生的小兔 a_2 对，故

$$a_4=a_3+a_2=5+3=8.$$

经上面的推算发现，第n个月的 a_n 对兔子由两部分组成，即第 $n-1$ 个月的 a_{n-1} 对兔子和本月生的小兔子，这些小兔是由第 $n-2$ 个月的 a_{n-2} 对兔子所生，故$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$。

根据上述递推关系式，我们可直接通过推算

$$a_5=a_4+a_3=8+5=13,$$

$$a_6=a_5+a_4=13+8=21.$$

知道半年后共繁殖成兔子 21 对。

【说明】 一般地，一列数 a_1，a_2，…，a_n，… 中第 n 项与它前面的若干项的关系称之为递推关系。利用递推关系解题是一种重要的数学方法。

例 8 某校初三有50人参加数学课外小组，有40人参加文学社，有26人参加校田径队，20人既参加数学课外小组又参加文学社，15人既参加文学社又参加校田径队，18人既参加数学课外小组又参加校田径队，有12人则三项活动都参加，

试问这个年级中数学课外小组、文学社、校田径队三项活动至少参加其中一项的学生有多少？

解：先计算有关各项的总人数

$50+40+26=116$（人）

其中因参加两项的学生被重复计算了一次，应排除。

$116-(20+15+18)=63$（人）

在上述计算过程中，三项都参加的学生被加了三次，又被减去了三次，实际上没有被计算进去，应予补上，故至少参加一项的学生有$63+12=75$（人）。

【说明】 上例采用包含——排除——包含——…交替进行，求得答案的思想方法，常被称着容斥原理。

例 9 有两种重量（设分别为 p 与 q 且 $p>q$）的球五个、涂红、白、黑三种颜色、其中，两个红球重量不同，两个白球重量也不同，一个黑球不知它的重量是 p 还是 q。由于外形上不能确定球的轻重，请你用一台无砝码的天平（只能比较轻重，不能称出具体重量）称两次，将5个球的轻重轻都区分出来，试叙述你的称球办法，并说明理由。

思路：用天平称球比较重量的结果，可用等号或不等号表示。

解：分别用 x_1 和 x_2 表示两个红球的重量，y_1 和 y_2 表示两个白球的重量，z 表示黑球重量。

将 x_1+z 与 x_2+y_1 通过天平进行比较（第一次称）结果可分成三种情况：

情况一　$x_1+z=x_2+y_1$，$\because x_1\neq x_2$，$\therefore z\neq y_1$。

将 z 与 y_1 用天平进行比较（第二次称），

当 $z>y_1$，得 $z=p, y_1=q, y_2=p, x_1=q, x_2=p$；

当 $z<y_1$，得 $z=q, y_1=p, y_2=q, x_1=p, x_2=q$。

（另解）也可以将 z 与 x_1 进行比较 $z=x_1$（不可能）。

当 $z>x_1$，得 $z=p, x_1=q, x_2=p, y_1=q, y_2=p$；

当 $z<x_1$，得 $z=q, x_1=p, x_2=q, y_1=p, y_2=q$。

情况二　$x_1+z>x_2+y_1$，此时必有$x_1>x_2$，即$x_1=p$，$x_2=q$（否则有 $x_1+z\leqslant p+q\leqslant x_2+y_1$），并且 $z\geqslant y_1$（否则有 $x_1+z=p+q=x_2+y_1$）。

现将 z 与 y_2 进行比较（第二次称）

当 $z>y_2$ 得 $z=p$，$y_1=p$，$y_2=q$；

当 $z=y_2$ 得 $z=p$，从 $z\geqslant y_1$，只能 $z=p$，$y_1=q, y_2=p$。

当 $z<y_2$，只能 $z=q, y=q, y_2=p$。

（另解）也可以将 x_1+x_2 与 y_1+z进行比较（第二次称）

当 $x_1+x_2>y_1+z$，得 $y=q, z=q, y_2=p$；

当 $x_1+x_2=y_1+z$，得 $y_1=q, z=p, y_2=p$；

当 $x_1+x_2<y_1+z$，得 $y_1=p, z=p, y_2=q$。

情况三，$x_1+z<x_2+y_1$，此时必有 $x_1<x_2$，即 $x_1=q, x_2=p$，并且 $z\leqslant y_1$。

将 z 与 y_2 比较（第二次称）

当 $z>y_2$，得 $z=p, y_1=p, y_2=q$；

当 $z=y_2$，得 $z=q, y_1=p, y_2=q$；

当 $z<y_2$，得 $z=q, y_1=q, y_2=p$。

例10　有一袋糖果随意分给10个小孩（每个至少分到一块）。证明：其中必有一些小孩所得的糖果数之和是10的倍数。

证： 设10个小孩分得的糖果数分别是$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$，并设

$s_1=x_1$，$s_2=x_1+x_2$，$s_3=x_1+x_2+x_3$，$\cdots$，$s_{10}=x_1+x_2+\cdots+x_{10}$。

用10分别除s_i，所得的商和余数分别记为q_i，r_i（$i=1,2,\cdots,10$），即$s_i=10q_i+r_i$（$0\leqslant r_i<10$，$i=1,2,\cdots,10$）。

$\because$ $r_1,\cdots,r_{10}$都是小于10的非负整数，$\therefore$或者有一个$r_i=0$，或者两个相同，此时不妨设$r_k=r_l$，$k>l$。

对第一种情形有

$x_1+x_2+\cdots+x_i=10q_i$，而$q_i\neq0$，否则$s_i=0$，与每个人至少分得一块相矛盾。

对第二种情况有

$x_{l+1}+\cdots+x_k=s_k-s_l=10(q_k-q_l)$，而$q_k\neq q_l$，否则$s_k=s_l$，与每人至少得一块相矛盾。

这两种情况都说明了必有一些小孩，他们分得的糖果数之和是10的倍数。

例11 有一水池池底有泉水不断涌出，要将满池的水抽干，用12台水泵需5小时，用10台水泵需7小时，问要在2小时抽干，至少需几台水泵（设每小时内，各水泵抽水量相同，涌出的水量也相同）。

解：设每台水泵每小时的抽水量为x，开始抽水时池中的水量为y，泉水每小时涌出的水量为z，2小时抽干满池的水至少需p台水泵，依题意，得下列关系

$$\begin{cases}5\cdot12x=y+5z & (1)\\ 7\cdot10x=y+7z & (2)\\ 2px\geqslant y+2z & (3)\end{cases}$$

将（1），（2）看作y，z的二元一次方程，解得$y=35x$，

$z=5x$。再代入(3)，得 $2px\geqslant 35x+10x=45x$. $\therefore p\geqslant 22.5$.
由于 p 是正整数，所以至少要23台水泵。

【说明】 本题是著名的牛顿的草地与母牛问题的一个特殊情形，牛顿在1707年提出了如下一个有趣的问题：a 头母牛将 b 块地上的牧草在 c 天内吃完；a_1 头母牛将 b_1 块地上的牧草在 c_1 天内吃完；a_2 头母牛将 b_2 块地上的牧草在 c_2 天内吃完。试求 a,b,c，a_1,b_1,c_1，a_2,b_2,c_2 这些数的关系（假设每块地上原有草量相同，每块地上每日长草量相同，每头母牛每日吃草量相同）。

设每块地上原有牧草为 x，每块地每日长草量为 y，每头牛每日吃草量为 z，则

$$\begin{cases} bx+cby=caz & (1)\\ b_1x+c_1b_1y=c_1a_1z & (2)\\ b_2x+c_2b_2y=c_2a_2z & (3)\end{cases}$$

由(1),(2) 解得 $x=\dfrac{cc_1(ab_1-ba_1)}{bb_1(c_1-c)}z$,

$$y=\frac{bc_1a_1-b_1ca}{bb_1(c_1-c)}z.$$

代入 (3)，再两边乘以 $bb_1(c_1-c)$，即得要求的关系

$$b_2cc_1(ab_1-ba_1)+c_2b_2(bc_1a_1-b_1ca)$$
$$=c_2a_2bb_1(c_1-c).$$

例12 有1991个球，甲、乙两人作取球比赛，规定是：两个人轮流取球，每人每次至少取1个球，最多取球数不得超过5个，取最后1个球者为失败者。

(1) 甲先取，如何取法才能获胜？

(2) 乙首先取 5 个球，甲如何取法才能获胜？

思路：用“凑六法”。(1) 从甲最后一次取时剩球的情况去分析甲的胜败。容易看出，甲最后一次取时，如果还剩 2 个或 3 个或 4 个或 5 个或 6 个球，则甲必胜。这是因为剩 2 个或 3 个或 4 个或 5 个或 6 个球时，甲取走 1 个或 2 个或 3 个或 4 个或 5 个，最后一个是乙取（乙败）。

(2) 思路同上。

解：(1) 用“凑六法”∵$1991-1=1990, 1990\div 6=331\cdots$余 4，∴甲先取 4 个球，以后不论乙取几个球(不超过 5 个)，甲跟着取的球数只要与乙取的球数之和为 6，最终迫使乙取最后一个球，甲保证获胜。

(2) 同理，∵$1991-1-5=1985$，而$1985\div 6=330\cdots$余 5，∴在乙首先取出 5 个球以后，甲第一次应当取 5 个球。以后再取，只要坚持与乙取的球数凑六，就可迫使乙取最后一个球，甲获胜是无疑的了。

例13 李、王、张三位老师，每人分别担任生物、物理、英语、体育、历史和数学这 6 科中的两门课程，现已知①物理老师和李老师是邻居；②李老师在教师中年龄最小；③张老师和生物老师，体育老师 3 人一起从学校回家；④生物教师比数学老师年龄要大一些；⑤在假日里，英语教师、数学教师与李老师喜欢打排球。试根据这些信息判定他们各负责哪两门课程。

解：应用容斥原理：

(1) 由③张老师不教生物，由④及②李老师不教生物，故王老师教生物。

（2）由⑤李老师不教数学，由④与①中结论，王老师不教数学，故张老师教数学。

（3）由⑤与②中结论，王老师教英语。

（4）由（1）及（3）中结论，王老师不教体育；由③张老师不教体育。所以，李老师教体育。

（5）由①李老师不教物理，故张老师教物理，剩下的一门历史课由李老师教。

综上所述，李老师教历史体育；王老师教英语、生物；张老师教物理、数学。

例14 一只狼被猎人赶进了一块边长为100米的等边三角形的林边凹地，现知这位猎人只要在离它不超过30米的距离上即可以将它杀死。证明：只要狼逃不出凹地，那么不论它在凹地中跑得多快，猎人都有办法将它杀死。

思路：猎人一旦占据等边三角形的中心之后，他到达三角形的三边的距离就都小于30米，此时狼就不能再由图10—1所示的3个部分中的一个窜向另一个，然后猎人只要朝着狼所在部分的顶点前进，即可将狼杀死。

解 设猎人占据等边三角形ABC凹地的中心O，不妨假设狼在图中三个部分的$AFOE$之中，已知$AB=AC=BC=100$米，现求OF，OE之长。$OE=OF=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times100=\frac{\sqrt{3}}{3}\times50\approx28.83$(米)

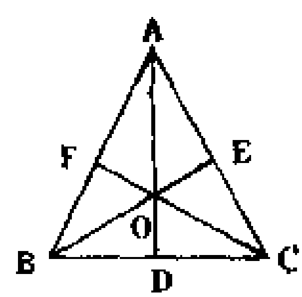


图 17—1

<30(米)。若猎人由O沿OA往前搜索，显而易见OA上的任意一点到AF、AE的距离却小于30米，故只要狼逃不出

凹地，无论它跑得多么快，猎人都有办法将它杀死。

（二） 练 习 题

1. 选择题

(1) 由甲乙两站分别同时对开第一辆电车后，每隔6分钟再同时对开一辆，假如电车是匀速前进的，需30分钟到达对方站，有一乘客乘坐从甲站开出的第一辆电车到乙站，那么这个乘客在途中遇到从乙站开来的电车有（　　）

(*A*) 4辆.(*B*) 5辆.(*C*) 6辆、(*D*) 10辆.

(2) 甲、乙、丙、丁、戊、己六个球队进行单循环赛（每个队分别与其他各队比赛一场且只比赛一场），当比赛到某一天时，统计出甲、乙、丙、丁、戊五个队分别已经比赛5、4、3、2、1场，由此可知，还没有与乙队比赛过一场的队是

（　　）

(*A*) 丙.(*B*) 丁.(*C*) 戊.(*D*) 己.

2. 填空题：某班共有学生75人，团员人数在男生中和女生中所占比例相同，又知男生中的非团员数恰好等于女生中的团员数，女生中团员比非团员多6人，全班有2/3的人参加了数学小组，参加数学小组的团员占团员总数的4/5，参加数学小组的女生比男生少8人，其中女团员有15人。现在请你回答（不要解题过程）这个班女生有____人，女生团员有____人；团员总数是____人；没有参加数学小组的男生非团员有____人。

3. 父亲想把36个苹果分给5个孩子，他把全部苹果的

一半分给儿子们，它们之间分得的一样多，他把另一半分给女儿们，他们之间分得也一样多．这样每个女儿比每个儿子多得3个苹果，父亲有几个儿子和女儿？

4．载着宇航员的轿车队以 v 千米/时的速度在大街上行进、轿车队的长总保持着 m 米，从一家窗口抛出来的一把花束落到了跟在车队后面的摩托车的车斗里，摩托车骑到了前头，把花束交给了坐在第一辆轿车上的一位宇航员，又立即返回．摩托车沿着运行的轿车队往返一次用了七分钟，如果摩托车在全程上的时速是不变的，试求它的速度．

5．某校初二年级 4 个班举行跳棋比赛，小刚猜想的结果是 3 班第一、2 班第二，1 班第三，4班第四；小华猜想的结果是 2 班第一，4 班第二，3 班第三，1班第四，结果只有小华猜对 4 班是第二名，请问这次竞赛的名次是怎样排列的（要求写出推理过程）．

6．一批旅游者决定分乘几辆大汽车，要使每车有同样的人数，起先每车乘 22 人，可是发现这时有一人坐不上车，若是开走一辆空车，则所有的旅游者刚好平均分乘余下的汽车，请说明原先有多少辆汽车和这批旅游者有多少人？（已知每辆车的坐位不多于32人）．

（三） 答案与提示

1．（1）B；（2）C．

2．30，18，45，10．

设男生中非团员为 x 人，则女生中团员亦为 x 人，女生

中非团员为 $(x-6)$ 人，再设男生中团员为 y 人，则有 $\frac{y}{x}=\frac{x}{x-6}$，即 $y=\frac{x^2}{x-6}$，而 $(x+y)+(x+x-6)=75$，所以

$x+\frac{x^2}{x-6}+2x-6=75$，解得 $x_1=18$，$x_2=6.75$（舍去），因此有女生数：$2x-6=30$（人），女生团员：$x=18$（人）。团员总数：$y+x=\frac{x^2}{x-6}+x=45$（人）。

参加数学小组的人数为 $75\times\frac{2}{3}=50$（人），

参加数学小组的团员数为 $45\times\frac{4}{5}=36$（人），

参加数学小组的男生数为 $(50+8)\div2=29$（人），

参加数学小组的男生团员数为 $36-15=21$（人），

参加数学小组的男生非团员数 $29-21=8$（人），

没有参加数学小组的男生非团员数为 $18-8=10$（人）。

3. 3 个儿子，2 人女儿。

4. $\frac{3m+\sqrt{9m^2+2500t^2v^2}}{50t}$ 千米/小时

5. 小刚猜 1 班第三，小华猜 1 班第四均错，而 4 班已知为第二，故 1 班为第一．小华猜 3 班第三错了，3 班只能为第四，所以 2 班第三，于是一、二、三、四名次依次为 1 班、4 班、2 班、3 班。

6. 设原有 x 辆汽车，最后每辆坐 k 个人，由已知有

$22x+1=k(x-1)$，$k=\frac{22x+1}{x-1}=\frac{22(x-1)+23}{x-1}$

$$=22+\frac{23}{x-1}.$$

$\because\ 22<k\leqslant 32$，$\therefore 1\leqslant\dfrac{23}{x-1}\leqslant 10$，且 23 被 $x-1$ 整除，

得 $x-1=23$，$x=24$，$k=23$，旅客数为$22\times 24+1=529$人。原有汽车 24 辆，旅客 529 人。

十八　记号[x]、{x}及其应用

（一）　基本原理

1．设$x\in R$，记$[x]$为表示不大于x的最大整数，称$[x]$为高斯符号。

记$\{x\}=x-[x]$为x的小数部分。

2．高斯符号的性质

（1）$[x]\leqslant x<[x]+1$或$x-1<[x]\leqslant x$。

（2）$x=[x]+\alpha$，$0\leqslant\alpha<1$（事实上，$\alpha=\{x\}$）。

（3）$[n+x]=n+[x]$　（n为整数，x为任何实数）。

（4）对任何实数x、y，若$x\leqslant y$，则$[x]\leqslant[y]$。

（5）对任何实数x、y，有$[x]+[y]\leqslant[x+y]$。

（二）　范例与方法

例1． 若x是实数，$[x]$表示不超过x的最大整数，求$\sum\limits_{n=1}^{10}[\log_2 n]$的值。

思路： 由高斯符号定义知，若$k\leqslant x<k+1$（k为整数），则$[x]=k$。∴欲求出原式的值，只需搞清n为何值时，$\log_2 n$为整数即可。

解： 由于$n=1$时，$\log_2 1=0$，∴$[\log_2 n]=0$。$n=2$，3时，$[\log_2 n]=1$。$n=4$、5、6、7时，$[\log_2 n]=2$。$n=8$、

9、…、15时，$[\log_2 n]=3$。$n=16$时，$[\log_2 n]=4$。

$\therefore$原式$=0+2+2\times4+3\times8+4=38$

【说明】1. 由于注意到了高斯符号的定义和对数值分布的特点，对1—16中的整数进行划分，即可。

2. 本题中的n的范围可以推广，对数的底数也可推广，使之具有一定的趣味性。

例2. 设a为$\frac{1}{3-\sqrt{5}}$的小数部分，求$\log_2 a(2a+1)$的值。

思路： 为确定a，首先确定$\frac{1}{3-\sqrt{5}}$是介于那两个整数之间，再用$\{x\}$的定义即可确定a，代入求值式即可。

解 $\because$ $\frac{1}{3-\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$，$\therefore$ $1<\frac{3+\sqrt{5}}{4}<2$，

$\therefore$ $a=\frac{3+\sqrt{5}}{4}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，

$\therefore$ $a(2a+1)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{1}{2}$。

$\therefore\log_2 a(2a+1)=\log_2\frac{1}{2}=-1$。

【说明】 本题在寻找$\frac{1}{3-\sqrt{5}}$介于何相邻整数之间时，采用的是放缩法。一般地使用该法的技巧是比较高的，在放、缩时，注意充分地分析已知条件的构成，掌握好放、缩的尺度。

例3 求所有这样的自然数n，使得$[\sqrt{n}]$能整除n。

思路： 由上题知，解题关键在于找到两个整数，使$\sqrt{n}$介

于它们之间，从而想到完全平方数，即设 $t^2 \leqslant n < (t+1)^2$ $(t \in N)$，以达到解题目的。

解：设 $t^2 \leqslant n < (t+1)^2$ $(t \in N)$，则 $t \leqslant \sqrt{n} < t+1$。

$\therefore$ $[\sqrt{n}] = t$。$\because$ $[\sqrt{n}]$能整除n，$\therefore$ n应是t的倍数，

$\therefore$ $n = t^2$，$n = t^2 + t$，$n = t^2 + 2t$ $(t \in N)$。

【说明】 由于本题抓住了高斯符号的特点，使之迅速找到n应介于的两整数，从而使问题得到解决。

例4 设 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$，求$f(x) = [2x] + [4x] + [6x] + [8x]$的值。

思路：注意到2、4、6、8这四个数的特点和以上题目的解答经验，想到将$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$划分为若干个小范围，使之在每个范围内$[2x]$，$[4x]$，$[6x]$，$[8x]$分别恰好为同一整数。

解：$0 \leqslant x < \frac{1}{8}$时，$f(x) = 0$。$\frac{1}{8} \leqslant x < \frac{1}{6}$时，$f(x) = 0 + 1 = 1$。$\frac{1}{6} \leqslant x < \frac{1}{4}$时，$f(x) = [6x] + [8x] = 1 + 1 = 2$。

$\frac{1}{4} \leqslant x < \frac{2}{6}$时，$f(x) = [4x] + [6x] + [8x] = 1 + 1 + 2 = 4$。

$\frac{2}{6} \leqslant x < \frac{3}{8}$时，$f(x) = [4x] + [6x] + [8x] = 1 + 2 + 2 = 5$。

$\frac{3}{8} \leqslant x < \frac{1}{2}$时，$f(x) = [4x] + [6x] + [8x] = 1 + 2 + 3 = 6$。

$x = \frac{1}{2}$时，$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$。

【说明】 以上4个题目是高斯符号应用中常见的四类划

分问题，它们从不同角度反映了进行划分时，各自的技巧，值得借鉴。

例5 若$\left[\frac{7+6x}{8}\right]$表示不大于$\frac{7+6x}{8}$的最大整数，解方程$\left[\frac{7+6x}{8}\right]-\frac{10x-7}{5}=0$

思路： ∵ $0\leqslant x-[x]<1$，∴ 可通过代换将方程（等式）改为在整数范围求解的不等式问题，再由得到的不等式的解，列关于x的方程，达到解题目的。

解： 设$t=\frac{10x-7}{5}$，则$x=\frac{5t+7}{10}$。此时原方程可化为$\left[\frac{15t+56}{40}\right]=t$。∴ $0\leqslant\frac{15t+56}{40}-t<1$，解之$\frac{16}{25}<t\leqslant\frac{56}{25}$

∴ $t=0$，$t=1$，$t=2$，∴ 方程解为$x_1=\frac{7}{10}$，$x_2=\frac{6}{5}$，$x_3=\frac{17}{10}$。

【说明】 解含高斯符号的方程的困难之处在于处理高斯符号，本题采用先求出高斯符号的值后，再将其转化为普通方程求解。

例6 求方程 $4x^2-40[x]+51=0$ 的解。

思路： 本题的思路与上题基本相同，但在求高斯符号值上有区别。这里采用的方法是求出x的范围，再求高斯符号值，最后解出x值。

解： 由$x-1<[x]\leqslant x$，得不等式组

$$\begin{cases}4x^2-40x+51\leqslant 0\\4x^2-40(x-1)+51>0.\end{cases}$$

解之 $\frac{3}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}$ 或 $\frac{13}{2} < x \leqslant \frac{17}{2}$，∴ $[x] = 1, 2, 3$，或

$[x] = 6, 7, 8$。当 $[x] = 1, 3$ 时，由原方程得 $x^2 = -\frac{11}{4}$，

$x^2 = \frac{69}{4}$ 不合题意（舍去）。当 $x = 6, 7, 8$ 或 2 时，由原方

程得 $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{189}$，$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{229}$，$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{269}$ 或

$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{29}$。经检验 $x = \frac{1}{2}\sqrt{189}$，$x = \frac{1}{2}\sqrt{289}$，

$x = \frac{1}{2}\sqrt{269}$ 及 $x = \frac{1}{2}\sqrt{29}$ 是原方程的根。

【说明】 以上两题提供的方法是解高斯符号方程的两个常见方法，它们的解答共性是先求出高斯符号值后，再将其转化为普通方程求解。

例7 若 n 是自然数，x 为实数，试证：$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$。

思路： 本题为多个高斯符号的问题，可采用高斯符号定义及性质实现符号的转化。

解一： 设 $m = \left[\frac{x}{n}\right]$，∴ $m \leqslant \frac{x}{n} < m + 1$。∴ $m \cdot n \leqslant x$

$< m \cdot n + n$，∴ $mn \leqslant [x] < m \cdot n + n$，即 $m \leqslant \frac{[x]}{n} < m + 1$。

∴ $\left[\frac{[x]}{n}\right] = m$，

即 $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$

解二： 设 $m=\left[\frac{[x]}{n}\right]$，则 $m\leqslant\frac{[x]}{n}<m+1$，

$\therefore\ mn[x]<mn+n$，$\therefore\ m\cdot n\leqslant x<m\cdot n+n$，

$\therefore\ m\leqslant\frac{x}{n}<m+1$，即 $\left[\frac{x}{n}\right]=m$。　$\therefore\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$。

【说明】 以上两个解法实质是相同的，都是运用高斯符号的定义和性质实现符号转化的，这种方法是处理高斯符号的一个较好的方法。

例8 求证 $\left[\frac{n}{k}\right]+\left[\frac{n+1}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{n+k-1}{k}\right]=n$（$k$、$n$ 为大于1的自然数，$n>k$）

思路： 通过设 $n=qk+r$（$0\leqslant r\leqslant K-1$），使得 $\frac{n}{k}=q+\frac{r}{k}$，从而将高斯符号去掉而化归为简单的求和问题。

解： 设 $n=qk+r$（q、r为整数，且$0\leqslant r\leqslant k-1$），

则 $\left[\frac{n}{k}\right]=\left[q+\frac{r}{k}\right]=q+\left[\frac{r}{k}\right]=q$，…，$\left[\frac{n+(k-r-1)}{k}\right]$

$=\left[\frac{qk+r+k-r-1}{k}\right]=\left[q+\frac{k-1}{k}\right]=q$，$\left[\frac{n+(k-r)}{k}\right]$

$=\left[\frac{qk+r+k-r}{k}\right]=q+1$，…，$\left[\frac{n+k-1}{k}\right]$

$=\left[\frac{qk+r+k-1}{k}\right]=\left[\frac{(q+1)k+r-1}{k}\right]=q+1$。

$\therefore$ 等式左边 $=(k-r)q+r(q+1)=kq+r=n$，

$\therefore$ 等式成立。

【说明】 本题的解答又提供了一个划分的方法，即带余除法。

例9 解不等式$[x]\{x\}<x-1$。

思路：本题可以说是含有三个未知量的不等式，因此处理这类问题的基本方法是减少未知量个数，注意到使用$x=[x]+\{x\}$及因式分解就可以了。

解：$\because$ $x=[x]+\{x\}$，$\therefore$ 原不等式化为$[x]\cdot\{x\}<[x]+\{x\}-1$，即$[x]\{x\}-[x]-\{x\}+1<0$，$\therefore$ $([x]-1)(\{x\}-1)<0$。$\because$ $\{x\}-1<0$，$\therefore$ $[x]-1>0$，
即$[x]>1$，$\therefore$ $x\geqslant 2$。

例10 对任何实数x、y，求证：$[2x]+[2y]\geqslant[x]+[x+y]+[y]$。

思路：由x、$[x]$、$\{x\}$的关系及高斯符号的性质，先将原不等式化简，再论证。

证：$\because$ $x=[x]+\{x\}$，$y=[y]+\{y\}$，

$\therefore$ $[2x]=2[x]+[2\{x\}]$，$[2y]=2[y]+[2\{y\}]$。

$\therefore$ 原不等式可化为 $[2\{x\}]+[2\{y\}]\geqslant[\{x\}+\{y\}]$。
不妨设 $\{x\}\leqslant\{y\}$，则$[2\{x\}]+[2\{y\}]\geqslant[2\{y\}]=[\{y\}+\{y\}]\geqslant[\{x\}+\{y\}]$。

【说明】 本题从不等式证明的角度，使用了x，$[x]$及$\{x\}$之间的关系及高斯符号的性质。

（三）练　习　题

1．设$a\in N$，求$[\sqrt{a^2+a+1}]$。

2. 设$a=\left[\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}\right]$，$b=\left\{\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}\right\}$。试求$a^2+(1+\sqrt{7})ab$的值。

3. 求$\left[1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{100}}\right]$。

4. 若$0<x<90$，求$f(x)=\left[\dfrac{x}{12.5}\right]\cdot\left[\dfrac{-12.5}{x}\right]$的值。

5. 解方程$\left[\dfrac{5+6x}{8}\right]=\dfrac{15x-7}{5}$。

6. 解方程$x^3-[x]=3$。

7. 若$x\geqslant 1$，求证$[\sqrt{[x]}]=[\sqrt{x}]$。

8. 试证：对于正整数m和n，则从1到m中，n的倍数有$\left[\dfrac{m}{n}\right]$个

（四） 答案与提示

1. ∵ $a<\sqrt{a^2+a+1}<a+1$，∴ 原式$=a$。

2. 原式$=10$。

3. ∵$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$，

∴ $19<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{100}}<200$，

∴ 原式$=19$。

4. $x<12.5$时，$\left[\dfrac{x}{12.5}\right]=0$。∴ $f(x)=0$。$x\geqslant 12.5$时，$\left[\dfrac{-12.5}{x}\right]=-1$，此时，$f(x)=-\left[\dfrac{x}{12.5}\right]$，

注意到 $12.5n \leqslant x < 12.5(n+1)$ 时，$\left[\frac{x}{12.5}\right]=n$，

$\therefore$ $f(x)=0$，-1，-2，…，-6。

5. $x_1=\frac{7}{15}$，$x_2=\frac{4}{5}$。

6. 设 $x=[x]+\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$，$\therefore$ $x=\sqrt[3]{4}$。

7. 设 $n^4 \leqslant x < (n+1)^4$ $(n \in N)$，即可证明。

8. 设 $m=bn+r$，$0 \leqslant r < m$，$b \geqslant 0$ 且 b 为整数，则从1到 m 中 n 的倍数有 b 个。另一方面，$\frac{m}{n}=b+\frac{r}{n}$，$\therefore \left[\frac{m}{n}\right]=b$。

$\therefore$ 原命题成立。

十九　简单枚举法

（一）基本原理

根据问题的要求，一一列举出问题的解答，或者为了解决问题的方便，把某个问题分为不重复、不遗漏的有限种情况，再将其一一列举予以解决，最终达到解决问题的目的，这种分析、解决问题的方法叫做枚举法。

（二）范例与方法

例1　今有长度为1，2，3，…，9的线段各一条，问从中选出若干条可组成多少个不同的正方形。

思路： 正方形的四条边是相等的，所以解本题的关键在于对取出的若干线段分成四类，使之各类的线段和相等，所以本题只需采用直接枚举法，依据边长的各种情况直接枚举即可解决。

解： $\because$　$1+2+3+\cdots+9=45$，而$\left[\dfrac{45}{4}\right]=11$，

$\therefore$　正方形的边长最多为11。

一一枚举知　$7=1+6=2+5=3+4$

$8=1+7=2+6=3+5$　　$9=1+8=2+7=4+5$

$1+9=2+8=3+7=4+6$　　$2+9=3+8=4+7=5+6$

边长为1，2，…，6的正方形不存在。

∴ 共有5个不同的正方形。

【说明】 本题抓住正方形的边长相等这一主要特点来展开枚举，从而得到答案。可见运用直接枚举法解题的关键在于通过分析，找出并抓住主要特点，并以此线索枚举展开从而得到解答。另外根据上述解答过程，略加思考即可找出枚举的规律，从而可将本问题进行推广并能得到相应的解答。

例2 一只青蛙在 a、b、c 三点之间跳动，若此青蛙从 a 点跳起，跳4次后仍回到 a 点，则此青蛙共有多少种不同的跳法。

思路： 青蛙的跳、落随着解答的深入，而变得复杂、多变。用直接枚举法解答就显得繁琐，所以本题采用树图枚举法，即借助于图论中的树图的思想来枚举出所有情形，从而达到解题目的。

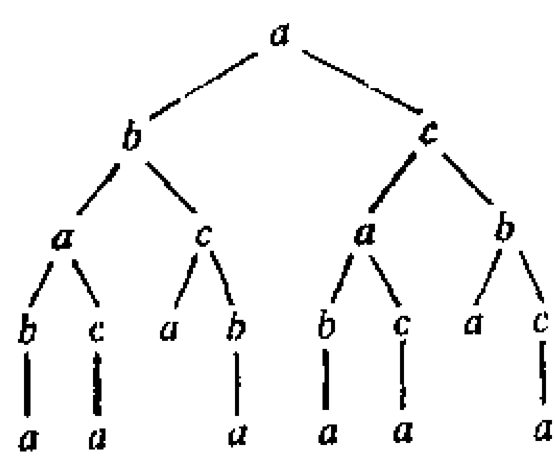


图 19—1

解： 由于青蛙在每点起跳必落在其余两点之一，故可画出左图19—1，从图中不难看出，此青蛙共有6种不同跳法。

【说明】 借助于树图枚举法解题形象直观，通俗易懂，方法简洁。

例3 某校举办数学竞赛，A、B、C、D、E五位同学获前五名，发奖前，老师让他们猜一猜各人的名次排列情况（无并列名次），A说：B第三名，C第五名。B说：D第四名，E第五名。C说：A第一名，E第四名。D说：C第一名，B第二名。E说：A第三名，D第四名。

老师说每个名次都有人猜对。则获得第四名的是谁。

思路 本题采用列表枚举法求解，即针对A、B、C、D、E所说的情况，设计一个表，通过这张表来枚举出各种情况，即可。

解：如图所示，若A第一名，由于B所在的列中有3、2，A在的列有1、3．因此若B第3名，则无第2名。若B第2名，则无第3名，矛盾。

名次 猜想	A	B	C	D	E
A		3	5		
B				5	4
C	1				4
D		2	1		
E	3			4	

若A第三名，由表知B第2名，C第1名，D第5名，E第4名

∴ 第四名是E。

【说明】 列表枚举法也比较直观，但关键在于构造出合适的表来，只有这样才能依据图表，使得枚举得以顺利进行。另外，本题是一道逻辑推理题，由上述解答过程可看出，本解法避免了繁琐的推理，同时也为我们编造这类逻辑推理的题目提供了一种方法。

例4 求不定方程$x+2y+3z=19$的正整数解的组数。

思路：用图形枚举法，即通过构造一个区域，使得该区

域内的整点数与方程组的解数建立起联系，从而只需枚举出区域内的整点即可解决问题。

解：原方程可变形为 $2y+3z=19-x$，

∵ $x\geqslant 1$，∴ $19-x\leqslant 18$，

即 $2y+3z\leqslant 18$。

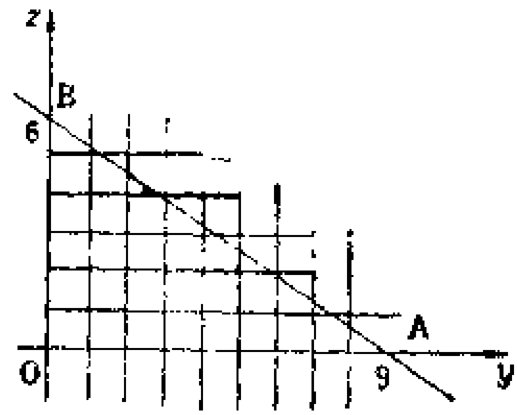


图 19—2

（如图19—2）在yoz平面内画出直线AB：$2y+3z=18$，则$\triangle AOB$内和线段AB上的整点数即是方程解的组数，

∵ 线段AB上有两整点，$\triangle AOB$内整点数为$1+2+4+5+7=19$。

∴ 整点共有23个，即方程有21组解。

【说明】 根据题目的代数条件，将其转化为几何语言，借助于图象或区域提供的几何条件，通过枚举达到解题的目的。另外，本题可推广为求方程的正整数解，非负整数解的组数及非负整数解等，运用上述方法仍可解决。

例5 设$N=\underbrace{11\cdots1}_{1990}$，试问$N$被7除余数为多少，并证明你的结论。

思路：这类问题是有其自身特点的，一般采用枚举归纳法求解比较合适，即借助于枚举的思想从特殊情况入手分析、探索、归纳出一般规律从而给出解答，所以按此方法只需用7除1，11，111，…即可找出规律。

证：$\because$ 7能整除$\underbrace{11\cdots1}_{6\text{个}}$，又$1990=6\times331+4$，

$\therefore$ $N=7k+1111$（k为整数），而1111被7除余数为5，$\therefore$ N被7除余数为5。

【说明】 枚举归纳法是解决数学竞赛题的一种很常见的思想和方法，它能考察学生归纳、发现、创造等能力，所以此法值得在数学竞赛培训中给予足够的重视。

例6 在平行四边形$ABCD$中，$\triangle ABD$为锐角三角形，$AB=a$，$AD=1$，且$\angle BAD=\theta$，若$a\leqslant\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$，则以$A$、$B$、$C$、$D$为圆心，1为半径的圆$K_A$，$K_B$，$K_C$，$K_D$能覆盖这个平行四边形。

思路：运用枚举法的思想将用圆覆盖平行四边形的问题，化简为用圆覆盖三角形的问题，又因为要使以三角形的顶点为圆心的三个圆能覆盖这个三角形，只需每个圆都能覆盖三角形外心即可。

证：先证圆K_A，K_B，K_D覆盖$\triangle ABD$。

（如图19—3）$\because$ $a\leqslant\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$，

$\therefore$ $\sqrt{3}\geqslant\dfrac{a-\cos\theta}{\sin\theta}$．设$M$是$\triangle ABD$外心，$AB$边上的高$DE$，则

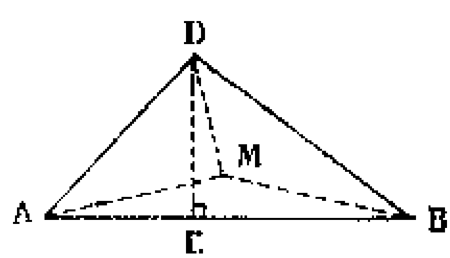


图 19—3

$$\frac{a-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{AB-AE}{DE}=\frac{BE}{DE}=\operatorname{ctg}\angle ABD.$$

故$\angle DMA=2\angle DBA\geqslant60^\circ$，即 $AD\geqslant AM$，

$\therefore$ $AM\leqslant1$。

∴ $\triangle ABD$能被圆K_A，K_B，K_C覆盖。

同理$\triangle ABC$也能被圆K_A，K_B，K_C覆盖。

∴ 圆K_A，K_B，K_C，K_D能覆盖平行四边形。

【说明】 本题是一覆盖问题，情况较复杂，但借助于枚举的思想，将题目结论进行分解而转化为覆盖三角形时，易于得到解答，可见枚举法的思想对指导解题是有益的。

例7 单位正方形边上任意两点之间连一曲线，如果它把这个正方形分成两个面积相等的部分，试证：这个曲线段的长度不小于1。

思路： 由已知借助于枚举的思想将所做出的曲线分成三类进行讨论。即曲线的端点在正方形的一组对边上，一组邻边上和同一条边上，再分别给出证明即可。

证： 设曲线长为l

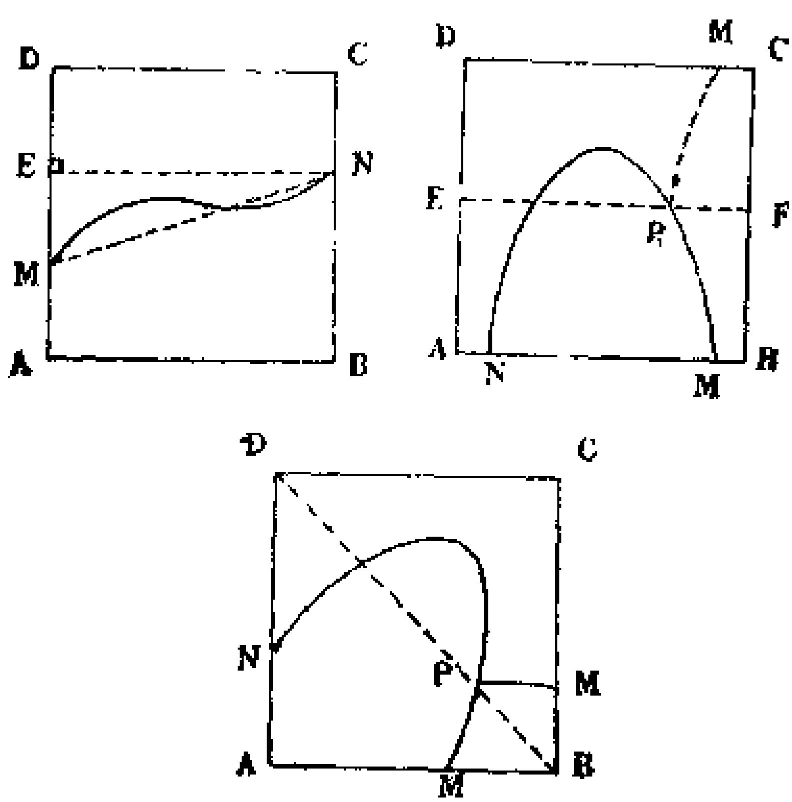


图 19—4

1. 若M、N在正方形的一组对边上（如图19—4(1)），连线段MN，做$EN//AB$交AD于E，则$l \geqslant MN \geqslant NE = 1$。

∴ 此时命题成立。

2. 若M、N在正方形的一条边上（如图19—4(2)），过AD、BC中点连线段EF，则由已知得EF必与曲线MN相交（否则与曲线MN分正方形两部分面积相等矛盾）。设一交点为P，过P做曲线MP关于EF对称的曲线，交DC于M'，由情形1知，曲线NPM'的长不小于1，又曲线MN的长与曲线NPM'的长相等，∴ $l \geqslant 1$，∴ 此时命题成立。

3. 若M、N在一组邻边上（如图19—4(3)），则由已知得对角线DB与曲线MN相交。设一交点为P，做曲线PM关于DB对称的曲线PM'交BC于M'，则曲线MN长与曲线NPM'长相等。由情形1知，曲线NPM'长不小于1，∴ $l \geqslant 1$，∴ 此时命题成立。

综上所述，命题成立。

【说明】 从上述解答过程来看，由于借助于枚举的思想，对该问题进行了分类讨论，从而将复杂的问题，分解为转简单的几种情况，然后针对每种情况给出解答，这是运用枚举思想对问题进行分类、讨论的一个较好的例子。

例8 证明：当n为自然数时，$2(2n+1)$形式的数不能表为两个整数的平方差。

思路： 由正难则反的解题策略知，本题用反证法来证明比较合适。

证： 若存在整数x，y，使$x^2 - y^2 = 2(2n+1)$，

∵ $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$，且$x+y$与$x-y$的奇偶

性相同，因此

若$x+y$为奇数，则$x-y$也是奇数.

$\therefore\quad x^2-y^2=(x+y)(x-y)$是奇数与$2(2n+1)$为偶数矛盾.

若$x+y$为偶数，则$x-y$也是偶数.

$\therefore\quad x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 为 4 的倍数，即 4 能整除$2(2n+1)$ ，即 2 能整除$2n+1$，矛盾.

综上所述，原命题成立.

【说明】 从上述解答可看出，枚举法在反证法中也可得到应用，事实上，反证法中的穷举法也就是枚举法.

（三） 练 习 题

1. 设m，n，c是实数，解不等式 $mx>c-nx$.

2. 4个配套的信及信封，若将每封信套入一个信封，则至少有一封套正的方法共有多少种.

3. 若参观团根据下列约束条件，从A、B、C、D、E五个地方选定参观地点.

(1) 若去A地，必去B地；(2) D、E两地至少去一地；

(3) B、C两地只去一地；(4) C、D两地都去或都不去；(5) 若去E地，A、D必去.

请你说明理由，该参观团最多能去哪几个地方.

4. 求不定方程$2x+3y+5z=20$的正整数解的组数.

5. 已知$\lg x$，$\lg\dfrac{10}{x}$的首数分别是m，n.试问，x为何值时，m^2-2n^2有最大值.

6. 证明：对任意正整数 K，$2k-1$ 和 $2k+1$ 两数中至少有一个不能等于两整数的平方和。

7. 自然数1，2，3，…1988，1989之和为一奇数，若将前七个数添上"－"号，判断这1989个数的代数和的奇偶性。

（四） 答案与提示

1. $m+n>0$ 时，$x>\frac{c}{m+n}$，$m+n<0$ 时，$x<\frac{c}{m+n}$。$m+n=0$ 时，$c\geqslant 0$，无解，$c<0$，x 为全体实数。

2. 一一枚举即可。答案为15种。

3. 运用讨论枚举或列表枚举均可。

答案为最多去 C、D 两地方。

4. 图象、区域枚举或直接枚举均可。

答案为共 4 组解。

5. 用枚举法，枚举出解题过程中 m、n 的可能取值即可。

答案为 m^2-2n^2 最大值为 2。

6. 用反证法，具体做法可参见例 8。

7. 通过枚举特殊情形，得到结论：若干整数的代数和的奇偶性相同。

∴本题结论为奇数。

二十 探索解题途径的几种常见策略

解题在数学竞赛中的重要地位是无可置疑的，而探索解题的途径又是解题的关键，特别对于有些题目，通常感到困难的不是读懂它的解答，而是搞不清楚这个解答是如何想出来的，就更谈不上独自如何去探索解题途径。为此介绍几种探索解题途径的策略，供读者借鉴。

（一） 特殊性策略

特殊性策略是指通过运用从特殊情况着手探索解题途径的思想方法指导解题的一种策略。

例1 试证 x^2-xy+y^2+x+y不能分解为两个一次因式的积。

思路：若对于特殊情况原式不能分解，则一般情况也不能分解，因此想到取特殊值，考虑其特殊情况。

证：取 $y=1$，则原式可化为x^2+2不能分解，

$\therefore$ x^2-xy+y^2+x+y 不能分解为两个一次因式之积。

【说明】 举反例来证明是初中数学教学中不常见的方法，本题的目的就是强调运用举反例来证题的重要性及简捷性。

例2 已知正数 a、b、c，A、B、C 满足条件：

$a+A=b+B=c+C=K$，求证 $aB+bC+cA<K^2$。

思路：考察特殊的三角形——正三角形，借助于三角形面积之间的关系证明结论成立。

证：如图（20—1）做边长为 K 的正三角形 PQR，分别在各边上取点 L、M、N，使得 $QL=A$，$LR=a$，$RM=B$，$MP=b$，$PN=C$，$NQ=c$。

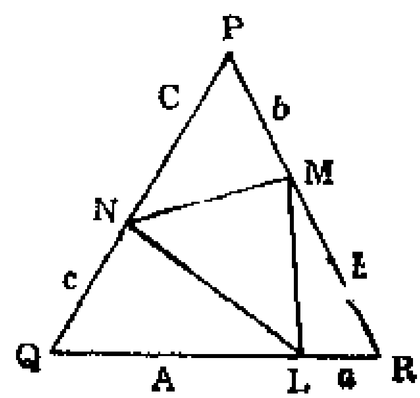


图 20—1

$\because$ $S_{\triangle LRM}+S_{\triangle NQL}+S_{\triangle MPN}<S_{\triangle PQR}$，

$\therefore$ $\frac{\sqrt{3}}{4}aB+\frac{\sqrt{3}}{4}bC+\frac{\sqrt{3}}{4}cA<\frac{\sqrt{3}}{4}K^2$，

$\therefore$ $aB+bC+cA<K^2$。

【说明】 本题考察特殊三角形，用面积之间的不等关系来求解的考虑是出于 $a+A=b+B=c+C=K$ 是一维的量（线段），而 $aB+bC+cA<K^2$ 是二维的量（面积）。

例3 证明方程 $x^3+y^3=z^2$ 有无穷多组正数解。

思路 先观察出一组特殊的正数解，再根据这组特殊解得出无穷多解。

证：$\because$ $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$ 是方程的一组解，又对于任意的

正数 d，$\begin{cases}x=d^2\\y=2d^2\\z=3d^3\end{cases}$ 也是方程组的解。

∴ 方程组有无穷多解。

【说明】 本题解答的特点是先就特殊情况来考虑，然后再将特殊情况予以推广，从而达到解题目的，这就是所谓的特殊尝试的方法。

（二） 构造性策略

构造性策略是指通过运用题目的条件，构造方程、图形、等式等来探索解题途径的思想方法。

例1. 已知 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，求 $\frac{x^3+x+1}{x^5}$的值。

思路：（构造等式）设 $y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则可得等式$xy=1$，$x-y=1$，代入求值式化简即可。

解： 原式 $=\frac{x^3+x+xy}{x^5}=\frac{x^2+1+y}{x^4}=\frac{x^2x-y+y}{x^4}$

$$=\frac{x+1}{x^3}=\frac{x+xy}{x^3}=\frac{1+y}{x^2}=\frac{x-y+y}{x^2}$$

$$=\frac{1}{x}=y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

【说明】（1）在构造等式时想到 $y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是基于平方差公式和“共轭”无理数的概念。

（2）从解答的情况看，由于多次使用等式 $xy=1$，$x-y=1$，使得求解过程简化。

例2. 已知矩形的对角线长为$\sqrt{10}$，两邻边a、b分别满

足$m^2+a^2m-12a=0$，$m^2+b^2m-12b=0$，求实数m和矩形的周长。

思路：由条件可构造二次方程，借助于韦达定理及勾股定理即可求解。

解：$a\neq b$时，原式可化为 $ma^2-12a+m^2=0$和$mb^2-12b+m^2=0$。∴ a、b是方程$mx^2-12x+m^2=0$的两根。

由韦达定理得 $\begin{cases} a+b=\dfrac{12}{m}, \\ ab=m. \end{cases}$ 又∵ $a^2+b^2=10$，得

$(a+b)^2-2ab=10$，∴ $\left(\dfrac{12}{m}\right)^2-2m=10$，即 $(m-3)$

$(m^2+8m+24)=0$。∵ $m^2+8m+24>0$，∴ $m=3$，$a+b=4$，∴ 矩形的周长为8，m值为3。

$a=b$时，由$a^2+b^2=10$得$a=b=\sqrt{5}$，

此时 $m=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-48\sqrt{5}}}{2}$，矩形周长为$4\sqrt{5}$。

【说明】 构造方程可从根的角度考虑，但要注意根的情况是否满足构造方程的要求，另外也可根据判别式等形式来构造方程。

例3。已知实数a、b、c、d、e满足条件：$a+b+c+d+e=8$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$。试确定e的最大值。

思路：以$a+b+c+d$，$a^2+b^2+c^2+d^2$及4为系数构造二次函数，考察判别式，可得到关于e的不等式，解此不等式可求得e的最值。

解：构造函数$f(x)=(a^2+b^2+c^2+d^2)+2(a+b+c+$

$d)x+4x^2$,

则 $f(x)=(x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2+(x+d)^2\geqslant 0$，对任何实数 x 都成立，∴由 $\Delta=4(a+b+c+d)^2-4\times 4(a^2+b^2+c^2+d^2)\leqslant 0$ 及 $a+b+c+d=8-e$，$a^2+b^2+c^2+d^2=16-e^2$ 得 $(8-e)^2-4(16-e^2)\leqslant 0$。

∴ $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$. ∴ e 的最大值为 $\frac{16}{5}$.

【说明】 构造函数是解题的一个基本策略，本题采用构造二次函数的基本思路，在于判别式中反映的是平方项与可改造为一次项之间的关系式，而题目中的条件也刚好是这样。

例4. 已知正数 x，y，z 满足条件

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25 \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=p \\ z^2+xz+x^2=16, \end{cases}$$

求 $xy+2yz+3xz$ 的值。

思路： 余弦定理的形式是 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. 这就使得我们对于二次式从几何角度考虑来构造三角形，本题根据题目条件，反用余弦定理构造三角形，再借助三角形面积关系即可求解。

解： 原方程可化为

$$\begin{cases} x^2-2x\dfrac{y}{\sqrt{3}}\cos 150^\circ+\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2=5^2 \\ \left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+z^2=3^2 \\ z^2-2zx\cos 120^\circ+x^2=4^2. \end{cases}$$

如图（12—2）构造三角形 ABC，则 $\triangle ABC$ 为直角三角形。

$\because \quad S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}x\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\sin150^\circ+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\cdot z+\frac{1}{2}x\cdot z\sin120^\circ,$

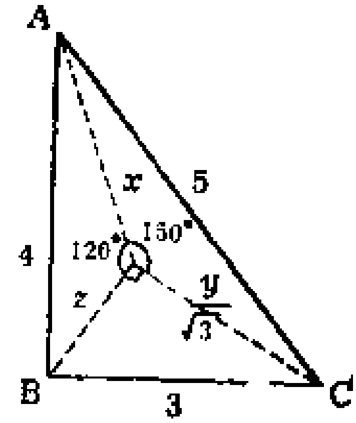


图 20—2

$\therefore \quad \frac{xy}{4\sqrt{3}}+\frac{yz}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{4}xz=6.$

$\therefore \quad xy+2yz+3xz=24\sqrt{3}.$

【说明】 由于本题根据余弦定理的形式，构造出一个三角形，避免解方程组等繁琐的计算，从而较简单地解决了问题。另外运用构造图形解题，除了注意几何量的代数表示的逆用外，还要注意将代数量视为几何量，例如正数a可视为某一线段长等。

（三） 无关性策略

无关性策略是指通过运用在不求出全部未知量的情况下，探索解题途径的思想方法。

例1. 若$x^2+ax+b=0$两根为α，β（$\alpha\beta\neq0$），求$bx^2+ax+1=0$的根。

思路： 注意系数关系，将方程$x^2+ax+b=0$变形为$1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}=0$，再对照结论即可解题。

解： 由于α、β是方程$x^2+ax+b=0$的根，

$\therefore\quad \alpha^2+a\alpha+b=0$，又$\alpha\neq0$，$\therefore b\dfrac{1}{\alpha^2}+a\dfrac{1}{\alpha}+1=0$。

$\therefore\quad \dfrac{1}{\alpha}$是方程$bx^2+ax+1=0$的根，同理$\dfrac{1}{\beta}$也是方程$bx^2+ax+1=0$的根。

$\therefore\quad$方程$bx^2+ax+1=0$的根为$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$。

【说明】 在本题的解答中，并没有求出a，b的值，而是运用方程根的定义求解，也就是说方程$bx^2+ax+1=0$的根的情况如何与a、b的值无关。

例2. 设a、b是两个不为零的实数，a^2、b^2是方程$x^2-cx+c=0$的两根，求 $a\sqrt{1-\dfrac{1}{b^2}}+b\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}$的值。

思路： 利用韦达定理消去c，建立a、b之间的关系式再将其代入所求式中即可求值。

解： 由韦达定理得 $\begin{cases}a^2+b^2=c\\a^2b^2=c,\end{cases}$消去$c$得$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$，

$$\therefore\quad 原式=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=\begin{cases}2 & a、b同为正数\\0 & a、b异号\\-2 & a、b同为负数。\end{cases}$$

【说明】 本题的结论与c无关，但通过c建立了a、b之间的关系式，为解题提供了方便。另外由以上两例可知，在解题过程中，并不一定需要把所有未知量都求出来才能解题，因为在有的题目中，有些未知量只起到解题过程中的桥梁作用或反映题目条件、结论的结构特点或性质，而题目的

结果与这些量的取值无关，所以对这样的量，我们在解题过程中无需也没有必要将其求出具体数值，这就是无关性策略的含意。

（四） 极端性策略

极端性策略是指通过运用在解题过程中考察图形、不等式、数值、变量等变化的极端状态来探索解题途径的思想方法。

例1. 设A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6是平面上的6点，其中任何三点不共线，如果这些点之间任意连接13条线段。

证明： 必存在4点，它的每两点之间都有线段连接。

思路： 先将6点两两相连的所有线段数与已知线段数作比较，再考虑各点连线的可能情况即可证明。

证： 6点两两相连可连出15条线段，由已知条件知这6个点中恰有两对点之间无线段相连（因为缺少两条线段）。

若这两对点有一公共点，不妨设为A_1与A_2，A_1与A_3之间无线段相连，则A_1、A_4、A_5、A_6这4点符合要求。

若这两对点无公共点，不妨设A_1与A_2，A_3与A_4之间无线段相连，则A_1、A_3、A_5、A_6符合要求。

综上所述，原命题成立。

【说明】 由于本题注意到了最多连出线段的数量，并将其与已知线段数量作比较，经过简单分析得到解答，使较繁琐的问题在探索解题途径的过程中得以简化。

例2. 设有n个实数满足$|x_i|<1(i=1, 2, \cdots, n)$，且$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=19+|x_1+x_2+\cdots+x_n|$。试确

定n的最小值。

思路：由条件知$n>19$，考察极端情况，即$n=20$时，是否存在x_i使得等式成立。

解：由于 $n>|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=19+|x_1+\cdots+x_n|\geqslant 19$，

$\therefore\quad n>19$，即$n\geqslant 20$。

考察$n=20$的情况，取$x_1=x_3=\cdots=x_{19}=0.95$，$x_2=x_4=\cdots=x_{20}=-0.95$，则有$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{20}|=20\times 0.95=19$。

$\therefore\quad n$的最小值为20。

【说明】 在$n\geqslant 20$时，本题运用$n=20$时，考察等式是否成立。另外在构造± 0.95时，又一次运用了极端性策略，即$|x_1+x_2+\cdots+x_{20}|=0$，$|x_1|=|x_2|=|x_3|=\cdots=|x_{20}|$，即$20|x_i|=19$。$\therefore\quad |x_i|=0.95$。由此可看出极端性策略在解题中的重要性。

（五） 整体性策略

整体性策略是指通过运用在解题过程中，舍弃个体的差异及复杂关系，从整体角度思考探索解题途径的思想方法。

例1．在数1，2，…，1989中添上“+”或“-”，并依次完成运算．试问可得到怎样的最小非负数。

思路：在1，2，…，1989中，有奇数个奇数，偶数个偶数，所以代数和为奇数，因此考察最小非负数为1是否可能。

解：在1，2，…，1989中有奇数个奇数，偶数个偶数，

∴ 代数和为奇数。∴ 最小非负数≥1。

又∵ $1=1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\cdots+(1986-1987-1988+1989)$，∴ 最小值为1。

【说明】 由于本题从整体角度来考虑代数和的奇偶性，从而为解题的探索提供了方便，减少了复杂的思考过程。

例2. 设 a、b、c、d、e、f、g 是一些非负实数，满足等式 $a+b+c+d+e+f+g=1$。

试求 $\max\{a+b+c,\ b+c+d,\ c+d+e,\ d+e+f,\ e+f+g\}$的最小可能值。

思路： 注意从整体使用条件，从整体考察结论即可求出最小值。

解： 设 $M=\max\{a+b+c,\ b+c+d,\ c+d+e,\ d+e+f,\ e+f+g\}$，

则 $M\geqslant\frac{1}{3}[(a+b+c)+c(c+d+e)+(e+f+g)]=\frac{1}{3}$

$[(a+b+c+d+e+f)+(c+e)]=\frac{1}{3}+\frac{c+e}{3}\geqslant\frac{1}{3}$。

∵ $a=d=g=\frac{1}{3}, b=c=e=f=0$ 时条件成立，且在

$M\geqslant\frac{1}{3}$ 中取等号。∴ M 的最小值为 $\frac{1}{3}$。

【说明】 由于本题运用整体性策略，舍弃的未知数较多，虽然结论较难不易着手分析不利因素，仍使解答较顺利进行，并很简捷。

例3. 已知100个数 a_1，a_2，…，a_{100} 满足条件：

$$\begin{cases} a_1-3a_2+2a_3\geqslant 0 \\ a_2-3a_3+2a_4\geqslant 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{99}-3a_{100}+2a_1\geqslant 0 \\ a_{100}-3a_1+2a_2\geqslant 0, \end{cases}$$ 求证：$a_1=a_2=\cdots=a_{100}$。

思路： 由于上述每个不等式都非负，∴ 从整体考察逐个相加可得和式$\geqslant 0$，由实数性质知各不等式取等号，再逐一代入即可。

证： 将上述100个不等式相加得$0\geqslant 0$，

∴ $$\begin{cases} a_1-a_2=2(a_2-a_3) \\ a_2-a_3=2(a_3-a_4) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{99}-a_{100}=2(a_{100}-a_1) \\ a_{100}-a_1=2(a_1-a_2), \end{cases}$$ 依次代入得

$a_1-a_2=2^{100}(a_1-a_2)$，

∴ $a_1=a_2$，从而可得$a_2=a_3$，…，$a_{99}=a_{100}$。

∴ $a_1=a_2=\cdots=a_{99}=a_{100}$。

【说明】 若从每个不等式着手解决，本题较困难，而从整体策略来探索却很简单，可见整体性策略在解题中的重要地位和作用。

（六）练 习 题

1．设方程组$\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ bx^2+cx+a=0 \\ cx^2+ax+b=0 \end{cases}$有解，求系数$a$、$b$、$c$之间的关系。

2. 计算 $\underbrace{99\cdots9}_{n个}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}+\underbrace{199\cdots9}_{n个}$。

3. 平面上有1990个点，其中任意两点的距离都不小于1，现将距离恰好等于1的每两点连成一条线段，试证这样的线段不会多于5970条。

4. 已知$\lg^2\frac{c}{a}-4\lg\frac{a}{b}\cdot\lg\frac{b}{c}=0$且$a\neq b$，求证 $b^2=ac$。

5. 已知P是正方形$ABCD$外接圆弧$\overset{\frown}{AD}$上异于A、D的任一点，求证 $PA+PC=\sqrt{2}PB$，$PA\cdot PC=PB^2-AB^2$。

6. 若变量x取任何整数时，$2a$、$a+b$与c都是整数，则二次三项式ax^2+bx+c总取整数值。

（七） 答案与提示

1. 根为$x=1$，$a+b+c=0$。

2. $(10^n-1)(10^n-1)+2\times10^n-1=10^{2n}$。

3. 略证 设与点A距离恰好是1的点有B_1，B_2，…，B_n，∵平面上已知点中任意两点距离都不小于1，∴$\angle B_1AB_2\geqslant60°$，$\angle B_2AB_3\geqslant60°$，…，$\angle B_{n-1}AB_n\geqslant60°$。

又 $360°=\angle B_1AB_2+\angle B_2AB_3+\cdots+\angle B_nAB_1\geqslant n60°$。∴ $n\leqslant6$。

又由正六边形可知距中心A点为1的点最多有6个，∴以A为端点，长为1的线段最多有6条，但每个点作为线段的两端点都重复计算一次。∴ 长度为1的线段最多不会多

于 $\frac{1990\times 6}{2}=5970$。

4. 略证 构造方程 $\left(\lg\frac{a}{b}\right)x^2+\left(\lg\frac{c}{a}\right)x+\lg\frac{b}{c}=0$，

由于方程系数之和为 $\lg\frac{a}{b}+\lg\frac{c}{a}+\lg\frac{b}{c}=0$，

$\therefore$ $x=1$ 是方程的根，又 $\triangle=\lg^2\frac{c}{a}-4\lg\frac{a}{b}\cdot\lg\frac{b}{c}=0$，

$\therefore$ 方程有等根，$\therefore$ $1=\dfrac{\lg\frac{b}{c}}{\lg\frac{a}{b}}$，即 $b^2=ac$，

5. 略证 连 BD，则 $\angle APB=\angle ADB=45°$。

在 $\triangle APB$ 中，由余弦定理得 $AB^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cos45°$，$\therefore$ $PA^2-\sqrt{2}PB\cdot PA+(PB^2-BA^2)=0$。

同理 在 $\triangle ABC$ 中有

$$PC^2-\sqrt{2}PB\cdot PC+(PB^2-BC^2)=0.$$

$\because$ $AB=BC$，$\therefore$ PA、PC 是方程

$$x^2-\sqrt{2}PBx+(PB^2-AB^2)=0\text{的两根。}$$

由韦达定理得 $PA+PC=\sqrt{2}PB\cdot PA$，

$$PA\cdot PC=PB^2-AB^2.$$

6. 略证 $y=ax^2-bx+c=2a\cdot\frac{x(x-1)}{2}+(a+b)x+c$，

$\because$ $2a$、$a+b$、x、$\frac{x(x-1)}{2}$、c 为整数，

$\therefore ax^2+bx+c$ 为整数。

二十一　选择题与选择题的解法

（一）选　择　题

选择题是近几年来，在我国各种类型考试的数学试卷中，经常出现的一种新颖、活泼、独特的题型。所谓选择题，其命题仍由条件与结论（或答案）两部分组成，不过结论中列举了若干个不同答案供受试者选择。一个选择题中，位于备选答案前的部分称为题干，每个备选答案称为选择支，选择支中不正确者称为干扰支。选择题可按选择支中正确支仅有一个与多个而分为一元选择题、多元选择题两大类。考试到当前国内、国际数学竞赛中基本上采用一元选择题型，因而这里只研究一元选择题的解法。

选择题与常规的“求证题”、“求解题”等相比有不少优点：

1. 覆盖面大，选择题题小量多，考察知识的覆盖面广，可以比较全面地考察学生的基本知识和基本技能。

2. 判断性强，为了考查学生对数学的基本概念、基本规律的掌握情况，计算的熟练程度，以及学生分辨是非、区分邻近概念的判断能力的强弱方面，让受试者的分析能力、判断能力在似是而非中接受考验并得到提高。这有利于培养学生思维的灵活性、敏捷性，提高他们的思维能力。

3. 测验的信度高。选择题不要求学生作详细解答，答卷快，阅卷简捷，评分标准划一，可以克服传统试题评卷时容易出现的主观因素的影响。其次是，由于覆盖面大，考生无法进行猜题与押题，因此考试的偶然性大大减少，可靠性大大提高。鉴于上述两点，采用选择题进行测验的效度与信度均较高。

4. 有利于数学人才的开发。一个较好的选择题往往不一定用常规解法，这就有利于考察学生灵活运用基本知识的能力、敏捷的逻辑思维能力及快速计算能力；可以避免把很多的时间花在书写表达上面，以便使他们在同样的时间内充分地发展其思维特长，去解决更多更难的题目。这样做可以充分考察学生思维的深度、广度和速度，发现才华出众的数学好苗。

正因为选择题具有以上几个突出特点，所以在数学和各类考试中越来越多的被采用。我国在标准化考试中，许多专家认为用大量的选择题，加上适量的主观性试题，将是命题改革的方向。

（二） 选择题的解法

怎样解选择题？选择题是数学命题的一种形式，它的解法仍保留着解答一般数学问题的思想和方法，但它毕竟有别于其他题型，因此它的解法又有其独特之处。下面着重介绍几种主要的解题方法。

1. 直接法

所谓直接法就是从所给条件出发，通过推理和计算，从

而得出正确的结论，然后再把此结论与选择支进行一一对照，选出正确答案。

例1．一个三角形的一边是2，这边上的中线为1，另两边之和为$1+\sqrt{3}$，那么这个三角形的面积为（　　）

（A）1．（B）$\frac{1}{2}\sqrt{3}$．（C）$\sqrt{3}$．（D）不能确定。

解　如图21—1$\triangle ABC$中，$AB=2$，中线$CD=1$，故$AD=DB=1$，故$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，则$\angle 2+\angle 3=\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4)=90^\circ$．依题意．设$AC=x$，$BC=y$，则$x^2+y^2=4, x+y=1+\sqrt{3}$．由此解出$x=1$，$y=\sqrt{3}$或$x=\sqrt{3}$，$y=1$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}xy=\frac{\sqrt{3}}{2}$．所以应选（B）．

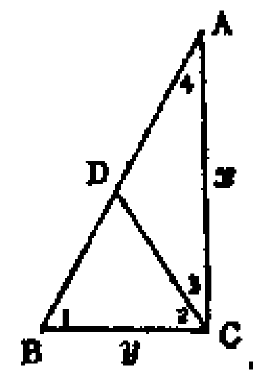


图　21—1

例2　记号$[x]$表示的不超过x的最大整数（例如$[\sqrt{5}]=2$）．设n是自然数，且$I=(n+1)^2+n-[\sqrt{(n+1)^2+n+1}]^2$，那么（　　）

（A）$I>0$．（B）$I<0$．（C）$I=0$．（D）当n取不同的值时，以上三种情况都可能出现。

解：$\because$　n是正整数，$\therefore$　有等式$[\sqrt{[(n+1)^2+n+1]}]^2=[\sqrt{(n+1)(n+2)}]^2=(n+1)^2$成立。

故有　$I=(n+1)^2+n-(n+1)^2=n>0$，$\therefore$　A正确。

例3　如图21—2，梯形$ABCD$的对角线相交于点O，设$\triangle OBC$，$\triangle OCD$，$\triangle ODA$及梯形$ABCD$的面积分别为

S_1，S_2，S_3，S，对于以下三结论：

①已知$S_1:S$，就可以求出$AD:BC$；

②已知（S_1+S_2）:S，就可求出$AD:BC$；

③已知$S_2:S$，就可求出$AD:BC$。

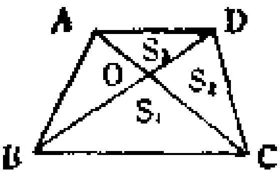


图 21—2

正确的认识是（　　）

（A）只有①是正确的。（B）只有②是正确的。

（C）只有①、②是正确的。（D）①、②、③都正确。

解　为了减轻计算量，充分利用选择支提供的信息，抓住“只有”二字，以③为突破口，一旦能确定③正确，即可肯定（D）正确。

$$\because \quad \frac{S_3}{S}=\frac{AD^2}{BC^2},\quad \frac{S_3}{S_2}=\frac{AO}{OC}=\frac{AD}{BC},\quad S_{\triangle ABO}=S_{\triangle DCO}=S_2,$$

$$\therefore \quad S_2^2=S_1\cdot S_3. \quad \because \quad S_1+2S_2+S_3=S, \quad \therefore \quad \frac{S_2^2}{S_3}+2S_2+S_3=S.$$

由$S_2:S$已知，即可求出$S_3:S_2$，进一步得$AD:BC$，故结论③正确，即可断言（D）正确。

【说明】 解题中务必要充分利用隐含条件。命题人通过干扰支而设置陷井，唯有发掘出若明若暗、含蓄不露的各种隐蔽条件，才能使题设条件进一步明朗、具体、完备，导致正确解题方向，摆脱掉入陷井的厄运。

例4　如果关于x的方程$mx^2-2(m+2)x+m+5=0$没有实数根，那么关于x的方程$(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$

的实根个数为（　　）

（A）2. （B）1. （C）0. （D）不确定.

解　因前一个方程没有实根，则其判别式$\triangle=4(m+2)^2-4m(m+5)<0$，解得$m>4$；后一个方程在$m>4$且$m\neq5$时，其判别式$\triangle=4(m+2)^2-4m(m-5)=36m+16>0$，有两个相异实根；而在$m=5$时，方程为一次方程，有一个实根，因而其实根个数不确定。

例5　把一矩形剪去一正方形，所剩矩形与原矩形相似，则原矩形长边与短边之比为（　　）

（A）$(1+\sqrt{5}):2$．（B）$3:2$．（C）$(1+\sqrt{3}):2$．

（D）$(1+\sqrt{6}):2$．

解：设原矩形长为x，宽为y，$x>y$，则剪去正方形后所剩矩形长为y，宽为$x-y$，所以有$\frac{x}{y}=\frac{y}{x-y}$，$x^2-xy=y^2$，$\left(\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{x}{y}\right)-1=0$，$\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）。故选（$A$）。

2．筛选法

它与直接法的最大区别在于不是直接、正面地解答选择题，而是利用题中的隐含条件，或已有的概念、性质、法则，对选择支中的干扰支进行逐个淘汰，最终达到选出正确答案的目的，对于某些进行直接推演困难或繁复的问题，使用此法容易奏效。

例6　如果三角形的三边a、b、c所对的角分别为A、B、

C，并且满足条件 $a\cos A + b\cos B = c\cos C$，那么这个三角是（　　）

(A) 等边三角形。 (B) 以 a 为斜边的直角三角形。

(C) 以 b 为斜边的直角三角形。

(D) 以上结论都不对。

解：由于题中的等式关于 a、A 及 b、B 是对称的，因此答案 (B) 对，答案 (C) 必对，反过来也如此。而这一对矛盾的结论同时成立是不可能的，这就把 (B)、(C) 都否定了。

再考虑答案 (A)，因为对于等边三角形，所给等式左边为2，右边为1，这是不可能的。

所以应选 (D)。

例7 四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 之长分别是1、9、8、6，对于下列命题：

①四边形 $ABCD$ 外切于圆；

②四边形 $ABCD$ 不内接于圆；

③对角线不互相垂直；

④$\angle ADC \geqslant 90^\circ$；

⑤$\triangle BCD$ 是等腰三角形。

正确的判断是（　　）

(A) ①、④真，②假。 (B) ③、⑤真，④假

(C) ③真，④、⑤假。 (D) ②、③假，④真。

解：$\because$ $AD + BC = 15$，$AB + CD = 9$，$\therefore$ $AD + BC \neq AB + CD$，命题①假，(A) 应被淘汰。

由于命题⑤在选择支 (B)、(C) 中得出相反判断，

故先研究⑤，若$\triangle BCD$是等腰三角形，则BD是8或9，此时$AB+AD<BD$，不可能，故⑤假，应淘汰（B）。又$AC<AB+BC=10$，$AD^2+CD^2=10^2$，知$\angle ADC<90°$，④假，于是（D）应淘汰，唯有选（C）。

例8 若甲说："乙、丙都说谎"。乙说"甲、丙都说谎"。丙说："甲、乙都说谎"。则下列命题中正确的是（　）

（A）三人都说谎。（B）三人都不说谎。

（C）三人中有且只有一人说谎。

（D）三人中有且只有一人不说谎。

解：三人中每个人都说另两人说谎，若某人说谎，则另两人中至少有一人不说谎，从而否定（A）；若某人不说谎，则另两人都说谎，这就否定了（B）；若只有一人（如甲）说谎，另二人（丙、乙）不说谎，但乙不说谎，又意味着丙说谎。由这一矛盾否定（C）。

所以应选（D）。

例9 两个质数p、q恰是整系数方程$x^2-99x+m=0$的两个根，那么$\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$的值是（　）

（A）9413。（B）$\frac{9413}{194}$。（C）$\frac{9413}{99}$。

（D）$\frac{9413}{97}$。

解：$\because$ $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=\frac{q^2+p^2}{pq}=\frac{(p+q)^2-2pq}{pq}$，$p$、$q$为质数，显然$(p+q)^2-2pq$与$pq$互质，又各选择支的分母经

分解依次为$|x|$，2×97，$3\times3\times11$，1×97。故(A)、(C)、(D)均不合要求，应淘汰，选择(B)。

3. 特殊值法

有的选择题，条件与结论之间的联系不明显，或题目本身就很抽象，给解题带来了困难。解这类题目常常用一些特殊值代替题目中抽象字母，或考察特殊情形、极端情形，从而作出正确判断的方法，我们常称之为特殊值法。这是一种应用很多，能导致快速简捷作出判断的有效方法。

例10 周长相同的正三角形，正方形，正六边形的面积分别为S_3、S_4、S_6，那么下列不等式成立的是（　　）

(A) $S_3>S_4>S_6$。 (B) $S_6>S_4>S_3$。

(C) $S_6>S_3>S_4$。 (D) $S_3>S_6>S_4$。

(E) $S_4>S_6>S_3$。

解：设它们的周长都是6，那么正三角形的边长为2，高为$\sqrt{3}$，$S_3=\sqrt{3}$；正方形的边长为$\frac{3}{2}$，$S_4=\frac{9}{4}$；正六边形的边长为1，边心距为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_6=6\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$。这样很容易得出正确的结论就是(B)。

例11. 若a、b、c为一个三角形的三条边长，则（　　）

(A)以a^2、b^2、c^2为长度的三条线段可作成一个三角形。

(B) 以$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$为长度的三条线段可作一个三角形。

(C) 以$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$为长度的三条线段可作一个三角

形。

(*D*) 以ka、lb、mc为长度的三条线段可作一个三角形。其中$k+l=m$，k、l、m为自然数。

解：当$a=3$，$b=4$，$c=5$时，$a^2+b^2=c^2$。则a^2，b^2，c^2为长度不可能作成一个三角形，(*A*) 应淘汰。又取$a=b=2$，$c=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$，应被淘汰 (*C*)。再若取

$a=3$，$b=4$，$c=5$，$k=3$，$l=4$，那么$m=7$，有$ka+lb=9+16<35=mc$，(*D*) 也应被淘汰。综上应选择 (*B*)。

例12 对每个大于1的奇数k，有（ ）。

(*A*) $(k-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}-1$可被$k-2$整除。

(*B*) $(k-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}+1$可被$k$整除。

(*C*) $(k-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}$可被k整除。

(*D*) $(k-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}+1$可被$k+1$整除。

(*E*) $(k-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}-1$可被$k-1$整除。

解：先取特殊值$k=3$，则

$(k-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}-1=1$，$k-2=1$；

$(k-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}+1=3$，$k=3$；

$(k-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}=2$，$k=3$；

$(k-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}+1=3$，$k+1=k$；

$(k-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}-1=1$，$k-1=2$。

由此，(*C*)、(*D*)、(*E*) 被淘汰。再取$k=5$，可将(*B*)

淘汰。因而选择（A）。

4．逆推法

假设题中给出的某一结论成立，逐步逆推回去，考察是否推出已知条件，从而可作出此结论正确与否的判断。此法我们称作逆推法。

例13 一个凸多边形，除了一个内角外，其余各内角的和为2750°，则这一内角是（　　）

（A）105°．（B）120°．（C）130°．（D）140°．

解：凸多边形内角和应为180°的倍数，将105°、120°、140°分别与2750°相加，其和均不是180°的倍数，故可将（A）、（B）、（D）淘汰，应选择（C）．

例14 设a、b、c、d、m、n都是正数，$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$，那么（　　）

（A）$P\leqslant Q$．（B）$P\geqslant Q$．（C）$P>Q$．（D）不确定．

解：设$P\mathrm{V}Q$（"V"表"≥"或"≤"），则有

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\ \mathrm{V}\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}.\quad ①$$

$\because$ a、c、d、m、$n\in R^+$，$\therefore$ ①式两边均为正数，两边平方，得$ab+2\sqrt{abcd}+cd\,\mathrm{V}\,ab+\frac{nbc}{m}+\frac{mad}{n}+cd$，得

$$2\sqrt{abcd}\ \mathrm{V}\frac{nbc}{m}+\frac{mad}{n}.$$

但 $\frac{nbc}{m}+\frac{mad}{n}\geqslant2\sqrt{\frac{nbc}{m}\cdot\frac{mad}{n}}=2\sqrt{abcd}$.

因此①式中"V"应取"≤"，故选择（A）．

5. 验证法

有的选择题，运用直接法比较麻烦，运用筛选法等也有困难，但如果对选择支一一代入题设中去验证，倒可以简捷的选出正确答案，这种解法类似于解方程的验根，故称验证法。

例15 已知方程$4x^2-2(m+1)x+m=0$的两根恰为一个直角三角形的两个锐角的余弦，则m的值是（　　）

(A) $\sqrt{2}$。 (B) $\sqrt{3}$。 (C) 1。 (D) 2。

解： $\because$ $\triangle=4(m+1)^2-16m=4(m-1)^2$，

$$\therefore\quad x=\frac{2(m+1)\pm2(m-1)}{8}=\frac{m+1\pm(m-1)}{4},$$

故 $x_1=\frac{m}{2}$， $x_2=\frac{1}{2}$。

把（A）代入，$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$，$\because$ $x_1^2+x_2^2\neq1$，故应淘汰；把（B）代入，满足$x_1^2+x_2^2=1$，故应选（B）。

例16 设 $x=1+\frac{1}{y}$， $y=1+\frac{1}{x}$，其中x、y均不为0，那么y等于（　　）

(A) $x+1$。 (B) $1-x$。 (C) $1+x$。 (D) $-x$。 (E) x。

解： 从观察分析，显见将x代入已知条件能满足题意，所以应选（E）。

例17 不满足方程$85x-324y=101$的一组整数是（　　）

(A) $x=329$，$y=86$。 (B) $x=653$，$y=171$。

(C) $x=978$，$y=256$． (D) $x=1301$，$y=34$．

解：给出的四组数字都很大，逐一代入（肯定会有三组满足方程）计算量较大．可考虑用奇偶性分析方法．由于$324y$是偶数，101是奇数，故满足方程的x必使$85x$为奇数，即x是奇数．或者说，当x是偶数时，必不满足方程．经观察，只有（C）中的x是偶数，故选（C）．

对这类题，有时还可以利用末位数分析．把（C）中的x、y代入方程的右边所得数的末位数是6，而右端的末位数是1，故选（C）．

6．图解法

有些选择题的推理、计算比较复杂，但问题又可以画出图形或图象，利用图形的直观性，对各选择支的正确与否作出判断．

例18．方程$|x-|2x+1||=3$的相异实数根是（　　）

（A）1个．（B）2个．（C）4个．（D）不存在．

解：利用绝对值的几何意义，分别作函数$y=x$与$y=|2x+1|$的图象，观察图象即知，在垂直x轴的铅直方向上，恰存在两对相距为3的点，故应选择（B）．

例19　一个三角形中，有一条边是另一条边的二倍，并且有一个角是30°，那么这个三角形是（　　）

（A）直角三角形．（B）钝角三角形．

（C）锐角三角形．（D）以上结论都不对．

解：根据题设条件画出下列图形，即可判定（D）是正确的．

设三角形的三边长分别为a，$2a$，b，根据30°角所对边

可画出图21—3（1），（2），（3）三种情况，（1）是直角

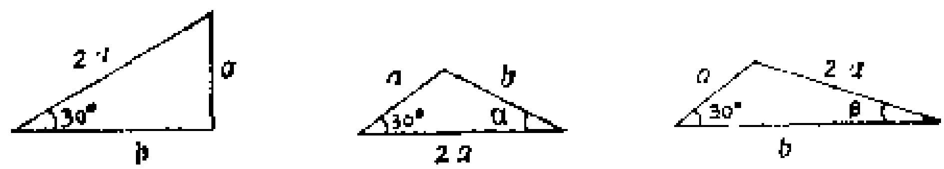


图 21—3

形；（2）是钝角三角形（$\because\ a+b>2a, b>a$，$\therefore \alpha<30°$）；（3）是钝角三角形（$\because \beta<30°$）。故立即断定应选（D）。

（三） 解选择题常见错误举例

1. 考查条件不全面，以偏概全，使解答遗漏从而产生错误。

（1）遗漏部分已知条件而产生错误，

例1 已知方程$|x|=ax+1$有一个负根而且没有正根，那么a的取值范围是（　　）

（A）$a>-1$。（B）$a=1$。（C）$a\geqslant1$。（D）非上述答案。

设解，方程有一负根，设$x<0$，则$-x=ax+1$，

$-(a+1)x=1$。　$\therefore x=-\dfrac{1}{a+1}<0$。$\therefore a+1>0$，

$\therefore a>-1$。故选择（A）。

简析 忽视了题给条件"方程而且没有正根"。若$x>0$，则$x=ax+1$，　$x=\dfrac{1}{1-a}>0$。$\therefore 1-a>0$，$a<1$。

$\because$ 方程没有正根。$\therefore$ $a<1$不成立，则$a\geqslant1$。

综合前解，$a\leqslant1$。故应选择（C）。

(2) 没有舍去不符合题设条件的解答而产生错误。

例2 已知A $(a, 3)$，B $(-1, a)$，O $(0, 0)$，且$\angle AOB = 60^{\circ}$，则a的值等于（ ）

（A）$\sqrt{3}$．（B）$-\sqrt{3}$．（C）$\pm\sqrt{3}$，（D）非上述答案。

误解：如图21—4，$OA = \sqrt{a^2 + 3^2}$，$OB = \sqrt{(-1)^2 + a^2}$，$AB = \sqrt{(a+1)^2 + (3-a)^2}$。由余弦定理$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 60^{\circ}$，

即 $(a+1)^2 + (3-a)^2 = a^2 + 9 + 1 + a^2 - 2\sqrt{a^2 + 9}$

$\times \sqrt{a^2 + 1} \cdot \frac{1}{2}$，整理得 $a^4 - 6a^2 + 9 = 0$，$(a^2 - 3)^2$

$= 0$。$\therefore$ $a^2 - 3 = 0$，$a = \pm\sqrt{3}$，故选择（C）。

简析 当$a = -\sqrt{3}$时，作AM、BN分别垂直x轴于M、N（图21—5），易知$\angle AOM = \angle BON = 60^{\circ}$，

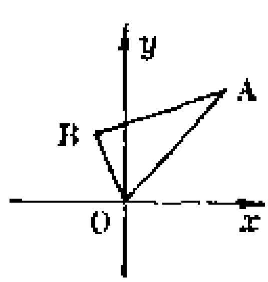


图 21—4

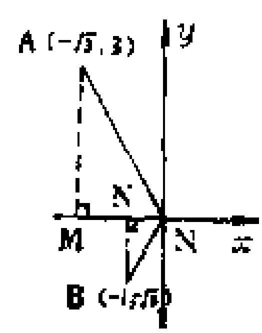


图 21—5

$\therefore \angle AOB = 60^{\circ} + 60^{\circ} = 120^{\circ}$，不合题意，故不能选择（$A$）。

2．考察选择支不全面从而产生错误

(1) 忽视选择支“非上述答案”产生错误。

例3 已知只有一个x的值满足方程 $(1 - \lg^2 a)x^2 + (3 + \lg a)x + 2 = 0$，则实数$a$等于（ ）

$(A)\ \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$。 (B) 10。 $(C)\ \frac{1}{10}$。(D)非上述答案。

误解：用代入法，从简单数据代入开始，若 $a=10$，则方程化为 $4x+2=0$，$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 有一解，故选择 (B)。

简析 忽视了选择支"(D) 非上述答案"，有两种可能：①前述答案均不正确，②有两个答案正确，另一个答案不正确，这时均需继续验证 (A)、(C)。

若 $a=\frac{1}{10}$，则方程化为 $2x+2=0$。$\therefore x=-1$ 有一解。

若将 $a=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ 代入方程也有一解。 $x=-\frac{3}{2}$。

故应选择 (D)。

(2) 忽视选择支表示方法的多样性而产生的错误。

例4 已知 $\log_x a=a$（$a>1$ 且 a 为整数），则 x 的值为（　　）

$(A)\ 10^{a\lg a}$。 $(B)\ 10^{\frac{\lg a}{a^2}}$。 $(C)\ 10^{\frac{\lg a}{a}}$。$(D)$ 非上述答案。

误解：$\because$ $\log_x a=a$，$\therefore x^a=a$，$\therefore x=a^{\frac{1}{a}}$，非 (A)、(B)、(C)。故选择 (D)。

简析 其实 $10^{\frac{\lg a}{a}}=10^{\lg a^{\frac{1}{a}}}=a^{\frac{1}{a}}$。故应选择 (C)。产生错误的原因是由于忽视了选择支与解答可以互相进行恒等变形，一般地说若选择支不是最简形式，可以将其化简，解答也需化为最简形式，以免误判。

此题，由（A）、（B）、（C）均为以10为底，故解答时应取以10为底的对数。如下解：

$\log_x a = a$（$a>1$且a为整数），$\therefore x^a = a$。两边取常用对数，$\lg x^a = \lg a$，$\therefore x^a = 10^{\lg a}$。故 $x = (10^{\lg a})^{\frac{1}{a}} = 10^{\frac{\lg a}{a}}$。故选择（$C$）。

3. 观察图形或画图片面而产生错误

（1）观察图形片面产生错误。

例5 如图21—6，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB=7$，$AD=2$，$BC=3$，如果边 AB 上的点 P 使得以 P、A、D 为顶点的三角形和以 P、B、C 为顶点的三角形相似，那么这样的点 P 有（　　）

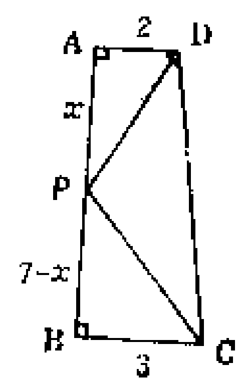


图　21—6

（A）1个。（B）2个。（C）3个。（D）4个。

误解：设 $AP=x$，$PB=7-x$，由 Rt△PAD∽Rt△CBP 有 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{2}{7-x}$。整理得　$x^2-7x+6=0$。解得 $x_1=1$，$x_2=6$。

∴　满足条件的 P 点有2个，故选择（B）。

简析　遗漏了 Rt△PAD∽△tR△PBC 的情况，此时，$\dfrac{x}{7-x}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore x=\dfrac{14}{5}<7$ 也符合条件。

故满足条件的 P 点有3个。故应选择（C）。

（2）画图片面产生错误。

例6 已知平面直角坐标系内一点 $M(x,y)$ 到原点 $O(0,0)$ 和定点 $A(-2,0)$ 的距离分别为2和 $2\sqrt{3}$，则满足条件

的直线 AM 的方程为（　　）

(A) $x+\sqrt{3}y+2=0$。

(B) $x-\sqrt{3}y+2=0$。

(C) $x\pm\sqrt{3}y+2=0$。

(D) $\sqrt{3}x\pm y+2=0$。

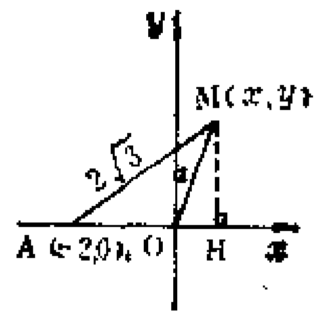


图21—7

误解：如图21—7，作$MH\perp OX$轴于H。由题意$MO=2$，$MA=2\sqrt{3}$。根据余弦定理：

$$\cos\angle AOM=\frac{AO^2+MO^2-AM^2}{2AO\cdot MO}$$

$$=\frac{2^2+2^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot2\cdot2}=-\frac{1}{2}。$$

∴ $\angle AOM=120°$，$\angle MOH=60°$。设直线AM的方程为$y=kx+b$，直线过$A(-2,0)$，$M(1,\sqrt{3})$。

∴ $\begin{cases}-2k+b=0\\k+b=\sqrt{3}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$。∴直线$AM$方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，即$x-\sqrt{3}y+2=0$，故选择（B）。

简析　解答是片面的，由对称性易知$M'(1,-\sqrt{3})$也满足题设条件，解答遗漏了$x+\sqrt{3}y+2=0$，应选择（C）。

上述解法并不足取，根据两点间距离公式

$$\begin{cases}x^2+y^2=2^2\\(x+2)^2+y^2=(2\sqrt{3})^2\end{cases},$$

可解得$x=1$，$y=\pm\sqrt{3}$，∴M点坐标为$(1,\pm\sqrt{3})$，

因此直线AM有两条，相应方程有两个．将（1，$\pm\sqrt{3}$）代入（C）．适合，故选择（C）．

（四）练　习　题

1． 若实数x满足方程，$|1-x|=1+|x|$，那么$\sqrt{(x-1)^2}$等于（　　）

（A）1．（B）$-(x+1)$．（C）$x-1$．（D）$1-x$．

2． 一个六位数$a19886$能被12整除，这样的六位数共有（　　）个

（A）9．（B）12．（C）5．（D）20．

3． 如果$a<b$，那么$\sqrt{-(x+a)^3(x+b)}$等于（　　）

（A）$(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$．

（B）$(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$．

（C）$-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$．

（D）$-(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$．

4． 在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=120°$，P是$\angle ABC$内一点，证$S=PA+PB+PC$，$T=AB+AC$，则（　　）

（A）$S<T$．（B）$S>T$．（C）$S=T$．（D）S，T的大小关系不能确定．

5． 若$a=(-1989)^{-1990}$，$b=-1989^{1990}$，$c=-1989^{-1990}$．那么，a、b、c的大小关系是（　　）

（A）$a=b=c$．（B）$a>b=c$．（C）$a>b>c$．

（D）$b<c<a$．

6． 在三角形内（不在边上）有3个点，连同原三角形的3个顶点，共有6个点．以这6个点为顶点作出所有不

重迭的三角形，如果这6个点中没有三点共线，所作三角形的个数为n_0；如果这6个点中有三点共线(但无四点共线)，所作三角形的个数为n_1；如果这6个点中有四点共线，所作三角形的个数为n_2，那么（　　）

(A) $n_0=n_1=n_2$。　　(B) $n_0>n_1>n_2$。

(C) $n_0>n_1\geqslant n_2$。　　(D) $n_0\geqslant n_1>n_2$。

7. 一个一元二次方程的两个根α、β适合关系式$\frac{1+\beta}{2+\beta}=-\frac{1}{\alpha}$和$\frac{\alpha\beta^2+121}{1-\alpha^2\beta}=1$，则这个一元二次方程是（　　）

(A) $x^2+12x-10=0$或$x^2-10x+12=0$。

(B) $x^2+10x+12=0$或$x^2-12x+10=0$。

(C) $x^2+12x+10=0$或$x^2-10x-12=0$。

(D) $x^2+10x-12=0$或$x^2-12x-10=0$。

8. 平面上给定不共线的三点A、B、C，在平面上作直线l，使点A、B、C到直线l的距离之比为1:1:2或1:2:1或2:1:1，则这样的直线的条数是（　　）

(A) 3条。(B) 6条。(C) 9条。(D) 12条。(E) 15条。

9. 如图21—8，点E、F分别是平行四边形$ABCD$边AB、BC的中点，记图中阴影部分的面积和为S_1，非阴影部分三个三角形面积和为S_2。那么$S_1:S_2$等于（　　）

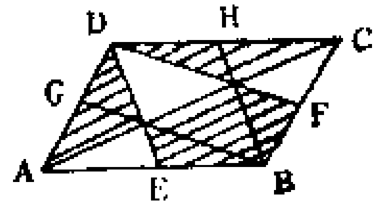


图　21—8

(A) 1:1。(B) 3:2。(C) 2:1。(D) $AB:BC$。

提示：如图20—8，添辅助线，其中G、H是AD、DC边的中点。平行四边形被分成12个等积小三角形，阴影部分占8个。

10．不等式$|x^2-2|>|x|$的解集是（　　）

（A）$-2<x<2$。（B）$x<-2$或$x>2$。

（C）全体实数。　（D）某条长为$2\sqrt{2}$的线段（不包括端点）。

11．已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象，如图21—9，则下列6个代数式，ab，ac，$a+b+c$，$a-b+c$，$2a+b$，$2a-b$中，其值为正的式子个数为（　　）

（A）2个。（B）3个。（C）4个。（D）4个以上。

12．如图21—10，圆与三角ABC的三边交于6个点，

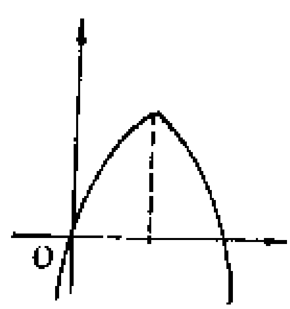


图　21—9

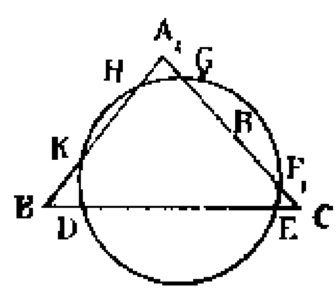


图　21—10

D、E、F、G、H、K，已知$AG=2$，$GF=13$，$FC=1$，$HK=7$，则DE等于（　　）

（A）$7\sqrt{3}$。（B）9。（C）10。（D）$2\sqrt{2}$。

（五）答　　案

1．D；2．A；3．C；4．B；5．D；6．A；7．C；8．D；9．C；10．A；11．A；12．D。

二十二 竞赛题选

（一） 1990年全国初中数学联赛试题

第一试

一、选择题

1. $\frac{1}{1-\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{1+\sqrt[4]{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$的值是

(A) 1. (B) −1. (C) 2. (D) −2.

2. $\triangle ABC$中，AD是高，且$AD^2=BD\cdot CD$，那么$\angle BAC$的度数是

(A) 小于90°. (B) 等于90°.

(C) 大于90°. (D) 不确定.

3. 方程$7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$（k是实数）有两个实根α，β，且$0<\alpha<1$，$1<\beta<2$，那么k的取值范围是

(A) $3<k<4$. (B) $-2<k<-1$.

(C) $3<k<4$或$-2<k<-1$. (D) 无解.

4. 恰有35个连续自然数的算术平方根的整数部分相同，那么这个相同整数是

(A) 17. (B) 18. (C) 35. (D) 36.

5. $\triangle ABC$中，$AB=2\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=2$，设P为BC边上任一点，则

(A) $PA^2<PB\cdot PC$。 (B) $PA^2=PB\cdot PC$。

(C) $PA^2>PB\cdot PC$。 (D) PA^2与$PB\cdot PC$的大小关系不确定。

6. 若六边形的周长等于20，各边长都是整数，且以它的任意三条边为边都不能构成三角形，则这样的六边形

(A) 不存在。 (B) 只有一个。

(C) 有有限个，但不只一个。 (D) 有无穷多个。

7. 若$\log_a b$的尾数是0，且$\log_a \frac{1}{b}>\log_a\sqrt{6}>\log_b a^2$

那么下列四个结论：

① $\frac{1}{b}>\sqrt{b}>a^2$； ② $\log_a b+\log_b a=0$；

③ $0<a<b<1$； ④ $ab-1=0$

中，正确的结论的个数是

(A) 1。 (B) 2。 (C) 3。 (D) 4。

8. 如图，点P、Q、R分别在$\triangle ABC$的边AB、BC、CA上，且$BP=PQ=QR=RC=1$，那么，$\triangle ABC$面积的最大值是

(A) $\sqrt{3}$。 (B) 2。

(C) $\sqrt{5}$。 (D) 3。

二、填空题

本题只要求直接填写结果。

1. 已知$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=8$ 则$\frac{x^2+1}{x}=$______。

2. 1^2，2^2，3^2，…，123456789^2的和的个位数的数字是______。

3．方程$(x-a)(x-8)-1=0$有两个整数根，则$a=$____。

4．$\triangle ABC$中，$AB=AC=2$，BC边有100个不同的点P_1，P_2，$\cdots P_{100}$

记　$m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC(i=1,2,\cdots,100)$

则　$m_1+m_2+\cdots+m_{100}=$____。

第　二　试

一、已知在凸五边形$ABCDE$中，

$\angle BAE=3\alpha$，$BC=CD=DE$，

且$\angle BCD=\angle CDE=180°-2\alpha$，

求证：$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$。

二、$[x]$表示不超过实数x的最大整数，令$\{x\}=x-[x]$

①找出一个实数x，满足$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$；

②证明：满足上述等式的x，都不是有理数。

三、设有$2n\times 2n$的正方形方格棋盘，在其中任意的$3n$个方格中各放一枚棋子。

求证：可以选出n行和n列，使得$3n$枚棋子都在这n行和n列中。

（二）　第三届《祖冲之杯》初中数学邀请赛试题

一、选择题

1．若实数x满足方程：$|1-x|=1+|x|$，则

$\sqrt{(x-1)^2}$等于

(A)1。 (B)$-(x+1)$。 (C) $x-1$。 (D) $1-x$。

2。若$a=(-1989)^{-1990}$，$b=-1989^{1990}$，$c=-1989^{-1990}$。则a、b、c的大小关系是

(A) $a=b=c$。 (B) $a>b=c$。 (C) $a>b>c$。

(D) $b<c<a$。

3。自然数1，2,3,4,……，1989，1990之和是一个奇数，现将这1990个数中的任意n($n<1990$)个数添上负号，记这时的1990个数之和的绝对值为S，那么

(A) S总是偶数。 (B) S总是奇数。

(C) 当n为偶数时，S是偶数，当n是奇数时，S是奇数。

(D) S的奇偶性不能确定，它与n的值及所选取添加负号的数有关。

4。在$\triangle ABC$中，$\angle A=80°$（图22—1）。点D、E、F分别在边BC、AB、AC上，且$BD=BE$，$CD=CF$，那么$\angle EDF$等于

(A) 30°。 (B) 40°。 (C) 50°。 (D) 65°。

5。如图22—2，点E、F分别是平行四边形$ABCD$边AB、BC的中点。记图中阴影部分的面积和为S_1，非阴影

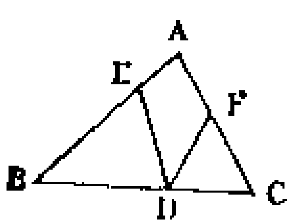


图 22—1

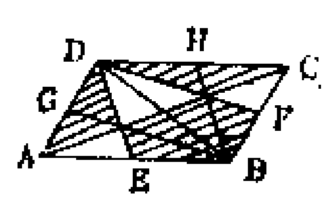


图 22—2

部分三个三角形面积和为S_2。那么$S_1:S_2$等于

(A) 1:1。 (B) 3:2。 (C) 2:1。 (D) $AB:BC$。

提示，如图添辅助线，其中G、H是AD、DC边的中点。平行四边形被分成12个等积小三角形。阴影部分占8个。

二、填空题

1. 计算$1990^2-1989^2+1988^2-1987^2+\cdots\cdots+2^2-1^2$ = ______。

2. 已知$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则$x^5-5x=$ ______。

3. 在$\triangle ABC$中（图22—3），D是BC边上的点，已知$AB=13$，$AD=12$，$AC=15$，$BD=5$。那么$DC=$ ______。

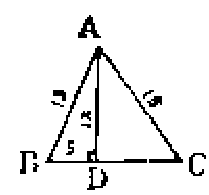


图 22—3

4. 已知二次函数$y=x^2-6x+c$的图象顶点与坐标原点的距离等于5，则$c=$ ______。

5. 已知整数a、b、c、d、e满足$a\geqslant b\geqslant c\geqslant d\geqslant e$，且

$$a+b+c+d+e=a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e=1990$$

那么$a=$ __，$b=$ __，$c=$ __，$d=$ __，$e=$ ____。

6. 解方程：$(x^2+3x-4)^2+(2x^2-7x+6)^2$

$$=(3x^2-4x+2)^2。$$

这个方程的解为$x=$ ______。

7. 如图22—4，D、F分别是$\triangle ABC$边AB、AC上的点，且$AD:DB=CF:FA=2:3$，连DF交BC边延长线于E点，那么$EF:FD=$ ______。

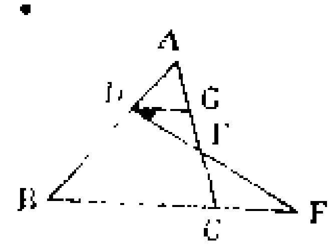


图 22—4

8. 以正七边形的七个顶点中的任意三个为顶点的三角形中，其中为锐角三角形的个数是______个。

三、若方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根 α、β，也是方程 $x^6-px^2+q=0$ 的根，其中 p、q 均为整数。试求 p、q 的值。

四、求出所有这样的正整数 a，使得二次方程

$$ax^2+2(2a-1)x+4(a-3)=0$$

至少有一个整数根。

五、如图22—5，P、Q 分别是正方形 $ABCD$ 边 AB、BC 上的点，且 $BP=BQ$。过 B 点作 PC 的垂线，垂足为 H。证明：$DH\perp HQ$。

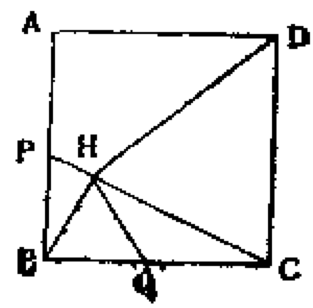
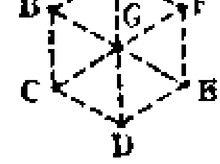


图 22—5

六、定义：在平面上由 n 个点所组成的点集，如果点集中任意两点的垂直平分线都经过点集中至少一个点，那么这个点集就叫做 n 点的"祖冲之点集"。

例如，甲图所示的正五边形的五个顶点 A，B，C，B，E 即组成5点的"祖冲之点集"；乙图所示的正六边形的六个顶点 A，B，C，D，E，F 及其中心 G，就组成7点的"祖冲之点集"。



甲图　　图22—6　　乙图

请你根据祖冲之点集的定义，在平面上表示出：

(1) 一个6点的祖冲之点集。

(2) 一个10点的祖冲之点集。

答　　案

(一)　　第　一　试

一、1．D。

解：原式 $=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{4}{1-3}=-2$。

2．B。图22—7

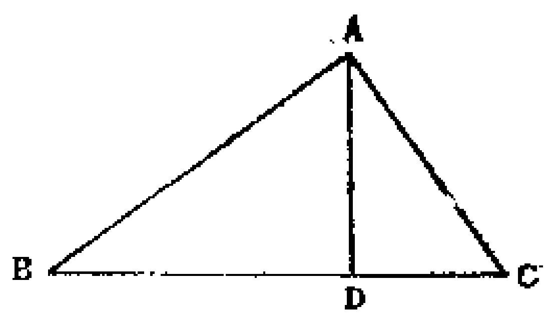


图　22—7

解一：由 $AD^2=BD\cdot CD$，有 $2AD^2=2BD\cdot CD$。

$BD^2+CD^2+2AD^2=BD^2+CD^2+2BD\cdot CD$

$$(BD^2+AD^2)+(AD^2+CD^2)=(BD+CD)^2$$

即　$AB^2+AC^2=BC^2$。

解二：由 $AD^2=BD\cdot CD$，有 $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{CD}{AD}$，

∴　$rt\triangle ABD\backsim rt\triangle CAD$，$\angle B=\angle DAC$

∴　$\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=\angle BAD+\angle B=90^\circ$。

3．C。

解：记 $f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$。

由 $\left.\begin{cases} f(0)=k^2-k-2>0 \\ f(1)=k^2-2k-8<0 \\ f(2)=k^2-3k>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 3<k<4$ 或 $-2<k<-1$。

4。A。

解：设这35个连续自然数最小的是n^2，最大的是$(n+1)^2-1$，

$\therefore\quad (n+1)^2-n^2=35$，即$2n+1=35$，$n=17$。

5。C。

解：如图22—8，设$BP=x$，则$PC=2-x$。

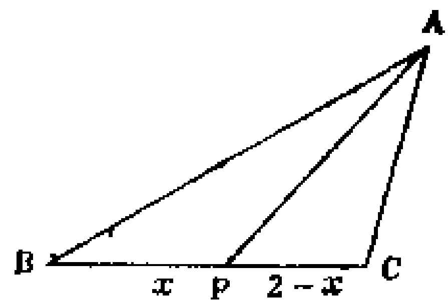


图 22—8

在$\triangle ABP$中，由余弦定理有

$PA^2=AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cos B=8+x^2-4\sqrt{2}\,x\cos B$

在$\triangle ABC$中，由余弦定理有

$$\cos B=\frac{(2\sqrt{2})^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2}$$

$=\dfrac{10}{8\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$，$\therefore\quad PA^2=x^2-5x+8$，而$PB\cdot PC=x(2-x)=2x-x^2$。

令 $y=PA^2-PB\cdot PC=x^2-5x+8-2x+x^2=2x^2-7x+8$

$=2\left(x-\dfrac{7}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}>0$，所以$PA^2>PB\cdot PC$

6. D.

解：若能找到六个整数a_1，a_2，…，a_6，使满足：

① $a_1+a_2+\cdots+a_6=20$，

② $a_1\leqslant a_2$，$a_1+a_2\leqslant a_3$，$a_2+a_3\leqslant a_4$，$a_3+a_4\leqslant a_5$，$a_4+a_5\leqslant a_6$。

③ $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5>a_6$。

则以a_1，a_2，…，a_6为边长的六边形，即可符合要求。

事实上，对任选三整数$1\leqslant i<j<k\leqslant 6$，

必有$a_i+a_j\leqslant a_k$，可见此六边形的任三边不能构成一三角形。

现取$a_1=a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=5$，$a_6=8$，则a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6满足全部条件。

故这样的六边形至少存在一个，又由n边形（$n\geqslant 4$）的不稳定性，即知这样的六边形有无穷多个。

7. A.

解：由$\log_a\frac{1}{b}>\log_a\sqrt{b}$，得$-\log_a b>\frac{1}{2}\log_a b$。

$$\therefore\quad \log_a b<0,$$

得 $a<1$，$b>1$或$a>1$，$b<1$，且$\log_b a<0$，∴结论③与结论②都是错误的。

在结论①中，若$\frac{1}{b}>\sqrt{b}$，得$b<1$，从而$a>1$，得$\sqrt{b}<a^2$，∴结论①也是错误的。

这样，只有结论④是正确的。事实上，由$\log_a\sqrt{b}>\log_b a^2$，可得 $\frac{1}{2}a\log_a b>2\log_b a=\frac{2}{\log_a b}$，又因$\log_a b<0$，

$\therefore \quad (\log_a b)^2 < 4$ 即 $-2 < \log_a b < 0$,

$\because \quad \log_a b$ 为整数, $\therefore \log_a b = -1$, 即 $b = \dfrac{1}{a}$, 从而 $ab = 1$,

结论④正确。

8. B。

解: 图22—10, 首先, 若以 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ 分别记 $\triangle APR$、$\triangle BQP$、$\triangle CRQ$、$\triangle PQR$,

则 $\quad S_{\text{Ⅰ}}, S_{\text{Ⅱ}}, S_{\text{Ⅲ}}$ 均不大于

$\dfrac{1}{2} \times 1 \times 1 = \dfrac{1}{2}$,

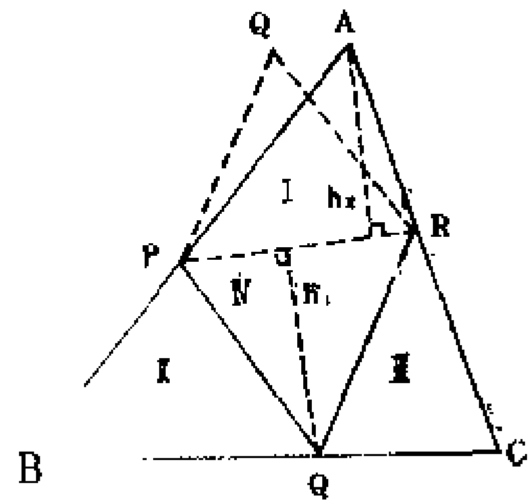


图 22—10

又 $\because \quad \angle PQR = 180° - (\angle B + \angle C) = \angle A$,

$\therefore$ 易证: $h_2 \leqslant h_1$ (h_1, h_2 分别为 $\triangle QRP$、$\triangle APR$ 公共边 PR 上的高。因若作出 $\triangle PQR$ 关于 PR 的对称图形 $PQ'R$, 这时 Q'、A 都在以 PR 为弦的含 $\angle A$ 的弓形弧上, 且因 $PQ' = Q'R$, $\therefore Q'$ 为这弧中点, 故可得出 $h_2 \leqslant h_1$)

从而 $\quad S_{\text{Ⅰ}} \leqslant S_{\text{Ⅳ}} \leqslant \dfrac{1}{2}$, 这样 $S_{\triangle ABC} = S_{\text{Ⅰ}} + S_{\text{Ⅱ}} + S_{\text{Ⅲ}} + S_{\text{Ⅳ}} \leqslant 4 \times \dfrac{1}{2} = 2$。

最后, 当 $AB = AC = 2$, $\angle A = 90°$ 时, $S_{\triangle ABC} = 2$, 即可达到最大值。

三、1. 62。

解: $\dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - 2 = 62$。

2. 5.

解：$\because$ $123456789 = 10 \times 12345678 + 9$，$\therefore$ 所求数字等于

$(1+4+9+6+5+6+9+4+1+0) \times 12345678 + (1+4+9+6+5+6+9+4+1)$ 的结果的个位数的数字，即$5 \times 8 + 5 = 45$的个位数的数字，故所求数字为5.

3. 8.

解1：原方程整理为$x^2 - (a+8)x + 8a - 1 = 0$.

设x_1，x_2为方程的两个整数根，由$x_1 + x_2 = a + 8$知，a为整数，因此，$x - a$和$x - 8$都是整数．故由原方程知 $x - a = x - 8$ $(= \pm 1)$，$\therefore$ $a = 8$.

解2：设两整数根为x_1，x_2，则 $(x-a)(x-8) - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$.

令$x = 8$，得 $(8 - x_1)(8 - x_2) = -1$，$\therefore$ $x_1 = 7$，$x_2 = 9$或$x_1 = 9$，$x_2 = 7$，

因而 $(x-a)(x-8) - 1 = (x-7)(x-9)$，令 $x = 9$，得 $(9-a) - 1 = 0$，$\therefore$ $a = 8$.

4. 400.

解1：作 $AD \perp BC$，如图22—11，则$BD = DC$.

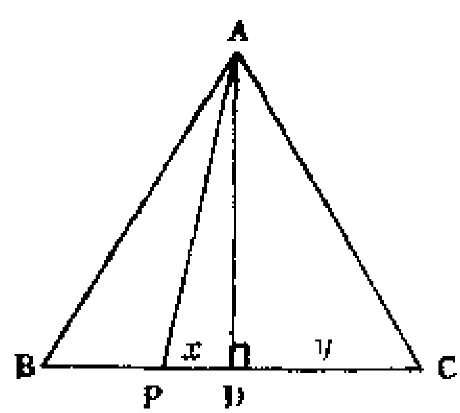


图 22—11

设$BD = DC = y$，$DP_i = x$，

则 $m_i = AP_i^2 + BP_i \cdot P_iC = AP_i^2 + (y - x)(x + y)$

$= AP_i^2 - x^2 + y^2 = AD^2 + y^2 = AC^2 = 4$，

$\therefore\quad m_1+m_2++\cdots+m_{100}=400$。

解2： 以A为圆心，2为半径，作圆A，延长P_iA，交圆A于E、F两点。如图22—12。

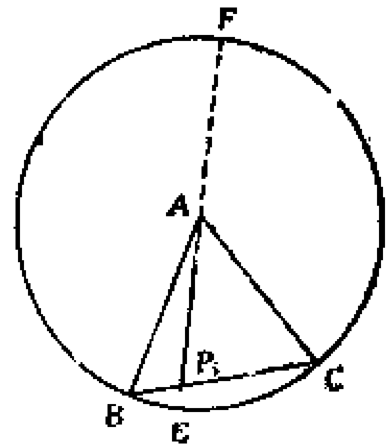


图 22—12

则 $BP_i\cdot P_iC=EP_i\cdot P_iF=(AE-AP_i)(AF+AP_i)=(2-AP_i)(2+AP_i)=4-AP_i^2$。

$\therefore\quad m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC$

$=4$，

因而 $m_1+m_2+\cdots m_{100}=4\times100=400$。

第 二 试

一、证：图22—13，连BD，CE

$\left.\begin{array}{l}\text{因}BC=CD=DE\\ \angle BCD=\angle CDE\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle BCD\cong\triangle CDE$

$(=180-2\alpha)$

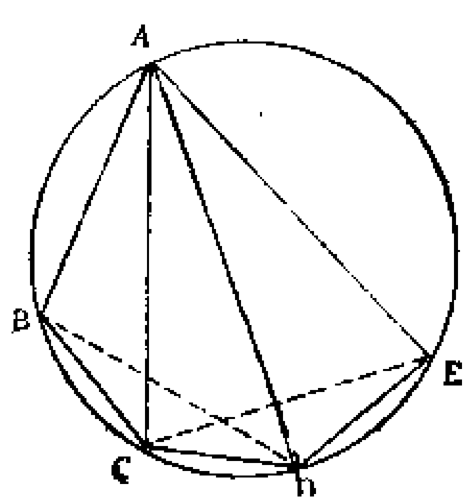


图 22—13

$\Rightarrow \angle CBD = \angle CDB = \angle DCE = \angle DEC = \alpha$,

$\therefore \quad \angle BCE = (180° - 2\alpha) - \alpha = 180° - 3\alpha$.

又$\because \quad \angle BAE = 3\alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow A、B、C、E\text{共圆} \\ \text{同理可证}A、B、D、E\text{共圆} \end{array}\right\} \Rightarrow A、B、C、D、E\text{共圆}$$

$\Rightarrow \angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = \alpha$.

二、解一：

设$x = m + \alpha$，$\frac{1}{x} = n + \beta$（m, n为整数），$0 \leqslant \alpha、\beta < 1$，

若$\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = \alpha + \beta = 1$，

$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = m + \alpha + n + \beta = m + n + 1$是整数。

令 $\quad x + \frac{1}{x} = k$（$k$为整数），即 $x^2 - kx + 1 = 0$。

解得 $x = \frac{1}{2}(k \pm \sqrt{k^2 - 4})$，

当$|k| = 2$时，$|x| = 1$ 易验证它不满足所设等式。

当$|k| \geqslant 3$时，$x = \frac{1}{2}(k \pm \sqrt{k^2 - 4})$，是满足等式的全体实数。

$\because \quad k^2 - 4$不是完全平方数（事实上，若$k^2 - 4 = h^2$，则$k^2 - h^2 = 4$，但当$|k| \geqslant 3$时，两个平方数之差不小于5），

$\therefore \quad x$是无理数，即满足题设等式的x，都不是有理数。

解二：

①取 $x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ 或 $x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

②用反证法证明之

反设满足等式之 x 为有理数，

首先，若 x 为整数，则 $\{x\}=0$，代入等式得 $\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$，与 $0\leqslant\{y\}<1$ 矛盾。

其次，若 x 为非整数的有理数，

令 $x=n+\frac{q}{p}$（其中 n，p，q 均为整数，$1\leqslant q<p$，且 $(q,\ p)=1$），

则 $\frac{1}{x}=s+\frac{r}{np+q}$（其中 s，r 为整数，当 $n\geqslant0$ 时，$0\leqslant r<np+q$，当 $n\leqslant-1$ 时，$np+q<r\leqslant0$），

$\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{r}{np+q}$，若 x 满足等式，

即 $\frac{q}{p}+\frac{r}{np+q}=1$。

即 $q(np+q)+pr=p(np+q)$，从而得

$$q^2=p[np+(1-n)q-r],$$

即 p 整除 q^2，与 $(p,\ q)=1$ 矛盾，

故满足等式之 x 都不是有理数。

三、证：设各行的棋子数分别为 P_1，P_2，…，P_n，P_{n+1}，…，P_{2n}，

且 $P_1\geqslant P_2\geqslant\cdots\geqslant P_n\geqslant P_{n+1}\geqslant\cdots\geqslant P_{2n}$，

由题设 $P_1+P_2+\cdots+P_n+P_{n+1}+\cdots+P_{2n}=3n$。

选取含棋数为 P_1，P_2，…，P_n 的这 n 行，则

$$P_1+P_2+\cdots+P_n\geqslant2n.$$

否则，若$P_1+P_2+\cdots+P_n\leqslant 2n-1$，

则　P_1，P_2，…，P_n中至少有一个不大于1。

由①、②得$P_{n+1}+\cdots+P_{2n}\geqslant n+1$，

从而　P_{n+1}，…，P_{2n}中至少有一个大于1，这与所设矛盾。

选出的这n行已含有不少于$2n$枚棋子，再选出n列使其包含其余的棋子（不多于n枚），这样选取的n行和n列包含了全部$3n$枚棋子。

一、1．D；2．D；3．B；4．C；5．C。

二、1．1981045。

提示：利用平方差公式。$\left(\text{答}\dfrac{1}{2}\times1990\times1991\text{，亦给满分}\right)$

2．－3。

略解：由$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，可知　$x^2=1-x$，代入得x^5-

$$5x=x(x^4-5)=x[(1-x)^2-5]=x(x^2-2x-4)$$
$$=x[(1-x)-2x-4]=-3x^2-3x=-3。$$

3．9。

提示：由勾股定理的逆定理可知$\triangle ABD$为直角三角形。

4．13或5。

提示：易知顶点横坐标等于3，从而求得纵坐标为4或－4，代入函数表达式即求出c。

5．1990，1，1，－1，－1。

提示：对1990分解质因数，观察分析后易知仅此一组

解。

6。1，2，-4，$\frac{3}{2}$。

略解：令$u=x^2+3x-4$，$v=2x^2-7x+6$。原方程变为：$u^2+v^2=(u+v)^2$。从而$uv=0$，得$u=0$，$v=0$。

7。2:1。

略解：过D作$DG//BC$，则$AG:GC=AD:BD=2:3$，因$CF:FA=2:3$，易得$CF:FG=2:1$，从而$EF:FD=2:1$。

8。14。

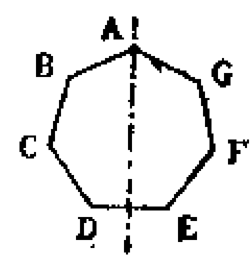


图 22—14

略解：图22—14，为便于计数，可先固定一点来考虑。例如先考虑A点。这时若再取B点则只可得一个锐角三角形(另一个顶点是E点)，取C点有2个，取D点有3个(注意，此时E、F、G点已计算过了)。即A点可得$(1+2+3)$个锐角三角形。总共有7个顶点，注意到每一个锐角三角形都计算了三次。于是答案为$(1+2+3)\times7\div3=14$个。

三、解：由韦达定理，$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=1$，从而

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2=7,$$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=7^2-2=47.$$

因α、β也是方程$x^6-px^2+q=0$的根，则有

$$\begin{cases}\alpha^6-p\alpha^2+q=0\\ \beta^6-p\beta^2+q=0.\end{cases}$$

解得 $p=\dfrac{\alpha^6-\beta^6}{\alpha^2-\beta^2}=\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=48$,

$$q=\frac{\alpha^2\beta^2(\alpha^4-\beta^4)}{\alpha^2-\beta^2}=\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)=7.$$

注： 本题是1988年12月17日台湾省举办的“科学才能青年选拔活动数学竞赛”第二阶段的一道试题的易化.原题是：已知x^2-2x-1整除$x^{16}-ax^2+b$，而a，b都是整数．以质数的乘积式表示a与b。

四、解：着眼于a来考虑，原方程变为$a=\dfrac{2x+12}{(x+2)^2}$。

$\because$ a是正整数，$\therefore$ $a\geqslant1$，

即 $\dfrac{2x+12}{(x+2)^2}\geqslant1$，

整理后，得 $x^2+2x-8\leqslant0$，

解得 $-4\leqslant x\leqslant2$。

因x是整数根，且显然$x\neq-2$，因此x只能取-4，-3，-1，0，1，2。

代入原方程（或a的表达式），得

$\begin{cases}x=-4\\a=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3\\a=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\a=10;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\a=3;\end{cases}$

$\begin{cases}x=1\\a=\dfrac{14}{9};\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\a=1.\end{cases}$

综上，满足要求的所有正整数a的值有4个，即$a=1$，3，6，10。

五、〔证明〕因BH是直角$\triangle PBC$斜边上的高，由$\triangle BCP\backsim\triangle HCB$有

$$\frac{BC}{BP}=\frac{CH}{BH}.$$

$\because$ $BC=DC$，$BP=BQ$，$\therefore$ $\dfrac{CD}{BQ}=\dfrac{CH}{BH}$.

$\because$ $\angle B=\angle C=90°$，$\angle PBH=\angle BCP$，

$\therefore$ $\angle HBQ=\angle HCD$，$\therefore$ $\triangle HBQ \sim \triangle HCD$.

$\therefore$ $\angle DHC=\angle QHB$，

$\therefore$ $\angle DHQ=\angle CHB=90°$，即$DH\perp HQ$.

注：①本题如添辅助线（例如延长BH交AD于E）可利用四点共圆来证。

②本题是1974年全苏数学竞赛试题。

六、

解：（1）正三角形的三个顶点及其三边中点，构成一个6点的祖冲之点集，如图22—15中的A、B、C、D、E、F六点。

（2）国旗上的正五角星形的十个顶点构成10点的祖冲之点集。如图22—16中的A、B、C、D、E、F、G、H、I、J 10点。

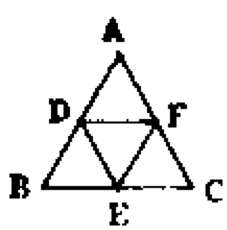


图 22—16

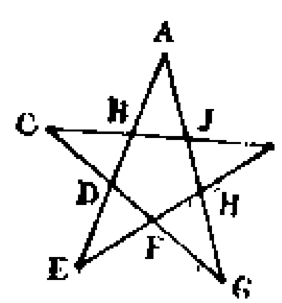


图 22—16

注①应注意定义中“任意两点垂直平分线都……”这一要求。只要有一条垂直平分线不过点集中的点，就不是祖冲之点集。

② 本题的答案不是唯一的。例如乙图中去掉任一个顶点(中心G点不能去)；图 22—17 中去掉H、G(或H',G')两点等，都是 6 点的祖冲之点集。

③ $n\geqslant3$的奇数个点的祖冲之点集都是存在的。(例如，正奇数边形的顶点便是)。但偶数个点的祖冲之点集是否对一切$n>2$的偶数都存在?命题者尚不清楚。

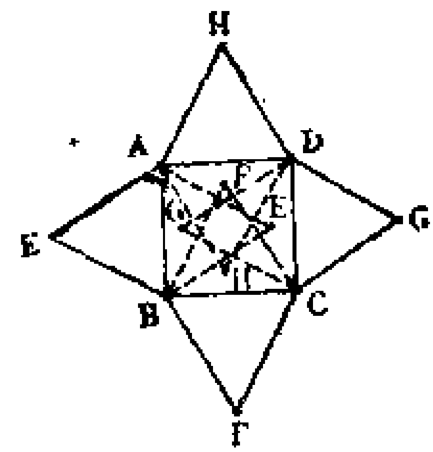


图 22—17

④ 8 个点的祖冲之点集是存在的，例如 图 3 是正方形$ABCD$的各边向外（或向内）作正三角形。则所有的八个顶点A,B,C,D,E,F,G,H，（向内一组为A，B,C,D,E'，F'，G'，H'）即是八点的祖冲之点集。

⑤ 图 3 所示 8 点的祖冲之点集还有这样的特点：即任意两点的垂直平分线都过点集中的两点，这样的点集叫做二阶祖冲之点集。命题者还不知道是否有其它n点的二阶祖冲之点集。

⑥ 祖冲之点集的图形是如此优美、和谐，令人赞叹！而其中又蕴藏着许多待揭的谜底，使人留恋忘返，相信这一新的问题一定能激起广大数学爱好者的兴趣！

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学奥林匹克教练丛书　（初中三年级用）
作者＝魏超群主编　宫长泰　李伟　张贵刚　赵伟编著
页数＝３１５
ＳＳ号＝１１３１７４２６
出版日期＝１９９１年０７月第１版

前言

目录

目录