前言

数学竞赛是数学课外活动的主要形式之一，它可以扩大学生的视野，锻炼学生的智慧，帮助学生理解数学在现实生活、生产、科技中的地位和作用，促进学生个性品质的形成和数学才能的发挥，有利于培养人才。

数学竞赛活动在世界各国都很活跃，迄今为止，国际数学奥林匹克（IMO）已经进行了31届大赛。自1985年我国首次参加第26届“IMO”以来，逐年取得优异的成绩，现已进入世界强国之列，为使这项活动更加深入、广泛地开展，有计划分层次地对不同年级的学生进行训练，我们编写了《数学奥林匹克教练》丛书。全书共三册，分别供初中一、二、三年级用。

本套教练丛书以《中学数学教学大纲》为依据，参照《数学竞赛大纲》（草案），以现行初中代数、几何课本为基础，考虑到学生的实际水平，通俗易懂地渗透数学思想，数学方法，强化数学技能与技巧的训练，培养学生既能提高数学成绩，又能掌握参加各类数学竞赛的基本常识和解题要领。

每册书按相应的教科书内容同步精选专题，介绍基本原理，范例与方法，给出相关的练习题与答案。

参加本册编写的原作者，魏超群，官长泰，祝尔家，吴育斌，于永兰，苏建一，朱传礼，李光宗，王艺飞，高喜龙，

阙铁滨，王立增。在原书的基础上，魏超群，吴育斌又进行重新编写。赵光千为本册编写作了大量的工作，在此表示感谢。

借本书出版的机会，敬请广大读者，提出批评指正，我们非常感谢！

编　者

1991年1月

目　　录

一 数的开方

（一） 基本原理

1．基本概念

（1）平方根；（2）算术平方根；（3）立方根；（4）n次方根；（5）n次算术根；（6）开平方；（7）开立方；（8）开方；（9）无理数；（10）实数；（11）实数的绝对值．

2．方根的性质

一个正数有两个偶次方根，这两个偶次方根是互为相反数；零的偶次方根是零；负数没有偶次方根．

一个正数有一个正的奇次方根；一个负数有一个负的奇次方根；零的奇次方根是零．

平方根是偶次方根的特殊情况，立方根是奇次方根的特殊情况．它们的性质请读者自述．

3．开方与乘方的关系

开方与乘方互为逆运算．用乘方可以检验开方的结果是否正确．有时可用乘方运算与方根的概念解开方的题目．

4．查"表外数"的平方根、立方根的依据

1）已知正数的小数点向右或者向左移动两位，它的算术平方根的小数点相应地向右或者向左移动一位．

2）被开方数的小数点向右或者向左移动三位，它的立方根的小数点相应地向右或者向左移动一位．

5. 实数的运算

有理数的运算律和运算性质对于实数同样适用。

在有理数或实数范围内可以实施加、减、乘、除（除数不为零）运算。即任意两有理数的和、差、积、商（除数不为零）是有理数；任意两个实数的和、差、积、商（除数不为零）是实数。在正实数范围内可以实施开方运算。

6. 非负数的一个性质

算术平方根、实数的绝对值、实数的平方等等都是非负数。如$\sqrt{a}$（$a\geqslant0$）、$|b|$、c^2都是非负数，即$\sqrt{a}\geqslant0$，$|b|\geqslant0$，$c^2\geqslant0$（a、b、c为实数）。

如果若干个非负数之和为零，那么这些非负数都必为零。即如果$a_1\geqslant0$，$a_2\geqslant0$，…，$a_n\geqslant0$且$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，那么$a_1=a_2\cdots=a_n=0$。

（二）范例与方法

例1. 用数字0、1、2、3、4、5分别填入下式六个空格内，数字不得重复。

$$\sqrt{1\square9\square\square\square}=\square\square5.$$

思路： 首先确定被开方数末两位数字，然后确定算术平方根的首位数字，最后通过实际计算确定其他空格应填的数字。

解： 因为算术平方根末位数字是5，所以被开方数末两位数字为25（个位数字是5的自然数的平方，末两位数字必是25。因为 $(10a+5)^2=100a^2+2\times10a\times5+5^2=100a^2+100a+25$。其中$a$为自然数）。根据题目条件可知，算术

平方根的首位数字（百位数字）必是3。最后再通过计算知 $305^2=93025$，$315^2=99225$，$345^2=119025$。故本题目六个空格内，应填为

$$\sqrt{\boxed{1}\;1\;9\;\boxed{0}\;\boxed{2}\;\boxed{5}}=3\;\boxed{4}\;5。$$

【说明】如果只确定算术平方根的百位数字是3，不确定被开方数的末两位数，或只确定被开方数的末位数，那么最后还需计算 325^2 和 355^2，比较繁。

例2．求使 $\sqrt[5]{2916M-6804}$ 为自然数的最小自然数 M 的值。

思路：若使 $N=\sqrt[5]{2916M-6804}$ 为自然数，被开方数 $2916M-6804$ 必化成 P^5（P 为自然数）的形式。为此先将被开方数 $2916M-6804$ 进行因式分解，再根据题意确定 M 之值。

解：$\because 2916=2^2\cdot3^6$，$6804=2^2\cdot3^5\cdot7$，

$$\therefore \sqrt[5]{2916M-6804}=\sqrt[5]{2^2\cdot3^6M-2^2\cdot3^5\cdot7}$$
$$=\sqrt[5]{3^5(3M-7)\cdot2^2}\,.$$

若使 N 为自然数，确定最小自然数 M 可从下式获得，$3M-7=2^3$，从而 $M=5$。

【说明】 如果本题目改为求使 $\sqrt[5]{2916M-6804}$ 为自然数的自然数 M 的值（即将原题目中“最小”两字去掉），那么 M 的值不唯一，其中最小的 M 值为5。若取 $3M-7=2^{13}$，得 $M=2733$。此时 $N=\sqrt[5]{2916M-6804}=24$。请考虑下面两个问题：

(1) 取 $3M-7=2^8$，可以吗？为什么？

(2) M有多少个值？你能写出所有M的值吗？

例3. 若$\sqrt[1986]{M}=3$，$\sqrt[1987]{N}=7$，试确定自然数MN的末位数字。

思路： 根据算术平方根的概念，首先分别将M、N表示出来，通过观察寻找规律，分别求出M、N的末位数字，再求MN的末位数字。也可以将MN表示出来，直接确定MN的末位数字。

解一： $\because \sqrt[1986]{M}=3$，$\therefore M=3^{1986}$。

$\because \sqrt[1987]{N}=7$，$\therefore N=7^{1987}$。

3^1末位数是3；3^2末位数是9；3^3末位数是7；3^4末位数是1。3^n末位数只能是3或9或7或1，其规律是：3^{4n+1}末位数是3；3^{4n+2}末位数是9；3^{4n+3}末位数是7；3^{4n+4}末位数是1（其中n为自然数）。$\because 1986=4\times 496+2$，$\therefore M=3^{1986}$末位数字是9。

同理可知：7^1末位数是7；7^2末位数是9；7^3末位数是3；7^4末位数是1。7^n末位数只能是7或9或3或1。其规律是：7^{4n+1}末位数是7；7^{4n+2}末位数是9；7^{4n+3}末位数是3；7^{4n+4}末位数是1（其中n为自然数）。$\because 1987=4\times 496+3$，$\therefore N=7^{1987}$末位数字是3。从而$MN$末位数字是7。

解二： $\because M=3^{1986}$，$N=7^{1987}$，

$$\therefore MN=3^{1986}\cdot 7^{1987}=3^{1986}\cdot 7^{1986}\cdot 7$$
$$=(21)^{1986}\cdot 7.$$

显然有$(21)^{1986}$的末位数字是1，故MN的末位数字是7。

【说明】 解二比解一简便得多。这就说明，有些一题

多解的题目，往往有最优解法。我们在解题时，应力争寻求最优解法。本题解二简捷的原因，在于巧妙的抓住了，末位数字是1的自然数的任何正整数次方，它的末位数字总是1，而$3\times7=21$。

想想，还有末位数字是几的自然数有上述的类似性质？

例4 若$A=\sqrt{3+\sqrt{5}}$，$B=\sqrt{3-\sqrt{5}}$。

求证：$11<A^3-B^3<12<A^3+B^3<13$。

思路： 利用立方和、立方差因式分解公式，分别计算A^3-B^3和A^3+B^3的值，从而证明A^3-B^3介于11与12之间，证明A^3+B^3介于12与13之间。

解： $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)=(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})[(\sqrt{3+\sqrt{5}})^2+\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}+(\sqrt{3-\sqrt{5}})^2]=8(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})$

$=8\cdot\sqrt{(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2}=8\sqrt{2}=\sqrt{128}$。

$\because$ $121<128<144$，$\therefore$ $11<\sqrt{128}<12$，

即 $11<A^3-B^3<12$。

$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)=(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})[(\sqrt{3+\sqrt{5}})^2-\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}+(\sqrt{3-\sqrt{5}})^2]=4(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$

$=\sqrt{16(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2}=\sqrt{16\times10}=\sqrt{160}$。

$\because$ $144<160<169$，$\therefore$ $12<\sqrt{160}<13$。

即 $12<A^3+B^3<13$。从而可证

$11<A^3-B^3<12<A^3+B^3<13$。

【说明】 在计算$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$时，通常有以

下两种方法：(1) 分别计算$\sqrt{3+\sqrt{5}}$和$\sqrt{3-\sqrt{5}}$的值，再求和，即$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}+\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$。(2) $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2}=\sqrt{10}$。

另解：先设$x=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$，将此式两边平方得$x^2=10$，$\because x$为正值，$\therefore x=\sqrt{10}$。

例5 设$N=a^2+b^2+a^2b^2$，其中a、b是两个相邻的自然数，求证：$\sqrt{N}$是奇数。

思路：欲证$\sqrt{N}$是奇数，需证N为奇数的平方，根据条件a、b是相邻的自然数，可证N是奇数的平方。

解：$\because$ a、b是相邻的自然数，$\therefore$可设$a=n$，$b=n+1$（n是任意自然数）。于是

$$\begin{aligned}N&=a^2+b^2+a^2b^2=n^2+(n+1)^2+n^2\cdot(n+1)^2\\&=(n^2+n)^2+n^2+n^2+2n+1=(n^2+n)^2+2(n^2+n)+1=(n^2+n+1)^2,\end{aligned}$$

$\therefore$ $\sqrt{N}=n^2+n+1=n(n+1)+1$。

不论n为奇数，还是偶数，n和$n+1$必有一为偶数，故$n(n+1)$必为偶数，故$\sqrt{N}$为奇数。

【说明】 下面简单事实在证明整数的奇偶性和整除性时，常常要用到。任何两个相邻的自然数中，必有一个是偶

数（即必有一个是2的倍数），任何三个相邻的自然数中，必有一个是3的倍数，一般地，任何n个（n是自然数）相邻的自然数中，必有一个是n的倍数。

想想，任何两个奇数的和、差、积是奇数还是偶数？任何两个偶数的和、差、积是奇数还是偶数？一个奇数与一个偶数的和、差、积是奇数还是偶数？

例6 若$[x]$表示不大于实数x的最大整数，

$y=\left[\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\sqrt[3]{2}}\right]$。试求 $\sqrt{3-2\sqrt{y}}$的值。

思路：首先根据$[x]$的概念求出y的值，再将y的值代入$\sqrt{3-2\sqrt{y}}$，从而求$\sqrt{3-2\sqrt{y}}$的值。为此，先将$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\sqrt[3]{2}$进行变形。

解法：$\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\sqrt[3]{2}}$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1]}+\sqrt[3]{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1}+\sqrt[3]{2}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt[3]{2})^2+2\sqrt[3]{2}+1}=\sqrt{(\sqrt[3]{2}+1)^2}$$

$$=\sqrt[3]{2}+1。\because 1<\sqrt[3]{2}<2，\therefore 2<\sqrt[3]{2}+1<3，$$

$\therefore$ $[\sqrt[3]{2}+1]=2$，即 $y=[\sqrt[3]{2}+1]=2$。

从而 $\sqrt{3-2\sqrt{y}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$

$$=\sqrt{2}-1。$$

【说明】 $[x]$叫实数x的整数部分。若$n\leqslant x<n+1$（n是

整数），则$[x]=n$。

求$[x]$的主要方法，就是设法寻求一个整数n，使满足$n\leqslant[x]<n+1$，从而可以确定$[x]=n$。

例7 已知a、b是有理数，$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$都是无理数，且$a\neq b$，求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是无理数。

思路：用反证法。设$\sqrt{a}+\sqrt{b}$不是无理数，推出矛盾，从而证明$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是无理数。

证一：设$x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$不是无理数。那么，$x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$必是有理数，于是$x-\sqrt{a}=\sqrt{b}$。两边平方得$x^2-2x\sqrt{a}+a=b$。

$\because$ $x\neq0$（若$x=0$，必有$a=b=0$，这不可能），$\therefore$ $\sqrt{a}=\dfrac{x^2+a-b}{2x}$，这是矛盾的，$\sqrt{a}$是无理数，$\dfrac{x^2+a-b}{2x}$是有理数。这个矛盾，证明了$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是无理数。

证二：假设$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是有理数，因为$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$，两个有理数的商（$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq0$，这在证一中已有论述）仍是有理数，所以$\sqrt{a}-\sqrt{b}$也是有理数，于是两个有理数$\sqrt{a}+\sqrt{b}$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}$的和也是有理数。即$(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})=2\sqrt{a}$也是有理数，这与$\sqrt{a}$是无理数相矛盾。

因此，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是无理数。

【说明】 此题两种证法都是反证法。但推出矛盾的具体过程是不同的。我们在运用反证法推出矛盾时，应尽量从各

个方面去考虑。

想想，任何两个有理数的和、差、积、商（除数不为零）是有理数还是无理数？为什么？任何两个无理数的和、差、积、商是有理数还是无理数？为什么？

一个有理数与一个无理数的和、差、积、商（零不做除数）是有理数还是无理数？为什么？

例8 若x、y、z为实数，且

$|x+3y-5z|+\sqrt{5x+3y-7z}=0$，求 $x:y:z$。

思路：根据非负数的性质和题目条件，可知$x+3y-5z=0$且$5x+3y-7z=0$，从而可求出$x:y:z$。

解：∵ x、y、z都是实数，且

$$|x+3y-5z|+\sqrt{5x+3y-7z}=0,$$

∴ $x+3y-5z=0$且$5x+3y-7z=0$。

若 $z=0$，可知 $x=y=0$，此时$x:y:z$不存在；

若$z\neq0$，可得$y\neq0$，$x\neq0$，且$\frac{x}{z}=\frac{1}{2}$，$\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$，

∴ $x:y:z=1:3:2$。

【说明】：我们遇到的非负数有：(1)实数的绝对值；(2)算术平方根，(3) 实数的平方（或实数的偶次方）。非负数的简单性质——如果若干个非负数之和为零，那么每个非负数必都是零。在解某些题目中，经常用到。证明这非负数的性质要用反证法。想想，你会证明吗？

（三）练 习 题

1．选择题：

(1) 下列最接近$\sqrt{65}-\sqrt{63}$的数是

(A) 0.12. (B) 0.13. (C) 0.14. (D) 0.15.

(2) 若$\sqrt[1988]{M-1}=2$，$\sqrt[1989]{N+2}=5$，则 $M\cdot N$ 的末位数字是

(A) 0. (B) 1. (C) 5. (D) 9.

(3) 满足$n^{200}<5^{300}$的最大整数n是

(A) 9. (B) 10. (C) 11. (D) 12.

(4) 在实数范围内$\left||\sqrt{-x^2}-1|-2\right|$的值是

(A) 无法确定. (B) 只能等于3.

(C) 只能等于1. (D) 以上答案都不对.

(5) 当$x<-1$时，$\left||x-\sqrt{(2-x)^2}-2|2-4\right|$的值是

(A) 0. (B)$4x-4$. (C) $4-4x$. (D) $4x+4$.

(6) a、b为实数，下面命题中正确的是

(A) 若$a>b$，则$a^2>b^2$. (B) 若$|a|>b$，则$a^2>b^2$.

(C) 若$a>|b|$，则$a^2>b^2$. (D) 若$a\neq|b|$，则$a^2\neq b^2$.

(7) 方程$\left|x-|2x+1|\right|=3$的不同的根的个数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(8) 已知方程$|x|=ax+1$有一个负根，而且没有正根，那么a的取值范围是

(A) $a>-1$. (B) $a=1$. (C) $a\geqslant1$.

(D) 非上述答案.

(9) 下列命题，正确的是

(A) 无限小数都是无理数. (B) 有理数都是有限小数. (C) 无理数不都是无限小数. (D) 无理数不都是开

方开不尽的数。

(10) 下列命题，不正确的是

(*A*) 任何两个有理数的和是有理数。

(*B*) 任何两个无理数的商不一定是无理数。

(*C*) 任何一个有理数与无理数之差必是无理数。

(*D*) 任何一个有理数与无理数之积必是无理数。

2. 若$\sqrt{N}$是正整数，且个位数字是6，证明N的十位数字一定是奇数。

3. 求使$\sqrt{2000a}$为整数的最小自然数a的值。

4. 设$y=|x-1|+|x-3|+\sqrt{4x^2+4x+1}$，试求使$y$值恒为常数的$x$的取值范围。

5. 若$a-b=3$，$a-c=\sqrt[3]{26}$，试求$(c-b)[(a-b)^2+(a-c)(a-b)+(a-c)^2]$的值。

6. 若$a=\sqrt{17}-1$，试求

$$\sqrt[3]{a^5+2a^4-17a^3-a^2+18a-17}\text{的值。}$$

7. 用0，1，2，3，6数字填下空格，数字不许重复：
$\sqrt{11\square\square\square}=\square\square6$。

8. 求$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$的值。

9. 求$\sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}$。

10. 若$\sqrt{3x-z}+\sqrt{3y-2z}+\sqrt{2x-y}=0$，求$x:y:z$。

11. 当a取何值时，方程$\sqrt{ax-2y-3}+\sqrt{5x+9}=0$的解$x$、$y$同号。

12. 已知a、b是有理数，$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$都是无理数，且$a\neq$

b，求证：$\sqrt{a}-\sqrt{b}$是无理数。

（四）答案与提示

1. (1) (B)。 (2) (B)。 (3) (C)。 (4) (C)。(5) (C)。 (6) (C)。 (7) (B)。(8) (C)。(9) (D)。(10) (D)。

2. 设$\sqrt{N}=10a+6$（其中a是自然数）。则$N=(10a+6)^2=100a^2+120a+36$.故$N$的十位数字是偶数与3的和，是奇数。

3. $a=5$。

4. $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$。

5. 1。

6. $\because\ a=\sqrt{17}-1$，$\therefore\ a+2=\sqrt{17}+1$，$\therefore a(a+2)=16$。$\sqrt[5]{a^5+2a^4-17a^3-a^2+18a-17}$

$=\sqrt[5]{a^3(a^2+2a-16)-a(a^2+2a-16)+(a^2+2a-16)-1}$

$=-1$。

7. $\sqrt{11\boxed{2}\boxed{3}\underline{6}}=\boxed{1}\boxed{0}6$。

8. 1。

9. $|a^2+3a+1|$。

10. 若$z=0$，$x:y:z$不存在，若$z\neq0$，$x:y:z=1:2:3$。

11. $a>-\frac{5}{3}$。

12. 仿例7证明之。

二　二次根式

（一）基本原理

1．基本概念

（1）二次根式；（2）算术平方根；

（3）最简二次根式；（4）同类二次根式．（表示方根的代数式中，最常见，最简单的就是二次根式）

2．二次根式的性质

（1）　$(\sqrt{a})^2=a$ $(a\geqslant 0)$．

（2）$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$．

两个公式虽然形式上接近，但意义不同：$(\sqrt{a})^2$ 表示一个非负实数 a 的算术平方根的二次幂，而$\sqrt{a^2}$则表示实数 a 的二次幂的算术平方根．

（3）积的算术平方根：$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$．

（4）商的算术平方根：$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a\geqslant 0,\ b>0)$．

3．二次根式的运算

二次根式的加法、减法、乘法（包括乘方、除法（除数不为零）的运算，具有同有理数相同的运算律，且运算法则

相类似，但要注意二次根式的化简及分母有理化。

（二）范例与方法

例 1 已知 $-2a<x<-a$，化简

$$|x+a|+\sqrt{x^2-2ax+a^2}+2\sqrt{x^2+4ax+4a^2}.$$

思路： 首先将两个二次根式中的被开方式，化成完全平方式，再利用二次根式的性质（2），转化成如何去掉 $|x+a|+|x-a|+2|x+2a|$ 中三个绝对值号的问题。最后由已知条件，判定 $x+a$，$x-a$ 和 $x+2a$ 的符号，进行化简。

解： 由 $-2a<x<-a$ 得 $x+a<0$，$x+2a>0, a>0$，

$\therefore\quad x<0$，$x-a<0$。

于是，原式 $=|x+a|+|x-a|+2|x+2a|$

$$=-(x+a)-(x-a)+2(x+2a)=4a.$$

例 2 已知 $0\leqslant a\leqslant 1$，化简 $\sqrt{1-2a\sqrt{1-a^2}}$。

思路： 将被开方式 $1-2a\sqrt{1-a^2}$ 凑配成完全平方式，即 $1-2a\sqrt{1-a^2}=a^2-2a\sqrt{1-a^2}+(\sqrt{1-a^2})^2=(a-\sqrt{1-a^2})^2$，再利用二次根式性质(2)，及 a 的范围进行化简。

解： $\sqrt{1-2a\sqrt{1-a^2}}=\sqrt{a^2-2a\sqrt{1-a^2}+(\sqrt{1-a^2})^2}$

$$=|a-\sqrt{1-a^2}|$$

$$=\begin{cases}a-\sqrt{1-a^2} & (\sqrt{2}/2\leqslant a\leqslant 1),\\ \sqrt{1-a^2}-a & (0\leqslant a<\sqrt{2}/2).\end{cases}$$

例 3 求 $22-12\sqrt{2}+6\sqrt{5}-4\sqrt{10}$ 的一个平方根。

思路： 由方根的定义，可将原式看成某一个二次根式的平方，但原式的二次根式共有三项，因而它的平方根中的

二次根式至少有两项，故可设它的平方根是$\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$，经平方展开比较有理项、无理项去确定$x$、$y$、$z$的值。

解：设 $22-12\sqrt{2}+6\sqrt{5}-4\sqrt{10}=(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$，

$$\therefore\quad 22-12\sqrt{2}+6\sqrt{5}-4\sqrt{10}$$
$$=x+y+z-2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}.$$

比较无理项得

$$2\sqrt{xy}=12\sqrt{2},\quad 2\sqrt{xz}=6\sqrt{5},$$
$$2\sqrt{yz}=4\sqrt{10},$$

相乘得 $xyz=360$， $\therefore\quad \sqrt{xyz}=6\sqrt{10}$.

$\therefore\quad \sqrt{x}=3,\ \sqrt{y}=2\sqrt{2},\ \sqrt{z}=\sqrt{5}$，

且 $x+y+z=9+8+5=22$。

则所求的一个平方根是 $3-2\sqrt{2}+\sqrt{5}$。

例4 已知a是满足等式$x^2+x-1=0$的正实数，求证：

(1) $a=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots}}}}$

(2) $a=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+a}}}}$.

思路：这是两个简单的迭代问题。(1) 中可用迭代关系式$x=\sqrt{1-x}$，对x反复迭代。(2) 中可用迭代关系式$x=\dfrac{1}{1+x}$对x反复四次代换即可。

解：(1) $\because\quad x^2+x-1=0$，$\therefore\quad a^2+a-1=0$，

又 $a>0$，∴ $a=\sqrt{1-a}$，

反复代换右式中的 a，

可得 $a=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots}}}}$ 成立。

(2) 由已知，得 $x=\dfrac{1}{1+x}$，

即 $a=\dfrac{1}{1+a}$，对右式中 a 反复代换

可得 $a=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+a}}}}$。

例5 若 $x>2$，试说明满足等式

$$x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}$$ 的 x 值不存在。

思路：利用条件 $x>2$ 可得关系式 $x>\sqrt{x+2}$，再用逐一代入方法得 $x>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}$ 即可。

解：∵ $x>2$，∴ $x^2>2x>x+2$，

∴ $x>\sqrt{2+x}$ 成立。

两端同加2得 $x+2>2+\sqrt{2+x}$，∴ $x^2>2+\sqrt{2+x}$，

因此 $x>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$。

仿照上面方法 $x+2>2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$，

∴ $x^2>2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$，

∴ $x>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}$。

再仿上面的方法可得 $x>\sqrt{2+\sqrt{2+2+\sqrt{2+x}}}$，

$\therefore$ 满足 $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}$ 的 x 值不存在。

例6 设 $\sqrt{10}=a$，b 是 a 的小数部分，求 $a-\frac{1}{b}$ 的值。

思路： 先确定 $\sqrt{10}$ 的小数部分是 $\sqrt{10}-3$，然后代入到 $a-\frac{1}{b}$ 中。

解： $\because$ $\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1}$，$\therefore$ $\sqrt{10}$ 的整数部分是3，

因而 $b=\sqrt{10}-3$，

于是 $a-\frac{1}{b}=\sqrt{10}-\frac{1}{\sqrt{10}-3}$

$$=\sqrt{10}-\sqrt{10}-3=-3.$$

本题目可推广到一般情形：

设 $\sqrt{n^2+1}=a$，b 是 a 的小数部分，则 $a-\frac{1}{b}=-n$（n 是自然数）。请读者自己完成它的证明。

例7 若 a、b、c 是已知数，$ax^2=by^2=cz^2$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，$x>0$，$y>0$，$z>0$。试求 $\sqrt{ax+by+cz}$ 的值。

思路： 利用 $ax^2=by^2=cz^2$，将被开方式 $ax+by+cz$ 化成 $\frac{ax^2}{x}+\frac{by^2}{y}+\frac{cz^2}{z}=ax^2$。$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=ax^2$，

得出$\sqrt{ax+by+cz}=\sqrt{ax^2}$，即$\dfrac{\sqrt{ax+by+cz}}{x}=\sqrt{a}$，

类似地，$\dfrac{\sqrt{ax+by+cz}}{y}=\sqrt{b}$，$\dfrac{\sqrt{ax+by+cz}}{z}=\sqrt{c}$，

再由$\sqrt{ax+by+cz}=\sqrt{ax+by+cz}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$得出结果。

解：设 $u=\sqrt{ax+by+cz}=\sqrt{\dfrac{ax^2}{x}+\dfrac{by^2}{y}+\dfrac{cz^2}{z}}$

$$=\sqrt{ax^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)},$$

又 $x>0$， $\therefore$ $\sqrt{a}=\dfrac{u}{x}$。

同理$\sqrt{b}=\dfrac{u}{y}$，$\sqrt{c}=\dfrac{u}{z}$，

$\therefore$ $\sqrt{ax+by+cz}=u\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

$=\dfrac{u}{x}+\dfrac{u}{y}+\dfrac{u}{z}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$。

例8 已知$0<x<1$，求$\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right.$

$\left.+\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}-\dfrac{1}{x}\right)$的值。

思路：由 $0<x<1$ 可得出$1-x=\sqrt{(1-x)^2}$

$=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}$，那么$\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}$

$$=\frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}},$$

而$\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$，最后作两个因式的积运算。

解： 原式$=\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right.$

$$\left.+\frac{\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}-\sqrt{(1-x)^2}}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=-1。$$

例 9 已知实数a、b满足$a^2+b^2-a^2b^2=0$，$a\cdot b<-2$，求证

$$\frac{\left(a\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}+b\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}\right)^2}{ab(ab+2)}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2.$$

思路： 先将左式中的平方式展开，利用已知条件$a^2+b^2=a^2b^2$得出$1-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}$，$1-\frac{1}{b^2}=\frac{1}{a^2}$，分别代入根号内，应用二次根式的性质及$a\cdot b<-2$的条件化简根式来求得左式的最简形式。

证明： 左式＝

$$\frac{a^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)+2ab\sqrt{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)}+b^2\left(1-\frac{1}{b^2}\right)}{ab(ab+2)}$$

$$=\frac{a^2+b^2-2+2ab\sqrt{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)}}{ab(ab+2)}$$

而 $a^2+b^2=a^2b^2$，∴ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$。

于是 $\frac{1}{a^2}=1-\frac{1}{b^2}$，$\frac{1}{b^2}=1-\frac{1}{a^2}$，又 $ab<-2$，

$$\therefore\ 左式=\frac{a^2+b^2-2+2ab\sqrt{\frac{1}{a^2b^2}}}{ab(ab+2)}$$

$$=\frac{a^2b^2-2+2ab\cdot\frac{1}{|ab|}}{ab(ab+2)}$$

$$=\frac{a^2b^2-4}{ab(ab+2)}=\frac{ab-2}{ab}=1-\frac{2}{ab}.$$

$$右式=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{2}{ab}=1-\frac{2}{ab},$$

∴ 左边=右边。

例10 如果 $a>1$，$x=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$，$y=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$，试比较 x 与 y 的大小关系。

思路：利用x、y的有理化因式分别是$\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$，$\sqrt{a}+\sqrt{a-1}$及结论 $b>0$，$c>0$。若 $b>c$，则 $\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$ 来判定 x、y 的大小。

解：∵ $a>1$，∴ $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{a}+\sqrt{a-1}$，

即 $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}>\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}$，

∴ $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}<\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$，

∴ $x<y$。

例11 设$\sqrt{3}$在$\dfrac{x+3}{x}$与$\dfrac{x+4}{x+1}$之间，求正整数x的值。

思路：先通过判定$\dfrac{x+3}{x}-\dfrac{x+4}{x+1}$的符号，决定$\dfrac{x+3}{x}$与$\dfrac{x+4}{x+1}$的大小关系，再解两个不等式，找出使两个不等式同时成立的整数x。

解：∵ $x>0$，∴ $\dfrac{x+3}{x}-\dfrac{x+4}{x+1}=\dfrac{3}{x(x+1)}>0$，

∴ $\dfrac{x+3}{x}>\dfrac{x+4}{x+1}$，即 $\dfrac{x+4}{x+1}<\sqrt{3}<\dfrac{x+3}{x}$。

由 $\dfrac{x+4}{x+1}<\sqrt{3}$，得 $x+4<\sqrt{3}x+\sqrt{3}$，

$x>\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$，

又 $\sqrt{3}<\dfrac{x+3}{x}$，得 $x<\dfrac{3}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$。

∴ $3.09<x<4.09$，∴ $x=4$。

例12 设x、y、z都是正数，求证$\sqrt{x^2+y^2+xy}+\sqrt{y^2+z^2+yz}>x+y+z$。

思路：利用配方法，使原式左边$=\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}}+\sqrt{\left(z+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3z^2}{4}}$，而$\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}}>x+\frac{y}{2}$，$\sqrt{\left(z+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3z^2}{4}}>z+\frac{y}{2}$即可。

证：$\because$ $x>0$，$y>0$，$\therefore$ $\sqrt{x^2+y^2+xy}=$

$$\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}}>x+\frac{y}{2},$$

同理 $\sqrt{y^2+z^2+yz}=\sqrt{\left(z+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3z^2}{4}}>z+\frac{y}{2}$，

$\therefore$ $\sqrt{x^2+y^2+xy}+\sqrt{y^2+z^2+yz}>$

$\left(x+\frac{y}{2}\right)+\left(z+\frac{y}{2}\right)=x+y+z$。

例13 求 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}$的整数部分。

思路：先推导不等关系$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$，再分别令$n=2$，$3\cdots$，$100$，得出99个不等式，进行同向相加，最后判定结果。

解：$\because$ $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$<\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\ (n\text{为自然数}),$$

又 $2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$$>\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$ （n为自然数），

$\therefore\quad 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$.

令 $n=2,\ 3,\ 4\cdots,\ 100$，得

$$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2\sqrt{1},$$

$$2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2},$$

$$2\sqrt{5}-2\sqrt{4}<\frac{1}{\sqrt{4}}<2\sqrt{4}-2\sqrt{3},$$

……

$$2\sqrt{101}-2\sqrt{100}<\frac{1}{\sqrt{100}}<2\sqrt{100}-2\sqrt{99},$$

相加，$2\sqrt{101}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}$

$<2\sqrt{100}-2\sqrt{1}$

$\because\quad 2\sqrt{101}-2\sqrt{2}>2\sqrt{100}-2\sqrt{2}>2\sqrt{100}$

$-2\times\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}<\frac{3}{2}\right)=20-3=17$

$\therefore\quad 17<2\sqrt{101}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}$

$<2\sqrt{100}-2\sqrt{1}=18$

$\therefore\quad 17<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}<18$

$$18<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}<19,$$

则原式的整数部分为18。

例14 若$a\geqslant 1$，求满足$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$的x的值。

思路：为寻找x与$\sqrt{a+x}$之间的更直接的关系，可设$y=\sqrt{a+x}$，则$x^2=a-y$。通过对原等式两侧的平方，得出x与y之间的可解方程。

解：$\because\quad x>0,\ x^2=a-\sqrt{a+x},$

设 $y=\sqrt{a+x}$，$\therefore x^2=a-y$。

由 $x^2-y^2=a-y-(a+x)$，即 $x^2-y^2=-(x+y)$，

$\therefore\quad (x+y)(x-y+1)=0$。

但$a\geqslant 1$，$x\geqslant 0$，则$y>0$，$\therefore\quad x+y\neq 0$。

于是 $x-y+1=0$，即 $x+1=\sqrt{a+x}$。

平方得 $x^2+x+1-a=0$，$x>0$，

$$\therefore\quad x=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}.$$

例15 设a、b、c为整数且不全为零，求证

$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\neq 0$。

思路：用反证法证明，通过施行逆运算，找出矛盾。

证明：假设 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$， ①

移项平方得 $a^2+2ab\sqrt{2}+2b^2=3c^2$，

$\because\quad \sqrt{2}$是无理数，$\therefore\quad ab=0$。

i）若$b=0$，则①式为$a+c\sqrt{3}=0$。由于$\sqrt{3}$是无理数，$\therefore\quad a=c=0$。这与已知条件相矛盾。

ii）若$b\neq 0$，$a=0$，则①式为$b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$，显

然 $c\neq0$，∴ $\dfrac{b}{c}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，即 $\dfrac{b}{c}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$。

但 b、c 是整数，∴ $\dfrac{b}{c}$ 为有理数。而 $\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$ 却是无理数，所以这是矛盾的等式。

综上所述 $ab\neq0$，即 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\neq0$。

（三）练习题

1. 从下列各数中，找出最小的正数：

$a=10-3\sqrt{11}$；$b=3\sqrt{11}-10$；$c=18-5\sqrt{13}$；

$d=51-10\sqrt{26}$；$e=10\sqrt{26}-5$。

2. 计算

$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$。

3. 计算

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

4. 计算

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2.$$

5. 将 $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 分母有理化。

6. 将 $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$ 分母有理化。

7. 化简根式$\sqrt{\dfrac{m}{n}}$（m、n是实数$n\neq 0$）。

8. 将$a\sqrt{\dfrac{b}{a}}$、$(a-2)\sqrt{b}$的根号外字母，移到根号内。

9. 如果a、b、c是正数，$\sqrt{abc}=1$，求

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}+\sqrt{a}+1}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{bc}+\sqrt{b}+1}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{ac}+\sqrt{c}+1}$$的

值。

10. 当$2<x<6$时，化简

$\sqrt{4x^2-12x+9}+|x-6|+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}$。

11. 化简$x+1+\sqrt{|x|^2-2|x|+1}$。

12. 化简$\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}$。

13. 如果$(\sqrt{2}+1)\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(a-2)^2}$，求$a$。

14. 计算$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$（不查表）。

15. 计算$(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)^2$。

16. 如果$5+\sqrt{7}$和$5-\sqrt{7}$的小数部分分别是a和b，求$ab-4a+3b-12$的值。

17. 设$\sqrt{3}=a$，$\sqrt{10}=b$，求$\sqrt{2.7}$的值。

18. 若$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots=a_n-a_{n-1}=d\neq 0$（$n$是大于1的自然数）。化简

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\cdots+$$

$\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$.

19. 设 $x=\sqrt{2}+1$，求证

$$\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}}}.$$

20. 计算 $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$.

21. 已知 m、n 都是大于1的整数，且 $m^n=n^m$，$n=9m$，求 m 的值.

22. 计算 $\dfrac{\sqrt{(4+\sqrt{15})^3}+\sqrt{(4-\sqrt{15})^3}}{\sqrt{(1+\sqrt{35})^3}+\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}}$.

23. 命题："x、y 都是无理数，那么 x^y 是无理数。"是否正确？试说明理由.

24. 解关于 x 的方程 $\dfrac{\sqrt{x^4}}{x}-4\sqrt{x^2}=a$.

25. 求方程 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x}}}}=z$ 的整数解.

26. 解方程 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

（四）答案与提示

1. a、d、e 为正数，且 d 为最小正数.

2. 104.

3. 1.

4. 2.

5. $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

6. $3(\sqrt[3]{3}-1)$.

7. $\begin{cases}\sqrt{mn}/n(m\geqslant 0\ \ n>0),\\ -\sqrt{m\cdot n}/n(m<0\ \ n<0)\end{cases}$.

8. $\begin{cases}\sqrt{ab}\ (a>0),\\ -\sqrt{ab}\ (a<0),\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{(a-2)^2b}(a\geqslant 2),\\ -\sqrt{(a-2)^2b}(a<2).\end{cases}$

9. 1.

10. $x-2$.

11. 原式 $=x+1+||x|-1|$

$$=\begin{cases}x+1+x-1=2x(x\geqslant 1),\\ x+1-(x-1)=2(0\leqslant x<1),\\ x+1-(-x-1)=2x+2(-1<x<0),\\ x+1+(-x-1)=0(x\leqslant -1).\end{cases}$$

12. $a\geqslant 2$，原式 $=\dfrac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}{\sqrt[4]{4a}}$

$$=\frac{\sqrt[4]{4a^3}(\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2})}{2a}.$$

13. $a=1$ 或 $a=3$.

14. 原式 $=\sqrt{(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2}$

$$=\sqrt{6+2\sqrt{4}}=\sqrt{10}.$$

15. 利用公式 $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$，原式 $=4\sqrt{3}$.

16. $a=\sqrt{7}-2$，$b=3-\sqrt{7}$，代入得 $-8-2\sqrt{7}$.

17. $\sqrt{2.7}=\sqrt{0.3\times 9}=3\sqrt{\dfrac{3}{10}}=\dfrac{3a}{b}$.

18. 各项分母有理化，原式＝ $(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})/d$.

19. 利用 $\sqrt{2}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$，进行反复迭代即可。

20. 原式 $=-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$

$$=-\sqrt[6]{(\sqrt{2}-1)^2}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$$

$$=-\sqrt[6]{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=-1.$$

21. 由 $\sqrt[m]{m^n}=n=9m$ 得 $m^8=9$，$m=\sqrt[4]{3}$.

22. 设 $m=\sqrt{(4+\sqrt{15})^3}+\sqrt{(4-\sqrt{15})^3}$，得

$m^2=490$，∴ $m=7\sqrt{10}$.

设 $n=\sqrt{(6+\sqrt{35})^3}-\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}$，可得 $n=$

$13\sqrt{10}$，原式 $=\dfrac{m}{n}=\dfrac{7}{13}$.

23. 命题不对。例如 $x=\sqrt{3}$，$y=\sqrt{2}$。若 $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ 是无理数，则 $[(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}=(\sqrt{3})^2=3$ 也应是无理数，这显然是不对的。

24. ∵ $x-4|x|=a$，当 $x>0$ 时，$x=-a/3$。

此时，若 $a<0$，方程的解为 $x=-a/3$；若 $a\geqslant0$，方程无解；当 $x<0$，$5x=a$。

此时，若 $a<0$，方程的解为 $x=a/5$；若 $a\geqslant0$，方程无解。

25. 平方得 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots\sqrt{x}}}}=z^2-x$。若 z、x 为整数，则 z^2-x 也是整数，重复上面的方法，最后可得出 $\sqrt{x+\sqrt{x}}=m$ 和 $\sqrt{x}=k$。m、k 是整数，可是 $x=k^2$ 且 $x+\sqrt{x}=m^2$，∴ $k^2+k=m^2$，即 $k(k+1)=m^2$。但是

$k^2<k(k+1)<(k+1)^2$，因而仅当 $k=m=0$ 时，满足 $k(k+1)=m^2$ 成立，则原方程的整数解是 $\begin{cases} x=0 \\ z=0. \end{cases}$

26. 原方程可化成

$\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{(x-1)-6\sqrt{x-1}+9}=1,$

$\therefore\quad |\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1.$

i) 当 $0\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 2$，即 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时，

由 $2-\sqrt{x-1}+(3-\sqrt{x-1})=1,$

即 $\sqrt{x-1}=2,$

得出 $x=5.$

ii) 当 $2<\sqrt{x-1}<3$，即 $5<x<10$ 时，

由 $\sqrt{x-1}-2+(3-\sqrt{x-1})=1$ 是恒等式，

此时 $5<x<10$ 均为方程的解。

iii) 当 $\sqrt{x-1}\geqslant 3$，即 $x\geqslant 10$ 时，

由 $\sqrt{x-1}-2+(\sqrt{x-1}-3)=1$，得 $x=10.$

$\therefore$ 原方程的解为 $5\leqslant x\leqslant 10$ 中的任何实数。

三 一元二次方程

一元二次方程是中学数学中的一类重要方程，解一元二次方程是解其它复杂方程的基础．它的根的判别式和韦达定理的理论在解题中有着广泛的应用．因此，以一元二次方程为素材的问题在初中数学竞赛中经常出现，这里仅就一元二次方程的有关解法作以介绍．

（一）基本原理

1．因式分解法

若方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）可以化成 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$（$a\neq0$），则方程 $x-x_1=0$ 和 $x-x_2=0$ 的根就是原方程的两个根．这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法．

（1）没有常数项的非完全二次方程 $ax^2+bx=0$（$a\neq0$）常用因式分解法（提出公因式）求解．

（2）完全二次方程 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 都不等于零）有时用因式分解法（十字相乘法）求解．

2．开平方法

如果方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）经过配方，可以化成 $(x+p)^2=q$（$q\geqslant0$），那么根据平方根的意义，方程 $x+p=\sqrt{q}$ 和 $x+p=-\sqrt{q}$ 的根就是原方程的两个根，这种解一

元二次方程的方法叫做开平方法。

(1) 没有一次项的非完全二次方程 $ax^2+c=0$ (a、c 异号) 常使用开平方法。

(2) 开平方法也可以用于解完全二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (a、b、c 都不等于零)。

3. 配方法

什么是配方法呢？把一个不是完全平方形式的多项式中的某些项配成完全平方。其具体配法是：把含有未知数的项集中在等号左边，对照公式 $(x\pm a)^2=x^2\pm 2ax+a^2$，补上恰当的项以配成完全平方式，然后再开方解之，这种解一元二次方程的方法叫做配方法。

4. 公式法

(1) $ax^2+bx+c=0(a\neq 0,\ b^2-4ac\geqslant 0)$ 的求根公式是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(2) 把方程先化成一般形式，然后把各项的系数（包括常数项）代入根的公式，直接求得方程的根，这种解一元二次方程的方法叫做公式法。

（二）范例与方法

例 1 解关于 x 的方程

$$(m^2-m)x^2-(2m^2-1)x+m^2+m=0(m\ 为实数).$$

思路：因为此方程中 m 是不定常数，所以不应肯定它是二次方程，而应该讨论。

解：当 $m=0$ 时，$x=0$；当 $m=1$ 时，$x=2$；当 $m\neq 0$ 且 $m\neq 1$ 时，$x=\frac{m+1}{m}$ 或 $x=\frac{m}{m-1}$。

【**说明**】 解含有字母系数的方程不要盲目解之，而要加以讨论。

例 2 解方程 $x^2+1+4(x-1)\sqrt{x}+2x=1$。

思路：将方程左边配成完全平方式，可迅速求出其解。

解：将原方程配方，有

$x^2-2x+1+4(x-1)\sqrt{x}+4x=1$，

$(x-1)^2+4(x-1)\sqrt{x}+(2\sqrt{x})^2=1$，

$(x-1+2\sqrt{x})^2=1$，

$\therefore\quad x-1+2\sqrt{x}=\pm 1$，

解得 $x_1=4+2\sqrt{3}$，$x_2=4-2\sqrt{3}$，$x_3=0$。

经检验 $x_2=4-2\sqrt{3}$，$x_3=0$ 是原方程的解。

【**说明**】 上例的解法是先配成完全平方，再用开平方法解之。这是解决某些无理方程、高次方程的一种重要方法。

例 3 已知 x、y 为实数，且 $5x^2-6xy+2y^2-4x+2y+1=0$，求 x 和 y。

思路：先拆项，后配方，最后运用非负数性质解方程（组）。

解：原方程变形为

$(4x^2+y^2+1-4xy-4x+2y)+(x^2-2xy+y^2)=0$，

$(2x-y-1)^2+(x-y)^2=0$，得 $\begin{cases}2x-y-1=0,\\ x-y=0.\end{cases}$

解之，得 $x=1$，$y=1$。

男法：由已知可得 $5x^2-(6y+4)x+(2y^2+2y+1)=0$

若此方程有实数解，则必有判别式大于或等于零，即

$$[-(6y+4)]^2-4\times5(2y^2+2y+1)\geqslant0,$$

从而可得 $(y-1)^2\leqslant0$，于是得 $y=1$，代入原式可求 $x=1$。

【说明】 求一个二元二次方程的实数解，有时可利用判别式来解。

例 4 解方程 $x^3+2ax^2+a^2x+a-1=0$ $(a>1)$。

思路： 解以 x 为未知数的三次方程，变解以 a 为未知数的二次方程。

解： 将原方程变形为按a的降幂排列，

$$xa^2+(2x^2+1)a+x^3-1=0,$$

把 a 看作未知数，x 看作已知数，解得

$$a=\frac{-(2x^2+1)\pm\sqrt{(2x^2+1)^2-4x(x^3-1)}}{2x}$$

即
$$a=1-x\text{ 或 }a=-\frac{x^2+x+1}{x}.$$

$$\therefore\quad x_1=1-a,x_{2,3}=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{(a+3)(a-1)}}{2}$$

【说明】 公式法是解一元二次方程的根本方法。解以 x 为未知数的方程，变为解以 a 为未知数的方程，是思维敏捷性与灵活性的一个体现。

例 5 求证方程 $x+10mx-5n+3=0$ 没有整数根（m、n 都是整数）。

思路： 先求出方程的根，再根据完全平方数的特点讨论被开方数是否是完全平方数。

解： 由求根公式 $x=\dfrac{-10m\pm\sqrt{(10m)^2-4(-5n+3)}}{2}$，

$x_{1,2}=-5m\pm\sqrt{25m^2+5n-3}$，只要证明 $25m^2+5n-3$ 不是一个完全平方数即可。

$\because$ $25m^2+5n=5(5m^2+n)$ 是 5 的倍数，其末位数是0或 5。

$\therefore$ $25m^2+5n-3$ 的末位数只能是 2 或 7 两数之一。而一个完全平方数的末位数只能是 0、1、4，5、6、9 六个数之一，故 $25m^2+5n-3$ 不可能是完全平方数。

$\therefore$ 原方程没有整数根。

本题还可用反证法来证。

假设原方程有整数根 x_0，则必有

$x_0^2+10mx_0-5n+3=0$，即 $x_0^2+3=5n-10mx_0$……①

$\because x_0^2$ 的末位数只能为0，1，4，5，6，9，故 x_0^2+3 不是 5 的倍数，而 $5n-10mx_0$ 是 5 的倍数，从而与 (1) 式矛盾。

$\therefore$ 原方程没有整数根。

【说明】 研究方程根的整数性及方程的有理根等，是研究与解方程有关问题之一。

证明方程没有整数根，没有有理根等问题有时可用反证法。

例 6 当 $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p+q}$ 时，求 $\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}$ 的值。

思路： 由已知等式，化成以 $\dfrac{q}{p}$ 为未知数的一元二次方程解之。

解： 由已知 $(p+q)q-(p+q)p-pq=0$，即

$q^2-pq-p^2=0$，除以 p^2 得 $\left(\dfrac{q}{p}\right)^2-\left(\dfrac{q}{p}\right)-1=0$，

由 根公式 $\dfrac{q}{p}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，

当 $\dfrac{q}{p}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$

$$=\sqrt{5},$$

当 $\dfrac{q}{p}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 时，$\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}$

$$=-\sqrt{5}.$$

【说明】 用求方程根的方法求代数式的值，是与解方程有关问题之二。

（三）练习题

1. 选择题：

(1) 方程 $x|x|-3|x|+2=0$ 的实数根为

(A) 1 个。(B) 2 个。(C) 3 个。(D) 4 个。

(2) 方程 $x^2-3|x|-2=0$ 的最小一个根的负倒数是

(A) -1。(B) $-\dfrac{1}{2}$。(C) $\dfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{17})$。

(D) $\dfrac{1}{4}(\sqrt{17}-3)$ 。

(3) 下面四个一元二次方程中只有有理根的是

(A) $x^2-4x-8=0$。 (B) $x^2-4x-12=0$。

(C) $x^2-4x-1=0$。(D) $x^2-4x+8=0$。

2. 填充题：

(1) 方程 $x^2-|2x-1|-4=0$的实根为 ______。

(2) 方程 $x^2-|2x-1|-4=0$的解是 ______。

(3) 方程 $x=(x^2-2)^2-2$ 的解是 ______。

3. 解下列方程（组）：

(1) $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$

(2) $x^4+6x^3+8x^2-6x-9=0$。

(3) 求方程$(x^2+1)(y^2+4)-8xy=0$ 的实数解。

(4) $14x^2-4xy+11y^2-88x+34y+149=0$。

(5) $|x^2+3x-4|=|2x-1|-1$。

(6) $(\sqrt{2}+1)x^2-3(2+\sqrt{2})x+2\sqrt{2}+1=0$。

4. 与解方程有关问题：

(1) 方程 $(1987x)^2-1986\cdot1988x-1=0$ 的较大根为 r，$x^2+1987x-1988=0$ 的较小根为 s。求 $r-s$ 的值。

(2) 设 m 不为零，整系数方程 $mx^2-(m-1)x+1=0$ 有有理根，求m 的值。

(3) 已知 a、b 是不等的实数，且 $a^2=5-3a$，$b^2=5-3b$，求a^3+b^3的值。

(4) 求$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 的值。

(5) 如图3—1，有矩形 $ABCD$ 一块，要在中央修建一矩形 $EFGH$ 花圃，使其面积为这块地面积的一半，且花圃四周的道路相等，今无测量工具，只有无刻度的足够长的绳子一条，如何量出道路的宽度？

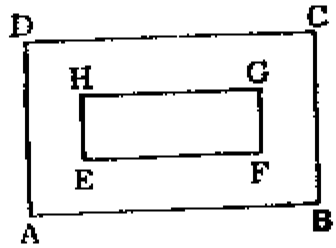


图 3—1

（四）答案与提示

1. (1) C； (2) D； (3) B。

2. (1) 当 $x \geqslant \frac{1}{2}$时，$x=3$； 当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$x=1-\sqrt{6}$。

(2)、(3) 略。

3. (1) 当 $a=b=c$ 时，x 取任意值；

当 $a=b\neq c$ 时，$x=1$；

当 $a\neq b$ 时，$x=\dfrac{c-b\pm(2a-b-c)}{2(a-b)}$。

(2) 将原方程配方 $(x^2+3x)^2-(x+3)^2=0$，

$x_1=-1$，$x_2=-3$，$x_3=-3$，$x_4=1$。

(3) 化原方程为 $(xy-2)^3+(2x-y)^2=0$，

$x=1$，$y=2$ 或 $x=-1$，$y=-2$。

(4) $x=3$，$y=-1$。

(5) $x_1=1$，$x_2=\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2}$，$x_3=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$。

(6) 先将$(\sqrt{2}-1)$乘两边。

$x_1=\sqrt{2}-1$，$x_2=2\sqrt{2}+1$。

4. (1) 应用"方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$，若$a+b+$

$c=0$，则方程两根为 1 和 c/a"。$r-s=1989$。

(2) 由求根公式 $x=\dfrac{m-1\pm\sqrt{m^2-6m+1}}{2m}$，因为原方程有有理根，∴ m^2-6m+1 是完全平方数。设$(m-3)^2-8=k^2$（k是非负数），$(m-3+k)(m-3-k)=8$，

$m-3+k$，$m-3+k$是整数，$m-3+k\geqslant m-3-k$。

故它们可取数值如下：

$m-3+k$	8	4	-1	-2
$m-3-k$	1	6	-8	-4

两边相加得 $2(m-3)=9$、6、-9、-6。

∵ $m-3$ 也是整数，∴ $m-3=3$、-3，

$m\neq 0$，于是 $m=6$。

(3) 由已知可知 a、b 均是方程 $x^2=5-3x$ 的根，

∴ $a+b=-3$，$ab=-5$，$a^3+b^3=-72$。

(4) 设 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 两边同时立方，得关于 x 的方程，其值得 1。

(5) 设道路的宽度为 x，$AB=a$，$AD=b$，则有 $(a-2x)(b-2x)=\dfrac{1}{2}ab$，$8x^2-4(a+b)x+ab=0$，∴ $x=\dfrac{1}{4}[(a+b)\pm\sqrt{a^2-b^2}]$。

当根号前取 "+" 号时，

$$2x=[(a+b)+\sqrt{a^2+b^2}]/2>\frac{a+2b}{2}>b(\text{舍去})。$$

故取 $x=[(a+b-\sqrt{a^2+b^2}]/4$，由宽 x 得如下量法：用绳量出 $AB+BD$(即 $a+b$)之长，从中减去 BD 之长($BD=\sqrt{a^2+b^2}$，得 $l=AB+AD-BD$，再将 l 对折两次即得到道路的宽。∴ $x=(AB+AD-BD)/4=(a+b-\sqrt{a^2+b^2})/4$。

四　可化为一元二次方程的方程及二元二次方程组

（一）基本原理

1．一元高次方程

方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$（$a_0\neq0$，$n$为自然数，$n>2$）称为高次方程

中学阶段只能解一些特殊的高次方程，即可化为一元一次、一元二次方程的高次方程。解高次方程的关键是“降次”，“降次”的常用方法有因式分解法或换元法。这里再给出一种“降次”的方法，利用含有x的多项式$f(x)$能被$x-a$整除的条件是$f(a)=0$即多项式含有因式$x-a$。∴$f(x)=(x-a)g(x)$，$g(x)$的次数比$f(x)$低一次。

2．分式方程

分母中含有未知数的有理方程叫做分式方程。

解分式方程常用的方法是去分母或换元法，将分式方程转化为整式方程去解，但要注意检验根。

3．无理方程

根号内含有未知数的方程叫做无理方程。

解无理方程的常用方法是乘方法或换元法。将无理方程转化为有理方程去解。不妨，这里再介绍两种方法，一种是

配方法，另一种是利用合、分比定理法。但要注意检验根。

4. 二元二次方程组

把二元二次方程组分为两大类来研究解法。

第一类型$\begin{cases} mx+ny+p=0, \\ ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0. \end{cases}$

这里的a、b、c不全为零，m、n也不能全为零，一般用代入消元法求解。

第二类型 $\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0. \end{cases}$

这里的a_1、b_1、c_1不全为零，a_2、b_2、c_2也不全为零，对于第二类方程组只能解其中一些特殊型，可根据各自的特点，选用适当的方法如代入法、加减法或因式分解法进行消元、降次来求解。

（二） 范例与方法

1. 可化成一元二次方程的方程

例1 解下列方程

（1）$2x^4+5x^2-12=0$；（2）$x^3-2x^2+1=2x$；

（3）$2x^3-7x^2+7x=2$。

思路：因式分解法。

解：（1）原方程变为 $(2x^2-3)(x^2+4)=0$，

$x^2+4=0$无实根，由$2x^2-3=0$得

$$x_1=\frac{\sqrt{6}}{2},\ x_2=-\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$x_2=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$。

(2) 由原方程得 $(x+1)(x^2-3x+1)=0$，

$x_1=-1$，$x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{5}$，$x_3=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore$ 原方程的根为$x_1=-1$，$x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，

$$x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

(3) 由原方程得$(x-1)(2x^2-5x+2)=0$，

$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 原方程的根为$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=\dfrac{1}{2}$。

【说明】 因式分解法解高次方程多用分组分解法及结合求根公式来求解。

例2 解下列方程

(1) $(x^2-3x)^2+4(x^2-3x)-21=0$；

(2) $(x^2+7x+5)^2-3x^2-21x=19$；

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=1\cdot2\cdot3\cdot4$。

思路： 适当变形，通过恰当换元，把高次式化为低次式，求解就易于着手了。

解： (1) 设 $y=x^2-3x$，则 $y^2+4y-21=0$，解之 $y_1=3$，$y_2=-7$，把y_1、y_2代入$y=x^2-3x$，

得 $x^2-3x=-7$无实根，由$x^2-3x=3$，得

$$x_1=\frac{3+\sqrt{21}}{2},\ x_2=\frac{3-\sqrt{21}}{2}.$$

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{21}}{2}$.

(2) 原方程可化为

$$(x^2+7x+5)^2-3(x^2+7x+5)-4=0.$$

设 $y=x^2+7x+5$，则 $y^2-3y-4=0$，解之

$y_1=4$，$y_2=-1$，把y_1、y_2代入 $y=x^2+7x+5$，得

$x^2+7x+5=4$，解得 $x_1=\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}$,

$$x_2=\frac{-7-3\sqrt{5}}{2},$$

$x^2+7x+5=-1$，解得$x_3=-1$，$x_4=-6$.

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}$,

$$x_2=\frac{-7-3\sqrt{5}}{2},$$

$$x_3=-1,\ x_4=-6.$$

(3) 原方程可化为

$$[(x^2+5x+4)(x^2+5x+4)+2]-24=0,$$

设 $y=x^2+5x+4$，则$y(y+2)-24=0$,

解之 $y_1=-6$，$y_2=4$，代入$y=x^2+5x+4$，得

$x^2+5x+4=-6$，无实根.

由 $x^2+5x+4=4$，得

$$x_1=0,\ x_2=-5.$$

∴ 原方程的根为$x_1=0$，$x_2=-5$。

【说明】 利用换元法解高次方程难在变形，变形目的是方便换元，所以，变形时必须变一观二（即变化一步往下面再看两步）。换元后主要是为了简化原式的形式，使求解工作易于完成。

例3 解方程$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$。

思路： 因方程左端多项式的对称项系数相等。两边除以x^2后（$x=0$显然不是方程的根）把系数相同项结合，再利用换元法求解。

解： 因$x=0$不是方程的根，用x^2去除方程两边得

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0,$$ 再变形为

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-20=0,$$

令 $y=x+\dfrac{1}{x}$，

则 $2y^2+3y-20=0$，解之 $y_1=-4$，$y_2=\dfrac{5}{2}$。

把 y_1、y_2代入 $y=x+\dfrac{1}{x}$，得$x+\dfrac{1}{x}=-4$ ①，

$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ ②，解①得$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$，

解②得 $x_3=2$，$x_4=\dfrac{1}{2}$。

∴ 原方程的根为$x_1=-2+\sqrt{3}$，

$$x^1=-2-\sqrt{3},\ x_3=2,\ x_4=\frac{1}{2}.$$

【注意】 ①当 $x=0$不是方程的根时，方可用 x^2 去除方程的两边，②应用 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$变形时，注意方程的平衡性。③这种方程叫做倒数方程。它有一个明显的性质，即若 a 是方程的根，则 $\frac{1}{a}$必是方程的根。本例中 x_1 与 x_2互为倒数；x_3 与x_4互为倒数。

这个性质可简化验根步骤，若求根有误可用这个性质查找。

例4 解方程$x^5-2x^4-5x^3-5x^2-2x+1=0$。

思路：可利用$f(x)=(x-a)\cdot g(x)$得$g(x)$，再按例 3的方法解 $g(x)=0$的方程。

解：显然$x=-1$是方程$f(x)=0$的根，用$x+1$去除$f(x)=x^5-2x^4-5x^3-5x^2-2x+1$，得$g(x)=x^4-3x^3-2x^2-3x+1$，解$g(x)=0$的方程。

变形 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0.$$

令 $y=x+\frac{1}{x}$，则 $y_2-3y-4=0$。

解之 $y_1=-1$，$y^2=4$。把y_1、y_2代入 $x+\frac{1}{x}=y$,

得 $x+\frac{1}{x}=-1$无实根。

由 $x+\frac{1}{x}=4$，解得 $x_1=2+\sqrt{3}$，$x_2=2-\sqrt{3}$。

$\therefore$　原方程的根为 $x_1=2+\sqrt{3}$，$x_2=2-\sqrt{3}$

　　$x_3=-1$。

想一想，方程 $3x^5-10x^4+7x^3-7x^2+10x-3=0$如何解？

【说明】　方程左端对称项系数相等或相反数均可按例3方法解，若左端多于五个项数可利用$f(x)=(x-a)\cdot g(x)$降次，再解$g(x)=0$即可。其中$x=a$由观察而得，可把$x=a$代入左端的$f(x)$中，若$f(x)=0$，则$x=a$是原方程的一个根。

例5　解方程　$\frac{x-1}{x+1}-\frac{5x-15}{x^2-4x+3}=\frac{4}{x^2-1}$。

思路：去分母转化为整式方程再求解。

解：原方程化为

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{5(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\frac{4}{(x-1)(x+1)},$$

两边乘以$(x+1)(x-1)$，得

$$(x-1)^2-5(x+1)=4,$$

$\therefore$　$x_1=-1$，$x_2=8$。

检验$x_1=-1$增根，$\therefore$　原方程的根为$x=8$。

【注意】　解分式方程时，未知数允许值范围可能扩大，会产生增根。所以要验根，把增加的根舍去。

例6 $\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3\cdot\dfrac{4x^2+6x-1}{x^2+3x+1}-2=0$。

思路：两项分式互为倒数，可用换元方法求解。

解：设 $y=\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}$，则 $y-\dfrac{3}{y}-2=0$。

解之 $y_1=3$，$y_2=-1$，代入所设得

$$\frac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}=3,\quad x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{401}}{22},$$

$$\frac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}=-1,\quad x_3=0,\quad x_4=-\frac{9}{5}.$$

经检验都是原方程的根。

例7 解方程 $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+6}{x+7}=\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+6}$.

思路：按 $\dfrac{x+1}{x+2}=1-\dfrac{1}{x+3}$ 可把原方程变形后整理

为 $\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x+3}$ 的形式再解。

解：把方程变形为 $1-\dfrac{1}{x+2}+1-\dfrac{1}{x+7}$

$$=1-\frac{1}{x+3}+1-\frac{1}{x+6}.$$

再化简整理 $\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$,

$$\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{x^2+5x+6},$$

解得 $x=-\frac{9}{2}$。经检验 $x=-\frac{9}{2}$是原方程的根。

∴ 原方程的根为 $x=-\frac{9}{2}$。

【说明】 分子、分母均为一次式且常数项之差均相等的分式方程，可用此方法变形后再解较简便。

例8 $\frac{1}{x^2+11x-8}+\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{x^2-13x-8}=0$。

思路： 方程各项的分母均含 x^2，-8项故可设 $y=x^2-8$，采用换元法解。

解： 设$y=x^2-8$，代入原方程

$$\frac{1}{y+11x}+\frac{1}{y+2x}+\frac{1}{y-13x}=0,$$

两边乘以 $(y+11x)(y+2x)(y-13x)$，整理得

$3y^2-147x^2=0$，∴ $y=\pm 7x$。

将$y=\pm 7x$代入所设$x^2-8=7x$，得$x_1=8$，$x_2=-1$，代入所设$x^2-8=-7x$，得$x_3=-8$，$x_4=1$。

经检验都是原方程的根。

【说明】 直接去分母会产生高次方程，运算复杂，巧妙地换元把分式方程化为整式方程再解极为简便。

例9 解方程$6x^2+9x-5\sqrt{2x^2+3x-1}=5$。

思路： 先变形，再换元把它转化为有理方程后求解。

解： 把原方程变形为

$3(2x^2+3x-1)-5\sqrt{2x^2+3x-1}=2$。

设 $y=\sqrt{2x^2+3x-1}$，则$3y^2-5y-2=0$，解之$y_1=$

2，$y_2=-\frac{1}{3}$，把y_1、y_2代入所设，得$\sqrt{2x^2+3x-1}=-\frac{1}{3}$，无实数解。

由 $\sqrt{2x^2+3x-1}=2$，得$x_1=1$，$x_2=-\frac{5}{2}$。

$\therefore$ 原方程的根为$x_1=1$，$x_2=-\frac{5}{2}$。

例10 解方程$\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{3x-2}}=\frac{10}{3}$。

思路：根号下的分式互为倒数，故可用换元方法来解。

解：设 $y=\frac{3x-2}{x-1}$，则$\sqrt{y}+\sqrt{\frac{1}{y}}=\frac{10}{3}$，

把$\sqrt{y}+\sqrt{\frac{1}{y}}=\frac{10}{3}$两边平方整理，得

$$9y^2-82y+9=0,$$

解之$y_1=1/9$，$y_2=9$。

代入所设得 $x_1=\frac{17}{26}$，$x_2=\frac{7}{6}$。

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=\frac{17}{16}$，$x_2=\frac{7}{6}$。

另法：设$\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}=y$，则$\sqrt{\frac{x-1}{3x-2}}=\frac{1}{y}$。

原方程化为 $y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3}$，从而$y_1=3$ 或 $y_2=\frac{1}{3}$

从而 $x_1=\frac{7}{6}$， $x_2=\frac{17}{26}$

例11 解方程$2x^2-3x-2x\sqrt{x^2-3x+4}=21$。

思路： 拆$2x^2$项补常数项，然后利用配方的方法来解。

解： 把原方程变形为

$$x^2-3x+4-2x\sqrt{x^2-3x+4}+x^2=25,$$

配方 $(\sqrt{x^2-3x+4}-x)^2=25$，

$\sqrt{x^2-3x+4}-x=\pm5$，解之

$x_1=-21/13$，$x_2=3$。

经检验$x=3$是增根。∴ 原方程的根是$x=-21/13$。

【说明】 例9、10、11若用平方法解，其运算十分麻烦。若恰当变形用换元法解就十分简单，所以换元法对解高次、分式、无理方程都是行之有效的一种方法，应熟练掌握。

例12 解方程

$$\frac{9}{\sqrt{x-1}}+\frac{16}{\sqrt{y-2}}=20-4\sqrt{x-1}-\sqrt{y-2}.$$

思路： 先变形，然后利用非负数的性质解。

解： 将原方程变形为

$$\left(\frac{9}{\sqrt{x-1}}+4\sqrt{x-1}-12\right)+\left(\frac{16}{\sqrt{y-2}}+\sqrt{y-2}-8\right)=0,$$

即 $$\frac{(3-2\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}}+\frac{(4-\sqrt{y-2})^2}{\sqrt{y-2}}=0,$$

显然 $3-2\sqrt{x-1}=0$，∴ $x=13/4$，

$4-\sqrt{y-2}=0$，∴ $y=18$。以下略。

例13 解方程$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}$

$=35-2x$。

思路： ∵ $(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2=2x+2\sqrt{x^2+7x}$

$+7$，

∴ 可设$y=\sqrt{x}+\sqrt{x+7}$，采用换元法解。

解： 变形整理得

$2x+2\sqrt{x^2+7x}+7+\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=42$，

$(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2+\sqrt{x}+\sqrt{x+7}-42=0$，

设 $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+7}$，则$y^2+y-42=0$。

解之 $y=6$。$y=-7$。

代入所设解得 $x=841/144$即是方程的根。

另解： 设$\sqrt{x}=m$，$\sqrt{x+7}=n$，则

$$\begin{cases} m^2+7=n^2 & ① \\ m+n+2mn=35-2m^2, & ② \end{cases}$$

解①、②组成的方程组即可。

例14 解方程

$$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}=\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{2x-3b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{2x-3b}}.$$

思路： 利用合、分比定理$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$来

解。

解： 由合、分比定理得

$$\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x-b}}=\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{2x-3b}},$$

两边平方整理，得　$x^2-(a+2b)x+2ab=0$，

$$x_1=a,\quad x_2=2b.$$

所以当$x_1=a$时，$a>3b/2$。

当$x_2=2b$时，$a>2b>0$。

【注意】 此种含字母方程在求解时要注意讨论。

例15　解方程

$\sqrt[3]{(3-x)^2}-\sqrt[3]{(3-x)(5-x)}+\sqrt[3]{(5-x)^2}=0$。

思路： 两边乘以$\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{5-x}$化为有理方程解。

解： 两边乘以$\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{5-x}$后整理，得

$$-2x=-8,\quad \therefore\quad x=4.$$

经检验$x=4$是原方程的增根。∴　原方程无根。

【说明】 例12—15每题解法各异，注意观察每个方程的特点，根据其特点，选择较佳解法。

2．二元二次方程组

例1　解方程组 $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{9}\\[2mm] \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{16}.\end{cases}$

解： 将二式相加，得　$\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2=\dfrac{25}{144}$，

二式相减，得　$\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{7}{144}$，

∴　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\pm\dfrac{5}{12}$，$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\pm\dfrac{7}{60}$。

解方程组得 $\begin{cases} x_1=\dfrac{15}{4} \\ y_1=\dfrac{20}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\dfrac{15}{4} \\ y_2=-\dfrac{20}{3} \end{cases}$。

【说明】 解二元二次方程组关键是消元、降次，设法消去一个未知数得到一元二次方程或二元一次方程组再解。

例2 解方程组

(1) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=6; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 & ① \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13. & ② \end{cases}$

解：(1) 由题意可知 x、$-y$ 是方程 $z^2-z-6=0$ 的二根，其一根为3，另一根为-2，故有 $\begin{cases} x=3 \\ -y=-2, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ -y=3 \end{cases}$

∴ 方程组的解 $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-3. \end{cases}$

(2) 由①^2－②，得 $\dfrac{1}{xy}=6$，即 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}=6$。则 $\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{y}$ 是方程$z^2-5z+6=0$的二根，其一根为3，另一根为2。

即 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=2 \\ \dfrac{1}{y}=3, \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=3 \\ \dfrac{1}{y}=2. \end{cases}$

∴ 方程组的解为 $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2} \\ y_1=\dfrac{1}{3}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\dfrac{1}{3} \\ y_2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

【说明】 解这类方程组可利用根与系数的关系（即韦达定理）来解．但要善于变形．

例3 解方程组

(1) $\begin{cases} x+y+xy=6 & ① \\ x^2+y^2=12; & ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y-18=0 & ① \\ x^2+xy+y^2-19=0. & ② \end{cases}$

解：(1) 把②变形为 $(x+y)^2-2xy=12$． ③

设 $A=x+y$，$B=xy$，代入①、③得

$\begin{cases} A+B=6 \\ A^2-2B=12. \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases} A_1=-6 \\ B_1=12, \end{cases}$ $\begin{cases} A_2=4 \\ B_2=2. \end{cases}$

即 $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=12, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=2. \end{cases}$

$\therefore$ 原方程的解为

$\begin{cases} x_1=2+\sqrt{2} \\ y_1=2-\sqrt{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2-\sqrt{2} \\ y_2=2+\sqrt{2}. \end{cases}$

(2) 把①变形 $(x+y)^2-2xy+(x+y)=18$ ③

再把②变形 $(x+y)^2-xy=19$． ④

设 $A=x+y$，$B=xy$，代入③、④得

$\begin{cases} A^2-2B+A=18 & ⑤ \\ A^2-B=19, & ⑥ \end{cases}$

解⑤、⑥得 $\begin{cases} A_1=-4 \\ B_1=-3, \end{cases}$ $\begin{cases} A_2=5 \\ B_2=6. \end{cases}$

即 $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=-3, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6. \end{cases}$

∴ 原方程组的解是

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-2+\sqrt{7} \\ y_3=-2-\sqrt{7}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4=-2-\sqrt{7} \\ y_4=-2+\sqrt{7}. \end{cases}$$

【说明】 观察此方程特点是x和y互换后，原方程组不变，此类方程组称作关于x和y的对称方程组。解对称方程组的方法，适当变形，采取换元，达到降次目的，然后求解。

例4 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=\sqrt{x+y+z+1}+5 & ① \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}. & ② \end{cases}$$

解： 设 $\sqrt{x+y+z+1}=u$, ③

代入①得 $u^2-u-6=0$，则$u=3$或$u=-2$（舍去），把$u=3$代入③，得$x+y+z=8$，由②与等比定理知：

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{9},$$

又 $$\frac{x+y+z}{9}=\frac{8}{9},$$

∴ $x=\dfrac{16}{9}$, $y=\dfrac{8}{3}$, $z=\dfrac{32}{9}$.

例5 求方程$x^2+3xy+2y^2=7$的整数解。

解： ∵ $x^2+3xy+2y^2=(x+y)(x+2y)=7$,

∵ x、y为整数，7可能为$1\times7, 7\times1$, $(-1)\times(-7)$,

$(-7)\times(-1)$。

∴ 则有 ① $\begin{cases}x+y=1\\x+2y=7,\end{cases}$ ② $\begin{cases}x+y=7\\x+2y=1,\end{cases}$

③ $\begin{cases}x+y=-1\\x+2y=-7,\end{cases}$ ④ $\begin{cases}x+y=-7\\x+2y=-1.\end{cases}$

分别解上述方程组得原方程的整数解为

$\begin{cases}x=-5\\y=6,\end{cases}$ $\begin{cases}x=13\\y=-6,\end{cases}$ $\begin{cases}x=5\\y=-6,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-13\\y=6.\end{cases}$

【说明】 解方程组时，往往几种解法交错应用，无一定法，因题而定。即要运用解题技巧，又要考虑轻车熟路才能迅速、准确地求出方程组的解。

例6 某整数加上75等于一个正整数的平方，减去29等于另一个正整数的平方，求此正整数。

解：设某数为x，一个数为y，另一数为z（x、y、z均为正整数）。则有

$$\begin{cases}x+75=y^2\\x-29=z^2.\end{cases}$$

方程组两式相减 $(y+z)(y-z)=104$，

而104可能有 1×104，2×52，4×26，8×13，则

① $\begin{cases}y+z=104\\y-z=1,\end{cases}$ ② $\begin{cases}y+z=52\\y-z=2,\end{cases}$ ③ $\begin{cases}y+z=26\\y-z=4,\end{cases}$

④ $\begin{cases}y+z=13\\y-z=8.\end{cases}$ 解①，④都无整数解。

故由②得 $x=654$，$y=27$，$z=25$。

由③得 $x=150$，$y=15$，$z=11$。

∴ 所求的某正整数是654，150。

例7 某校采购员用20元钱买大笔记、小笔记、小楷本总数100本，大笔记5角一本，小笔记3角一本，小楷本一角3本，问各买多少本。

解：设大笔记 x 本，小笔记 y 本，小楷本 z 本。

则有 $\begin{cases} x+y+z=100 & ① \\ 5x+3y+\dfrac{z}{3}=200. & ② \end{cases}$

由① $z=100-x-y$ 代入②得 $y=\dfrac{250-7x}{4}$，当 $x=6$ 时，$y=52$，$z=42$。

∴ $\begin{cases} x=6 \\ y=52 \\ z=42, \end{cases}$ 同理 $\begin{cases} x=10 \\ y=45 \\ z=45, \end{cases}$ $\begin{cases} x=14 \\ y=38 \\ z=48, \end{cases}$ $\begin{cases} x=18 \\ y=31 \\ z=51, \end{cases}$

$\begin{cases} x=22 \\ y=24 \\ z=54, \end{cases}$ $\begin{cases} x=26 \\ y=17 \\ z=57, \end{cases}$ $\begin{cases} x=30 \\ y=10 \\ z=60, \end{cases}$ $\begin{cases} x=34 \\ y=3 \\ z=63. \end{cases}$

共八组正整数解。

（三） 练习题

1．选择题：

(1) 方程 $\sqrt{(x-3)^2}=x-3$ 的解是

(A) $x=3$。(B) $x\leqslant 3$。

(C) $x\geqslant 3$。(D) 不能确定。

(2) 若方程 $x^2+y^2-16=0$ 和 $y^2-3x+12=0$ 有一公共解，则x的值是

(A) -7和4。 (B) 4。 (C) 0和4。 (D) -4。

(3) 方程$\sqrt{7x-3}+\sqrt{x-1}=2$的解是

(A) $x=3$。 (B) $x=\frac{3}{7}$ (C) $x=1$。 (D) $x=2$。

(4) 方程$2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=5$的根由方程（ ）求得

(A) $4x^2-25x+4=0$。 (B) $4x^2-17x+4=0$。

(C) $2x^2-21x+2=0$。 (D) $16x^2-92x+1=0$。

(5) 满足方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{xy}$ 的非零实数 (x,y) 有多少对

(A) 一对。 (B) 2对。 (C) 无数对。(D) 不存在。

(6) 方程 $\frac{E}{x^2-5x+6}-\frac{x}{x-3}+\frac{3}{x-2}=0$ 无解，那么代数式E为

(A) -3。 (B) 0。 (C) x。 (D) 3。

2. 填充题：

(1) 已知$|x|=x^2-1$，求实数$x=$ ____。

(2) 方程组 $\begin{cases} x+y=m, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \end{cases}$ 无实数解的$m=$ ____。

(3) 若方程 $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}=0$,

其中一根是1，另两根$x_1=$______，$x_2=$______。

(4) 方程$2x^2-3x-11-2x\sqrt{x^2-3x+4}=10$的根是______。

(5) 已知方程 $a^2x+b=2bx+1$ 有无穷多解，求出 $a=$______，$b=$______。

(6) 求$xy=6$的八组整数解是______________________。

3. 解方程：

(1) $x^6-7x^2+\sqrt{6}=0$。

(2) $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=3$。

(3) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24=0$。

(4) $2x^5-x^4-8x+4=0$。

(5) $x^5+4x^4+5x^3+5x^2+4x+1=0$。

(6) $x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$。

(7) $x^6+x^4-x^2=-3x^5+3x+1$。

4. 解方程：

(1) $\dfrac{2}{1+2x}-\dfrac{3}{1-2x}=\dfrac{6}{4x^2-1}$。

(2) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}+\dfrac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\dfrac{19}{6}$。

(3) $\dfrac{x^2+4x}{x-1}+\dfrac{72(x-1)}{x(x+4)}=18$。

(4) $2x^2+\dfrac{2}{x^2}-3x-\dfrac{3}{x}=1$。

(5) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=6x+\dfrac{6}{x}$.

(6) $\dfrac{x^2-2x+3}{2x-3}=\dfrac{x^2-3x+5}{3x-5}$.

(7) $\dfrac{x-8}{x-10}+\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{x-5}{x-7}+\dfrac{x-7}{x-9}$.

5. 解方程：

(1) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x-1}=0$.

(2) $\sqrt{x+5}+2\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x}$

$=25-2x$.

(3) $2x^2+3x+2x\sqrt{x^2+3x+1}=15$.

(4) $\sqrt{x^2-2x+1}=1-x$.

(5) $\sqrt[n]{\dfrac{4-x}{x}}+\sqrt[n]{\dfrac{x}{4-x}}=2$.

(6) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1-\sqrt{1+x}}$.

(7) $\dfrac{\sqrt{3-3x}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{3-3x}-\sqrt{x-6}}=\dfrac{\sqrt{1-4x}+\sqrt{2x+8}}{\sqrt{1-4x}-\sqrt{2x+8}}$.

6. 解方程组：

(1) $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^4+y^4=272 \\ x-y=2. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-\dfrac{3}{y}+3=0 \\ \dfrac{3x}{y}+1=0. \end{cases}$

(4) $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2\\ x^2-y^2=64.\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x+y+z=6\\ xy+yz+zx=11\\ xy=2.\end{cases}$

(6) $\begin{cases}(x+2y-8)^2+(2-x)^2=0\\ xz^2+yz-5\sqrt{xz^2+yz+9}+3=0.\end{cases}$

7. 求方程$3x^2-4xy-4y^2=3$的整数解。

（四）答案与提示

1. (1) C. (2) A. (3) C. (4) B. (5) C. (6) D.

2. (1) $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) $m=0$, $m=1$.

(3) $x_1=x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(4) $x=-\dfrac{12}{13}$.

(5) $a=\pm\sqrt{2}$, $b=1$.

(6) (2,3)(3,2) (−2, −3), (−3,−2)(1,6)(6,1)(−1,−6)(−6,−1).

3. (1) $x_1=\pm\sqrt{6}$, $x_2=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6})$.

(2) $x_1=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$.

(3) 提示：变形后设$y=x^2+x$。

(4) $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\pm\sqrt{2}$。

(5) $x_1=-1$，$x_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$。

(6) 提示：变形为 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$。

(7) 提示：观察$x=\pm1$是原方程的根，两次降次后得 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1=0$。其方程的根 $x_{1,2}=\pm1$，$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$。

4. (1) 无解，$x=\frac{1}{2}$增根。

(2) 提示：原方程变形 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+1+\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{19}{6}$，其方程根$x_1=x_2=1$，$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$。

(3) $x_1=2$，$x_2=6$。

(4) $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$。

(5) 提示：利用$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$变形。

(6) 提示：由$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}$变形后再解，其根 $x=0$。

(7) 提示：变形$1+\frac{2}{x-10}+1+\frac{2}{x-6}=1+\frac{2}{x-7}$

$+1+\frac{2}{x-9}$ 再解。

5．(1) 提示：三个根式必为零，求公共x。

(2) 提示：设 $y=\sqrt{x+5}+\sqrt{x}$ 。

(3) 提示：变形为 $x^2+2x\sqrt{x^2+3x+1}+x^2+3x+1=16$。再利用配方法解。

(4) $x\leqslant 1$。

(5) 提示：设 $y=\sqrt[n]{\frac{4-x}{x}}$，其 $x=2$是方程根。

(6) $x=-\frac{3}{4}$。

(7) 提示：利用合、分比定理。其根 $x=-2$。

6．(1) $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2=2. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-4. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ y_1=\frac{3}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=3. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=10 \\ y=6. \end{cases}$

(5) 提示：由 $xy+yz+zx=xy+z(x+y)=11$，消去x、y。

(6) 提示：由第一方程 $\begin{cases} x+2y-8=0 \\ 2-x=0. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2 \\ y=3. \end{cases}$

再代入第二方程得 $2z^2+3z-5\sqrt{2z^2+3z+9}+3=0$ 其

方程的解为 $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=3 \\ z_1=3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=3 \\ z_2=-\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=1 \\ y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=1. \end{cases}$

五　方程的理论

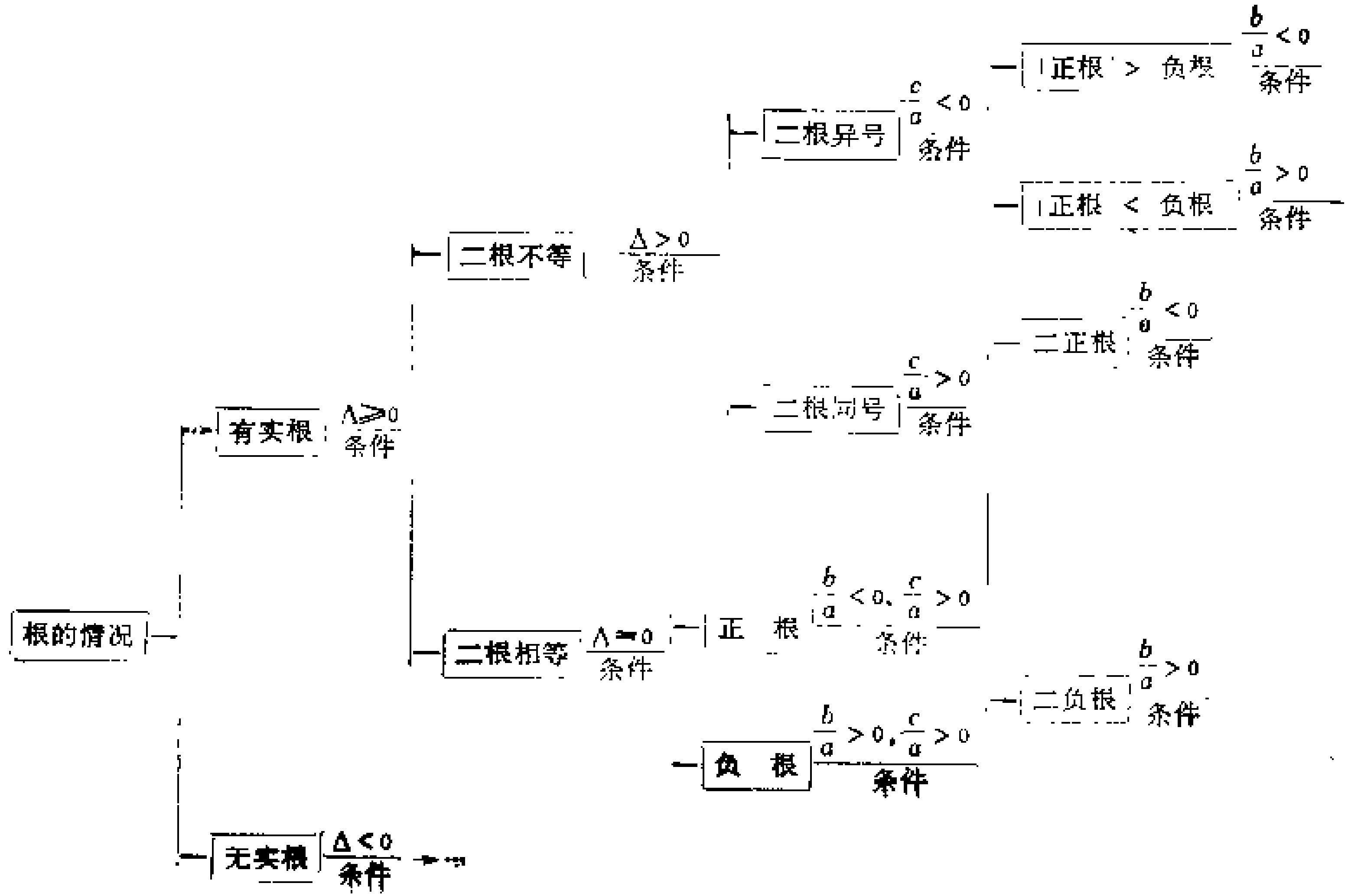
Ⅰ．根的判别式及其应用

（一）基 本 原 理

在研究方程的理论的过程中，首先考虑的是方程的解有几种可能。大量事实说明，方程的解只有三种可能，即无解、有限解、无穷多解。如果不通过解方程可以判断某一方程解的情况，那么需要引进根的判别式概念。

判别式：对于一个一元n次方程$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$，用以判别方程根的情况表达式，叫做这个方程的判别式。

特别地，对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$，它的根的判别式为$\Delta=b^2-4ac$。如果a、b、c为实数，那么当$\Delta>0$时，有两个不相等的实数根；当$\Delta=0$时，有二重实数根；当$\Delta<0$时，没有实数根。如果用a去除一元二次方程的各项，可得$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$，再令$\frac{b}{a}=p$，$\frac{c}{a}=q$，那么方程化为$x^2+px+q=0$，此时，它的判别式为$\Delta=p^2-4q$。显然，用一次项系数和常数项，可以判别二次项系数为1的一元二次方程根的情况。


根的情况
有实根
$\Delta\geqslant 0$ 条件
无实根
$\Delta<0$ 条件
二根不等
$\Delta>0$ 条件
二根相等
$\Delta=0$ 条件
二根异号
$\frac{c}{a}<0$ 条件
正根 > 负根
$\frac{b}{a}<0$ 条件
正根 < 负根
$\frac{b}{a}>0$ 条件
二根同号
$\frac{c}{a}>0$ 条件
二正根
$\frac{b}{a}<0$ 条件
二负根
$\frac{b}{a}>0$ 条件
正　根
$\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$ 条件
负　根
$\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}>0$ 条件

如果给定一个一元二次方程$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，不解方程，可按上页所列条件判别根的情况。

（二）范例与方法

例1 当m为何值时，一元二次方程 $m(x+1)^2=-x^2+x+3$ (1) 有不相等的实数根；(2) 有相等的实数根；(3) 没有实数根。

思路： 将方程变形为一般形式后，首先考虑方程中二次项系数不为零（保证是二次方程），根据题中条件，再从判别式的符号确定 m 的值。

解： 原方程化为

$$mx^2+2mx+m+x^2-x-3=0,$$

整理，$(m+1)x^2+(2m-1)x+m-3=0$。

由$m+1\neq 0$，得$m\neq -1$。

判别式 $\Delta=(2m-1)^2-4(m+1)(m-3)=4m+13$。

(1) 当$4m+13>0$时，有$m>-13/4$。

所以，当$m>-13/4$且$m\neq -1$时，原方程有两个不相等的实数根；

(2) 当$4m+13=0$时，有$m=-13/4$。

∴ 当$m=-13/4$时，原方程有两个相等的实数根；

(3) 当$4m+13<0$时，有$m<-\dfrac{13}{4}$。

所以，当$m<-13/4$时，原方程没有实数根。

例2 设关于 x 的方程 $(m^2+m)x^2+2mx+1=0$ 的根为α、β，且此二根都是正数，求 m 的范围。

思路：在这个方程成立（二次项系数不为零）的前提下，由判别式大于或等于零和二根均为正数确定 m 的范围。

解：若二次方程成立，必有 $m^2+m\neq0$，

即　$m\neq0$，$m\neq-1$。

判别式　$\Delta=(2m)^2-4(m^2+m\geqslant0$，$-4m\geqslant0$，

即　$m\leqslant0$。

∴　方程有实数根的条件是 $m<0$ 且 $m\neq-1$。

依题，$\alpha>0$，$\beta>0$，则 $\alpha+\beta=-\frac{2m}{m^2+m}>0$，①

$\alpha\cdot\beta=\frac{1}{m(m+1)}>0$。②

由①得　$\frac{m}{m^2(m+1)}<0$，∴　$\frac{1}{m+1}<0$，

必有 $m+1<0$，即 $m<-1$；

由②得 $m(m+1)>0$，m 与 $m+1$ 同号，得 $m<-1$。

因此，当 α、β 都是正数时，$m<-1$。

【说明】 以上两题中的 m 是不定值，我们称它为参数（或参变数）。在运算与变形时，m 被看作是一个定数，最后求出满足条件的结果时，才能确定它的范围。一般地，可以这样定义参数：在一个数学表达式中，如果有这样的量，它在每个指定情况下是一个常数值，但在不同指定情况下的值也不同，这种量称之为参变数，又叫参数，可用字母代替参数。在解题中引入参数，常常使问题简明化，有益于打开问题的思路。必须注意，引进参数后最终要消去参数，它只起纽带作用。

例3 方程 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$ 的两个根是整数，

求 m 的整数值。

思路：欲使方程满足二根是整数的条件，必须使 b^2-4ac 是完全平方数，连同二根是整数的条件，通过根与系数的关系确定 m 的整数值。

解一：设此方程的判别式是完全平方数 k^2（$k\geqslant 0$ 的整数），则 $(m+1)^2-4(2m-1)=k^2$，

即 $m^2-6m+5=k^2$。

配方，得 $(m-3)^2-k^2=4$，

$(m+k-3)(m-k-3)=4$。

注意到将 4 分解二整数之积，k 与 m 欲满足上式，只能有下列情况中的一种：

(1) $\begin{cases}m+k-3=4\\ m-k-3=1,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}m+k-3=2\\ m-k-3=2,\end{cases}$

(3) $\begin{cases}m+k-3=-1\\ m-k-3=-4,\end{cases}$ (4) $\begin{cases}m+k-3=-2\\ m-k-3=-2.\end{cases}$

解这四个方程组，得 $m=11/2$，$m=5$，$m=1/2$，$m=1$。

因此，$m=5$，$m=1$。

想想，方程（1）、（3）的解能包含 $\begin{cases}m+k-3=1\\ m-k-3=4,\end{cases}$ $\begin{cases}m+k-3=-4\\ m-k-3=-1\end{cases}$ 的解吗？为什么？

解二：设 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$ 的两个根为 α、β，且不妨设 $\alpha\leqslant\beta$ 的整数。

由韦达定理，有 $\alpha+\beta=-(m+1)$①，$\alpha\beta=2m-1$②。

①×2+②，得 $(\alpha+2)(\beta+2)=1$。

由$\alpha+2$，$\beta+2$均为整数，必有$(\alpha+2)=(\beta+2)=\pm1$，由此得

$\alpha=\beta=-1$，$\alpha=\beta=-3$。

于是 $\alpha+\beta=-2$，$\alpha+\beta=-6$。

将上式代入①，得 $m=5$，$m=1$。

例4 $\varDelta$ 是以整数 a、b、c为系数的一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的判别式，能否适当的选择 a、b、c，使$\varDelta$的值为18?

思路：这是个不定式命题，即命题的结论需要探求。解这类问题的基本思路是，首先肯定命题的结论是正确的，从结论进行推理，如果推出与已知条件或与某些事实（定义、定理、性质、法则等）矛盾。再否定结论；如果不出现上述情况，则最后肯定结论的正确性。

解：假设判别式$\varDelta=b^2-4ac=18$，$b^2=2(2ac+9)$。由于等式的右边是 2 的倍数，所以左边b^2也是 2 的倍数，又b是整数，则 b 是 2 的倍数。不妨设 $b=2k$（k是整数），于是 $b^2=4k^2=2(2ac+9)$，

即 $2k^2=2ac+9$，此式的左边是偶数，右边是奇数（奇数与偶数其和为奇数），这个等式不合理。

因此，$\varDelta=18$是不可能的。

【说明】(1) 本题揭示这样一个事实，任何整数系数的一元二次方程，它的根的判别式 $b^2-4ac\neq18$。(2) 本题的证明方法具有它的一般性，要掌握这类问题的基本思路。

例5 如果a、b、h都是实数，那么关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+ab-h^2=0$ 必有实数根。

思路： 只要证明它的判别式是个非负数就够了。

证： ∵判别式 $\Delta=[-(a+b)]^2-4(ab-h^2)$

$$
\begin{aligned}
&=(a+b)^2-4(ab-h^2)\\
&=a^2+2ab+b^2-4ab+4h^2\\
&=(a-b)^2+4h^2\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

∴ 这个方程必有实数根。

例6 设x、y是实数，且$x^2+xy+y^2=1$，求x^2-xy+y^2的值的范围。

思路： 利用根与系数的关系，以x、y为根建立一个新方程，从新方程的判别式确定x^2-xy+y^2的值的范围。

证： 设 $x^2-xy+y^2=k$①，由已知

$x^2+xy+y^2=1$②，

②－①，得$2xy=1-k$，于是有$xy=\dfrac{1-k}{2}$③，

将②式变形为$(x+y)^2-xy=1$，把③代入，得

$(x+y)^2=\dfrac{3-k}{2}$④，∵ ④中$(x+y)^2$是非负数，

∴ $\dfrac{3-k}{2}\geqslant 0$，即$k\leqslant 3$ ⑤。在此条件下，由④得

$x+y=\pm\sqrt{\dfrac{3-k}{2}}$ ⑥。

把x,y作为$t^2+pt+q=0$的两个根，由韦达定理，有

$t^2-\left(\pm\sqrt{\dfrac{3-k}{2}}\right)t+\dfrac{1-k}{2}=0$ (t是实数)，

判别式 $\Delta=\left[-\left(\pm\sqrt{\dfrac{3-k}{2}}\right)\right]^2-4\cdot\dfrac{1-k}{2}\geqslant 0$，

即 $\frac{3-k}{2}-2(1-k)\geqslant 0$，解这个不等式，得$k\geqslant\frac{1}{3}$⑦。

由⑤、⑦确定 k 的范围是 $1/3\leqslant k\leqslant 3$。因此，有 $1/3\leqslant x^2-xy+y^2\leqslant 3$。

【注意】 关于一元二次不等式的基本解法以及一元一次不等式组的解法，请同学们参考《初级中学课本代数第四册》中的一元一次不等式组和一元二次不等式，这里不再重述。

（三）练习题

1．选择题：

(1) 若使二次方程 $2kx^2+(8k+1)x+8k=0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是

(A) $k<-\frac{1}{16}$． (B) $k>-\frac{1}{16}$． (C) $k\geqslant-\frac{1}{16}$．

(D) $k\leqslant-\frac{1}{16}$． (E) $k>-\frac{1}{16}(k\neq 0)$．

(2) 一元二次方程$2x(kx-4)-x^2+6=0$没有实数根，k 的最小整数值是

(A) -1． (B) 2． (C) 3．

(D) 4． (E) 5．

(3) 若a、b为实数，关于 x 的方程$(x-a)(x-a-b)=1$ 有二不相等的实数根，则这二根 x_1、x_2 与实数 a 的关系是

(A) $x_1=x_2=a$． (B) $x_1>x_2>a$．

(C) $x_1<x_2<a$． (D) $x_1=a$，$x_2\neq a$．

(E) $x_1>a$, $x_2<a$ 或 $x_1<a$, $x_2>a$。

(4) 设 a、b、c 为正数，如果方程 $(a^2+b^2)x^2+2a(a+b)x+b(a+b)=0$ 有二相等的实数根，那么 a 与 b 的关系是

(A) $a>b$。 (B) $a=b$。 (C) $a<b$。

(D) $a\neq b$。 (E) $a=-b$。

(5) 已知 a、b、c 为实数，方程 $x^2-(a+b)x+(ab-c^2)=0$ 根的情况以及系数之间的关系是

(A) 必有实数根，若有不相等的实数根时，系数关系是 $a>b$, $c>0$。

(B) 必有实数根，若有不相等的实数根时，系数关系是 $a<b$, $c<0$。

(C) 必有实数根，若有相等的实数根时，系数关系是 $a=b\neq0$, $c=0$。

(D) 必有实数根，若有相等的实数根时，系数关系是 $a=b$, $c=0$。

(E) 不一定有实数根，系数关系不能确定。

2. 方程 $x^2+(m-17)x+m-2=0$的两个根是自然数，试确定 m 的值。

3. 若 a、b、c 为实数，$a\neq0$, $b\neq0$，且$b^2=ac$，试判别方程$(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+(b^2+c^2)=0$ 根的情况。

4. 如果方程$(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0$ 没有实数根，试求 a、b、c 之间的关系。

5. 设方程 $x^2+px+q=0$ 和 $x^2+qx+p=0$同时没有实数根，求 p、q 的整数值。

6. 已知二次方程 $x^2+3x+a=0$ 的两个根都是整数，

且 $a\geqslant0$，解这个方程。

7．已知 a、b、c 为实数，且 $a+b+c=0$，$abc=2$。试证明 a、b、c 中必有一个不小于 2。

8．若 k 为正整数，一元二次方程 $(k-1)x^2-px+k=0$ 有两个正整数根，求 $k^{kp}(p^p+k^k)$ 的值。

9．如果 a、b 是正实数，方程 $x^2+ax+2b=0$ 和方程 $x^2+2bx+a=0$ 都有实数根，那么 $a+b$ 的最小值是多少？

10．若 a、b、c 是实数，且满足 $a^2+b^2+c^2-10a-11=0$，$a^2-bc-4a-5=0$，试确定 a 的范围。

11．已知甲、乙二数之和为 $2\sqrt{a^4+b^4}$，甲、乙二数的积为 $ab(a^2+b^2)$，其中 a、b 是实数．求证甲、乙二数为实数。

（四）答案与提示

1．选择题：

（1）由 $k\neq0$ 且 $\Delta=(8k+1)^2-4\cdot2k\cdot8k>0$，解这个不等式，得 $k>-1/16$，因此，有不等实根应为 $k>-1/16$ 且 $k\neq0$。故选（E）。

（2）将原方程化为 $(2k-1)x^2-8x+6=0$，依题，没有实数根的条件是 $\begin{cases}2k-1\neq0\\ \Delta=(-8)^2-4(2k-1)\cdot6<0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}k\neq1/2\\ k>11/6.\end{cases}$ 显然 k 的最小整数值是 2。故选（B）。

（3）将原方程化为 $(x-a)^2-b(x-a)-1=0$，

令 $x-a=t$，则有 $t^2-bt-1=0$，判别式 $\Delta=b^2+4>0$。

又设这个方程的二根为 t_1、t_2，于是 $t_1\cdot t_2=-1$，t_1 与

t_2异号，即 $x_1-a>0$，$x_2-a<0$或 $x_1-a<0$，$x_2-a>0$。故选（E）。

（4）由$\Delta=[2a(a+b)]^2-4(a^2+b^2)\cdot b(a+b)=(a+b)(a^3+ab-a^2b-b^3)=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$，

$\because$ $a^2+b^2\neq0$，$a+b\neq0$，$a>0$，$b>0$，$ab\neq0$有$a^2+ab+b^2\neq0$，$\therefore$ $a-b=0$。故选(B)。

（5）由$\Delta=[-(a+b)]^2-4(ab-c^2)=(a+b)^2-4(ab-c^2)=(a-b)^2+4c^2\geqslant0$，判定方程有两个实数根。若有二相等的实数根，则$(a-b)^2+4c^2=0$，$a-b=0$，$c=0$。故选($D$)。

2. 设二根为自然数 α、β，则 $\alpha+\beta=17-m$①，$\alpha\cdot\beta=m-2$②。由①、②两式都大于零，解出$2<m<17$③。

$$\Delta=(m-17)^2-4(m-2)=(m-11)(m-27)\geqslant0,$$

$m\geqslant27$，或 $m\leqslant11$，由③，得 $2<m\leqslant11$④。

二根为自然数，$\therefore$判别式是完全平方数，不妨设$\Delta=k^2$(k是0或自然数），$\Delta=m^2-38m+297=(m-19)^2-64=k^2$，即$(m-19+k)(m-19-k)=64$，等式左边两个多项式之积是偶数，所以$(m-19+k)$与$(m-19-k)$都是奇数或都是偶数，$m-19+k\geqslant m-19-k$，按64分解，得下列方程组：

1° $\begin{cases}m-19+k=32\\m-19-k=2,\end{cases}$　　2° $\begin{cases}m-19+k=-2\\m-19-k=-32,\end{cases}$

3° $\begin{cases}m-19+k=16\\m-19-k=4,\end{cases}$　　4° $\begin{cases}m-19+k=-4\\m-19-k=-16,\end{cases}$

5° $\begin{cases}m-19+k=8\\m-19-k=8,\end{cases}$　　6° $\begin{cases}m-19+k=-8\\m-19-k=-8.\end{cases}$

在解出以上各组的 m 值中，只有 $m=9$、$m=11$ 满足④，所以，m 值应为 9、11。

3. 将判别式各项展开后，用 ac 代换式中的 b^2，得 $\Delta=4[ac(a+c)^2-ac(a+c)(a+c)]=0$，∴ 原方程有二相等实根。

4. 由 $\Delta<0$，得 $\Delta=4[(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)]=-4[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]<0$，$a$、$b$、$c$ 中，至少有两个不相等关系。

5. 由 $p^2-4q<0$，$q^2-4p<0$ 得整数 p、q 满足 $0\leqslant p^2<4q, 0\leqslant q^2<4p$，于是 $p>0$，$q>0$，$q^4<16p^2<64q$，∴$q^4-64q<0$，即 $q(q-4)[(q+2)^2+12]<0$，又 $(q+2)^2+12>0$，∴ $q(q-4)<0$，$0<q<4$，q 只能是 1,2,3。分别将 q 值代入 $q^4<16p^2<64q$，得 $p=1,2,3$，

∴ $\begin{cases}p=1\\q=1\end{cases}$，$\begin{cases}p=2\\q=2\end{cases}$，$\begin{cases}p=3\\q=3\end{cases}$。

6. $\Delta=9-4a\geqslant0\Rightarrow a\leqslant9/4$。方程二根 α、β，满足 $\alpha+\beta=-3$①、$\alpha\beta=a$②，由 a 是整数，得 a 为 0，1，2。将 a 值分别代入①、②，得二根分别是0，-3或 -1，-2。

7. 只要证明 a、b、c 其中的一个大于等于 2 就够了。由已知可定 a、b、c 中，有二负数一正数。不妨设 $a>0$，将已知变形为 $\begin{cases}b+c=-a\\bc=a/2\end{cases}$。作一个方程 $t^2+at+\dfrac{2}{a}=0$

$\Delta=a^2-\dfrac{8}{a}\geqslant0$，由 $a^3\geqslant8$，得 $a\geqslant2$。

8. 由 $\Delta=p^2-4(k-1)k\geqslant0$，得 $p^2\geqslant4k(k-1)$，$p^2\geqslant4k$

$(k-1)$，且 $k\neq1$。设 α、β 为两个正整数根，有

$$\left.\begin{cases}k\geqslant 2\text{的自然数}\\ \alpha\cdot\beta=\dfrac{k}{k-1}\text{为自然数}\end{cases}\right\}\Rightarrow k=2，\quad\text{得}\quad p^2\geqslant 8。$$

由 $\alpha+\beta=\dfrac{p}{k-1}=p\geqslant\sqrt{8}$，

$\therefore\quad p=3$。于是，$k^{kp}(p^p+k^k)=2^6(3^3+2^2)=1984$。

9. 方程有实数根的条件 $\begin{cases}a^2-8b\geqslant0\\4b^2-4a\geqslant0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a^2\geqslant8b\\b^2\geqslant a,\end{cases}$

有 $a(a^3-64)\geqslant0$，$\because\quad a>0$，$\therefore\quad a^3\geqslant64\Rightarrow a\geqslant4$，则 a 的最小值是 4。由 $b^4\geqslant a^2\geqslant8b$，得 $b\geqslant2$，则 b 的最小值是2。因此，$a+b$ 的最小值是 6。

10. 由已知，得$b^2+c^2=-a^2+10a+11$，即$(b+c)^2-2bc=-a^2+10a+11$①，$bc=a^2-4a-5$②。把 ② 代入①，得$(b+c)^2=(a+1)^2$，$\therefore\quad b+c=\pm(a+1)$③。由②、③建立方程 $t^2\mp(a+1)t+a^2-4a-5=0$，该方程$\varDelta\geqslant0$，即$(a+1)^2-4(a^2-4a-5)\geqslant0$，$3(a+1)(a-7)\leqslant0$。$\therefore -1\leqslant a\leqslant7$。

11. 设甲、乙两数为方程 $x^2-2\sqrt{a^4+b^4}\,x+ab\,(a^2+b^2)=0$的两个根，$\varDelta=4(a^4+b^4)-4ab\,(a^2+b^2)=4(a^4+b^4-a^3b-ab^3)=4(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$

$$=4(a-b)^2\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]\geqslant0。$$

因此，方程有两实数根。即甲、乙两数为实数。

Ⅱ 韦达定理及其应用

（一）基本理论

韦达（法国数学家，1540～1603）在1559年发现了一元二次方程的根与系数的关系，人们称它为韦达定理。

定理1 设x_1、x_2为实系数方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根，则有$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$。

反之，如果两实数x_1、x_2满足$x_1+x_2=-b/a$，$x_1x_2=c/a$，那么这两实数是方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根。

由定理 1 可以推广一元三次方程根与系数的关系。

定理2 设x_1、x_2、x_3为实系数方程

$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+(a_0\neq 0)$的三个根，

则有

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{a_3}{a_0}. \end{cases}$$

不难发现，一元四次方程$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0(a_0\neq 0)$的四个根$x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$与系数的关系是$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{a_1}{a_0}$，$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{a_2}{a_0}$，$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_1x_2=-\frac{a_3}{a_0}$，$x_1x_2x_3x_4=\frac{a_4}{a_0}$。

由此，可以推广到一元n次方程根与系数的关系。

定理3 如果一元n次方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0(a_0\neq0)$ n个根为x_1、x_2、…、x_n，那么$x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_1}{a_0}$，

$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0}$，…，$x_1x_2x_3\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$。

这个定理又称为基本定理。

韦达定理的应用

(1) 不解方程直接确定两个根的和与积。

基本方法：韦达定理的直接应用。

(2) 已知二数的和与积，求这两个数。

基本解法：由韦达定理的逆定理，建立一个一元二次方程，它的两个根就是这两个数。

(3) 不解方程，求两个根的对称式、交代式的值。

基本方法：变换给出的两个根的对称式与交代式，使之含有两个根之和与两个根之积的形式，由韦达定理代入系数的值。

对称式：若含有n个字母的多项式$A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，把其中任意两个字母交换位置后（譬如变换x_1与x_2），$A'(x_2,x_1,\cdots,x_n)$，所得到的多项式与原式相同，$A=A'$，则说A是$x_1,x_2\cdots,x_n$的对称式。例如$x^2+y^2+z^2$是x、y、z的对称式；$(x+a)(x+b)(x+c)$是a,b,c的对称式等等。

交代式：是交错多项式。对于一个多项式中的字母任意两个交换位置后，得到的多项式与原多项式仅差一个符号，

叫这个多项式为这些字母的交代式。例如$(x-y)(y-z)(z-x)$是x、y、z的交代式；$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$是$x$、$y$、$z$的交代式等等。

(4) 已知方程的两个根满足的条件，作一个一元二次方程。

基本方法：将这两个根满足的条件式，设法转化成建立新方程的两个根的和与积，由韦达定理的逆定理，作出一元二次方程。

(5) 已知方程的两个根之间的关系，求此方程的系数之间应满足的关系。

基本方法：利用根的判别式、韦达定理将两个根之间的关系转化为系数之间的关系

(6) 不解方程，求两个方程的公共根或一个方程的满足条件的根。

基本方法：①求两个方程的公共根，将设出的公共根分别代入两个方程中，作差，由韦达定理可求其公共根。

②求满足条件的根，如正根、负根、整数根等，由判别式和系数的符号以及韦达定理综合考虑，具体方法，请参看例题。

（二）范例与方法

例1 甲、乙两人同解一道一元二次方程，甲写错了常数项，得根为$x_1=8$，$x_2=2$；乙写错了一次项的系数，得根为$x_1'=-9$，$x_2'=-1$。求这个一元二次方程中、正确的常数项和一次项的系数。

思路： 甲写错了常数项，但一次项系数是对的；同样道

理，乙写的常数项是对的。由已知的根，可通过韦达定理求得。

解：设原一元二次方程为 $x^2+px+q=0$，

则 $x_1+x_2=8+2=10=-p$，

$x_1'\cdot x_2'=(-9)\times(-1)=9=q$，

∴ 原方程为 $x^2-10x+9=0$，其中常数项为 9，一次项系数为 -10。

想想，这类问题的一般方法是什么？你可以由一般方法自编这类问题。

例2 若 $x_1\neq x_2$，且 $2x_1^2-7x_1+2=0$，$2x_2^2-7x_2+2=0$，计算 $\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$ 的值。

思路：从欲求的代数式考虑，将其化为含 x_1+x_2、x_1x_2 的代数式，观察这个方程的特点，应用韦达定理便可求得值。

解：题中关于 x_1、x_2 的两个方程系数完全相同，则 x_1、x_2 同时满足这两个方程，可见，x_1、x_2 是方程 $2x^2-7x+2=0$ 的两个根。

由韦达定理，得 $x_1+x_2=\dfrac{7}{2}$，$x_1x_2=\dfrac{2}{2}=1$。

$$\therefore\quad \frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1x_2}=\frac{(x_2+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$$

$$=\frac{41}{4}.$$

【说明】 对一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，求根 x_1、x_2 的某些对称式和交代式的值时，可直接应用下列公式代入：

① $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$；

② $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$

$$=\frac{3abc-b^3}{a^3};$$

③ $\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\dfrac{b^2-2ac}{ac}$；

④ $x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-(x_1x_2)^2$

$$=\frac{b^4-4ab^2c+3a^2c^2}{a^4};$$

⑤ $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{b^2-4ac}{a^2}$；

⑥ 当 $x_1>x_2$ 时，$x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)\sqrt{(x_1-x_2)^2}$

$$=\begin{cases}-\dfrac{b\sqrt{b^2-4ac}}{a^2} & (a>0)\\[2ex] \dfrac{b\sqrt{b^2-4ac}}{a^2} & (a<0)。\end{cases}$$

例8 方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个根的比为3:4，判别式的值为$2-\sqrt{3}$，求此方程的两个根。

思路： 根据两根的比设此两根，使其满足韦达定理和根的判别式，求出二次方程的系数a。

解： 设方程的两根为 $\alpha=3k$，$\beta=4k$（k为比例常数）。

由韦达定理，有 $\begin{cases}7k=-a,\\12k^2=b。\end{cases}$

又判别式$\Delta=a^2-4b=49k^2-48k^2=k^2=2-\sqrt{3}$，

$\therefore\quad k=\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$。由此，得

$$\alpha=\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}),\quad \beta=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

或$\alpha=-\frac{3}{2}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})$，$\beta=-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$。

例4 方程$x^2+2(a+3)x+2a+4=0$的两个根是α、β、a是变动的实数，求$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$的最小值。

思路：由于a是可变动的实数，只须根据韦达定理将$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$化为含a在内的形如$(a-m)^2+t$的非负数，当且仅当a取m时，有最小值t。

解：$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha-2\beta+2$

$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2。$$

由韦达定理，上式$=4(a+3)^2-2(2a+4)+4(a+3)+2=4(a+3)^2+6\geqslant0$，

当$a=-3$时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$有最小值6。

【说明】 求某一代数式的最大值或最小值的一个基本方法是，将这个代数式恒等变形为完全平方数与某一个实数之和，若$(x+a)^2+h$，当$x=-a$时，此代数式有最小值h；若$-(x+a)^2+h$，当$x=-a$时，此代数式有最大值h。

例5 若方程组$x+y=a$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$无实数解，求整数$a$的值。

思路：利用韦达定理，建立以x、y为根的含变数a的一

元二次方程，再由新方程没有实数根的条件讨论判别式，由此确定 a 的值。

解： 设 $\begin{cases} x+y=a & ① \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 & ② \end{cases}$ 由 ②得 $\dfrac{x+y}{xy}=2$,

把①式代入得 $a/xy=2$，$xy=a/2$③。③式中，显然$a\neq 0$。

由①、③建立以 x、y 为根的一元二次方程 $t^2-at+\dfrac{a}{2}=0$,

a 是整数，方程无实数根的条件是 $\Delta=a^2-2a<0$，∴ $0<a<2$，得 $a=1$。若$a=0$，$a/xy=2$ 不成立，原方程也无实数解。

因此，a 的值是 0，1。

例6 方程 $x^2+2x-3=0$ 的两个根是 α、β，若$S_n=\alpha^n+\beta^n$，求 S_1，S_2，S_3，S_4，S_5 的值。并请通过 S_1 求出 S_2，通过 S_2 求出 S_3，……，通过S_4 求出 S_5。

思路： 将 $S_1,\cdots S_5$ 表示为二根之和与二根之积，应用韦达定理即可解。

解： 由 $\alpha+\beta=-2$，$\alpha\cdot\beta=-3$，得

$$S_1=\alpha+\beta=-2.$$

$$S_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=10.$$

$$S_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-26.$$

$$S_4=\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=82.$$

$$S_5=\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$$
$$=-242.$$

另解： 显然 $S_1=-2$。由 α、β 都是方程的根，有

$$\alpha^2+2\alpha-3=0①,\quad \beta^2+2\beta-3=0②,$$

①+②，得 $\alpha^2+\beta^2=-2(\alpha-\beta)+6=-2S_1+6=10$，即 $S_2=10$。

①×α，②×β得 $\alpha^3+2\alpha^2-3\alpha=0$③，

$$\beta^3+2\beta^2-3\beta=0④,$$

③+④，得　$\alpha^3+\beta^3=-2(\alpha^2+\beta^2)+3(\alpha+\beta)$，

∴　$S_3=-2S_2+3S_1=-26$。

同理可得 $S_4=82$，$S_5=-242$。

【规律】 设一元二次方程 $x^2+px+q=0$的二根为α、β。求 $S_1=\alpha+\beta$，$S_2=\alpha^2+\beta^2$，…，$S_n=\alpha^n+\beta^n$ 时，可由S_1推得 S_2，从 S_2 推得 S_3，…，从 S_{n-1} 推得 S_n。

事实上，$S_1=\alpha+\beta=-p$，

$$S_2=-pS_1-2q,$$

$$S_3=-pS_2-qS_1,$$

…

$$\boxed{S_n=-pS_{n-1}-qS_{n-2}}\cdots(*)$$

如果以（*）式为公式，可以递推下去，总能将S_n用p，q 表示。

$$\begin{aligned}S_n&=-pS_{n-1}-qS_{n-2}\\&=-p(-pS_{n-2}-qS_{n-3})-q(-pS_{n-3}-qS_{n-4})\\&=p^2S_{n-2}+2pqS_{n-3}+q^2S_{n-4}\\&=p^2(-pS_{n-3}-qS_{n-4})+2pq(-pS_{n-4}-qS_{n-5})\\&\quad+q^2(-pS_{n-5}-qS_{n-6})\\&=-(p^3S_{n-3}+3p^2qS_{n-4}+3pq^2S_{n-5}+q^3S_{n-6})\end{aligned}$$

$$= p^4S_{n-4}+4p^3qS_{n-5}+6p^2q^2S_{n-6}+4pq^3S_{n-7}$$
$$+q^4S_{n-8}$$

……

观察上面各式的关系，发现：1°．从$S_n\to S_1$的规律是，S_n；S_{n-1}、S_{n-2}；S_{n-2}、S_{n-3}、S_{n-4}；S_{n-3}、S_{n-4}、S_{n-5}、S_{n-6}；…。

2°．p的指数由$n\to 0$，q的指数由$0\to n$。

3°．各项系数是：

$$\begin{array}{c}1\\1\quad 2\quad 1\\1\quad 3\quad 3\quad 1\\1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\\cdots\end{array}$$

我们称它为杨辉三角。

4°．各次变化的符号$(-1)^n$（n为自然数）。

例7 试证　若α、β为方程$x^2+px+1=0$的两个根，γ、δ为方程$x^2+qx+1=0$的两个根，则有$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)\cdot(\beta+\delta)=q^2-p^2$成立。

思路： 将欲证的等式左边多项式前后两个相乘，中间两个相乘，整理为二根和与二根积的形式，再应用韦达定理。

证： $\because\quad \alpha+\beta=-p$，$\alpha\cdot\beta=1$，

$\gamma+\delta=-q$，$\gamma\cdot\delta=1$。$\therefore\quad \alpha\beta\gamma\delta=1$。

$\because\quad (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$

$$=[(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)][(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)]$$

$$=[\alpha\delta-\beta\gamma][\beta\delta-\alpha\gamma]$$

$$=\alpha\beta\delta^2-\gamma\delta\alpha^2-\gamma\delta\beta^2+\alpha\beta\gamma^2$$

$$=\delta^2-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2$$

$$=(\delta^2+\gamma^2)-(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=[(\delta+\gamma)^2-2\delta\gamma]-[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]$$

$$=[q^2-2]-[p^2-2]=q^2-p^2.$$

∴ 等式成立。

【注意】 本题按前两个多项式之积、后两个多项式之积展开，要比上面解法简捷。

例3：设 x_1 与 x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的根，试以 $y_1=x_1+\dfrac{1}{x_1}$，$y_2=x_2+\dfrac{1}{x_2}$ 为根，作一个一元二次方程。

思路：通过韦达定理，求出用系数表示根，再根据韦达定理的逆定理，建立新的一元二次方程。

解： 由 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$，得

$$y_1+y_2=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=(x_1+x_2)$$

$$+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=(x_1+x_2)\left(1+\frac{1}{x_1x_2}\right)$$

$$=-\frac{b(a+c)}{ac},$$

$$y_1y_2=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=\frac{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}{x_1x_2}$$

$$=\frac{(x_1x_2)^2+[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+1}{x_1x_2}$$

$$=\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}+1}{\frac{c}{a}}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-2ac}{ac}.$$

设所求作的方程为 $y^2+py+q=0$，

则　$p=\frac{b(a+c)}{ac}$，$q=\frac{a^2+b^2+c^2-2ac}{ac}$，

$\therefore$　$y^2+\frac{b(a+c)}{ac}y+\frac{a^2+b^2+c^2-2ac}{ac}=0$。

即　$acy^2+b(a+c)y+a^2+b^2+c^2-2ac=0$。

例9 设方程 $x^2+x+1=0$ 的两个根是 α、β，求作以 $\frac{1+\alpha^5}{1+\beta^5}$，$\frac{1+\beta^5}{1+\alpha^5}$ 为两个根的一元二次方程。

思路：变换已知的两个分式，使之含 $\alpha+\beta$、$\alpha\cdot\beta$ 的因子，代入系数作新方程。

解：由韦达定理，得　$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\cdot\beta=1$，且有

$\alpha^2+\alpha+1=0$，于是 $(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$，即

$\alpha^3-1=0$，$\alpha^3=1$；同理，可推出 $\beta^3=1$，$\alpha^3=\beta^3=1$。

又　$\frac{1+\alpha^5}{1+\beta^5}=\frac{\alpha^3+\alpha^5}{\beta^3+\beta^5}=\frac{\alpha^3(1+\alpha^2)}{\beta^3(1+\beta^2)}=\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}$。

同理，$\frac{1+\beta^5}{1+\alpha^5}=\frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2}$。

$\therefore$　$\frac{1+\alpha^5}{1+\beta^5}+\frac{1+\beta^5}{1+\alpha^5}=\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}+\frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2}$

$$=\frac{(1+\alpha^2)^2+(1+\beta^2)^2}{(1+\beta^2)(1+\alpha^2)}$$

$$=\frac{2+2(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha+\beta)}{1+(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2}$$

$$=\frac{2+2(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{1+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha^2\beta^2}$$

$$=\frac{2+2(-1)^2-4\times1+(-1)}{1+(-1)^2-2\times1+1^2}=-1.$$

$$\frac{1+\alpha^5}{1+\beta^5}\cdot\frac{1+\beta^5}{1+\alpha^5}=1.$$

即两根之和为-1，两根之积为1.

∴ 所求作的方程为 $y^2+y+1=0$。

例10 设 $a<b<c$，其中a、b、c是实数，α、$\beta(\alpha<\beta)$是方程 $2(x-b)(x-c)-(x-a)^2=0$ 的两个根．试把a、b、c、α、β按由小到大的顺序排列起来。

思路： 把方程左边作为基本代数式，考察当 x 取a、b、c时的符号，再考察两个根与 a 的大小。

解： 设方程的左边为 y，则 $y=2(x-b)(x-c)-(x-a)^2$，即 $y=x^2+2(a-b-c)x+2bc-a^2$。显然，当 $x=\alpha$，$x=\beta$ 时，$y=0$，即$(x-\alpha)(x-\beta)=0$。

当 $x=a$时，$y=2(a^2-ab-ac+bc)=2(a-b)(a-c)$，由已知 $a<b<c$，得 $y_{x=a}>0$；

当 $x=b$ 时，$y=-(b-a)^2<0$，即 $y_{x=b}<0$；

当 $x=c$ 时，$y=-(c-a)^2<0$，即 $y_{x=c}<0$。

∴ $a<\alpha$ 或 $\beta<a$，由上述不等关系，得 $a<b<\beta$，$a<$

$c<\beta$，于是 a、b、c 介于 α、β 之间，

因此，它们的顺序是 $\alpha<a<b<c<\beta$。

【注意】 上式将 y 写成 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 后，当 $x=a, y>0$ 就是 $(a-\alpha)(a-\beta)>0$，从而得 $a<\alpha$ 或 $a>\beta$。这种方法叫做赋值检验法。一般地，如果检验方程的根与某一个数的关系时，可将该数作为特殊值赋给方程就可以判断了。

例11 设方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ ①，$px^2+qx+k=0(p\neq0)$②有一个公共根 α。（1）证明 $aq-bp\neq0$。（2）设 $A=aq-bp$，$B=cp-ak$，$C=bk-cq$，证明方程 $Ax^2+2Bx+C=0$有重根（相等的实数根），并用 α 表示这个重根。

思路： 欲证 $aq-bp\neq0$ 成立，假设 $aq-bp\neq0$不成立，就有 $aq-bp=0$ 成立，按这个条件推证会出现与事实矛盾的结果，从而否定假设，肯定欲证的结论。这种方法叫做反证法。

对（2）的证明，从判别式为零去考虑。

证：（1）若 $aq-bp=0$，将方程②$\times a-$①$\times p$，得 $(aq-bp)x+ak-cp=0$③，有 $ak-cp=0$。

由 $\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}$，$\dfrac{a}{p}=\dfrac{c}{k}$，得$\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}=\dfrac{c}{k}$，显然方程①与方程②的系数成比例，故为同解方程，有两个公共根，这与已知有一个公共根矛盾。∴ $aq-bp\neq0$。

（2）将①$\times q-$②$\times b$，得 $(aq-bp)x^2+cq-bk=0$④，由已知，α 是两个方程的公共根，当 $x=\alpha$ 代入④，

得 $\alpha^2=\dfrac{bk-cq}{aq-bp}=\dfrac{C}{A}$，由③得 $\alpha=\dfrac{cp-ak}{aq-bp}=\dfrac{B}{A}$，

由 $\frac{C}{A}=\frac{B^2}{A^2}$，得 $B^2=\frac{CA^2}{A}=CA$。

设方程 $Ax^2+2Bx+C=0$ $(A\neq0)$的判别式为Δ，

则 $\Delta=4B^2-4AC=4(B^2-AC)=0$，

∴ 这个方程有重根。

重根是 $x=-\frac{2B}{2A}=-\frac{B}{A}=-\alpha$。

【说明】 反证法是用来证明问题的一种重要方法，它的基本思想是：从问题结论的反面出发，推出与事实相矛盾的结果，从而认定反面是错误的，原结论是正确的。概括地说，否定结论→推出矛盾→肯定结论。它的关键是推出矛盾，它包括与已知条件矛盾或与定义、性质、定理、公式、法则矛盾或与真理、事实、公理矛盾。我们的重点是寻找矛盾，一旦出现了矛盾，说明结论不容否定。

（三）练习题

1．选择题：

(1) 若方程 $x^2+(m-5)x-18=0$ 的两个根的绝对值的比是 2:1，则实数 m的值是

(A) $m=2$，$m=8$。　　(B) $m=-4$，$m=14$。

(C) $m=-5$，$m=-5$。　　(D) $m=2$，$m=-8$。

(E) $m=-2$，$m=8$。

(2) 方程$(1988x)^2-1987\cdot1989x-1=0$较大的根为 α，方程 $1987x^2-1988x+1=0$ 较小的根为 β，则 $\alpha-\beta$ 的值是

(A) $\frac{1988}{1987}$. (B) $\frac{1989}{1988}$. (C) $\frac{1986}{1987}$.

(D) $\frac{1987}{1988}$. (E) 0.

(3) 两个质数 p、q 恰是整系数方程 $x^2-99x+k=0$ 的两个根，则 $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$ 的值是

(A) 9413. (B) $\frac{9413}{194}$. (C) $\frac{9413}{97}$.

(D) $\frac{9413}{99}$. (E) 1.

(4) 使方程 $(a-1)x^2-(a^2-3)x+a^2+a=0$ 的根都是整数时，整数 $a(a\neq 1)$ 的个数是

(A) 0. (B) 1. (C) 2.

(D) 3. (E) 4.

(5) 如果 $1\leqslant p\leqslant 20$，$1\leqslant q\leqslant 10$，且方程 $4x^2-px+q=0$ 的两个根都是奇数，那么 p 与 q 的积等于

(A) 2, (B) 8. (C) 32.

(D) 64. (E) 这样的 p，q 不存在。

(6) 如果方程 $x^2-3x+m=0$ 和方程 $x^2+mx+m-5=0$ 有公共根，那么 m 值和公共根 a 是

(A) $m=2$ 时，$a=1$.

(B) $m=-4+\sqrt{6}$ 时，$a=1+\sqrt{6}$.

(C) $m=-4\pm\sqrt{6}$ 时，$a=1\pm\sqrt{6}$.

(D) $m=2$ 时，$a=1\pm\sqrt{6}$；$m=-4+\sqrt{6}$ 时，$a=1$.

(E) $m=2$时，$a=1$；$m=-4\pm\sqrt{6}$时，$a=1\pm\sqrt{6}$。

2. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 一个根为另一个根的n倍。

(1) 确定 p 与 q 之间的关系；(2) 当 n 取 4 时，求不超过 30 的 p、q 的整数值。

3. 已知方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个根是另一个根的立方，求系数 a、b、c 之间的关系。

4. 已知方程 $a^2+px+q=0$ 的两个根是 p 与 q，求这个一元二次方程。

5. 二次方程 $2x^2-(R-1)x+(R+3)=0$ 的两个根之差为 1，求 R 的值。

6. 利用一元三次方程根与系数的关系解方程组

$$\begin{cases}x+y+z=3,\\ xy+yz+zx=-1,\\ xyz=-3.\end{cases}$$

7. 设 α、β 是方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 的两个根，以 $\frac{1}{\alpha+2\beta}$，$\frac{1}{\beta+2\alpha}$ 为根，作一个一元二次方程。

8. 证明：如果方程 $x^2+mx+n=0$ 的一个根是另一个根的平方，那么系数间的关系是 $m^3-n(3m-1)+n^2=0$。

9. 不解方程，求 $8x^3+20x^2+14x+3=0$ 三个根的平方和与三个根之积二倍的差。

10. 把方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个根分别加上 k 所得到的数满足 $x^2-ax+b=0$；若加上 $k+1$，则所得到的数满足 $x^2-2ax+2b=0$，求 a、b、k 的值。

（四）答案与提示

1. (1) 由$|x_1|:|x_2|=2:1$，得$|x_1|=2|x_2|$。

由$|x_1\cdot x_2|=|-18|$，得$|x_1|=2\left|-\frac{18}{x_1}\right|$，$|x_1|^2=36$，

$x_1=\pm6$，于是$x_2=\mp3$。将这两个解分别代入

$x_1+x_2=-(m-5)$，得$m=2$，$m=8$。故选（A）。

(2) 设$1988=a$，则$a^2x^2-(a-1)(a+1)x-1=0$，

$x^2-\left(1-\frac{1}{a^2}\right)x-\frac{1}{a^2}=0$，$x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{a^2}$，较大根

$\alpha=1$。

$(a-1)x^2-ax+1=0$，$x^2-\left(1-\frac{1}{a-1}\right)x+\frac{1}{a-1}=0$

$x_1=-\frac{1}{a-1}$，$x_2=1$，较小根$\beta=\frac{1}{a-1}$。

$\because\ \alpha-\beta=\frac{a-2}{a-1}$，即 $\alpha-\beta=\frac{1986}{1987}$，$\therefore$ 选（C）。

【注意】 本题设参数的解法具有一般性，同学们仿此可自编题目。另外，本题可用观察法直接解得。

(3) 由$p+q=99$和p、q为质数可以断定p、q必有一奇一偶，不妨设$p=2$，则$q=97$，$\therefore\ \frac{q}{p}+\frac{p}{q}=\frac{97}{2}+\frac{2}{97}=\frac{9413}{194}$。

【注意】 偶数中只有2是质数，故设$p=2$。

(4) 由x_1、x_2为整数，x_1+x_2也必为整数，

即 $\frac{a^2-3}{a-1}=a+1-\frac{2}{a-1}$ 为整数，于是 $\frac{2}{a-1}$ 也是整数。∵ $a-1\neq0$，有 $a-1=\pm1$，或 $a-1=\pm2$。解得 $a=0,2,-1,3$。将 a 这四个值一一代入方程验证，得 $a=0$，$a=-1$ 时方程的根都是整数，故选（C）。

（5）由韦达定理 $x_1+x_2=\frac{p}{4}$，$x_1x_2=\frac{q}{4}$。由 x_1、x_2 为奇数且 x_1+x_2 为偶数，得 $x_1\cdot x_2$ 为奇数，$\frac{p}{4}$ 为偶数，$\frac{q}{4}$ 为奇数。

由已知条件，得 $\frac{1}{4}\leqslant\frac{p}{4}\leqslant5$，$\frac{1}{4}\leqslant\frac{q}{4}\leqslant\frac{5}{2}$，则 $\frac{q}{4}=1$，

$q=4$。由判别式 $p^2\geqslant16q$，得 $p^2\geqslant64$，即 $p\geqslant8$，$p/4\geqslant2$，且 $p/4$ 为偶数，得 $p=8$ 或 $p=16$。

原方程为 $4x^2-8x+4=0$ 或 $4x^2-16x+4=0$，此方程无整数（奇数）根，∴ $p=8$，$q=4$，$pq=32$，故选（C）。

（6）设公共根为 a，则 $a^2-3a+m=0$ ①，$a^2+am+(m-5)=0$ ②。②－① 得 $(m+3)a-5=0$，$m\neq-3$，$a=\frac{5}{m+3}$ ③。将③代入①，得 $\frac{25}{(m+3)^2}-\frac{15}{m+3}+m=0$，即 $(m-2)(m^2+8m+10)=0$，解得 $m=2$，$m=-4\pm\sqrt{6}$。将 m 值分别代入③，得 $a=1$，$a=1\pm\sqrt{6}$。故选（E）。

2.（1）设一根为 a，另一根为 na，由韦达定理，

$$\left.\begin{array}{l}(n+1)a=-p\\ na^2=q\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{q}{n}=\frac{p^2}{(n+1)^2}，即 p^2=\frac{(n+1)^2}{n}q。$$

(2) 由 p 与 q 的关系式，得 $p=\pm(n+1)\sqrt{\frac{q}{n}}$，当 $n=4$ 时，有 $p=\pm\frac{5}{2}\sqrt{q}$，依题 $p\leqslant30$、$q\leqslant30$的正整数，上式为 $p=\frac{5}{2}\sqrt{q}$。

当$q=1$时，$p=\frac{5}{2}$；当 $q=4$ 时，$p=5$；当 $q=9$ 时，$p=\frac{15}{2}$；当 $q=16$ 时，$p=10$；当 $q=25$时，$p=\frac{25}{2}$。

显然，满足条件的 $p=5$、10，$p=4$、16。

3. 设方程的两个根为 x_1、x_2，依题意，有

$x_1^3-x_2=0$或$x_2^3-x_1=0$，从而$(x_1^3-x_2)(x_2^3-x_1)=0$，

$(x_1x_2)^3-(x_1^4+x_2^4)+x_1x_2=0$，$(x_1x_2)^3-[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2+2(x_1x_2)^2+x_1x_2=0$，由韦达定理，得

$$\left(\frac{c}{a}\right)^3-\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\left(\frac{c}{a}\right)\right]^2+2\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}=0,$$

$$a^3c+ac^3-b^4+4ab^2c-2a^2c^2=0.$$

4. 依题意有 $\begin{cases}p+q=-p\\p\cdot q=q,\end{cases}$ 当 $q=0$ 或 $p=1$，则 $p=0$ 或 $q=-2$，取 $p=1$，$q=-2$，所求方程为 $x^2+x-2=0$。

5. 设两根为 a、$a+1$，由韦达定理，有

$\begin{cases}a+(a+1)=\dfrac{R-1}{2}\\a(a+1)=\dfrac{R+3}{3},\end{cases}$ 解这个关于 R 的方程组，得

$(R-3)^2+4(R-3)=8(R+3)$，

$\therefore\quad R=5+2\sqrt{13}$，$R=5-2\sqrt{13}$.

6. 将 x、y、z 视为一元三次方程的三个根，则由根与系数的关系，有 $t^3-3t^2-t+3=0$。$t^2(t-3)-(t-3)=0$，$(t-3)(t^2-1)=0$，$t=3$，$t=\pm 1$，

$\therefore$ 原方程组的解是 $x=-1$，$\begin{cases} y=1，z=3， \\ y=3，z=1； \end{cases}$ $x=1$，

$\begin{cases} y=-1，z=3， \\ y=3，z=-1； \end{cases}$ $x=3$，$\begin{cases} y=1，z=-1， \\ y=-1，z=1. \end{cases}$

7. 设所求的方程为 $y^2+py+q=0$，依题意，有

$$p=-\left(\frac{1}{\alpha+2\beta}+\frac{1}{\beta+2\alpha}\right)=-\frac{3(\alpha+\beta)}{2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta}$$

$$=\frac{3b/a}{2\cdot\frac{b^2}{a^2}+\frac{c}{a}}=\frac{3ba}{2b^2+ac},\quad q=\frac{1}{\alpha+2\beta}\cdot\frac{1}{\beta+2\alpha}$$

$$=\frac{1}{2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta}=\frac{1}{2\cdot\frac{b^2}{a^2}+\frac{c}{a}}=\frac{a^2}{2b^2+ac}.$$ $\therefore$ 所求作的方程为 $y^2+\frac{3ab}{2b^2+ac}y+\frac{a^2}{2b^2+ac}=0$，即 $(2b^2+ac)y^2+3aby+a^2=0$。

8. 设方程的两个根为 α、α^3，由韦达定理，有

$\begin{cases} \alpha+\alpha^2=-m & ① \\ \alpha^3=n & ②， \end{cases}$ 把①立方，得 $\alpha^3+3\alpha^4+3\alpha^5+\alpha^6=-m^3$，

即 $\alpha^3+\alpha^6+3\alpha^3(\alpha+\alpha^2)=-m^3$。把①、②代入上式，得 $n+n^2+3n(-m)=-m^3$。

$\therefore\quad m^3-n(3m-1)+n^2=0$。

9. 设三个根为 x_1、x_2、x_3。由根与系数关系

$x_1+x_2+x_3=-\frac{5}{2}$，$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{7}{4}$，

$x_1x_2x_3=-\frac{3}{8}$。

又 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{7}{4}\times 2=\frac{11}{4}$，$2x_1x_2x_3=-\frac{3}{4}$。

∴ $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2x_3=\frac{11}{4}+\frac{3}{4}=\frac{7}{2}$。

10. 设第一个方程的两根为 α、β，依题意，有 $(\alpha+k)+(\beta+k)=a$，$(\alpha+k)(\beta+k)=b$；$(\alpha+k+1)+(\beta+k+1)=2a$，$(\alpha+k+1)(\beta+k+1)=2b$，∴ $k=a$。

又 $k(k-a)=0$，$2k=3a-2$。

∴ $(k+1)^2-a(k+1)-b=0$。

由上面几个关系式知，若 $k=0$ 时，则 $a=0$。∴ $2k\neq 3a-2$，∴ $k\neq 0$，得 $k=a$，又 $a=2$ 得 $b=3$，∴ $a=k=2$，$b=3$。

六 指 数

（一） 基本原理

1. 基本概念

（1） 零指数；　　　　（2） 负整数指数；

（3） 科学记数法；　　（4） 分数指数；

（5） 根式。

2. 指数幂的运算性质

指数概念的推广，使有理指数幂的运算满足正整数指数幂的运算法则：（1） $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；（2） $a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$；（3） $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$；（4） $(ab)^n = a^n \cdot b^n$；（5） $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(a \neq 0)$．但前提是各指数幂必须有意义．五条法则可并成（1）、（3）、（4）三条。

3. 根式的性质

（1） $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $(a \geqslant 0\ \ b \geqslant 0)$；

（2） $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a \geqslant 0\ \ b > 0)$；

（3） $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $(a \geqslant 0)$；

（4） $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $(a \geqslant 0)$．

【注意】 （1）不同的指数幂，对底数的限定条件也不尽

相同，因此要注意字母的条件。(2) 负指数的概念，可将乘法和除法在形式上统一起来；分数指数的概念，可将乘方与开方在形式上统一起来。因此指数概念，减少了计算的门类，实现了多种运算形式上的统一。

(二) 范例与方法

例1 化简 $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}} \div \left[\dfrac{\sqrt{b}-\dfrac{a}{(ab)^{-0.5}}}{1-a}-\sqrt{ab}\right]$
$+\dfrac{a}{b}\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

思路：先统一分数指数与根式的形式，再按有理式运算法则运算。

∵ **解**：$\dfrac{\sqrt{b}-\dfrac{a}{(ab)^{-0.5}}}{1-a}-\sqrt{ab}$

$$=\frac{\sqrt{b}-a\sqrt{ab}-\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}}{1-a}$$

$$=\frac{\sqrt{b}(1-\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}=\frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}$$

∴ 原式 $=\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{1+a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a}{b}\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3}\right]^{-\frac{1}{3}}$

$$=1+\frac{2a}{3b}=\frac{2a+b}{3b}.$$

例2 计算$\left[\dfrac{4x-9x^{-1}}{2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{x+3x^{-1}-4}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}$.

思路：注意因式分解 $4x-9x^{-1}=(2x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}})(2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}})$，$x+3x^{-1}-4=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}})$。

解：原式 $=\left[\dfrac{(2x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}})(2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}})}{2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}}\right.$

$$\left.+\frac{(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}$$

$=[2x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}]^{-2}$

$=(3x^{\frac{1}{2}})^{-2}=\dfrac{1}{9x}$。

例 3 设 $60^a=3$，$60^b=5$，求 $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$ 的值。

思路：由 $12=\dfrac{60}{5}=\dfrac{60}{60^b}=60^{1-b}$，然后进行幂指数的运算即可。

解：$12=\dfrac{60}{5}=\dfrac{60}{60^b}=60^{1-b}$，

$\therefore\quad 12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}=(60^{1-b})^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}=60^{\frac{1-a-b}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{60}{60^a\cdot 60^b}}=\sqrt{\dfrac{60}{3\times 5}}=\sqrt{4}=2$。

例 4 若 a、b、c 是正实数 且 $\sqrt[m]{a}<\sqrt[n]{b}<\sqrt[p]{c}$，求证 $\sqrt[m]{a}<\sqrt[m+n+p]{abc}<\sqrt[p]{c}$。

思路：将给定的不等式转化成分数指数，利用 $a^{\frac{n}{m}}<b$，$a^{\frac{p}{m}}<c$，进行同向（正的）不等式相乘，从而得出 $a^{\frac{m+n+p}{m}}$

$<abc$。仿前面的方法也可得出$abc<c^{\frac{m+n+p}{p}}$。

解：∵ $a^{\frac{1}{m}}<b^{\frac{1}{n}}$。∴ $a^{\frac{n}{m}}<b$，

∵ $a^{\frac{1}{m}}<c^{\frac{1}{p}}$，∴ $a^{\frac{p}{m}}<c$。

相乘得 $a^{\frac{n}{m}}\cdot a^{\frac{p}{m}}<bc$，同乘 a，

得 $a^{\frac{m+n+p}{m}}<abc$，∴ $\sqrt[m]{a}<\sqrt[m+n+p]{abc}$。

又 $a^{\frac{1}{m}}<c^{\frac{1}{p}}$，∴ $a<c^{\frac{m}{p}}$，

$b^{\frac{1}{n}}<c^{\frac{1}{p}}$，$b<c^{\frac{n}{p}}$，

∴ $abc<c^{\frac{m+n+p}{p}}$，∴ $\sqrt[m+n+p]{abc}<\sqrt[p]{c}$。

综上所述$\sqrt[m]{a}<\sqrt[m+n+p]{abc}<\sqrt[p]{c}$成立。

例 5 求满足$n^{200}<5^{300}$的最大整数n。

思路：将5^{300}表示成指数为 200 的幂形式，再由底数确定 n 的最大值。

解：∵ $5^{300}=(5^{\frac{3}{2}})^{200}=(\sqrt{125})^{200}$，

∴ 满足$n^{200}<5^{300}=(\sqrt{125})^{200}$的最大的整数 n 是 11。

例 6 求方程 $(x^2-x-1)^{x+2}=1$的整数解。

思路：利用 $a^b=1$ 的条件有三种情况：(1) $a=1$；(2) $a=-1$，b 为偶数；(3) $b=0$，$a\neq0$ 分别求 x。

解：(i) 当 $x^2-x-1=1$即 $x=2$，$x=-1$；

(ii) 当 $x^2-x-1=-1$，且$x+2$ 是偶数，此时，$x=0$（$x=-1$舍去）。

(iii) 当$x+2=0$ 且$x^2-x-1\neq0$时，得$x=-2$，

则原方程的解是 $x=2$，$x=-1$，$x=0$，$x=-2$。

例 7 如果 $5^x=2^y=\sqrt{10^z}\,(z\neq 0)$，求证

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$。

思路：由已知条件得出 $5=10^{\frac{z}{2x}}$，$2=10^{\frac{z}{2y}}$，两式相乘，得出同底数的幂相等，从而得出指数间的等量关系。

解：∵ $z\neq 0$，

∴ $xy\neq 0$。

∵ $5^x=2^y=10^{\frac{z}{2}}$，

∴ $5=10^{\frac{z}{2x}}$，$2=10^{\frac{z}{2y}}$，相乘，$10=10^{\frac{z}{2x}+\frac{z}{2y}}$。

于是 $\frac{z}{2x}+\frac{z}{2y}=1$，即 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$。

例 8 甲、乙两人对数 a $(a\neq 0)$ 分别作这样次序的运算：甲先作平方运算，然后乙作甲所作得数的倒数运算；第二次甲、乙分别对第一次所得数再作仿照前一次的运算，这样作下去，试求第100次所得的数。

思路：从前几次的具体运算中，概括出甲、乙两人每次运算的关于次数n的代数式，然后求 $n=100$ 的代数式的值。

解：设甲、乙所作的次数为n，此时所得的值是 y_n，则

$n=1$时，$y_1=(a^2)^{-1}=a^{-2}$，

$n=2$时，$y_2=[(a^{-2})^2]^{-1}=a^4$，

$n=3$时，$y_3=[(a^4)^2]^{-1}=a^{-8}$，

$n=4$时，$y_4=[(a^{-8})^2]^{-1}=a^{16}$。

可知，第n次运算所得 $y_n=a^{(-2)^n}$，

当 $n=100$ 时，$y=a(-2)^{100}=a2^{100}$。

例 9 解方程 $x^{x\sqrt{x}}=(x\sqrt{x})^{x}$。

思路： 将方程两边化成同底数幂。利用特殊值“1”的讨论去解方程。

解： 原方程化成 $x^{x^{\frac{3}{2}}}=(x^{\frac{3}{2}})^{x}$，∴ $x^{x^{\frac{3}{2}}}=x^{\frac{3}{2}x}$。

显然 $x=1$ 是方程的根。

$x\neq 1$ 时，由 $x^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}x$，得 $x\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\right)=0$，

$$\because\ x\neq 0,\quad \therefore\ x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2},\quad x=\frac{9}{4}.$$

∴ 原方程的根是 $x=1$ 或 $x=\frac{9}{4}$。

例10 解方程 $(x+1)(y+2)(z+8)=32\sqrt{xyz}$，$x>0$，$y>0$，$z>0$。

思路： 由 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{2}\geqslant 0$，∴ $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时上式取等号。可知 $(x+1)(y+2)(z+3)\geqslant 32\sqrt{xyz}$ 中，仅当 $x=1$ 且 $y=2$，$z=8$ 时上式中取等号。

解： ∵ $x>0$，$y>0$，$z>0$。

$$\therefore\ x+1\geqslant 2\sqrt{x},\ y+2\geqslant 2\sqrt{2y},\ z+8\geqslant 2\sqrt{8z},$$

三式相乘

$$(x+1)(y+2)(z+8)\geqslant 8\sqrt{16xyz}=32\sqrt{xyz}.$$

上式中，仅当 $x=1$，$y=2$，$z=8$，时取等号。

$$\therefore\quad 原方程的解是\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=8. \end{cases}$$

例11 设 m、n、x、y 都是自然数，求方程$x^{n+m}-x^m y^n+y=0$的整数解。

思路： 经因式分解后，利用“$a\cdot b=c$，则a可以整除c(a、b、c 为自然数）”，可设 $c=ka$，进行代换的方法，最后得出结果。

解： $\because$ $y=x^m(y^n-x^n)$，其中 x^m，y^n-x^n都是自然数，则 x^m可整除y。可设 $y=x^m z$。（z 是自然数）代入上式，$x^m z=x^m(x^{mn}z^n-x^n)$ 于是 $z=x^n[x^{(m-1)n}z^n-1]$。

$\therefore$ x^n可整除z。再设$z=x^n u$（u是自然数），

$\therefore$ $u=x^{(m-1)n}(x^n u)^n-1=x^{(m+n-1)n}u^n-1$，

则 $1=u\cdot[x^{(m+n-1)n}u^{n-1}-1]$，

$\therefore$ u 可以整除1，即 $u=1$。因而 $x^{(m+n-1)n}=2$，

故 $x=2$，且 $(m+n-1)n=1$ 可解，

得 $n=1$，$m=1$，代回原方程得$y=4$。

$\therefore$ 原方程的解是 $x=2$，$y=4$。

（三）练　习　题

1. 选择正确的答案：

(1) 有连续的 n 个数：x_1，x_2，x_3，x_4，…，x_n，其中$x_1=\sqrt[3]{3}$ $x_2=(\sqrt[3]{3})^{\sqrt[3]{3}}$，$x_3=(x_2)^{\sqrt[3]{3}}$，…$x_n=(x_{n-1})^{\sqrt[3]{3}}$ $(n>1)$，那么使 x_n 是一个整数的最小 n 是

(A) 2。 (B) 3。 (C) 4。 (D) 9。

(2) $(x+y+z)^{-1}(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})(xy+yz+xz)^{-1}\cdot[(xy)^{-1}+(yz)^{-1}+(zx)^{-1}]$的值是

(A) $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$。 (B) $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}$。

(C) $(x+y+z)^{-2}$。 (D) $\dfrac{1}{xyz}$.

2. 化简$[(e^x-e^{-x})^2+4]^{\frac{1}{2}}+[(e^x+e^{-x})^2-4]^{\frac{1}{2}}$。

3. 化简

$$\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}.$$

4. 计算 $(x^{\frac{b+c}{c-a}})^{\frac{1}{a-b}}\cdot(x^{\frac{c+a}{a-b}})^{\frac{1}{b-c}}\cdot(x^{\frac{a+b}{b-c}})^{\frac{1}{c-a}}(x>0)$。

5. 化简 $\dfrac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}$。

6. 计算$\dfrac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}}\div\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}$.

7. 已知$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$,求$\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}$的值。

8. 设$10^\alpha=2$,$10^\beta=3$,求$100^{2\alpha-\frac{1}{3}\beta}$的值。

9. 已知 $x^2+x+1=0$,求 x^8+x^{-8}。

10. 已知$a>b>c>0$。求证$a^ab^bc^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$。

11. 将$\sqrt{\sqrt{2}+1}$和$\sqrt[3]{a-1}$化成同次根式。

12. 解方程$12\cdot 4^{\frac{2}{x}}-7\cdot 4^{\frac{1}{x}}\cdot 3^{\frac{1}{x}}-12\cdot 3^{\frac{2}{x}}=0$。

13. 解方程 $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{x}=4$。

14. 试找出一组正整数x、y、z，使它们满足方程

$$x^3+y^4=z^5。$$

(四)答案与提示

1. (1) C。 (2) A。

2. $x>0$ 时 $2e^{x}$； $x<0$ 时 $2e^{-x}$。

3. 原式 $=\dfrac{1}{x^{a}(x^{-a}+x^{-b}+x^{-c})}+\dfrac{1}{x^{b}(x^{-a}+x^{-b}+x^{-c})}$

$$+\frac{1}{x^{c}(x^{-a}+x^{-b}+x^{-c})}$$

$$=\frac{x^{b}\cdot x^{c}+x^{a}\cdot x^{c}+x^{a}\cdot x^{b}}{x^{a+b+c}(x^{-a}+x^{-b}+x^{-c})}$$

$$=\frac{x^{b+c}+x^{c+a}+x^{a+b}}{x^{b+c}+x^{c+a}+x^{a+b}}=1。$$

4. 原式 $=x^{\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}+\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}}$

$$=x^{0}=1。$$

5. 通分化简得$\sqrt[3]{x^{2}}+2$。

6. 2。

7. $\dfrac{2}{5}$。

8. $\frac{16}{3}\sqrt[3]{3}$。

9. -1。

10. $\because \frac{a}{b}>1$，$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}>1$。同理，$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}>1$，

$\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{6}}>1$，将三式相乘即可。

11. $\sqrt{\sqrt{2}+1}=\sqrt[6]{(\sqrt{2}+1)^3}$，

$$\sqrt[3]{a-1}=\begin{cases}\sqrt[6]{(a-1)^2} & (a\geqslant 1),\\ -\sqrt[6]{(1-a)^3} & (a<1).\end{cases}$$

12. 原方程可化成$3\cdot 4^{\frac{1}{x}}-4\cdot 3^{\frac{1}{x}}=0$，$\therefore \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{4}{3}$，

$\therefore \quad x=1$。

13. 原方程可化成$(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=4$，

设 $(2-\sqrt{3})^x=y$，$\therefore \quad y^2-4y+1=0$，

$y_1=2+\sqrt{3}$，$y_2=2-\sqrt{3}$。最后$x=\pm 1$。

14. 设 $x^3=y^4=2^{24}$。

$\therefore \quad z^5=x^3+y^4=2^{24}+2^{24}=2^{25}$，

$\therefore \quad z=2^5$。由 $x^3=2^{24}$ 得 $x=2^8$，

$y^4=2^{24}$ 得 $y=2^6$。

所找的一组整数是 2^8，2^6，2^5。

七 三 角 形

Ⅰ 三角形全等

（一） 基本原理

1. 证明三角形全等

（1）有两组对应角相等时，

找 $\begin{cases}\text{①夹边相等；}\\ \text{②任一组对应边相等。}\end{cases}$

（2）有两组对应边相等时，

找 $\begin{cases}\text{①夹角相等；}\\ \text{②第三边对应相等；}\\ \text{③有一对应角都是直角。}\end{cases}$

（3）有一组对应边和一组对应角相等时，找另一组对应角相等。

若一组相等的对应角恰是一组相等的对边的邻角，则找相等对应边另一组邻角相等。

2. 证明两条线段相等

（1）两个全等三角形的对应边（对应中线、角平分线、高线）相等。

(2) 一个三角形的两个内角相等，它们所对的两条边相等。

(3) 等腰三角形的顶角平分线，底边上的高和中线平分底边。

(4) 角的平分线上任意一点到该角的两边距离相等。

(5) 线段的垂直平分线上任意一点到线段两端点的距离相等。

(6) 直角三角形斜边的中点到三顶点的距离相等。

(7) 过三角形一边中点且平行于底边的直线，把另一边分成的两条线段相等。

(8) 两条成轴对称或中心对称的线段相等。

(9) 两条线段都等于第三条线段，或等于第三条线段的 k ($k\neq0$) 倍，这两条线段相等。

(10) 两条相等的线段分别加上（减去）相等的线段所得的和（差）线段相等。

3. 证明角相等

(1) 全等三角形中的对应角相等。

(2) 等腰三角形的两个底角相等。

(3) 两个三角形有两组角相等，第三组对应角必相等。

(4) 对顶角相等。

(5) 角的平分线分该角为两个相等的角。

(6) 平行线间的同位角、内错角相等。

(2) 等角的补角或余角相等；都等于同一个角的两个角相等。

(8) 等腰三角形（或等边三角形）底边上的高线（或中

线）平分顶角。

4．证明线段或角的和差倍分

（1）证明两条线段 b 与 c 的和等于第三条线段 a，通常的方法是：

①先作一条线段 $x=b+c$，再证明 $x=a$；

②先作一条线段 $y=a-b$，再证明 $y=c$；

③把线段 a 分成 m、n 两部分，再证明 $m=b$，$n=c$。

（2）证明一条线段 a 等于另一条线段 b 的 k 倍，通常用的方法是：

① 先作一条线段 $x=kb$，再证明 $x=a$；

② 先作一条线段 $y=\frac{a}{k}$，再证明 $y=b$。

【注意】 角的和差倍分问题的证题途径，大体上与线段的和差倍分问题相仿。

5．利用三角形主要线段时，通常的方法

（1）角平分线

①过角平分线上一点，作该角两边的平行线，可截出一个等腰三角形（如图7—1）。

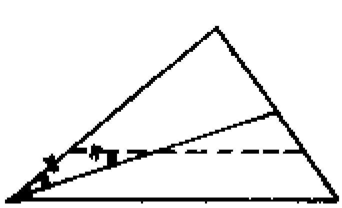


图 7—1

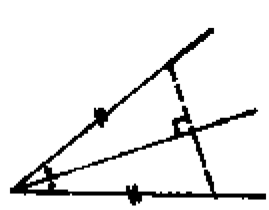


图 7—2

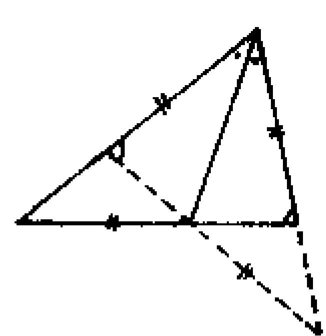


图 7—3

② 过角平分线上一点作角平分线的垂线截出两个全等的直角三角形（如图7—2）。

③ 以角平分线为对称轴翻转，使两条边重合可得到两个全等三角形（如图7—3）。

【注意】 翻转时，在较长边上截取，在较短边上延长，使之两边相等。

（2）中线

① 延长三角形的中线，常用倍长法（使延长部分与中线相等）可得到全等三角形或平行四边形（如图7—4）。

② 三角形的两条中线相交，过其中一条中线端点作另一条中线的平行线，可将三角形一条边三等分（如图7—5）。

（3） 高线

利用三角形的高线，可截得两个全等的三角形（如图7—6）。

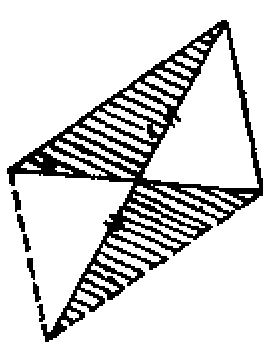


图 7—4

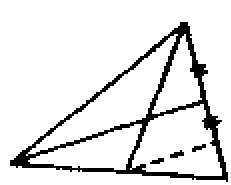


图 7—5

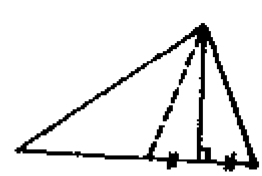


图 7—6

（二）范例与方法

例1 如图7—7，已知在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AD\perp AB$，$AD=AB$，$BE\perp DC$，$AF\perp AC$，求证 CF平分$\angle ACB$。

思路：若采用全等三角形证$\angle ACF=\angle BCF$不太容易，直接证CF是$\angle ACB$的平分线也不好找条件，但由$BC\perp AC$，$AF\perp AC$，可推出$BC//FA$。从而得出$\angle BCF=\angle CFA$，这启发我们用"过渡角"的方法来证$\angle ACF=\angle AFC$，或转而证$AC=AF$。

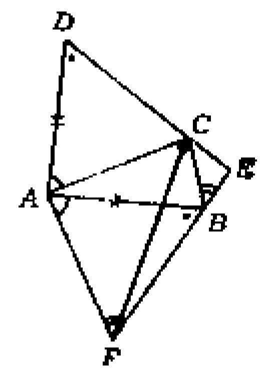


图 7—7

易证得$\angle DAC=\angle BAF$，又$AD=AB$，从而得$\triangle DAC\cong\triangle BAF$，即从"同角的余角相等"得出$\angle DCA=\angle CBE$，从平行线的同位角相等，得出$\angle CBE=\angle AFB$。故易证$\triangle ADC\cong\triangle ABF$。

证：$\because$ $AD\perp AB, AF\perp AC$，$\therefore$ $\angle DAC=\angle BAF$。又$\angle ACB=90^\circ$，$BE\perp DC$，$\therefore$ $\angle DCA=\angle CBE$。又$\because$ $AF\perp AC$，$BC\perp AC$，故$AF//BC$。$\because$ $\angle CBE=\angle AFB$。则$\angle ABF=\angle ADC$。而$AD=AB$，故$\triangle ADC\cong\triangle ABF$。$\therefore AC=AF$，$\therefore\angle ACF=\angle AFC$。又$\because\angle AFC=\angle BCF$，$\therefore\angle ACF=\angle BCF$，即$CF$平分$\angle ACB$。

【说明】 此题用了平行线，三角形中的一些知识，特别要善于抓住图形的特殊部位带来的性质（如$BC//FA$，$\angle DCA=\angle CBE$等）。

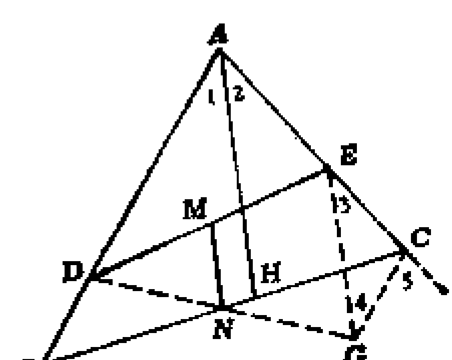


图 7—8

例2 如图7—8，已经AH是$\triangle ABC$中$\angle A$的平分线，在AB、AC边上截取$BD=CE$，M是DE

中点，N是BC中点，求证$MN//AH$。

思路：欲证$MN//AH$，就需过点C作$CG//AB$交DN的延长线于G，连EG，从而得$\triangle BND\cong\triangle CNG$，$CG=BD=CE$，故$\angle 3=\angle 4$，又$\angle 5=\angle BAC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAC$，$\angle 3=\frac{1}{2}\angle 5$，于是$\angle 2=\angle 3$，$\therefore$ $EG//AH$，再由MN是$\triangle DGE$的中位线，推出$MN//EG//AH$。

证：过点C作$CG//AB$，交DN的延长线于G，连EG，

$\because BN=NC$，$\angle DBN=\angle GCN$，$\angle DNB=\angle GNC$，

$\therefore$ $\triangle BND\cong\triangle CNG$，$\therefore BD=CG$。又$BD=EC$，

$\therefore CG=BD=CE$。故$\angle 3=\angle 4$，又$\because\angle 5=\angle BAC$，

$\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAC$，$\angle 3=\frac{1}{2}\angle 5$，$\therefore\angle 2=\angle 3$，$EG//AH$。而$MN$是$\triangle DGE$的中位线，$MN//EG$，$\therefore MN//AH$。

例8 如图7—9，等边$\triangle ABC$中，P为AB中点，Q为AC中点，R为BC中点，M为RC上任一点，$\triangle PMS$为等边三角形，连结RQ，求证$RM=QS$。

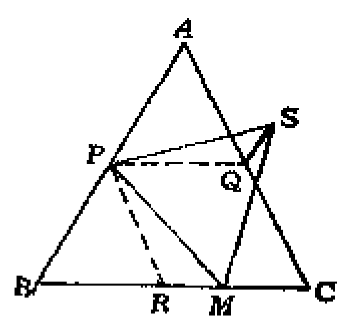


图 7—9

思路：若证$RM=SQ$，就需利用改造图形的方法，使RM和SQ分别为某两个三角形的两条边，然后证明这两个三角形全等，即可得到要证的结果。因而连结PR、PQ，根据已知条件可推出$\triangle PRM\cong\triangle PQS$。

证： 连PR、PQ，则$AP=BR$，$AQ=BP$，$\angle A=\angle B=60°$，$\triangle APQ$与$\triangle BPR$是两个全等的等边三角形，故$PQ=PR$，$\angle APQ=\angle BPR=60°$. $\therefore \angle RPQ=60°$，又$\angle QPS=\angle MPS-\angle MPQ=60°-\angle MPQ$，$\angle RPM=\angle RPQ-\angle MPQ=60°-\angle MPQ$，$\therefore$ $\angle QPS=\angle RPM$. 又$PS=PM$，$\therefore \triangle PRM\cong\triangle PQS$，$\therefore RM=QS$.

【说明】 遇到三角形两边中点时，常要利用三角形中位线的性质。

例4 如图7—10，已知BE、CF是$\triangle ABC$的高，且在BE的延长线上取点P，使$BP=AC$，在CF边上取点Q，使$CQ=AB$，求证$AP\perp AQ$.

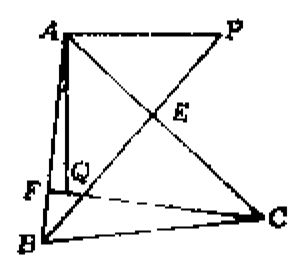


图 7—10

思路： 要证$AP\perp AQ$，只须证$\angle FAQ$与$\angle BAP$的补角是互为余角，就要证出$\angle FAQ+\angle AQF=90°$，$\triangle BPA\cong CAQ$，从中求得$\angle BAP=\angle CQA$，再证$\angle ABP=\angle ACQ$，则可推出$AP\perp AQ$.

证： $\because$ $CF\perp AB$，$BE\perp AC$，$\therefore \angle ABP=\angle QCA$. 又$AB=CQ$，$BP=AC$，$\therefore$ $\triangle BPA\cong\triangle CAQ$，$\therefore \angle BAP=\angle CQA$，又知$\angle FAQ+\angle AQF=90°$，$\angle CQA+\angle AQF=180°$，$\therefore \angle CQA-\angle FAQ=90°$，即$\angle BAP-\angle FAQ=90°$. $\therefore \angle QAP=90°$. 故$AP\perp AQ$.

例5 如图7—11，D为等边$\triangle ABC$内一点，且$DB=DA$，$BP=AB$，$\angle DBP=\angle DBC$，求证$\angle BPD=30°$.

思路： 此题初看不好证，但把已知条件认真分析，可看

出 BD 是$\angle PBC$ 的平分线，又 $DB=DA$，说明D在 AB 的垂直平分线上，因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 CD 是$\angle C$ 的平分线。则 $BP=AB=BC$。只要连结CD，证明$\triangle BPD\cong\triangle BCD$，即可。

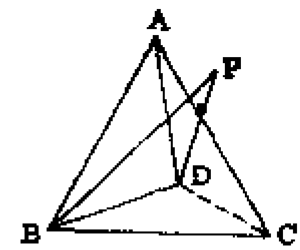


图 7—11

略证：连 DC，可证 $\triangle BCD\cong\triangle BPD$，$\therefore$ $\angle BPD=\angle BCD$。又可证出$\triangle BCD\cong\triangle ACD$，$\therefore\angle ACD=\angle BCD$。$\therefore$ $\angle BPD=30°$。

【说明】 此题应用了“等腰三角形底边上的中线、角平分线、高线、垂直平分线互相重合”以及“和一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上”这两条重要定理。

例6 如图7—12，已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D为 $\triangle ABC$ 外一点，$\angle ABD=60°$，$\angle ADB=90°-\frac{1}{2}\angle BDC$。求证 $AB=BD+DC$。

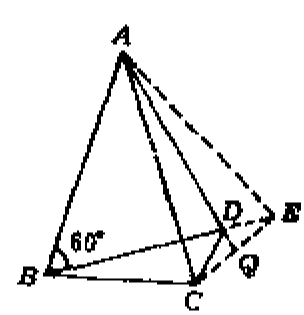


图 7—12

思路：欲证$AB=BD+DC$，就需延长BD到E，使$CD=DE$。连结 CE，证出 AD 是 CE 的垂直平分线，就能推出 $AB=AE$，又由$\angle ABD=60°$，故知 $\triangle ABE$ 是等边三角形，从而得出 $BE=AB$，这样问题就可解决。

证：延长BD到E，使$DE=CD$，连结AE、CE与AD的延长线交于Q，则$\triangle DCE$是等腰三角形，故$\angle BDC=2\angle DCQ$。$\because \angle ADB+\angle BDC+\angle CDQ=180°$，而$\angle ADB=90°-\frac{1}{2}\angle BDC$。$\therefore \frac{1}{2}\angle BDC+\angle CDQ=90°$。故$\angle DCQ+\angle CDQ=90°$。$\therefore AD$是$CE$的垂直平分线。$\therefore AC=AE$。又$AB=AC$，于是$AB=AE$。又知$\angle ABD=60°$，$\therefore \triangle ABE$为等边三角形。$\therefore BE=AB$，即$BE=BD+DE$。故$AB=BD+DC$。

【说明】 证明两线段的和等于第三线段，常延长第一线段作出两线段的和，再证它与第三线段相等。

（三） 练习题

1. 选择题：

(1) 如果α、β、γ是三角形的三个内角，而$x=\alpha+\beta$，$y=\beta+\gamma$，$z=\gamma+\alpha$，那么x、y、z中锐角个数的错误判断是

(A) 可能没有锐角。(B) 可能有一个锐角。

(C) 可能有两锐角。(D) 最多有一个锐角。

(2) 在等边$\triangle ABC$中，$AD=BE=CF$，且D、E、F不是各边中点，AE、BF、CD分别交于P、M、N，在每一组全等三角形中有三个三角形全等，在图7—13中共有全等三角形

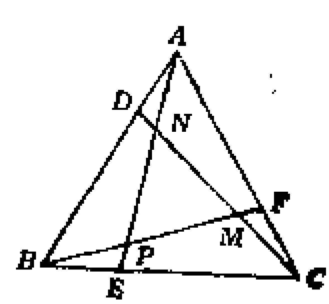


图 7—13

(A) 1组。(B) 2组。

(C) 3组。 (D) 4组。

(E) 5组。 (F) 6组。

(3) 三角形的三条外角平分线所在直线围成的三角形是

(A) 直角三角形。(B) 钝角三角形。

(C) 锐角三角形。 (D) 一般三角形。

(4) 如图7—14，BO 平分 $\angle CBA$，CO 平分 $\angle ACB$，MN 与 BC 平行，若 $AB=12$，$BC=24$，$AC=18$，则 $\triangle AMN$ 的周长是

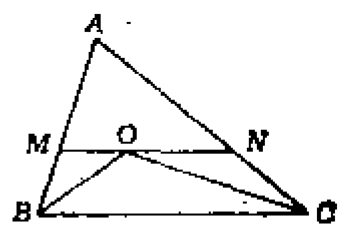


图 7—14

(A) 30。 (B) 33。 (C) 36。 (D) 38。 (E) 42。

(5) 如图7—15，在Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=35°$，以直角顶点 C 为圆心，将 $\triangle ABC$ 旋转到 $\triangle A'B'C$ 的位置，其中 A'、B'分别是A、B的对应点，且点B在斜边$A'B'$上，直角边CA'交AB于D，这时$\angle BDC$的度数是

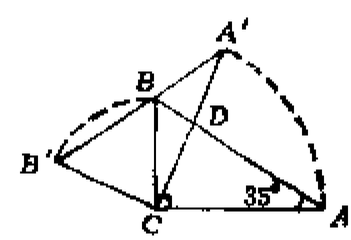


图 7—15

(A) 70°。 (B) 90°。 (C) 100°。 (D) 105°。

(E) 120°。

(6) 如图7—16，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=2\angle B$，CD 是 $\angle ACB$ 的平分线，则 BC 等于

(A) $DC+BD$。

(B) $AC+AD$。

(C) $AB+AD$。

(D) $AC+DC$。

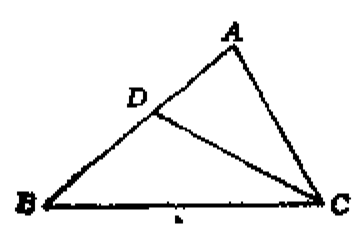


图 7—16

(7) 如图 7—17，在 $\triangle ABC$ 中，M 是边 BC 的中点，AN 平分$\angle BAC$，$BN \perp AN$，若$AB=14$厘米、$AC=19$厘米，则MN的长度是

(A) 2厘米. (B) 2.5厘米. (C) 3厘米.

(D) 3.5厘米.

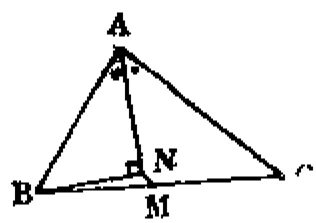


图 7—17

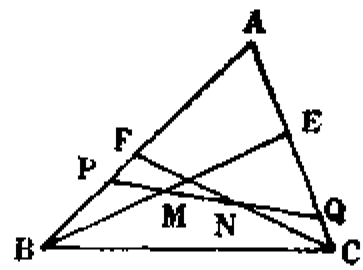


图 7—18

2. 如图 7—18，在$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上截取 $BF=CE$，过BE、CF的中点M、N 作直线分别交 AB、AC于P、Q，则$AP=AQ$.

3. 如图 7—19，已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=2\angle C$，$BC=2AB$，AD 是中线，求证$\triangle ABD$ 是等边三角形.

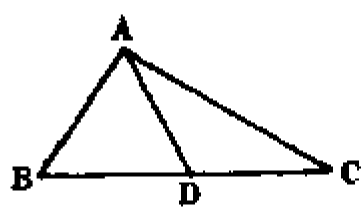


图 7—19

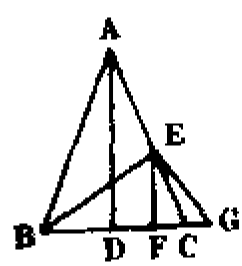


图 7—20

4. 如图7—20，在 $\triangle ABC$中，$AB=AC$，AD、BE 是$\angle A$、$\angle B$的平分线，自E点作$EF \perp BC$，F为垂足，又过E

点作 BE 的垂线，交 BC 的延长线于 G，求证 $DF=\frac{1}{4}BG$。

5. 如图7—21，在 $\triangle ABC$ 的 CA、BA 延长线上任取 D、E 两点，连结 DE，作 $\angle E$、$\angle C$ 的平分线使交于 F，则 $\angle F=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$。

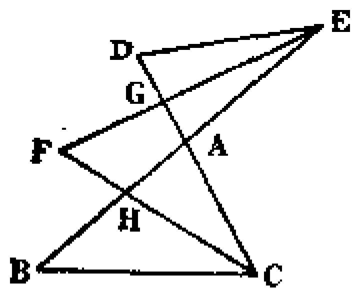


图 7—21

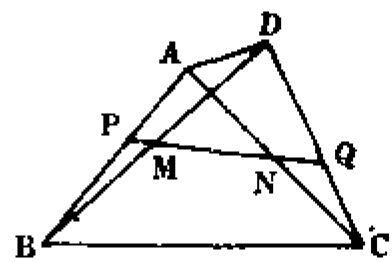


图 7—22

6. 如图7—22，四边形 $ABCD$ 中，$AB=DC$，M、N 为 BD，AC 的中点，直线 MN 交 AB、DC 于 P、Q，求证 $\angle BPM=\angle CQN$。

7. 如图7—23，已知四边形 $ABCD$，$AB=DC$，M 是 AD 的中点，N 是 BC 的中点，$GH\perp MN$，垂足为 R，分别交 AB、CD 于 G、H，求证 $\angle AGH=\angle DHG$。

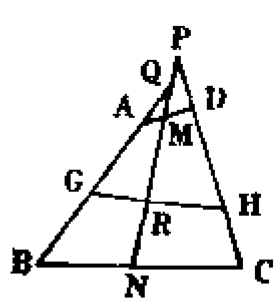


图 7—23

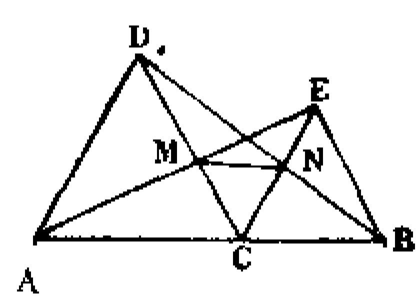


图 7—24

8. 如图7—24，已知 C 是线段 AB 上任意一点，分别以

AC和CB为底边向AB的同一侧作等边$\triangle ADC$及$\triangle CEB$，连AE交CD于M，连BD交CE于N，求证$MN//AB$。

9．如图7—25，在$\triangle ABC$的边AB、AC上截取$BP=CQ$，AD是$\angle A$的平分线，BQ、CP的中点分别是M、N，求证$AD\perp MN$。

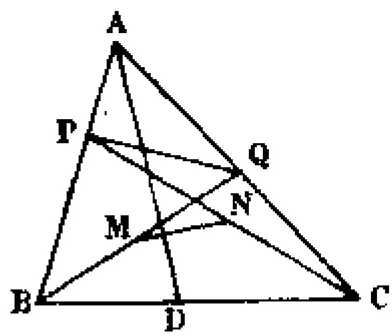


图 7—25

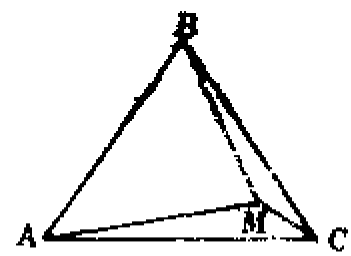


图 7—26

10．如图7—26，在$\triangle ABC$内，设$\angle BAC=\angle ACB=50°$，$M$是此三角形内一点，使得$\angle MAC=10°$，$\angle MCA=30°$，求$\angle BMC$的度数。

11．如图7—27，在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$的外角平分线AD、BE分别交对边的延长线于点D、E，且$AD=AB=BE$，求$\angle BAC$的度数。

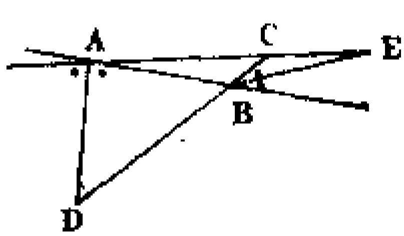


图 7—27

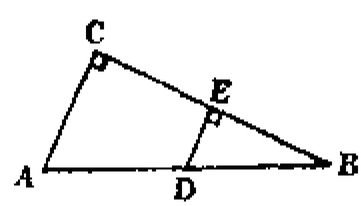


图 7—28

12．如图7—28，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，D为AB上

一点，作$DE \perp BC$，若 $BE = AC, BD = \frac{1}{2}$，$DE + BC = 1$，求证$\angle ABC = 30°$。

13. 如图7—29，过$\triangle ABC$的B、C两点作$\angle A$的外角平分线的垂线BE、CF，E、F为垂足，D为BC的中点，求证 $DE = DF = \frac{1}{2}(AB + AC)$。

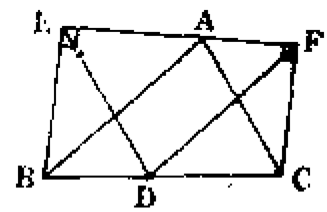


图 7—29

（四）答案与提示

1. (1) C。 (2) A。 (3) C。 (4) A。 (5) D。 (6) B。 (7) B。

2. 提示：取BC的中点R，连结MR、NR，利用三角形中位线定理可证出$AP = AQ$。

3. 提示：作$DE \perp BC$，交AC于E，连结BE；或作$\angle B$的平分线BE，交AC于E，连结DE。

4. 提示：GE的延长线交AB于H，则$HE = EG$即E为HG的中点，过E作BC的平行线交AB于K，交AD于P，则K为HB的中点，P为KE的中点，故$PE = \frac{1}{2}KE = \frac{1}{4}BG$。

5. 提示：设EF交AD于G，CF交AB于H，则$\angle F = \angle CGE - \angle GCF$，$\angle F = \angle AHC - \angle HEF$，∴ $2\angle F =$

$(\angle B+\angle D)$.

6．提示：取 AD 的中点 S，连 SM、SN，由三角形中位线定理，可证出 $SM=SN$。

7．提示：连结 DB，取 BD 的中点 O，连 OM、ON，利用三角形中位线定理、直角三角形性质定理，可推出 $\angle AGH=\angle DHG$。

8．提示：证 $\triangle EMC\cong\triangle BNC$。

9．提示：取 PQ 中点 E，连 EM、EN，得 $\angle BAC=\angle MEN$，且 $EM=EN$，作 $EF\perp MN$ 于 F，则 $\angle MEF=\angle NEF$，可证 $\angle BAD=\angle MEF$，$AD//EF$，$AD\perp MN$。

10．提示：作 $BD\perp AC$，则 BD 是 AC 的垂直平分线，延长 CM 交 BD 于 F，连 AF，由已知条件可推出 $\triangle FAM\cong\triangle FAB$，$\therefore FM=FB$。又 $\angle BFM=120°$，$\therefore\angle FMB=30°$。故 $\angle BMC=150°$。

11．提示：$\because 2\angle DAB+\angle BAC=180°$，$\therefore\angle DAB=90°-\frac{1}{2}\angle BAC$。在 $\triangle ADB$ 中，再由三角形内角和定理可推出 $2\angle ADB-\frac{1}{2}\angle BAC=90°$①。设 $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 的外角为 $\angle 1$，由三角形外角定理知 $\angle 1=\angle BAC+\angle ACB$，而 $\angle ADB=\angle 1$，$\therefore\angle ADB=\angle BAC+\angle ACB=\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ADB+\angle AEB$，即 $\angle ADB=2\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ADB$

$(\because\angle 1=\angle ACB+\angle BAC)$ ②，由①、②得 $8\angle BAC-\frac{1}{2}$

$\angle BAC=90^\circ$，$\therefore \angle BAC=12^\circ$.

12．提示：延长BC至F，使$CF=DE$，连AF，证Rt$\triangle BDE\cong$Rt$\triangle AFC$，得$AF=BD=\frac{1}{2}$，$\angle FAC=\angle ABC$，但$\angle BAC+\angle ABC=90^\circ$，$\therefore \angle BAC+\angle FAC=90^\circ$。故$\triangle BAF$是直角三角形，由$AF=\frac{1}{2}$，$BF=BC+CF=BC+DB=1$，$\therefore \angle ABC=30^\circ$.

13．提示：延长BA、CF交于H点，$\because \angle HAF=\angle CAF$，$AF\perp CH$，$\therefore HF=CF$，又$D$为$BC$的中点，$\therefore DF=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}(AB+AC)$。同理，$DE=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

Ⅱ　三角形的边、角不等关系

（一）基本原理

1．三角形的边、角不等的基础知识

（1）在三角形中，大角对大边。

（2）在直角三角形中，斜边最长。

（3）三角形任何两边的和大于第三边，任何两边的差小于第三边。

（4）在两三角形中，两组边对应相等，则夹角大的对边大。

(5) 在三角形中，大边所对的角大。

(6) 三角形的外角大于它不相邻的内角。

(7) 在两三角形中，两组边对应相等，则第三边大的对角也大。

2. 基本方法

(1) 欲证明不等的两条线段是在同一个三角形中，可依据"大角对大边"，把问题转化成证明对应两角的不等问题，加以证明。

(2) 欲证明的是线段的和(或者是线段的差)的不等关系问题，可依据"三角形两边的和大于第三边，或者两边的差小于第三边"进行证明。

(3) 欲证明的不等的两条线段（或者三条线段）不在同一个三角形中，可灵活地采用下面的方法：

(i) 添引辅助线：通过引辅助线，运用线段的等量、不等量的传递性，把所证明的线段集中在同一个三角形中，运用相应的基础知识进行证明。

(ii) 图形平移：把所要证明的线段（或图形）进行平移，使得线段集中在同一个三角形中，然后进行证明。(注：平移后的线段、图形与原图形全等。)

(iii) 利用对称：作出线段、图形（或者一部分图形）的对称图形(轴对称或中心对称)，使得分散的线段集中在同一个三角形中，进行证明。

(iv) 利用旋转：适当地选择某一个点为旋转中心，把分散的线段所在的图形，经过旋转某一个角，使得要证明的线段集中在同一个三角形中，进行证明。

(4) 判断以三条线段为边能否组成一个三角形。一般依据“任意两边之和大于第三边”或者“任意两边之差小于第三边”的逆命题进行判断。

(5) 有关证明三角形角的不等问题的证题思考方法，与证明三角形边的不等问题的思考方法类似。

(二) 范例与方法

例1 三边均为整数，且最长边为13的三角形，共有多少个。

思路：设其它两边长分别为x、y。因为x、y均可能为最长边，所以$0<x\leqslant y\leqslant 13$。

如果x、y、13为三角形三边长，那么$x+y>13$。

当$y=13$时，则x应当取$1\leqslant x\leqslant 13$的整数，才能使$x+y>13$成立。这样三边长均为整数且最长边为13的三角形，共有13个。

当$y=12$时，则x应当取$2\leqslant x\leqslant 12$的整数，才能使$x+y>13$成立。这样三边长均为整数且最长边为13的三角形，共有11个。

依此类推，一共有49个三边均为整数，且最长边为13的三角形。

解：略。

【说明】 若把此题推广成如下：

三边均为整数，且最长边为n（自然数）的三角形，共有多少个？

结论是：

①当 n 为奇数时，共有$(n+1)^2/4$个。

②当 n 为偶数时，共有$n(n+2)/4$个。

请读者自己证明这个结论。

例2 设三角形中有这样的两条边，在每条边上的高不小于这条边，则这个三角形的三个内角分别是多少度。

思路：设 h_a、h_b 分别表示为 a、b 边上的高。依已知条件：a、b 边上的高不小于这两条边，因此 $h_a \geqslant a, h_b \geqslant b$。

另一方面：过直线外一点的垂线小于斜线，这样$h_a \leqslant b$，$h_b \leqslant a$。从而$a \leqslant h_a \leqslant b \leqslant h_b \leqslant a$，必有 $a = h_a = b = h_b = a$。所以这个三角形是等腰直角三角形。它的三个内角为45°、45°、90°。

解：略。

例3 已知在$\triangle ABC$中，$\angle B > \angle C$，BD是$\angle B$的角平分线，CE是$\angle C$的角平分线。求证 $BD < CE$。

思路：欲证$BD < CE$，可在CE上截取$CK = BD$。利用$\angle B > \angle C$，$\angle ABD > \angle ACE$这个条件，可在$\angle ABD$内部作$\angle DBF = \angle ACE$，BF交AC于F，过K作$KH // BF$，KH交AC于H。通过$\triangle FBD \cong \triangle CHK$，得到$CH = BF$，从而得证。

证明：如图7—30，因为$\angle B > \angle C$，有$\angle ABD > \angle ACE$，所以在$\angle ABD$内可作$\angle DBF = \angle ACE$。在$\triangle FBC$中，由于$\angle FBC > \angle FCB$，有$FB < FC$，所以在CF上可取$CH = BF$，设过H点作FB的平行线交CE于K，则在

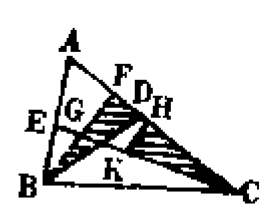


图 7—30

$\triangle BFD$、$\triangle CHK$中，$BF=CH$，$\angle BFD=\angle CHK$，$\angle FBD=\angle HCK$，故$\triangle BFD\cong\triangle CHK$，因此，$BD=CK<CE$。

例4 长为3的线段，分成三小段，以这三段为边可以作成一个三角形。则其中每小段必须满足的条件是

(A) 不大于1。 (B) 大于1/2或小于1。

(C) 小于3/2。 (D) 大于1/2且小于3/2。

思路： 设长为3的线段分成的三小段长分别为x、y、z。以这三小段边为应满足两个条件：(1) $x\leqslant y\leqslant z$，$x+y>z$；(2) $x+y+z=3$同时成立。以这三小段为边可以作成一个三角形。

解： 设长为3的线段分成的三小段长分别为x、y、z。

因为 $x+y+z=3$，$x+y>z$。

所以 $(x+y)+z-(x+y)<3-z$，得$z<\frac{3}{2}$。

由$x\leqslant y\leqslant z$，易知x、y、z均小于$\frac{3}{2}$。故选择(C)答案。

【说明】 以三条线段为边组成一个三角形，必须满足"任意两边之和大于第三边"。这是判断三条线段能否组成一个三角形的重要方法。

例5 已知长度为a、b、c的线段为边可构成一个三角形。求证以长度为$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$的线段为边也能构成一个三角形。

思路： 以长度为$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$的线段为边欲构成一

个三角形.必须满足$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$，$\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$，$\sqrt{c}+\sqrt{a}>\sqrt{b}$同时成立；或者$|\sqrt{a}-\sqrt{b}|<\sqrt{c}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$成立。

证一：$\because a+b=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2$，又$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$，$\therefore a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$。由$a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$，得$a+b<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$。

因为 $c<a+b$，$a+b<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$。所以$c<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$。因此$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$。

同理 $\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$，$\sqrt{c}+\sqrt{a}>\sqrt{b}$成立。

$\therefore$长度为$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$的线段为边可构成一个三角形。

证二：$\because$ $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=|a-b|$，又$|a-b|<c<a+b$，$a+b<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$。

$\therefore$ $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})<(\sqrt{c})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$。

得 $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|<\sqrt{c}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

故 以长度为$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$的线段为边可构成一个三角形。

例8 如图7—31，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=\text{Rt}\angle$，$CD\perp AB$。求证$AB+CD>AC+BC$。

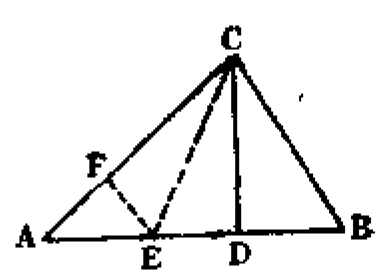


图 7—31

思路：欲证明 $AB+CD>AC+BC$，问题可转化成证明$AB-BC>AC-CD$。因为$AB>BC$，在AB和AC上可作

出$AF=AC-CD$，$AE=AB-BC$。这样 AF、AE 集中在$\triangle AFE$中，因此只证 $AE>AF$即可。根据“大角对大边”使问题可证。

证：在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=\mathrm{Rt}\angle$，则 $AB>BC$。在$\triangle ACD$中，$CD\perp AB$，则 $AC>CD$。

在AB上截取$BE=BC$，在AC 上截取 $CF=CD$，连结 EF、CE。$\because$ $BC=BE$，$\therefore\angle CEB=\angle ECB$。

$\because$ $CF=CD$，$CE=CE$，$\angle ECD=90°-\angle CED$，$\angle ECF=90°-\angle ECB$。易知$\triangle ECD\cong\triangle ECF$，$\angle CFE=\angle CDE=90°$。

在$\triangle AFE$中，$\because\angle AFE=\angle CFE=90°$，

$\therefore$ $AE>AF$，即$AB-BC>AC-CD$。

故 $AB+CD>AC+BC$。

【说明】 本题如果直接由已知条件去证明线段的和不等量关系相当困难，通过把和的形式转化成差的形式进行证明变得比较容易。这是证明上述问题常采用的方法。

例7 如图7—32，在$\triangle ABC$边 BC 上截取 $BE=CF$，连结 AE、AF。求证 $AB+AC>AE+AF$。

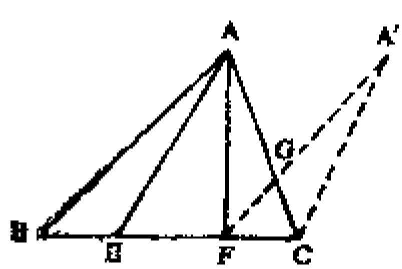


图 7—32

思路：本题从已知条件中不能确定 $AB>AE$，$AF>AC$，于是无从添引辅助线，把 AB、AC、AE、AF 集中在一个三角形中。由已知 $BE=CF$，不妨将$\triangle ABE$平移到$\triangle A'FC$的位置上，设$A'F$交AC于G。由图易知 AB、AC 线段被 G 分

成两部分，分别在$\triangle AGF$和$\triangle A'GC$中，运用“两边之和大于第三边”可使问题得证。

证一：$\because$ $BE=FC$，把$\triangle ABE$平移到$\triangle A'FC$的位置上，$\triangle ABE\cong\triangle A'FC$。设$A'F$交$AC$于$G$。

在$\triangle AGF$中，$AG+GF>AF$ ①

在$\triangle A'GC$中，$A'G+GC>A'C$ ②

将①+②得$AG+GC+A'G+GF>AF+A'C$。

$\because$ $AG+GC=AC$，$A'G+GF=A'F$。

$\therefore$ $AG+A'F>AF+A'C$。又$A'F=AB$，$A'C=AE$。

$\therefore$ $AB+AC>AE+AF$。

证二：如图7—33，过B作$BA'//AC$，使$BA'=AC$。连结EA'，易证$\triangle A'BE\cong\triangle ACF$。

再连结$A'A$，交AB于G。延长$A'E$交AB于D。在$\triangle A'BD$中，$A'B+BD>A'E+ED$，在$\triangle EDA$中，$ED+DA>AE$，则$A'B+BD+ED+DA>A'E+ED+AE$，即$A'B+AB>A'E+AE$。

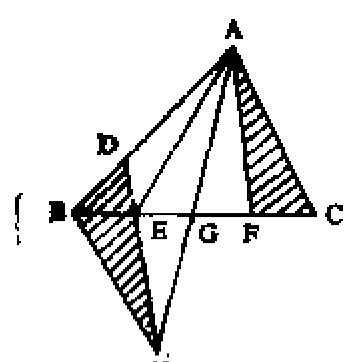


图 7—33

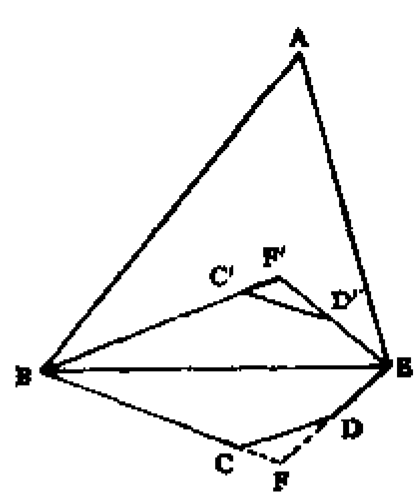


图 7—34

∵ $\triangle A'BE \cong \triangle ACF$，∴ $A'B = AC$，$A'E = AF$.

故 $AB + AC > AE + AF$.

例8 以$\triangle ABE$的一边BE的两个端点引折线$BCDE$，使$\angle ABE > \angle EBC$，$\angle AEB > \angle BED$(如图7—34)。求证$AB + AE > BC + CD + DE$.

思路： 欲比较 $AB + AE$ 和 $BC + CD + DE$ 的大小．由已知$\angle ABE$ 大于 $\angle EBF$、$\angle AEB$ 大于 $\angle BEF$，利用轴对称作图的方法，将折线$BCDE$ 集中在$\triangle ABE$ 中，进行比较折线 $BCDE$ 与$AB + AE$的大小。

证明：延长BC交ED延长线于F．以BE 所在的直线为对称轴作$\triangle BFE$的对称图形。

∵ $\angle ABE > \angle EBF$，$\angle AEB > \angle BEF$.

∴ $\triangle BF'E$在$\triangle ABE$的内部．易证$AB + AE > BF' + F'E$.

在$\triangle C'F'D'$中，$C'F' + F'D' > C'D'$.

在$\triangle F'BE$中，

$BF' + F'E = BC' + C'F' + F'D' + D'E > BC' + C'D' + D'E$.

∵ $AB + AE > BF' + F'E$,

∴ $AB + AE > BC' + C'D' + D'E$.

故 $AB + AE > BC + CD + DE$.

例9 若 P 为正$\triangle ABC$ 所在平面上任意一点（如图7—35)，则$PA \leqslant PB + PC$.

思路： 欲证$PA \leqslant PB + PC$，(1) 可运用三角形两边之和大于第三边；(2) 一条线段等于另两条线段的和．线段

PA、PB、PC不在同一个三角形中，因此需要重新安排图形中这三条线段的位置，使PA、PB、PC集中在一个三角形中。由于$AB=BC$，以B点为中心，将$\triangle PBC$旋转到$\triangle ABP'$位置上，$\triangle PBC\cong\triangle P'BA$。易知$P'A=PC$，只证$P'P=PB$，这样$PA$、$PB$、$PC$就集中在$\triangle APP'$中，可使问题得到解决。

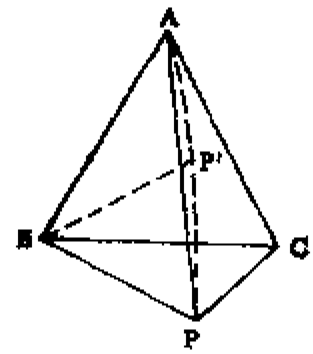


图 7—35

略证： 以B点为中心，将$\triangle PBC$旋转到$\triangle ABP'$的位置上，$\triangle PBC\cong\triangle P'BA$。则$P'B=PB$，$P'A=PC$，$AB=CB$。

$\because$ $\triangle PBC$旋转到$\triangle P'BA$位置，BC与BA重合，易知$\angle P'BP=60°$，则$\triangle P'BP$是等边三角形。于是$P'P=PB$。在$\triangle P'AP$中，$\because P'A+P'P>PA$，$P'A=PC$、$P'P=PB$。

$\therefore$ $PA<PB+PC$。

当 $\triangle PBC$旋转到$\triangle ABP'$位置上时，P'点落在PA上，则$P'A+P'P=PA$，即$PB+PC=PA$。

故 $PB+PC\leqslant PA$。

【说明】 当具有公共端点的两条相等线段的条件时，一般可利用旋转方法解决有关线段问题。

例10 设a、b、c为锐角$\triangle ABC$的三边长，h_a、h_b、h_c为对应边上的三条高如图 7—36，求证$\frac{1}{2}<\frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1$。

思路： 假设$\frac{1}{2}<\frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1$成立，可得$a+b+c<2(h_a+h_b+h_c)<2(a+b+c)$，先分析$2(h_a+h_b+h_c)<2(a+b+c)$成立的条件。由$2(h_a+h_b+h_c)<2(a+b+c)$，推出$h_a+h_b+h_c<a+b+c$。显然在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$、$\mathrm{Rt}\triangle ABE$、$\mathrm{Rt}\triangle BCE$中，有$h_a<b$，$h_b<c$，$h_c<a$。所以$h_a+h_b+h_c<a+b+c$。从而$2(h_a+h_b+h_c)<2(a+b+c)$成立。

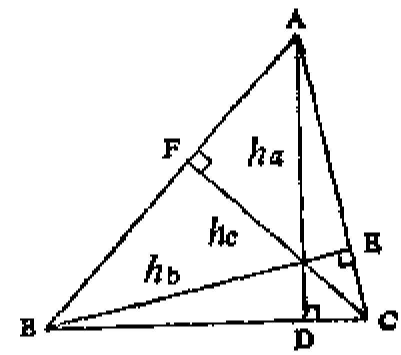


图 7—36

再看$a+b+c<2(h_a+h_b+h_c)$成立的条件。观察$a+b+c<2(h_a+h_b+h_c)$，可以猜想在运用边的不等关系时，显然h_a、h_b、h_c运用了两次，结合图形发现：h_a可看作$\triangle ABD$和$\triangle ACD$的边。在$\triangle ABD$中，$h_a+BD>c$。在$\triangle ACD$中，$h_a+DC>b$。则$2h_a+BD+DC>b+c$，即$2h_a+a>b+c$。

同理 $2h_b+b>a+c$，$2h_c+c>a+b$。

所以 $2h_a+2h_b+2h_c+a+b+c>2(a+b+c)$。

从而$a+b+c<2(h_a+h_b+h_c)$成立。

由此，得知$\frac{1}{2}<\frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1$成立的条件。

略证： ∵在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$、$\mathrm{Rt}\triangle ABE$、$\mathrm{Rt}\triangle BCE$中，有$h_a<b$，$h_b<c$，$h_c<a$。

∴ $h_a+h_b+h_c<a+b+c$。

$\therefore \quad \dfrac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1$.

在△ABD和△ACD中，$h_a+BD>c$，$h_a+DC>b$。

$\because \quad 2h_a+BD+DC>b+c$，$BD+DC=a$。

$\therefore \quad 2h_a+a>b+c$。

同理　在△BAE和△BCE中，有$2h_b+b>a+c$。

在△CBF和△CAF中，有$2h_c+c>a+b$。

得　$2(h_a+h_b+h_c)+a+b+c>2(a+b+c)$。

$\therefore \quad 2(h_a+h_b+h_c)>a+b+c$。

于是　$\dfrac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}>\dfrac{1}{2}$。故$\dfrac{1}{2}<\dfrac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1$。

例11　在单位正方形周界上任意两点之间连一曲线，若这一曲线把这个正方形分成两个面积相等的部分，那么这个曲线段的长度不小于1。

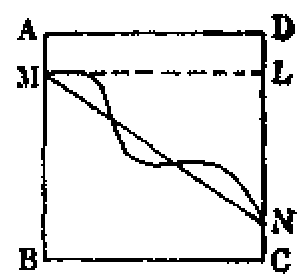


图 7—37

思路：单位正方形是指边长为1的正方形。设M、N是单位正方形$ABCD$的周界上任意两点，$\overset{\frown}{MN}$是连接M、N两点间的一条曲线。欲证曲线段不小于边长，依据"在所有连结两点的线中，线段最短"。如图7—37，易知$\overset{\frown}{MN}\geqslant MN$。这样使问题转化成比较$MN$与边长的大小。另一方面，任意两点$M$、$N$在单位正方形边上的位置有三种情况：(1) 点$M$、$N$分别在一组对边上；(2) 点$M$、$N$分别在一组邻边上；(3) 点$M$、$N$在同一条边上。下面分三种情况给予证明。

证：(1) 设点M、N分别在一组对边AB、CD上

如图7—37，连结$\overset{\frown}{MN}$曲线段，把正方形$ABCD$面积分成相等的两部分。

∵连结两定点的线中，直线段最短，∴$\overset{\frown}{MN}\geqslant MN$。

过点M作$ML\perp CD$，垂足为L，则$ML=AD=1$。

∵ $MN\geqslant ML$，∴ $\overset{\frown}{MN}\geqslant 1$。

（2）设点M、N分别在一组邻边上，如图7—38，M在BC上，N在CD上。连结$\overset{\frown}{MN}$曲线段，将正方形$ABCD$的面积分成相等的两部分，则$\overset{\frown}{MN}$一定与对角线BD相交。否则$\overset{\frown}{MN}$所分正方形不是面积相等的两部分。

不妨设从点M出发的$\overset{\frown}{MN}$与对角线BD的第一个交点为E。作$\overset{\frown}{ME}$关于BD的对称图形$\overset{\frown}{M'E}$，则M'在AB上。由第一种情况得知$\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{M'EN}\geqslant 1$。

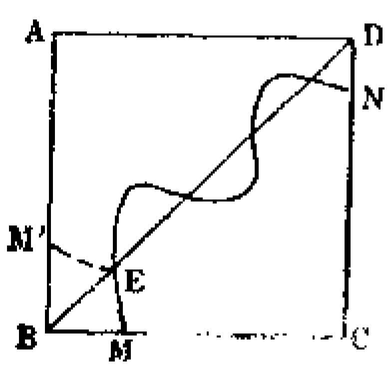


图 7—38

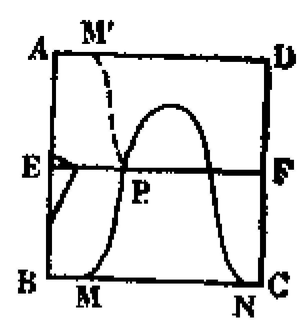


图 7—39

（3）设点M、N同在一条边BC上，或者点M与点N重合。如图7—39，那么$\overset{\frown}{MN}$一定与AB、CD两边中点连线EF相交。否则$\overset{\frown}{MN}$分正方形$ABCD$不是面积相等的两部分。不妨设从点M出发的曲线$\overset{\frown}{MN}$与EF的第一个交点为P。作$\overset{\frown}{MP}$关于EF的对称图形$\overset{\frown}{M'P}$，则点M'在AD上，由第一种情况易知$\overset{\frown}{MN}\geqslant\overset{\frown}{M'PN}\geqslant 1$。

由以上三种情况的证明，得知$\overset{\frown}{MN}\geqslant 1$。

例12 如图7—40在凸四边形$ABCD$中，已知$AB+BD\leqslant AC+CD$。求证$AB<AC$。

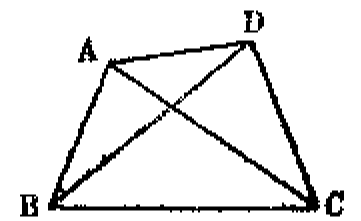


图 7—40

思路：从条件 $AB+BD\leqslant AC+CD$，直接证明$AB<AC$，一时无从下手解题。欲证$AB<AC$，不妨用反证法来证明$AB<AC$的反面，推出与已知条件相矛盾的结果。

证：用反证法。假设AB不小于AC，则$AB\geqslant AC$。在$\triangle ABC$中，$\because$ $AB\geqslant AC$，$\therefore$ $\angle ACB\geqslant\angle ABC$，但是$\angle BCD>\angle ACB$。$\therefore$ $\angle BCD>\angle ABC$。

$\because$ $\angle ABC>\angle CBD$，$\therefore$ $\angle BCD>\angle CBD$，$BD>CD$。

于是$AB+BD>CD+AC$。这与已知条件$AB+BD\leqslant AC+CD$相矛盾。$\therefore$ 假设$AB\geqslant AC$不成立。故$AB<AC$。

例13 如图7—41，在$\triangle ABC$的中线AD上任取一点P，连结BP、CP，已知$\angle C>\angle B$，求证$\angle PBD<\angle PCD$。

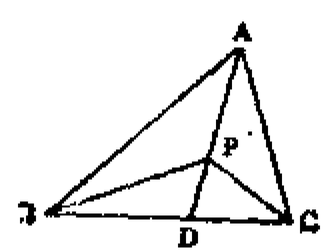


图 7—41

证：在$\triangle ABC$中，$\because\angle C>\angle B$，$\therefore AB>AC$。

又$\because$在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，$AD=AD$，$BD=DC$，$AB>AC$，$\therefore\angle ADB>\angle ADC$。

在$\triangle PBD$和$\triangle PCD$中，$BD=DC$，$DP=DP$，$\angle ADB>\angle ADC$，$\therefore$ $BP>CP$。

∴ 在$\triangle PBC$中$BP>CP$，$\angle PBD<\angle PCD$。

【说明】 在证明几何问题时，要紧紧抓住已知条件。本题没有运用特殊的方法及技巧，仅仅从已知条件入手，把角的不等关系转化为边的不等关系，然后再把边的不等关系转化成角的不等关系。这是证明边、角不等关系的基本思考分析方法。

例14 平面上有A、B、C、D四点，其中任何三点都不在一条直线上。求证在$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$、$\triangle BDC$中，至少有一个三角形的一个内角不超过45°。

思路：由于A、B、C、D四点，其中任何三点都不在一条直线上。因此这四点所连结的三角形有两种位置图形。下面分两种情况进行证明。

证：若A、B、C、D是如图7—42的四个顶点时，由于$\angle DAB+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA=360°$，∴其中至少有一个角小于或者等于90°。假设$\angle DAB\leqslant 90°$，则$\angle DAC$和$\angle CAB$中至少有一个角不超过45°。

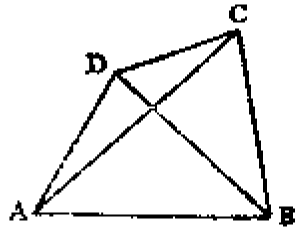


图 7—42

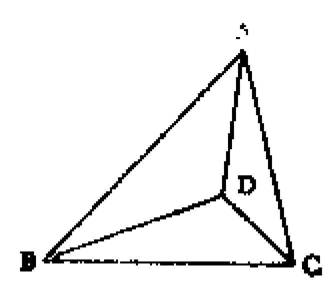


图 7—43

若D点在$\triangle ABC$的内部时（如图7—43），∵$\angle BAC+\angle ABC+\angle BCA=180°$，∴其中至少有一个角小于或者等于60°。不妨设$\angle BAC\leqslant 60°$，则$\angle BAD$和$\angle CAD$中至少

有一个角不超过30°，更不超过45°。

由以上讨论：$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$中至少有一个三角形的一个内角不超过45°。

【说明】 本题的证题方法是根据两个重要性质：

(1) 四边形的四个内角至少有一个角不大于90°

(2) 三角形的三个内角至少有一个角不大于60°。这是证明有关不等量关系的常用依据。

（三）练习题

1. 选择题：

(1) 平面上有五个已知点，具有下列性质：任意四点中有三个点构成一个正三角形的顶点，则以这些点为顶点的正三角形的个数是

(A) 1。 (B) 2。 (C) 3。 (D) 4。

(2) 在$\triangle ABC$中，$\angle A<\angle B+\angle C$，则$\angle A$是

(A) 小于90°。 (B) 不大于90°。 (C) 等于90°。

(D) 大于60°且小于90°。

(3) P是高为h的等边三角形内部一点，设P点到各边的距离分别为x、y、z。若以x、y、z为长度的三线段可以构成一个三角形，则x、y、z各应满足的条件是

(A) $x<h, y<h, z<h$。 (B) $x<\frac{h}{2}$，$y<\frac{h}{2}$，$z<\frac{h}{2}$。

(C) $x<\frac{h}{3}$，$y<\frac{h}{3}$，$z<\frac{h}{3}$。(D) $x\leqslant\frac{h}{3}$，$y\leqslant\frac{h}{3}$，

$z\leqslant\frac{h}{3}$。

(4) 如图7—44，OA、OB是$\triangle ABC$中$\angle A$、B的平分线，则$\angle AOB$是

(A) 锐角。 (B) 钝角。

(C) 直角。 (D) 不确定的。

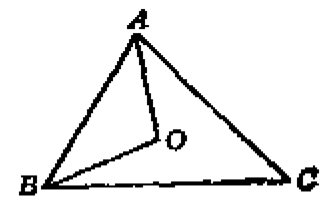


图 7—44

(5) 在等腰三角形ABC中，AB的长是AC的2倍，三角形的周长是20，则AB长等于

(A) 4。 (B) 6。 (C) 8。 (D) 10。

(6) 平面上有四个点A、B、C、D，且$BC+BD>AC+AD$，那么点B一定是

(A) 在$\triangle ADC$的内部。 (B) 在$\triangle ADC$的外部。

(C) 在线段AC或线段AD上。 (D) 在线段CD上或和点C（或者点D）重合。

2. 如图7—45，已知在等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC$，P是三角形内一点，且$PB<PC$。求证$\angle APB>\angle APC$。

3. 如图7—46，已知$\triangle ABC$中，EF是顶角$\angle A$的

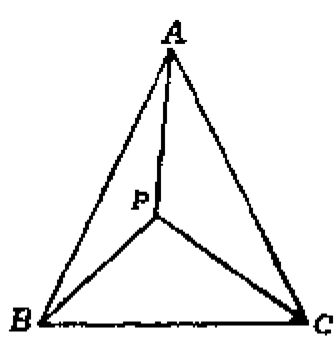


图 7—45

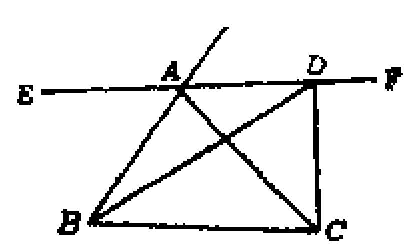


图 7—46

外角平分线，在EF上任取一点D。求证$AB+AC<DB+$

$+DC$。

4．如图7—47，在$\triangle ABC$中，$BC>AC$，AD、BE是两条高．求证$BC+AD>AC+BE$。

5．如图7—48，已知在$\triangle ABC$中，$AB>AC>BC$，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，$AF\perp BC$。求证$AF>BD>CE$。

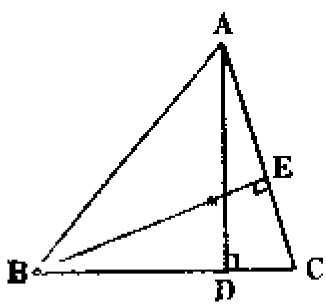


图 7—47

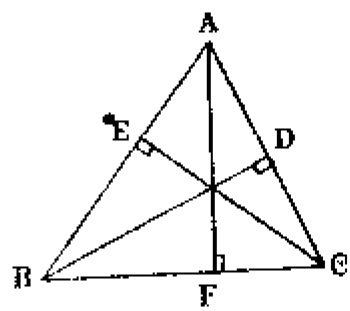


图 7—48

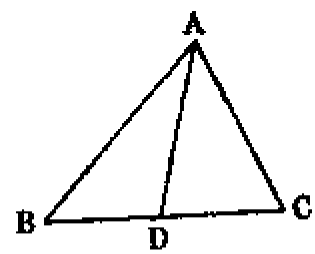


图 7—49

6．如图7—49，在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，AD为BC上的中线．求证$\angle BAD<\angle CAD$。

7．在平面上任意给定六个点，其中任意三点不在一条直线上，在这六个点中可以选择三点，以它们为顶点的三角形总有一个角不大于30°。

8．已知$\triangle ABC$的三条中线分别为AE、BF、CD。求证$\frac{3}{4}(AB+BC+CA)<AE+BF+CD<AB+BC+CA$。

9．设a、b、c是三角形的三边，求证$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$。

10．已知三角形三边a、b、c满足$a^2+b^2-c^2-ab=0$，当$c=1$时．求证a、b两边之和不大于2。

11. 在等腰三角形ABC中，$AB=AC$，CD为腰AB上的高，若$\frac{2BD}{BA}$为整数，试判断$\triangle ABC$的形状。

12. 如图7—50，AD是$\triangle ABC$的中线，$\angle ADB$、$\angle ADC$的平分线分别交AB、AC于E、F。求证$EF<BE+CF$。

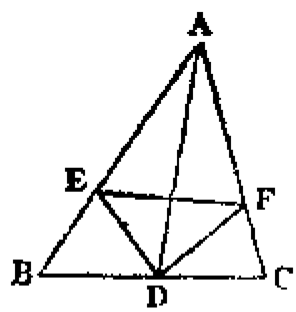


图 7—50

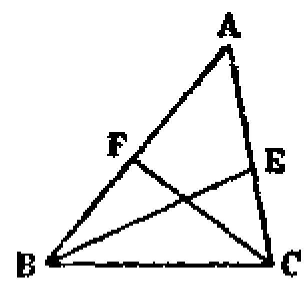


图 7—51

13. 如图7—51，在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，BE、CF分别是它们边上的中线。求证$BE>CF$。

14. 要使已知等边三角形所在平面上一点P到各边的距离组成一个新的三角形，问点P应在平面的什么区域。

（四） 答案与提示

1. (1) C。 (2) A。 (3) B。 (4) B。 (5) C。 (6) B。

2. 提示，如图7—52，以A为旋转中心，把$\triangle ABP$旋转到$\triangle ACQ$的位置，连结PQ。易证$\angle QPC<\angle PQC$。推得$\angle APQ+\angle QPC<\angle AQP+\angle PQC$，得 $\angle APC<$

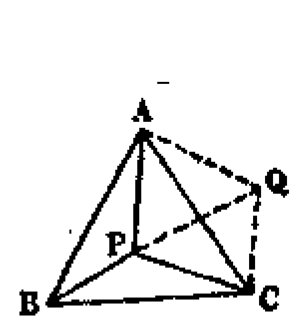


图 7—52

$\angle AQC$，证得$\angle APB>\angle APC$。

3．提示：如图7—53，以AF为对称轴，作$\triangle CAD$的对称图形$\triangle C'AD$，使AB、AC；DB、DC集中在$\triangle C'BD$中。可得$AB+AC<DB+DC$。其中C'、A、B三点在一条直线上。

4．提示：如图7—54，将$BC+AD>AC+BE$转化成$BC-AC>BE-AD$，易知在BC上可截取$A'C=AC$，作$A'D'\perp AC$于D'，$A'F\perp BE$于F。易知$BA'=BC-A'C=BC-AC$,$BF=BE-FE=BE-AD$,$\triangle A'CD'\cong\triangle ACD$，得$A'D'=AD$。在Rt$\triangle BA'F$中，可得$BA'>BF$，从而使问题得证。

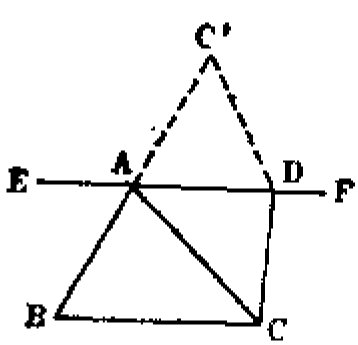


图 7—53

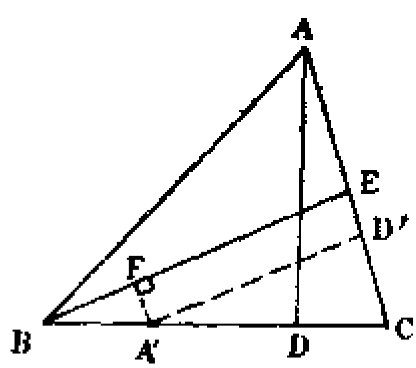


图 7—54

5．提示：利用三角形面积公式进行证明。

6．提示：延长AD至E，使$AD=DE$，连结BE。将$\angle CAD$集中在$\triangle ABE$中，由"大边对大角"进行证明。

7．提示：如图7—55，设给定的点为A、B、C、D、E、F。因为总可以过一点作一条直线使其余五点在直线的一侧。若$\angle BAF\leqslant 120°$,则四个角中至少有一个不大于$30°$,

设 $\angle EAF=30°$，这时 $\triangle AEF$ 满足条件。若 $\angle BAF>120°$，这时$\triangle ABF$满足条件。

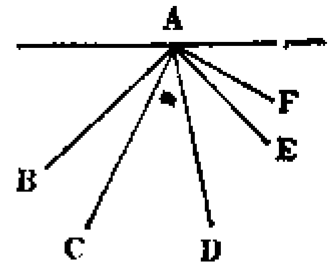


图 7—55

8. 提示略。

9. 提示：根据三角 形两边之和大于第三边。

10. 提示：由$c=1$，$a^2+b^2-c^2-ab=0$，得$a^2+b^2-ab=1$。变形得$(a+b)^2=1+3ab$。由$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$，易证$a+b\leqslant 2$。

11. 提示：设$\frac{2BD}{BA}=x$（x为整数），由边的不等关系，可得$x<4$，$x=1$，$x=2$，$x=3$，当$x=1$时，$\triangle ABC$为等边三角形；当 $x=2$ 时，$\triangle ABC$为等腰直角三角形；当$x=3$时，$\triangle ABC$是顶角为120°的等腰三角形。

12. 提示：如图7—56，利用角平线的对称性，将BE、CF集中在$\triangle EGF$中。只有在E、G、F不共线时，才有$EF<EG+FG$。这一点必须给予证明。

13. 提示：如图7—57，用平移的方法将EB平移到FG的位置上。问题转化为在$\triangle FGC$中，证明$FG>CF$。其中

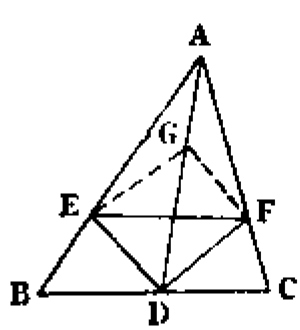


图 7—56

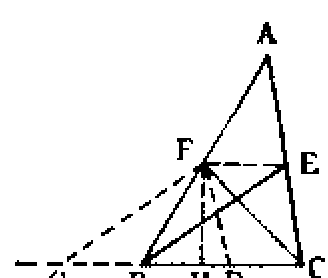


图 7—57

$BE \mathrel{\underline{\parallel}} FG$，$EF // BC$，$FD \mathrel{\underline{\parallel}} EC$，$FH \perp BC$。

14. 提示：如图7—58，分别向两方延长 AB、BC、AC 将平面分成七个区域只讨论点P在1、2、7、3区域时即可。利用 P点与顶点A、B、C构成的三角形面积及点 P 到各边的距离 x、y、z 所满足 $x+y>z$，$x+z>y$，$z+y>x$ 的条件。可知点P所在的区域，如图 7—59 阴影部分。

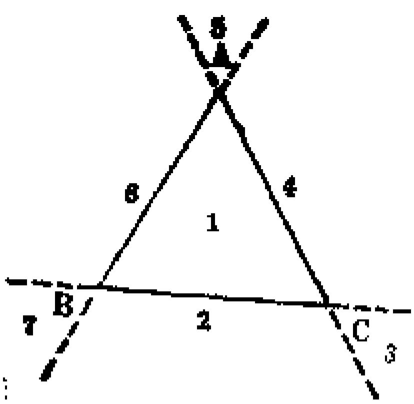


图 7—58

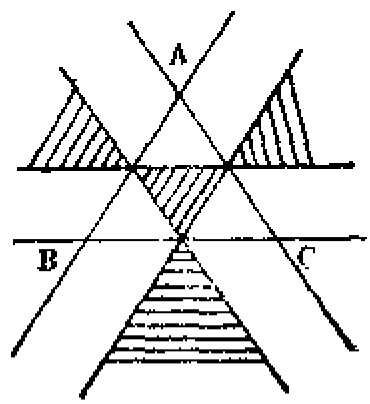


图 7—59

八 四 边 形

（一）基本原理

1. 四边形的基础知识

（1）多边形内角和、外角和定理；

（2）平行四边形及特殊平行四边形（矩形、菱形、正方形）的定义、性质、判定。

（3）梯形的定义、性质、判定。

2. 一些重要定理

对应边互相垂直的两个角；

平行线等分线段；

三角形的中位线、梯形中位线。

3. 中心对称

由于四边形这一部分，概念交错，关系复杂，很多性质相近，多数定理互逆，因此要注意运用特殊和一般的关系，注意它们之间的联系和区别。

四边形的内容丰富，它是平行线和三角形知识的发展和运用，将四边形问题化为三角形问题来解决，是学习这一部分的重要思想方法。

（二）范例与方法

例1 两个边长是1的正方形 $ABCD$、$PQRS$，若点 P

和正方形$ABCD$的中心O重合，试求两图形重叠部分的面积。

思路：如图8—1，四边形$OECF$为两正方形重叠部分，连结OB、OC，可证$\triangle OBE \cong \triangle OCF$，故这两个三角形的面积相等，都加上$\triangle OEC$的面积，就可以得到四边形$OECF$的面积。

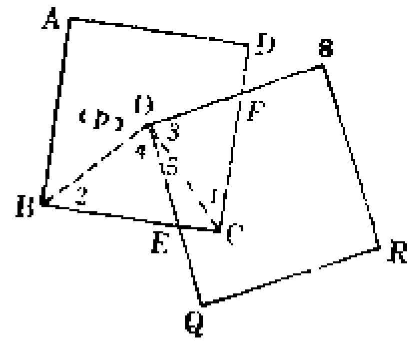


图 8—1

解：连结OB、OC，

则　$OB=OC$，$\angle 1=\angle 2$，

又　$\angle 3=90^\circ-\angle 5=\angle 4$，∴　$\triangle OBE \cong \triangle OCF$，

∴　$S_{四边形OECF}=S_{\triangle OEC}+S_{\triangle OCF}=S_{\triangle OEC}+S_{\triangle OBE}$

$$=S_{\triangle OBC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{4}.$$

【说明】 当OQ（或OS）与正方形$ABCD$的对角线重合时，两正方形的重叠部分为等腰直角三角形，其面积为1/4；当OQ（或OS）不与正方形$ABCD$的对角线重合时，两正方形的重叠部分为四边形，随着OQ（或OS）位置的变化，而四边形的形状也随之变化，但其面积始终不变，均为1/4。

例2　“一双对角及一双对边相等的四边形必为平行四边形”。对吗？如果对，请证明。如果不对，请作一四边形满足条件并证明你的作法。

思路：一双对角及一双对边相等的四边形的三个顶点位置固定后，第四个顶点位置不是唯一的，故命题不对。举一

特例即可。

解：命题不对。如图8--2，任作一等腰三角形 ABC，$AB=AC$，在 BC 上任取一点D，使 $BD>DC$，以D为顶点，以 DA为一边作$\angle 2=\angle 1$，截取 $DE=AC$，连结AE，易证$\triangle ADC\cong\triangle DAE$。

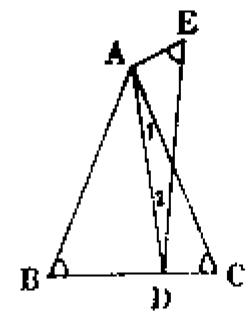


图 8—2

则　$\angle E=\angle C=\angle B$，

又　$DE=AC=AB$，

∴　四边形 $ABDE$ 满足已给条件，但$AE=CD<BD$，

故　四边形$ABDE$不是平行四边形。

【说明】 平行四边形的邻边确定以后，如果将其四个顶点中的三个位置固定后，那么第四个顶点是唯一的，若第四个顶点不唯一，则这个四边形就不一定是平行四边形。

例3　一组平行线有五条直线组成，每相邻两条直线距离为1，与同样的另一组平行线垂直相交，共可以组成多少个大大小小的正方形。

思路：如图8—3，根据题意，图中任一正方形必须是邻边相等，且面积的小方格数为完全平方数。其完全平方数分为1、4、9、16这四种情况，分别得出正方形的个数求和即可。

解：面积是1个小方格的正方形个数是$4^2=16$，

面积是4个小方格的正方形个数是$3^2=9$，

面积是9个小方格的正方形个数是$2^2=4$，

面积是16个小方格的正方形个数是$1^2=1$。

大大小小的正方形总数为30个。

【说明】 要注意总结计算规律。例如，面积为4个小方格的正方形，边长为2。在五条竖直的平行线中距离为2的只有三种情况（如图8—3）即l_1、l_3，l_2、l_4，l_3、l_5。在五条水平的平行线中，距离为2的也只有三种情况，即m_1、m_3、m_2、m_4，m_3、m_5。所以，面积为4个小方格的正方形个数是$3\times3=3^2=9$。

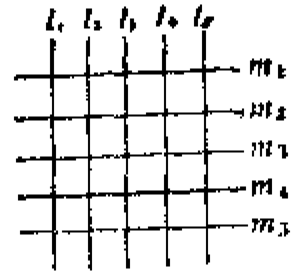


图 8—3

例4 A、B为平面上两定点，C为平面上位于直线AB同侧的一个动点，分别以AC、BC为边，在$\triangle ABC$外侧作正方形$CADI$、$CBEJ$。求证无论点C取在直线AB同侧的任何位置，DE的中点M的位置不变。

思路：如图8—4，因为点C位置不固定，所以两正方形的位置也不固定，显然DE的位置也不固定。要证点M为定点，只能和定直线AB之间的位置关系来确定。只要能证得点M和线段AB的中点O的距离为定值，且$OM\perp AB$即可。

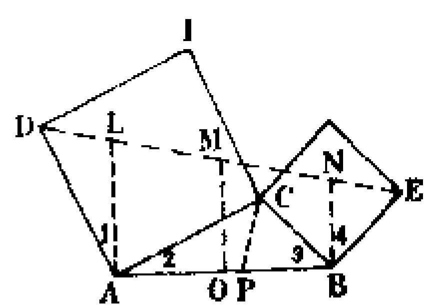


图 8—4

证：过两点A、B分别作AB的垂线，分别交DE于L、N，在AB上截取$AP=AL$，连结PC，

$\because$ $AC=AD$，$\angle1=90^\circ-\angle CAL=\angle2$，

$\therefore$ $\triangle APC\cong\triangle ALD$，$\therefore$ $CP=DL$。 ①

$\because$ $\angle APC=\angle ALD=\angle BND$，$\therefore$ $\angle CPB=\angle ENB$。

又∵ $\angle 3 = 90° - \angle CBN = \angle 4$，$BC = BE$。

因此$\triangle CPB \cong \triangle ENB$，$CP = NE$。 ②

由①、②得$DL = CP = NE$。

∵ M为DE的中点，∴ M为LN的中点。取AB的中点O，连结OM，则$OM // AL // BN$，

∴ $OM \perp AB$。可见OM的位置一定。

又∵ $OM = \frac{1}{2}(AL + BN) = \frac{1}{2}(AP + BP) = \frac{1}{2}AB$.

故 M为定点。

【说明】 以定直线AB为准，来证明点M为定点，必须满足的条件是：过点M垂直于AB的直线MO，其垂足O为定点；点M到AB的距离MO为定值。二者缺一不可。

（三）练习题

1. 如果一个多边形所有对角线的条数是它的边数的2倍，那么这个多边形的边数是多少？

2. 以线段$a = 15$，$b = 20$，$c = 10$，$d = 5$为边作梯形，其中a、c作为梯形的两底，这样的梯形能否作出？

3. 四边形$ABCD$，对角线是AC、BD，$AB = AD = AC$，若$\angle DAC$是$\angle CAB$的k倍（k为正数），那么，$\angle DBC$是$\angle BDC$的多少倍？

4. 一组平行线有三条直线，另一组平行线也有三条直线，这两组平行线两两相交，求出围成平行四边形的个数来。

5. 正方形$ABCD$内有一点P，使$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、

$\triangle PCD$、$\triangle PDA$ 都是等腰三角形，那么，具有这样性质的点 P 的个数是多少？如果点 P 在正方形 $ABCD$ 外，那么，具有这样性质的点 P 的个数是多少？

6. 延长正方形 $ABCD$ 的一边 AB 到 E，M 是 AB 上任一点，过 M 作 DM 的垂线交 $\angle CBE$ 的平分线于 N。求证 $DM=MN$。

7. 在正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 上任意一点，$\angle EAD$ 的平分线交 CD 于 F。求证 $BE+DF=AE$。

8. 四种长度不同的方形木料，两两搭配成两个矩形窗框。问怎样搭配，两窗总透光面积最大？

9. 一组对边相等，且一条对角线平分另一条对角线的凸四边形必是平行四边形吗？请证明你的结论。

10. 在 $\triangle ABC$ 中，E 是 AC 上任一点，F 是 AB 上任一点。连结 BE、CF，相交于 O。求证 $AE+AF>EO+FO$。

（四）答案与提示

1. 7

2. 不能。

3. k。

4. 9。

5. 5、4。

6. 提示：如图8—5，在 AD 上截取 $AP=AM$，连结 PM，再证明 $\triangle DPM\cong\triangle MBN$。

7. 提示：如图8—6，延长 CB 到 G，使 $BG=DF$，证 $\triangle ABG\cong\triangle ADF$，再证 $\angle G=\angle GAE$。

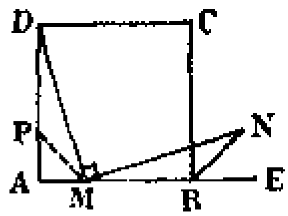


图 8—5

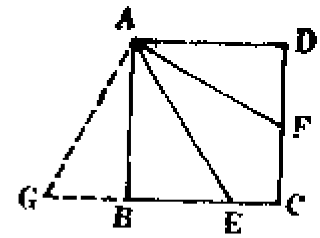


图 8—6

8. 略解：设四种木料尺寸分别为 $a<b<c<d$，两两搭配，两矩形面积和共有以下三种情况：

$ab+cd$，$ac+bd$，$ad+bc$。

再证明 $(ab+cd)-(ac+bd)>0$，

$(ab+cd)-(ad+bc)>0$，

从而以 $ab+cd$ 为最大。

即较短的两木料配在一起，较长的两木料配在一起，其透光面积最大。

9. 不一定。如图8－7。

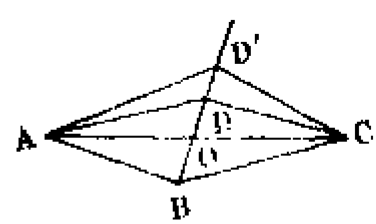


图 8—7

证：作▱$ABCD$，两对角线 AC、BD 相交于 O，使 $\angle BDC>90°$。

以 C 为圆心，以 CD 为半径画弧，必与 BD 及其延长线相交于两点，一点为 D，另一点设为 D'，连结 AD'、CD'。

∵ $AD'>AD$，$AD=BC$，∴ $AD'>BC$。

∴ $ABCD'$ 不是平行四边形，

但 $CD'=CD=AB$，BD' 平分对角线 AC。

10. 略证：如图8—8，过 F 作 $FG//BE$，过 E 作 $EG//$

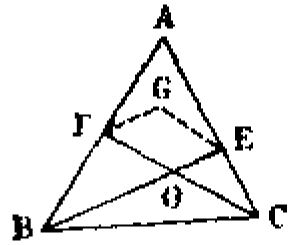


图 8—8

FC，EG与FG相交于 G，则$FOEG$为平行四边形，则$GF+GE=EO+FO$。不难证明，$AE+AF>GF+GE$。

∴ $AE+AF>EO+FO$。

九　勾股定理

（一）基本原理

1．勾股定理的历史

勾股定理是几何学中十分重要而著名的定理，它的应用极其广泛。我们的祖先很早就发现了这个定理，究竟何人首先发现，还是一个讨论的问题。有的说商高（公元前1120年左右，周朝）发现的，有的说陈子（春秋时代）发现的，有的说夏禹（4000多年前）治洪水时就运用了。综上，可以看到我们祖先在这个问题上的伟大成就。

在国外，有人说这个定理是毕达哥拉斯（约公元前582—493年，希腊人）发现的，但比我国要迟得多。

2．勾股数法则

和勾股定理直接相关的那就是勾股数。我国清代数学家罗士琳（公元1789—1853年）的求勾股数法则是：

任取两个正整数m和n，$m>n$，那么$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$就是满足等式$a^2+b^2=c^2$的勾股数。

例如　当$m=3$，$n=2$时，$a=3^2-2^2=5$，$b=2\times3\times2=12$，$c=3^2+2^2=13$。

5、12、13就是一组勾股数。

3．勾股定理推广

在锐角$\triangle ABC$中，$BD\perp AC$，线段长度如图9—1所

示。

$$c^2-(b-n)^2=a^2-n^2,$$

$$c^2=a^2+b^2-2bn.$$

而 $2bn>0$，∴ $c^2<a^2+b^2$.

如图9—2，在钝角$\triangle ABC$中，$\angle ACB>90°$。

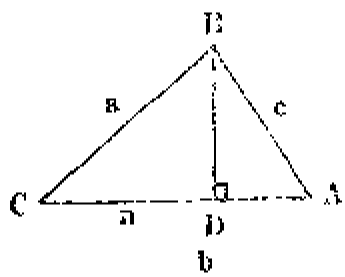


图 9—1

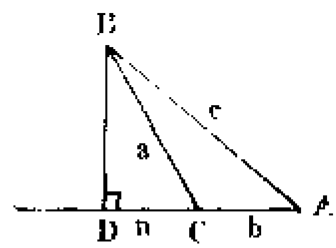


图 9—2

$$c^2-(n+b)^2=a^2-n^2,$$

$$c^2=a^2+b^2+2nb.$$

而 $2nb>0$，∴ $c^2>a^2+b^2$.

综上，一个三角形锐角所对边的平方小于其它两边的平方和；钝角三角形的钝角所对边的平方大于其它两边的平方和，其逆命题也成立。

这样，就得到判断一个三角形内角类别的一种方法：

在$\triangle ABC$中，若$c^2=a^2+b^2$，则$\angle C$为直角；若$c^2<a^2+b^2$，则$\angle C$为锐角；若$c^2>a^2+b^2$，则$\angle C$为钝角。

（二）范例与方法

例1 边长一丈的正方形水池的中央，生长出一株芦苇，高出水面一尺，如果把芦苇的顶端拉向岸边，则芦苇的顶端正好与岸边水面相平并刚好接触到池岸直线上，如图9—3所

示，问池水深和芦苇的长各多少尺？

思路： 芦苇 AD 高出水面部分为 CD，$CD=1$ 尺，当把 AD 拉向岸边时，则就构成了以芦苇在水中部分 AC 为直角边，以芦苇长为斜边的直角三角形，这样就可以通过勾股定理来解。

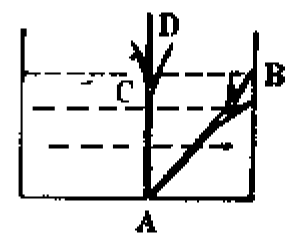


图 9—3

解： 依题意，AD 是生在水池中央的芦苇，CD是高出水面的部分，CB 是芦苇到岸边的距离，$CB=5$ 尺，$AB=AD$，$\triangle ACB$是直角三角形。

设 $AC=x$ 尺，由勾股定理，得

$$(x+1)^2=x^2+5^2,$$

解得 $x=12$，$x+1=13$。

答： 池水深12尺，芦苇长13尺。

【说明】 本例题是我国古代算书《九章算术》中的一个著名问题，原题是"今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与岸齐，问水深、葭长各几何？"这个题目在世界上影响很大。

例2 已知点P为矩形$ABCD$内任意一点．求证

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

思路： 要证 $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$，就需要找出和PA、PC、PB、PD相关的直角三角形．过P作$EF//AD$，分别交AB、DC于E、F，就得到与本题相关的四个直角三角形（如图9—4）．

证明： 过点P作AD的平行线分别交AB、CD于E、F，则 $EF\perp AB$，$EF\perp CD$。

$\because\quad PA^2=AE^2+PE^2,$

$PC^2=PF^2+CF^2,$

$PB^2=BE^2+PE^2,$

$PD^2=DF^2+PF^2.$

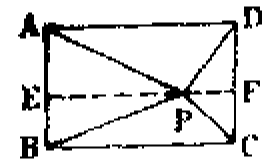


图 9—4

又$\because\quad AE=DF,\ FC=BE,$

$\therefore\quad PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$

【说明】 ①过P作直线平行AB，同样可以得到证明。

②P点在矩形$ABCD$的外部、在矩形$ABCD$的四边上（包括在A，B，C，D点上）这个题目仍然是成立的。请读者自己证明。

例3 一条对角线长为$\sqrt{6}$的矩形，它的宽是长的小数部分，那么此矩形的长、宽各是多少？

思路： 设矩形长的整数部分为a，小数部分为b，则长是$a+b$，宽为b。$\because 0<b<1$，则$b^2<1$。再运用勾股定理即可求出a、b来。

解： 设矩形长的整数部分为a，小数部分为$b(0<b<1)$，

则 $(a+b)^2+b^2=6$。$\because\quad b^2<1$，$\therefore 5<(a+b)^2<6$。

即 $a=2$，$\therefore (2+b)^2+b^2=6$。

得 $2b^2+4b-2=0$。解方程舍去负根，得$b=\sqrt{2}-1$。

$a+b=\sqrt{2}+1$。

答： 矩形的长为$\sqrt{2}+1$，矩形的宽为$\sqrt{2}-1$。

【说明】 $\sqrt{2}$是无理数，$\sqrt{2}-1$也是无理数。$\sqrt{2}-1$是无穷不循环小数且小于1。

例4 正方形$ABCD$的边长为a，一直线与AB交于E，

与 AD 交于 F，已知 $\triangle AEF$ 的面积为正方形面积的 6/25，五边形 $EBCDF$ 的周长为正方形 $ABCD$ 周长的 9/10。求 $\triangle AEF$ 的周长。

思路：如图 9—5，要求出 $\triangle AEF$ 的周长，只要求出 AE、AF，设 $AE=x$，$AF=y$，则 $EF=\sqrt{x^2+y^2}$，根据已知条件列出方程组求解即可。

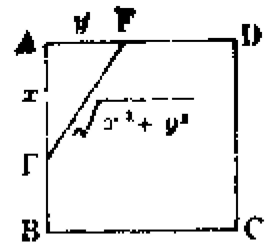


图 9—5

解：设 $AE=x$，$AF=y$，

则 $EF=\sqrt{x^2+y^2}$。依题意，得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}xy=\dfrac{6}{25}a^2, & ① \\ (a-x)+2a+(a-y)+\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{9}{10}\cdot 4a. & ② \end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases} xy=\dfrac{12}{25}a^2, & ③ \\ x+y-\dfrac{2}{5}a=\sqrt{x^2+y^2}. & ④ \end{cases}$$

由④两边平方，得 $25xy+2a^2=10a(x+y)$，　⑤

把③代入⑤，得 $14a^2=10a(x+y)$。

$\therefore\ x+y=\dfrac{7}{5}a$。　⑥

把⑥代入④，得 $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{7}{5}a-\dfrac{2}{5}a=a$，

$\therefore \triangle AEF$ 的周长 $=(x+y)+\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{12}{5}a$。

答：$\triangle AEF$ 的周长为 $\dfrac{12}{5}a$。

【说明】 本例题，要直接求出x、y，太繁杂，而把$x+y$和$\sqrt{x^2+y^2}$各看成是一个未知数来求解，就简捷了。

（三）练习题

1．一个三角形的一边长是2，这边上的中线长是1，另两边之和为$1+\sqrt{3}$。求这个三角形的面积。

2．设等腰梯形的大底等于对角线，而小底等于高。求小底与大底的比。

3．求下列数：

（1）边长是三个相邻的整数，组成一个直角三角形；

（2）边长是三个相邻的偶数，组成一个直角三角形。

4．如图9—6，有一正方形养鱼池$ABCD$，在M、N处各有一棵大树，在不移动这两棵大树的条件下，如何将养鱼池面积扩大到原面积的两倍，形状还是正方形。

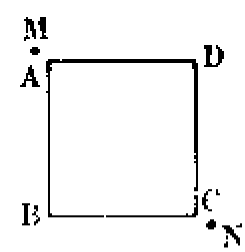


图 9—6

5．（1）若m、n为正整数，$m>n$，$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$。求证a、b、c是勾股数。

（2）写出当$m=3$，$n=1$时的一组勾股数来。

6．已知Rt$\triangle ABC$，$\angle B=90°$，E、D分别为AB、BC上的任意一点。求证：$AD^2+CE^2=AC^2+DE^2$。

7．已知a、b、c为$\triangle ABC$的三边，且$\angle B=2\angle C$。求证 $b^2-c^2=ac$。

8．四边形$ABCD$是边长为1的正方形，$\triangle PBC$为正

方形内的正三角形．求$\triangle BPD$的面积．

9． P为矩形$ABCD$内一点，且$PA=3$，$PD=4$，$PC=5$．求PB的长．

10． 在矩形$ABCD$中，P、Q分别为BC、CD上的点，若$S_{\triangle ABP}:S_{\triangle PCQ}:S_{\triangle ADQ}=2:3:4$．求证

$$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle PCQ}+S_{\triangle ADQ}.$$

（四）答案与提示

1． $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

2． $\dfrac{3}{5}$．

3． (1) 3、4、5．(2) 6、8、10．

4． 连结AC、BD，过D、B分别作AC的平行线，过A、C分别作BD的平行线．

5． (1) $a^2+b^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$
$=c^2$．

(2) 8、6、10．

6． 提示：由勾股定理得

$$AD^2+CE^2=AB^2+BD^2+EB^2+BC^2$$
$$=AC^2+ED^2.$$

7． 提示：过A点作$AD\perp BC$，D为垂足，截取$DE=BD$，连结AE，则$AE=AB$．

利用$\angle B=2\angle C$，证出$AE=EC$．

再用勾股定理得$b^2-c^2=CD^2-BD^2=(CD+BD$

$(CD-BD)=BC\cdot EC=ac$。

8. 提示：$\because\quad S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle PBC}$（想想，为什么？）

$$\therefore\quad S_{\triangle BPD}=S_{四边形BPDC}-S_{\triangle BCD}$$
$$=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}-S_{\triangle BCD}$$
$$=S_{\triangle PBC}-\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

9. 提示：设P点到AB，BC，CD，DA的距离分别为a，b，c，d，由勾股定理得

$$\begin{cases}a^2+d^2=9\\c^2+d^2=16\\b^2+c^2=25,\end{cases}$$

从而可求 $a^2+b^2=18$，于是 $PB=3\sqrt{2}$。

10. 略解

设$S_{\triangle ABP}=2K$，$S_{\triangle PCQ}=3K$，$S_{\triangle ADQ}=4K$。

$AB=x$，$AD=y$，$BP=m$，$DQ=n$，则

$$\begin{cases}\frac{1}{2}mx=2K & ①\\[2mm]\frac{1}{2}(y-m)(x-n)=3K & ②\\[2mm]\frac{1}{2}ny=4K & ③\end{cases}$$

三式相加得 $mn+xy=18K$。

①×③得 $mn\cdot xy=32K^2$，

从而　$xy=16K$　或$xy=2K$（不合题意，舍去）

即$S_{\square ABCD}=16K$。　$\therefore$　$S_{\triangle APQ}=16K-9K=7K$。

$\therefore$　$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle PCQ}+S_{\triangle ADQ}$。

十 几何变换

Ⅰ. 对称、平移、旋转变换

（一）基本原理

1. 将平面图形 F_1 变到与它关于直线 l 成轴对称的图形 F_2，这种变换叫做关于直线 l 的对称变换。

若图形F_1与F_2关于直线 l 对称，则

①F_1与F_2的对应点连线被 l 垂直平分；

②F_1 与F_2的对应线段或其延长线相交，交点必在直线l上。

2. 将图形 F_1上的所有点都按一定方向移动一定距离形成图形F_2，则由F_1变到F_2的变换叫做平移变换。

若图形F_1经过平移变换形成图形F_2，则连 F_1与 F_2 的对应点的线段平行且相等。

3. 将平面图形 F_1绕这平面内的一个定点旋转一个定角形成图形F_2，则由F_1变到F_2的变换叫做旋转变换。定点叫旋转中心，定角叫旋转角。

旋转180°的变换是“中心对称变换”。

若图形F_1经过旋转变换形成图形F_2，则图形F_1上任意两点与旋转中心连线所成的角，与图形 F_2 上对应两点与旋转中心连线所成的角相等。

（二）范例与方法

例1. 如图10—1. 由$\triangle ABC$顶点A，分别向$\angle B$，$\angle C$的平分线引垂线，其垂足分别为M，N，

求证：$MN//BC$。

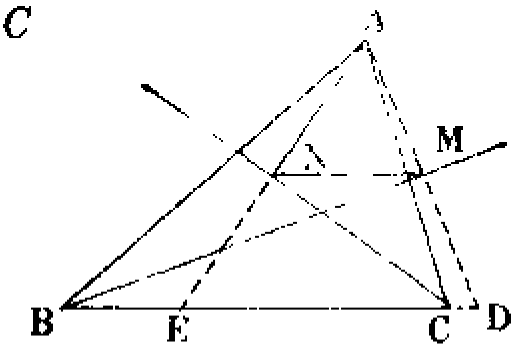


图 10—1

思路：根据等腰三角形"三线合一"的性质，可先作出A点关于BM，CN的对称点D，E，可证MN是$\triangle ADE$的中位线，故$MN//DE$，又D，E都在直线BC上，故$MN//BC$。

证明：延长AM交直线BC于D，延长AN交直线BC于E。

∵ BM是$\angle ABC$的平分线，且$BM\perp AD$，

∴ BM也是$\triangle ABC$的中线，即$AM=MD$，

同理可证 $AN=NE$。

∴ MN是$\triangle ADE$的中位线，∴ $MN//DE$，

又D，E在直线BC上，∴ $MN//BC$。

【说明】 因为等腰三角形顶角平分线所在的直线是等腰三角形的对称轴，故常利用此性质的对称变换。

例2 如图10—2。

已知梯形$ABCD$中，$AB//CD$，$\angle C$的平分线垂直AD于E，且$DE=2AE$，CE把梯形$ABCD$分成两部分，求这两部分的面积之比。

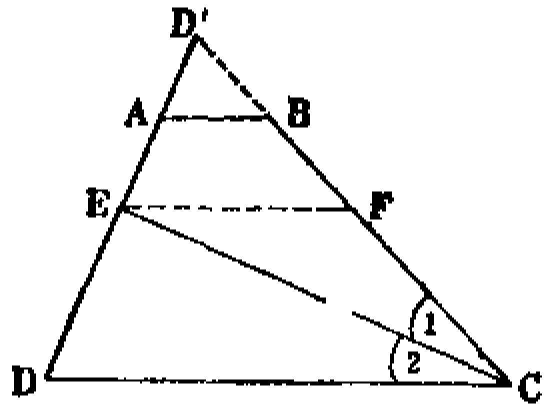


图 10—2

思路：如果延长两腰，则把图形"补成对称"，容易利用已知条件进行计算。

解：延长DA，CB相交于D'。$\because$ CE平分$\angle BCD$，$CE\perp DD'$，$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$，$\angle DEC=\angle D'EC=90°$，又$CE$公用，$\therefore$ $\triangle CDE\cong\triangle CD'E$（直线$CE$是对称轴），从而$DE=D'E$。

又 $DE=2AE$，$\therefore$ $AD'=\frac{1}{4}DD'$

取CD'的中点F，连EF，则EF是$\triangle D'DC$的中位线，AB是$\triangle D'EF$的中位线。

于是 $S_{\triangle AD'B}=\frac{1}{4}S_{\triangle D'EF}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}S_{\triangle D'DC}$

$$=\frac{1}{16}S_{\triangle D'DC}$$

设 $S_{\triangle AD'B}=K$，则 $S_{\triangle D'DC}=16K$，

$S_{\triangle DEC}=8K$，$S_{四边形AECB}=8K-K=7K$。

故梯形被CE所分成两部分面积的比为

$\frac{7}{8}$或$\frac{8}{7}$。

【说明】 三角形的一条中位线把三角形分成两部分其面积之比为$\frac{1}{3}$或$\frac{3}{1}$是显然的。

请读者自己完成它的证明。

例3 如图10—3。

已知 E，F，G，H分别是正方形$ABCD$各边上的点，且有$EG=HF$，求证：$EG\perp HF$。

思路：将AB，BC平移到HN，EM的位置，易证$\triangle EMG\cong\triangle HNF$。

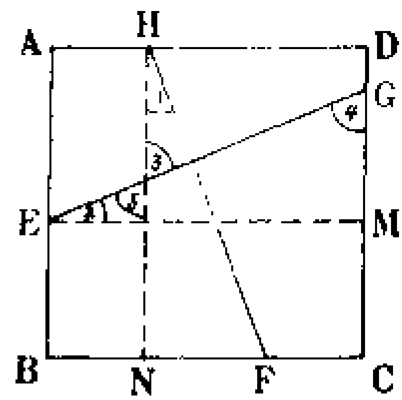


图 10—3

证明：过E作$EM//BC$交CD于M，

过H作$HN//AB$交BC于N。

$\because$ $EG=HF$，$EM=HN$，$\angle EMG=\angle HNF=90^\circ$

$\therefore$ $\triangle EMG\cong\triangle HNF$。

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$，又$\angle 3=\angle 5=\angle 4$，

而 $\angle 2+\angle 4=90^\circ$，$\therefore$ $\angle 1+\angle 3=90^\circ$

$\therefore$ $EG\perp HN$。

【说明】 此题还有其他平移方法。如平移EG和HF。请读者自己完成。

例4 已知在四边形$ABCD$中，$AB=CD$，M，N分别为AD、BC的中点，NM的延长线与BA，CD延长线相交于P，Q（如图10—4）求证：$\angle 1=\angle 2$

思路：如何把$\angle 1$、$\angle 2$变形到一个三角形中，这是证本题的关键，为利用好AD，BC的中点M，N，应想到利用

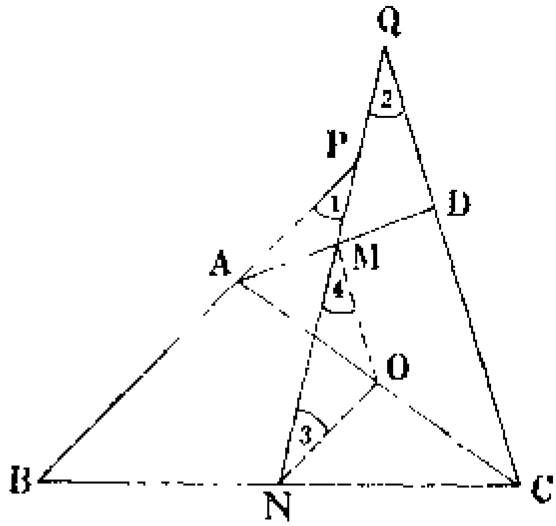


图　10—4

三角形的中位线。

证明：连对角线AC，并取AC中点O，再连OM，ON。

$\because$　MO是$\triangle ACD$的中位线，$\therefore MO//CD$，且$MO=\frac{1}{2}CD$，$\because NO$是$\triangle ACB$的中位线，$\therefore NO//AB$，且$NO=\frac{1}{2}AB$，又$\because AB=CD$，$\therefore MO=NO$，$\therefore \angle 3=\angle 4$

而$\angle 1=\angle 3$（内错角），$\angle 2=\angle 4$（同位角）

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$

【说明】　本题还可以平移AB，DC，使A，D端点都与M点重合，具体证明略。

例5　如图10—5中，

$\triangle ABC$、$\triangle CDE$是有公共顶点C的两个等边三角形，

若$\angle AEB=124°$，求$\angle EBD$的度数。

思路： 由$\triangle ABC$、$\triangle CDE$是有公共顶点C的两个等边三角形，故$\triangle ACE$绕C点按逆时针旋转$60°$可与$\triangle BCD$重合。所以$\angle BDC=\angle AEC$。从而由$\angle AEB=124°$计算出$\angle EBD$的度数。

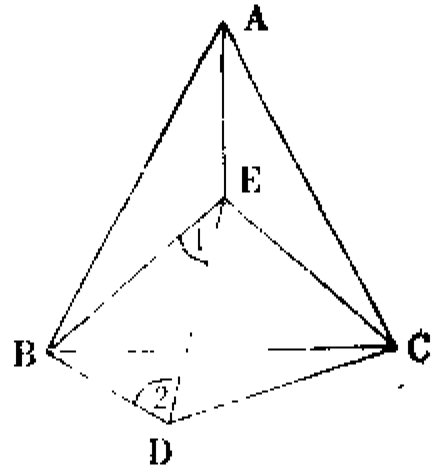


图 10—5

解： $\because \triangle AEC \cong \triangle BDC$（S、A、S）$\therefore \angle AEC=\angle BDC$。从而

$$
\begin{aligned}
\angle EBD &= 180° - \angle 1 - \angle 2 \\
&= 180° - (\angle BEC - 60°) - (\angle BDC - 60°) \\
&= 180° - \angle BEC + 60° - \angle AEC + 60° \\
&= 300° - (\angle BEC + \angle AEC) \\
&= 300° - (360° - \angle AEB) \\
&= 300° - (360° - 124°) = 64°
\end{aligned}
$$

【说明】 本题中若给出$\angle EBD$的度数，可以计算$\angle AEB$的度数。

例6 已知E是正方形$ABCD$的边BC上任意一点，AF是$\angle DAE$的平分线且与CD交于F点，求证：$AE=FD+BE$。

思路 欲证$AE=FD+BE$，

需设法将$FD+BE$化成一条线段，为此可将$\triangle ABE$以A为旋转中心，按逆时针旋转$90°$，作出$\triangle ADE'$即可得FE'

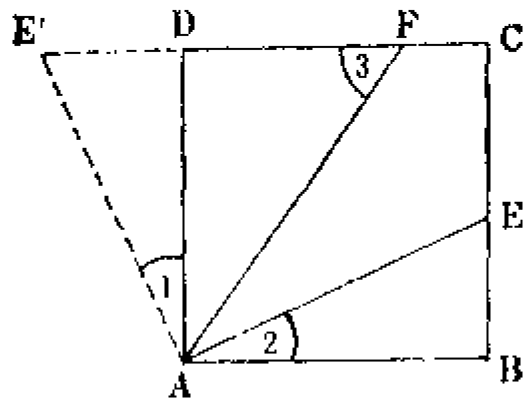


图 10—6

$=FD+DE'=FD+BE$. 再设法证出$AE=E'F$即可。

证明 延长CD于E'，使$DE'=BE$。

又 $AD=AB$，$\angle ADE'=\angle ABE=90°$

∴ $\triangle ADE'\cong\triangle ABE$

∴ $DE'=BE$，且$\angle 1=\angle 2$，又$\angle DAF=\angle EAF$

∴ $\angle E'AF=\angle FAB=\angle 3$

∴ $AE'=E'F$

即 $AE=E'F=E'D+DF=BE+DF$。

（三）练习题

1. 已知$\triangle ABC$是等边三角形，延长BC至D，延长BA至E，且使$AE=BD$，连结CE，DE，求证：$CE=DE$。

2. 已知在$\triangle ABC$中，AT平分$\angle BAC$，$BE\perp AT$于E，$CF\perp AT$于F，且M是BC的中点，

求证：$ME=MF$。

3. 已知D为等边$\triangle ABC$内一点，且$BD=DA$，$PB=BA$，$\angle DBP=\angle DBC$。求$\angle BPD$的度数。

4. 已知在正方形$ABCD$中，E，F，G，H分别是各边上的点，而有$EG\perp HF$，求证：$EG=HF$。

5. 若P为等边$\triangle ABC$内部任意一点，过P点分别向$\triangle ABC$三边引垂线，M，N，Q为三个垂足，证明 $PM+PN+PQ$为定值。

6. 在等边$\triangle ABC$中，P为AB的中点，Q为AC的中点，R为BC的中点，M是RC上任意一点，并$\triangle PMS$是等边三角形，（A，S在PM的同侧）．求证：$RM=QS$

7. 已知$ABCD$是边长为1的正方形，P，Q分别为AB，AD上的点，若$\triangle APQ$的周长等于2．试求$\angle PCQ$的度数。

8. 已知在$\triangle ABC$中，底边上两点E，F把BC三等分，BM是AC边的中线．AE，AF分BM为x，y，z三部分（$x>y>z$）．

试求 $x:y:z$

（四）答案与提示

1. 延长BD于F，使$BC=DF$连EF。

设法证明$\triangle EBC$与$\triangle EDF$是轴对称图形。

从而可得$EC=ED$。

2. 把AE所在直线当作对称轴。

延长CF与AB（或AB延长线）交于C'，

延长AC与BE延长线（或BE）交于B'。

则B'，C'是B，C关于AE的对称点，故

$$MF=\frac{1}{2}BC'=\frac{1}{2}B'C=ME.$$

3．CD是图形$\triangle ABC$的对称轴。

$$\angle BPD=\frac{1}{2}\angle BCA=30^\circ.$$

4．仿本节例3解法作。

5．先过P点作一边平行线。

$PM+PN+PQ=\triangle ABC$的一条高线。

6．欲证$RM=QS$，需证$\triangle PRM\cong\triangle PQS$。

考虑$\triangle PQS$是由$\triangle PRM$以P为旋转中心，逆（或顺）时针旋转60°而成。

7．将$\triangle PBC$，以C为旋转中心，旋转90°成为$\triangle P'DC$，则QC是四边形$QPCP'$的对称轴。可求$\angle PCQ=45^\circ$。

8．利用中心对称。

$x:y:z=5:3:2$

Ⅱ．等积变换

（一）基本原理

等积变换是保持图形面积大小不变的变换。等积变换是平面几何中基本训练的重要内容，其基础知识在现行课本中主要包括以下几个方面：

1．两个图形全等，它们的面积相等；

2．一个图形的面积，等于它的各部分面积的和；

3．等底等高（包括同底等高、等底同高，下同）的三角形面积相等；

4．等底等高的平行四边形的面积相等；

5．三角形的中线分这个三角形为两个等积形。

在等积变换时，往往运用下列方法：

(1) 割补法：把一个平面图形的某一部分割下来，移放在另一个适当位置上。

(2) 补充法：把一个平面图形通过补充另一个平面图形，使它能够进行计算或证明。

(3) 分割法：把一个平面图形划分为若干部分，通过求各部分的面积和，来求出原来平面图形的面积。

(二)范例与方法

例1 在图10—7中，甲村和乙村的麦田相邻，中间原有一条道路是折线 ACB，现在要把这条道路改成直道，但要保证两村的麦田面积不变。请你提出一个改动方案来。

思路：要保证两村麦田面积不变，就得进行等积变换。连结AB，则得到$\triangle ABC$，要想得到和$\triangle ABC$的一边AB为同底的等积三角形，必须得有等高，过C作$ED//AB$，则问题就迎刃而解了。

解：连结AB，过C作$DE//AB$，连结AD。

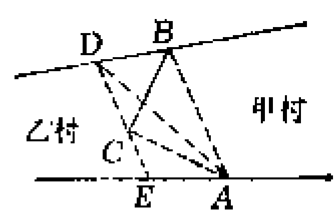


图 10—7

$\because$ $DE//AB$，

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}$。

属于甲村的麦田$\triangle ABC$被$\triangle ABD$所代替，甲、乙两村的麦田面积没变。

$\therefore$ 直道AD就是所求的一种改动方案。

【说明】 在三角形等积变换中，为寻求等高往往利用平行线间距离处处相等这个性质。过C作AB的平行线DE，确

点C在DE上移动时，得到以AB为底的所有三角形等积。

例2 M是正方形$ABCD$一边AB的中点，N是边BC的中点，AN和CM相交于O，那么四边形$AOCD$和$ABCD$的面积比是多少？

思路： 在图10－8中，设正方形$ABCD$的边长为1。欲求四边形$AOCD$和$ABCD$面积比，需要求四边形$AOCD$的面积，只需求出$AOCB$的面积。但$\triangle CMB$和$\triangle NAB$的面积分别为正方形$ABCD$面积的$\frac{1}{4}$，而其重叠部分$OMBN$被OB分成两个三角形。而$\triangle ONC$的面积等于$\triangle OBN$的面积，$\triangle OAM$的面积等于$\triangle OMB$的面积，从而可得出$OMBN$的面积为$AOCB$面积的一半。

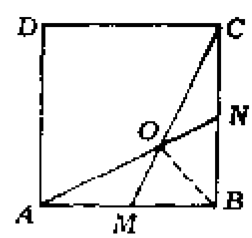


图 10—8

解： 设正方形$ABCD$的边长为1。

$\because$ M、N分别为AB、BC的中点，

$\therefore$ $S_{\triangle CMB}=S_{\triangle NAB}=\frac{1}{4}$。

连结OB，则有$S_{\triangle ONC}=S_{\triangle ONB}$，$S_{\triangle OAM}=S_{\triangle OMB}$，

$\therefore$ $S_{OMBN}=\frac{1}{2}S_{AOCB}$。

$\therefore$ $S_{\triangle CMB}+S_{\triangle NAB}=S_{AOCB}+S_{OMBN}$。

$\therefore$ $\frac{3}{2}S_{AOCB}=\frac{1}{2}$，$S_{AOCB}=\frac{1}{3}$，从而 $S_{AOCD}=\frac{2}{3}$。

即 $S_{AOCD}:S_{ABCD}=\frac{2}{3}:1=2:3$。

【说明】 本例题以正方形$ABCD$面积为后项求面积比，采用设正方形$ABCD$的边长为1个长度单位的方法是简捷

正确的。

例3 设同底的$\triangle ABC$和$\triangle ABD$在AB的同一侧，且$S_{\triangle ABD}>S_{\triangle ABC}$，顺次连结$CA$、$CB$、$DB$、$DA$的中点$E$、$F$、$G$、$H$成一四边形$EFGH$。

求证 $S_{四边形EFGH}=\frac{1}{2}(S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ABC})$。

思路： 易证四边形$EFGH$为平行四边形。取AB中点M，连结FM、GM，EF交AD于Q，延长EF交GM于N，可证四边形$AMGH$、$AMFE$也是平行四边形，又可证$EF=QN$。通过等积代换就可得到本题的结论。

证明： 如图10—9，取AB的中点M，连结FM、GM延长EF交GM于N，设EF交AD于Q。

$\because$ $HG\underline{\parallel}\frac{1}{2}AB$，$EF\underline{\parallel}\frac{1}{2}AB$，

$\therefore$ $EFGH$、$AMGH$、$AMFE$都是平行四边形。

同时，$QNGH$、$AMNQ$也都是平行四边形。

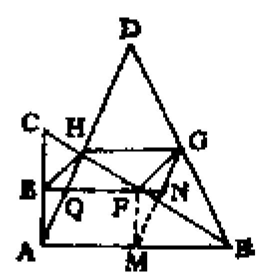


图 10—9

$\because$ $EF=QN=\frac{1}{2}AB$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\square EFGH}&=S_{\square HQNG}\\&=S_{\square HAGM}-S_{\square AMNQ}\\&=S_{\square HAMG}-S_{\square AMFE}\\&=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}-\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}\\&=\frac{1}{2}(S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ABC}).\end{aligned}$$

【说明】 本例题主要运用了三角形中位线的性质。对三角形的中位线所截得的小三角形的面积是原三角形面积的$\frac{1}{4}$这个性质，读者可自行证明。

（三）练习题

1. 用一条线段把四边形分成面积相等的两部分。

2. 已知▱$ABCD$，在CA的延长线上任取一点F，以BC、CF为邻边作平行四边形$BCFE$，DF的延长线与BE的延长线相交于K。求证$S_{\triangle FAB}=S_{\triangle KEF}$。

3. 已知$\triangle ABC$，在AB上任取一点F，在AC上任取一点G，延长BA到D，使$DF=AB$，延长CA到E，使$EG=AC$。求证$S_{\triangle ABC}=S_{四边形DEFG}$。

4. 在$\triangle ABC$中，点D是AB的中点，E和F分别是边AC和BC上的点。证明$\triangle DEF$的面积不超过$\triangle ADE$与$\triangle BDF$的面积之和。

5. 将四边形$ABCD$的一组对边AB、DC分别顺序三等分于点E、F及G、H。求证$S_{EFHG}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$。

（四）答案与提示

1. 设四边形为$ABCD$。

过BD的中点O作AC的平行线，分别交BA，BC（或DA，DC）于E，F，则AF或CE为所求作的线段。

利用等积变换可证明作图的正确性。

2. 提示：$S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AEF}$，

且$S_{\triangle KEF}=S_{\triangle AEF}$。

3. 提示：设法证明

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BGE}$，$S_{四边形DEFG}=S_{\triangle BGE}$。

4. 提示：过B点作AC的平行线与ED延长线相交于G，连FG，设法证明

$S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BDF}=S_{四边形BFDG}$，

$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DGF}$。

$S_{\triangle DGF}<S_{四边形BFDG}$。

5. 略证：连HE、HA、CE、AC

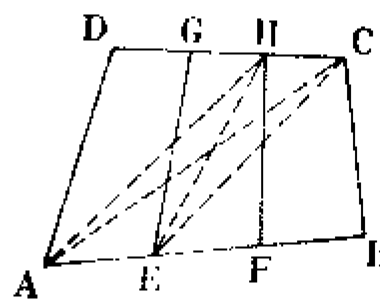


图 10—10

则 $S_{\triangle HEG}=S_{\triangle HEC}$，

$S_{\triangle HEF}=S_{\triangle AEF}$，

∴ $S_{四边形EFHG}=S_{四边形AECH}$。

又 $S_{\triangle ACH}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ACD}$

$S_{\triangle ACE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$

∴ $S_{四边形AECH}=\dfrac{1}{3}S_{四边形ABCD}$

∴ $S_{四边形EFHG}=\dfrac{1}{3}S_{四边形ABCD}$。

十一　几何图解法

（一）基本原理

基础知识：

1. 两点确定一条直线；
2. 线段最短公理；
3. 平行线公理；
4. 线段中垂线及角平分线的性质；
5. 轴对称与中心对称图形的性质；
6. 直线形（三角形、四边形等）的定义、性质及其判定；
7. 基础作图的定义及其方法。

数学问题头绪纷繁，图形千变万化、层出不穷，画一个图常常有助于问题的解决。我们讨论的问题，依照某种方式把逻辑思维转化成图解，不仅形象地论证了命题的存在性，从而找到解题的途径，而且具有简捷、明快、清晰的特点。

图解涉及到的知识面广，内容丰富，各种作图方法交错使用，它们有对称法、平移法、旋转法、割补法、奠基法、轨迹法等等。这里充分体现了数形结合的辩证统一的思想方法。在研究本节内容时，应注意数量与形式的内在联系，注意形与形之间的区别，要充分挖掘构造图形的创新意识，发

展智力，研究规律，积累经验，获得知识上的丰收。

把几何图形视为符合某种条件（或性质）的点的集合的思想是我们学好这一部分的重要的思想方法。

（二） 范例与方法

（I）关于求点问题

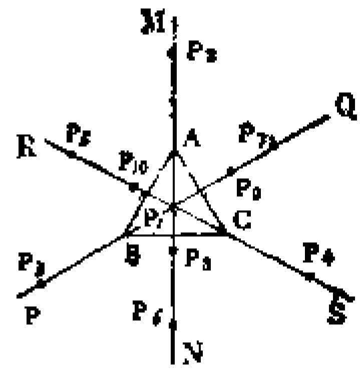


图 11—1

例1 在等边$\triangle ABC$所在的平面内求一点P，使该点与等边$\triangle ABC$中任意两个顶点构成一个等腰三角形，问满足条件的点P共有几个？

思路： 如图11—1，作出等边$\triangle ABC$的三条对称轴MN、PQ、RS，每一条对称轴上都有四个点符合条件。又三条对称轴相交于一点P_1，所以共有$12-2=10$，或$9+1=10$个点。图12—1中，除P_1点外，有$AP_2=BP_3=CP_4=AP_5=BP_6=CP_7=AP_8=BP_9=CP_{10}$。

因此，满足题意的点共有10个。

例2 已知四边形$ABCD$内有一点P，连结AP、BP、CP、DP，将四边形$ABCD$分成四个面积相等的三角形。那么下列命题中：

甲。$ABCD$是凸四边形；

乙。P是对角线AC的中点或对角线BD的中点；

丙。$ABCD$是平行四边形。

（A）只有甲正确。（B）只有乙正确。

(C) 甲、乙、丙都正确。 (D) 甲、乙、丙都不正确。

解：答案选 (B)。

【说明】 这道选择题，其实质是求满足条件的点的问题。其思考方法：如图11－2，若 $ABCD$ 为以 AC 为对称轴的凹四边形，易见 AC 中点可作为 P，所以甲、丙不正确。又易见 B、D 两点到 AP 距离相等，设 BD 与 AP 交于 Q，只有当 P、Q 两点重合时，才有命题乙。否则 P 点在 CQ 上，所以 A、P、Q、C 四点共线。再由 $\triangle ABP$ 的面积 $=\triangle BPC$ 的面积，可得点 P 是 AC 的中点。

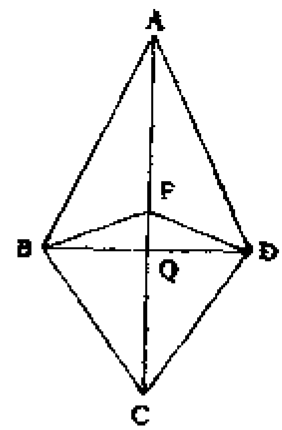


图 11—2

例3 在三条平行直线 l_1、l_2、l_3 上，分别求三个点 A、B、C，使 $\triangle ABC$ 是等边三角形。

解：如图 11—3，在直线 l_1 上任取一点 A，则 B、C 两点由 A 确定。过 A 作 $AH\perp l_2$，H 是垂足。将直角 $\triangle ABH$ 绕着中心 A 按逆时针旋转60°，则 B 与 C 重合，直线 l_2 旋转到 l'_2 的位置。显然 l'_2 与 l_3 的交点为 C。故只要在 l_1 上任取一点 A，作 $AH\perp l_2$，再作 $\angle HAH'=60°$，且使 $AH'=AH$（H 在 l_2 上），最后过 H' 作 $l'_2\perp AH'$，则 l'_2 与 l_3 相交于 C 点，进而作出 $\angle CAB=60°$ 交 l_2 于点 B。那么 $\triangle ABC$ 就是所求作的等边三角形。

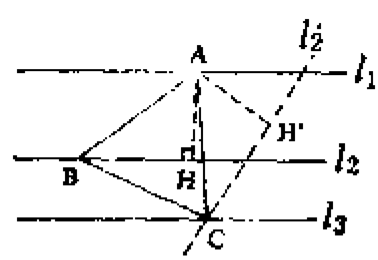


图 11—3

$\because \angle BAC=\angle HAH'=60°$，$AH=AH'$，$\therefore \angle BAH=$

$\angle CAH' = 60° - \angle HAC$。 ∴ $Rt\triangle ABH \cong Rt\triangle ACH'$。∴ $AB = AC$。可知$\triangle ABC$是顶角等于60°的等腰三角形。即A、B、C是分别落在三条已知平行线上的等边三角形的三个顶点。

【注意】 由平面图形的特点联想到空间里有四个不重合的互相平行的平面，可否存在一个正四面体，即四个面都是正三角形的几何体，恰好每个平面上有它一个顶点呢？答案是肯定的。

（Ⅱ）关于求最短距离问题

下面例举利用对称原理和连结两点间线段最短的原理解决最短距离问题。

例4 $\angle ABC$的内部有两个定点M、N，试在边BA和BC上各取一点E、F，使$ME + EF + FN$的长为最短，并证明你的结论。

解： 根据对称原理，分别作点M、N关于直线BA和BC的对称点M'、N'，连结$M'N'$分别交BA、BC于E、F两点，则E、F两点为所求。

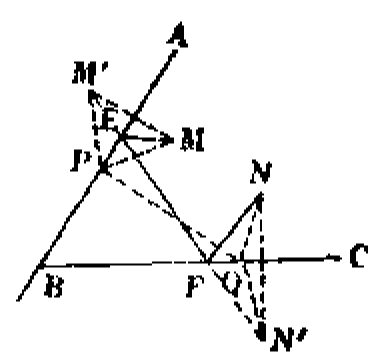


图 11—4

证： 否则，在BA、BC上任取两点P、Q，只须证明$MP + PQ + QN > ME + EF + FN$即可。如图11—4。

根据线段垂直平分线的性质可知

$EM' = EM$，$PM' = PM$；$FN' = FN$，$QN' = QN$。

∴ $ME + EF + FN = M'E + EF + FN' = M'N'$，

$$MP+PQ+QN=M'P+PQ+QN'.$$

显然，折线段$M'PQN'$的长不小于直线段$M'N'$的长。只有P、E两点重合，Q、F两点重合时才能取等号。因此，由点P、Q的任意性可得，$ME+EF+FN=M'N'$的长为最短。

【注意】 当M、N重合于一点时，例4可以更换下述命题：在$\triangle ABC$的边AC上有一定点M，求内接三角形MEF（三个顶点分别在给定三角形的三边上），使其周长最短。

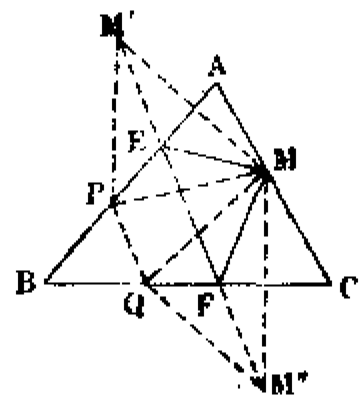


图 11—5

如图11—5，求作周长最短的三角形MEF，关键在于把ME、EF、FM转化为一条线段$M'M''$，因此要借助于轴对称变换的思想方法。

当$\angle B<90°$时，有唯一解，否则当$\angle B\geqslant 90°$时，内接三角形MEF不存在，即无解。

对称原理在物理光学中反映出光的折射规律。

例5 设有一条两岸平行的河的两侧有两个工厂A和B，现在要建一座与河岸垂直的桥MN，使$AM+MN+NB$最短，问这座桥应建的位置在什么地方？

思路： 如图11—6，两岸平行线为l_1和l_2，若把两条平行线看成重合的一条直线，则可用对称原理求解。但因两平行线间有距离，所以可应用平移的方法将

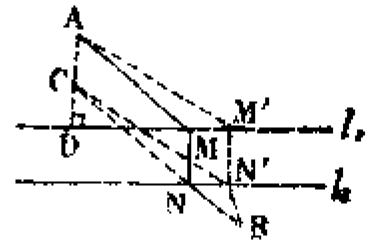


图 11—6

线段在平面内平行移动而不改变其形状和大小。

解：设$l_1 // l_2$。在地平面上过A作$AD \perp l_1$，在AD上截取$AC = MN$，连结CB交l_2于N，过点N作$NM \perp l_1$，垂足为M，则MN为所求。∵在l_1上任取一点M'，都有

$AM' + MN + N'B > AM + MN + NB$。

∴在探求MN的位置时，把MN平移到AC，AM就平移到CN，只有C、N、B三点共线时，才有$AM + MN + NB$为最短。

因此，MN是符合条件的建桥位置。

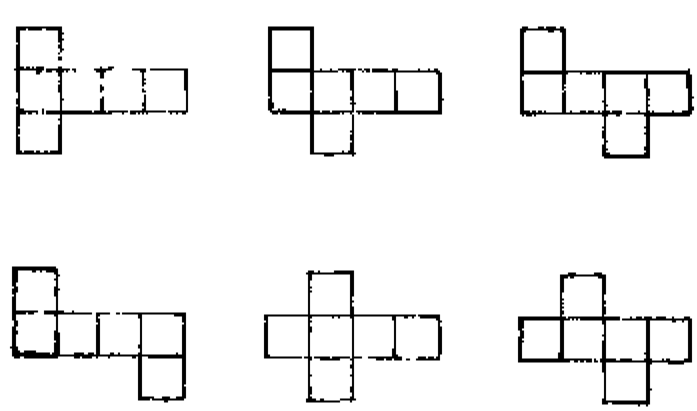
（Ⅱ）关于展开面问题

例6 多面模型是由硬纸折叠而成的，例如粉笔盒，在展开图中各个面之间都有一条公共棱边。正四面体有两种不同的展开图。

试问：正方体有多少种展开图？

解：图11—7表示所有正方体展开图共11种。

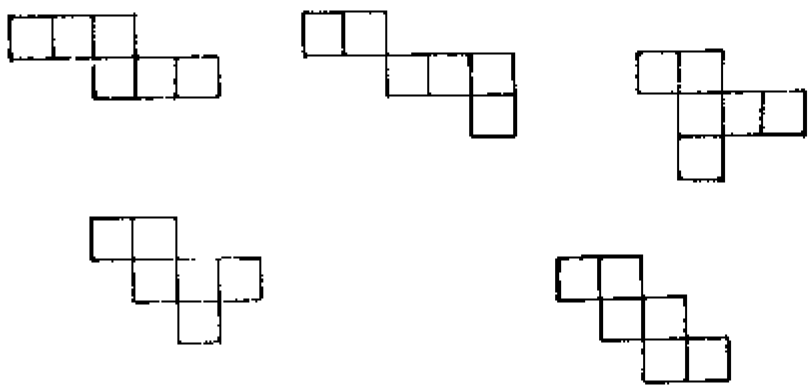
第一种类型有六种（图甲），在这些展开图里正方体有四个面排成一排，符合这种类型的其它情况是不存在的。



图甲

第二种类型有四种（图乙），在这些展开图里正方体有三个面排成一排。

最后一种类型只有一种（图丙），正方体展开图中每排不超过两个面。



图乙　　　　图丙

图11—7

（Ⅳ）关于割补问题

例7　已知a、b、c分别是$\triangle ABC$的三边，若$\angle A=60°$，则三角形的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[a^2-(b-c)^2\right] \quad ①$$

若$\angle A=120°$，则三角形的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{12}\left[a^2-(b-c)^2\right] \quad ②$$

思路：如果各边为a、b、c的三角形ABC中$\angle A=60°$，那么$\angle B+\angle C=120°$。把六个这样的三角形拼成一个花环（如图11—8），从外面看这是一个边长为a的正六边形，从里面看这是一个边长为$(b-c)$的正六边形。计算了两个正六边形的面积后，我们就能得到所要求的公式①。

若三角形中$\angle A=120°$，则$\angle B+\angle C=60°$，三个这样的三角形可拼成一个三角形花环（如图11—9）。同理能推得公式②。

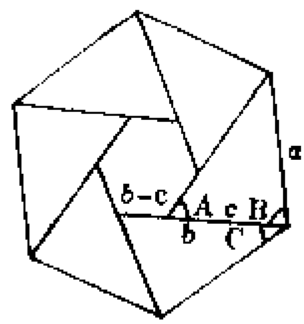


图 11—8

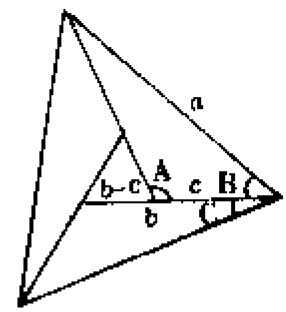


图 11—9

【注意】 正六边形的面积等于其一边平方的$\frac{3\sqrt{3}}{2}$倍，

即 $S_{六边形}=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$（$a$为正六边形的边长）。

例8 如图11—10，直角三角形的两条直角边分别为2和$\sqrt{3}$，请你将这块纸板三角形分成三块，再拼成一个正三角形（画图表示）。

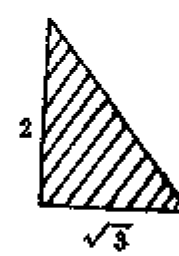


图 11—10

思路：将直角三角形纸板割成三块拼成一个完整的三角形，则在正三角形内部各线段是三个小三

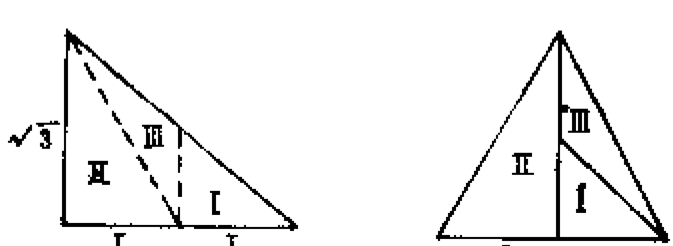


图 11—11

角形的边，且三个小三角形之间无空隙，所以可取大直角边与斜边中点分割，再将梯形分割后拼成一正三角形（如图11—11）。

例9 把一个正方形一次分割成若干个面积相等的矩形。若正方形的边长为1，（1）分成五个等积部分；（2）分成七个等积部分。

这是一个很有趣味的分割问题。我们将一个矩形分成两个矩形是很容易做到的，这只要一次分割就能完成。但是，如果要把一个矩形分成三个矩形，那么很难想象通过一次分割就能实现的。事实上正象把角三等分一样是不可能实现的。一般地，用n条线段把一个矩形分割成n个矩形($n\geqslant3$)，如果这些线段中的任意一条都不能单独地把原矩形分割成两个矩形，那么这种分割就是一次性分割。按照这个定义一个矩形可以一次性分割成2，5，7，8，……个部分，但不存在分割成3，4和6个部分的一次性分割。

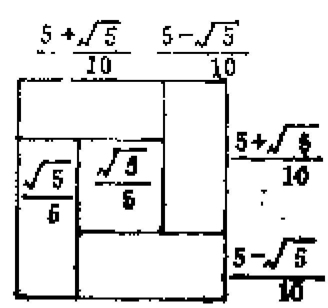


图 11—12

解：（1）设正方形边长为1。假设这个正方形已被一次性地分成五个面积相等的部分（图11—12）。

如果仅仅考虑对称划分时，用x表示中间正方形的边长，我们得到$x^2=\frac{1}{5}$，因此$x=\frac{\sqrt{5}}{5}$。所以，其余四个矩形的尺寸分别为$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$和$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$

(2) 假设图11—13是将边长为1的正方形一次性分割成面积相等的七部分。

设图中第i ($i=1, 2, 3, \cdots, 7$) 个矩形的长边为w_i，短边为p_i，且$w_1=x$，则由$p_i w_i=\frac{1}{7}$得

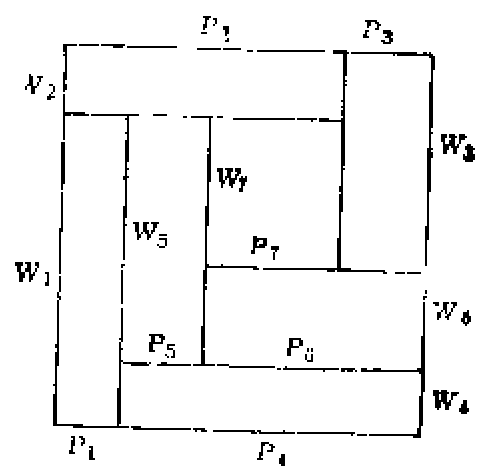


图 11—13

$$p_1=\frac{1}{7x},\quad w_2=1-x,\quad p_2=\frac{1}{7(1-x)},$$

$$p_3=1-p_2=\frac{6-7x}{7(1-x)},\quad w_3=\frac{1-x}{6-7x},$$

$$p_4=1-p_1=\frac{7x-1}{7x},\quad w_4=\frac{x}{7x-1},$$

$$w_5=w_1-w_4=\frac{x(7x-2)}{7x-1},\quad p_5=\frac{7x-1}{7x(7x-2)},$$

$$p_6=p_4-p_5=\frac{(7x-1)(7x-3)}{7x(7x-2)},$$

$$w_6=\frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)},$$

$$w_3+w_4+w_6=1,$$

$$\therefore\quad \frac{1-x}{6-7x}+\frac{x}{7x-1}+\frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}=1,$$

因此，整理得

$$196x^3-294x^2+128x-15=0.$$

即 $(2x-1)(98x^2-98x+15)=0.$

解该方程，有一个根是 $x=1/2$，显然不合题意，不是本题的解，$\because$ 当 $x=1/2$ 时，得到 $w_1=w_2$，$p_1=p_2$，正方形的分割不是一次性分割。而这方程式的另外两个根是

$$\frac{7+\sqrt{19}}{14}\text{和}\frac{7-\sqrt{19}}{14}.$$

又根据题目条件，应该有 $x>\frac{3}{7}=\frac{6}{14}$，否则 $p_6<0$，所以答案是 $w_1=\frac{7+\sqrt{19}}{14}$。由此得

$$p_1=\frac{7-\sqrt{19}}{15};w_2=\frac{7-\sqrt{19}}{14},\ p_2=\frac{7+\sqrt{19}}{15};$$

$$w_3=\frac{8+\sqrt{19}}{21},\ p_3=\frac{8-\sqrt{19}}{15};$$

$$w_4=\frac{8-\sqrt{19}}{21},\ p_4=\frac{8+\sqrt{19}}{15};$$

$$w_5=\frac{5(\sqrt{19}+1)}{42},\ p_5=\frac{\sqrt{19}-1}{15};$$

$$w_6=\frac{5}{21},\ p_6=\frac{3}{5};$$

$$w_7=\frac{15(\sqrt{19}-1)}{12},\ p_7=\frac{\sqrt{19}-1}{15}.$$

【注】 反之，能否寻求用一次性分割的办法将一个矩形分割成面积不等的正方形呢？答案是肯定的，但分割的方案不是唯一的。

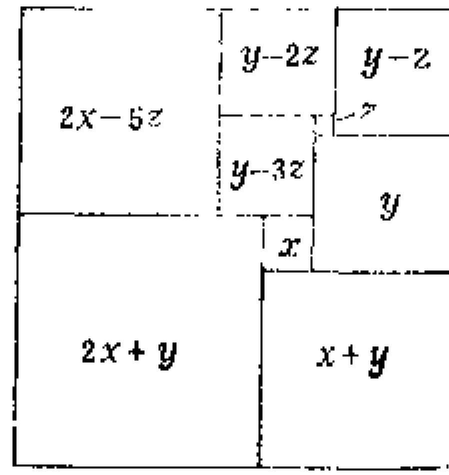


图11—14

例如，把一个矩形一次性分割成九个面积不等的正方形如图11—14，我们可以先标出相邻的三个小正方形的边长分别为x、y、z。这时很容易按照下列次序标出其余正方形的边长：$x+y$，$2x+y$，$y-z$，$y-2z$，$y-3z$，$2y-5z$。然后，我们可以推出这些未知数之间的关系。例如，让矩形一组对边相等。由长即竖直边得

$$(2y-5z)+(2x+y)=(y-z)+y+(x+y),$$

即 $x-4z=0$①

由宽即水平边得

$$(2x+y)+(x+y)=(2y-5z)+(y-2z)+(y-z),$$

亦即 $3x-2y+8z=0$，②

由①、②得 $x=4z$且$y=10z$。

可以看出，若令$z=1$，则$x=4$，$y=10$，我们就可以得出一个矩形（33×32）被一次性分割成九个正方形的边长由小到大的顺序是：1、4、7、8、9、10、14、15、18。

（Ⅴ）关于构造图形解题问题

有些问题的结论，可以依据题设条件的特点，画出一个几何图形，构造的图形反映出解题的简捷思路，常常收到事半功倍的效果。

例10 设$0<a<1$，$0<b<1$，求证

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}.$$

思路： 从条件$0<a<1$，$0<b<1$，得

$0<1-a<1$，$0<1-b<1$，利用a，$1-a$，b，$1-b$这四个数表示线段，构成边长为1的单位正方形，利用勾股定理和三角形边与边之间的大小关系即可证明。

证： 以边长为1作正方形$ABCD$，作$EF//AB$，$GH//AD$，设$AE=b$，$AG=a$，则$ED=1-b$，$BG=1-a$（图11—15）。由勾股定理得

$$MA=\sqrt{a^2+b^2},\quad MB=\sqrt{(1-a)^2+b^2},$$

$$MC=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2},$$

$$MD=\sqrt{a^2+(1-b)^2}.$$

又 $AC=BD=\sqrt{2}$，由三角形三边的性质，

$$MA+MC>AC=\sqrt{2},$$

$$MB+MD>BD=\sqrt{2}.$$

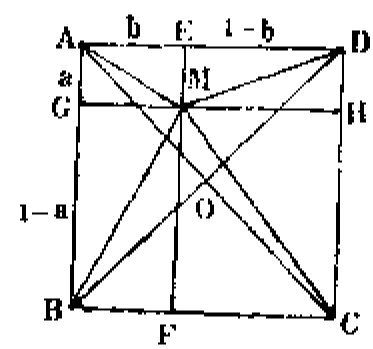


图 11—15

两式相加得$MA+MB+MC+MD>2\sqrt{2}$，当且仅当M与O重合，即$a=b=1/2$时取“=”号。

例11 A、B、C、D、E五个足球队进行单循环比赛（全部比赛过程中任何一个队都要分别与其他各队比赛一场，且只比赛一场）。当比赛进行到一定阶段时，统计A、B、C、D四个队分别已经赛过的场数为：A队4场；B队3场；C队2场；D队1场，请你判定哪些球队之间已经互相比赛过？其中E队已经比赛过几场？

思路：我们讨论的问题，可以依照下面的方式构造一个树枝图：A、B 两队赛过用线段连结起来，否则，就表示没有比赛过。这样，只要从图中某一个点出发的线段条数就可判断该队比赛的场次。

解：如图11—16，以五个点表示5个球队，连线表示已赛过。A队已赛4场，故有四条线段AB、AC、AD、AE；D队只赛过1场，故DC、DB、DE无线段；B队已赛过3场，故BE、BA、BC有线段；C队只赛过2场，故CE、CD无线。

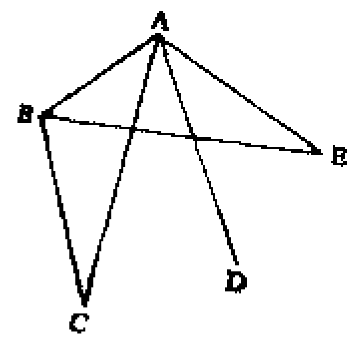


图 11—16

由此可知，已经比赛6场：

A——B，A——C，A——D，A——E，

B——C，B——E。其中 E 已赛2场。

（三） 练习题

1. 在正方形$ABCD$所在平面内求一点P，使该点与该正方形各顶点都构成四个等腰三角形，问满足条件的点P共有几个？

2. 如图11—17、18所示的两个$\triangle ABC$和$\triangle PQR$，已知$\triangle ABC$中，$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=120°$。试证 $\Sigma=x+y+z$。

3. $\triangle ABC$的三条外角平分线相交成一个$\triangle LMN$，则$\triangle LMN$

（A）一定是直角三角形。（B）一定是钝角三角形。

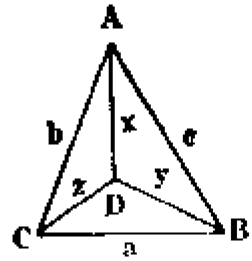


图 11—17

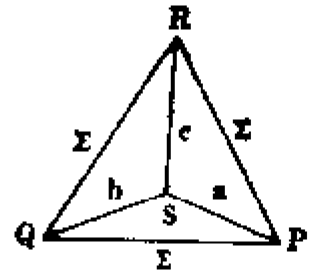


图 11—18

(*C*) 一定是锐角三角形.(*D*) 不一定是锐角三角形.

4. 不利用顶点O,作$\angle AOB$的平分线.

5. 在矩形(即长方形)的康乐球盘上有两个球A和B(图11—19),要依什么方向击球A,才能使A球顺次撞击球壁的四边后再与B球相撞?

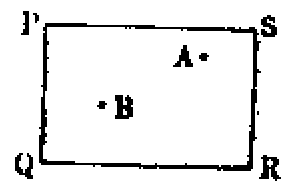


图 11—19

6. 下列各图是由全等的正方形组成的图形.其中能围成正方体的图形是

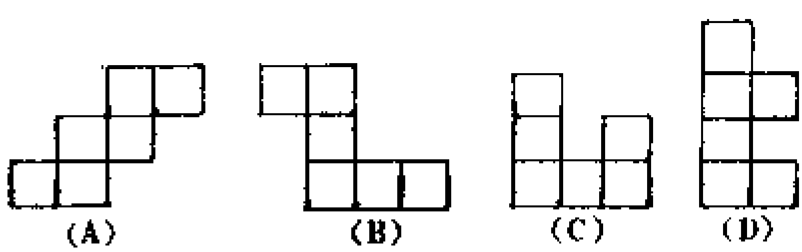


图 1.—20

7. 如果A、B为两定点,P为一动点,在AB所在平面上异于P点的一侧取A'及B'两点,使$\angle PAA' = \angle PBB' = 90°$,且$BB' = PB$,$AA' = PA$,设$A'$、$B'$的中点为$P'$.

(1) 想想看,当P点在该平面上移动时,A'、B'的中点P'的位置将怎样变化?

(2) 请证明你的猜想。

8. 将立方体的每个侧面分成四个同样的正方形，将每一个小正方形涂上三种不同颜色中的一种，并使得任意两个有公共边的小正方形涂上不同颜色。试证：每种颜色都涂了八个小正方形，并请你举出这样涂法的例子。

9. 以三角形的三个顶点和它内部的七个点，共十个为顶点，能把原三角形分割成多少个小三角形？请你画出图来。

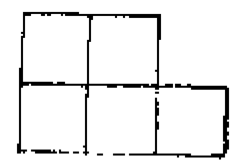


图 11--21

10. 用割补法把图11--21中的五个全等的正方形改成一个正方形（不必证明）。

11. 把凸四边形中各边中点连结起来，我们能得到一个小四边形。试证：小四边形是平行四边形，它的面积等于大四边形面积的一半。这个命题对于非凸的四边形是否也成立？

12. 两个正方形$ABCD$与$AKLM$（顶点按顺时针方向排列）有一个公共顶点，求证：这两个正方形的中心以及线段BM、DK的中点是一正方形的四个顶点。

13. 用直尺测量砖（长方体）的对角线长，即相距最远的两个顶点间的距离。请指出适于操作的实用测量方法，但不得采用勾股定理计算。

14. 将边长为 1 的正方形一次性分割成八个等积矩形。

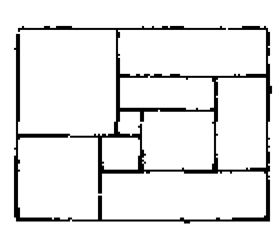


图 11--22

15. 依照图11--22所给的方案，导出一个矩形分成不相等的正方形的分割法。

（四） 答案与提示

1. 9个。正方形内5个，形外4个。

都在平行于正方形边的对称轴上。

2. 略证。

如图11—23，将$\triangle BCD$绕点B按逆时针旋转60°得$\triangle BFE$。连CF，DE。∵$\triangle CBF$，$\triangle DEB$都是等边三角形，∴可证A，D，E，F四点在一直线上。

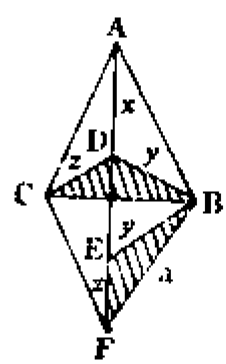


图 11—23

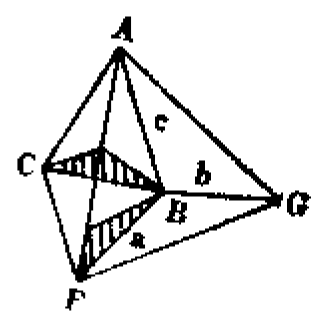


图 11—24

于是 $AF=x+y+z$。

再作等边$\triangle AFG$。如图11—24。

∵ $AF=FG$，$CF=FB$，$\angle CFA=\angle BFG$，

∴ $\triangle CFA\cong\triangle BFG$。∴ $BG=AC=b$。

∴ 在等边$\triangle AFG$中有一点B。使$AB=C$，$FB=a$，$BG=b$，且边长$AF=x+y+z$。

3. (C)

4. 先在射线OA上任意取一点C，在OB上任意取一点

D，连CD，作$\angle OCD$，和$\angle ODC$的平分线设两平分线交点为M。则点M为$\triangle OCD$的内心。

同样，再在射线OA上任取另一点E，在OB上任取另一点F，连EF，再作$\angle OEF$，$\angle OFE$的平分线，设其交点为N，则点N为$\triangle OEF$的内心，于是直线MN为$\angle AOB$的平分线。

5. 提示：如图11—25

顺次求出点A关于PS的对称点C，点C关于SR的对称点D，再求出点B关于PQ的对称点F，点F关于QR的对称点E。连DE，分别交QR，SR于K，H。

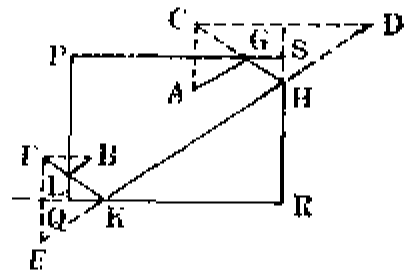


图 11—25

6. （A）

7. 提示：过A'，B'，P'，P分别作AB的垂线，设垂足分别为A_1，B_1，P_1，M。设法证明$AA_1=BB_1=PM$，$P'P_1=\frac{1}{2}AB$。

P'始终在AB的垂直平分线上，且距AB为定长$\frac{1}{2}AB$处，为一定点。

8. **解**：正方体每个顶点处的三个小正方形应涂上三种不同颜色，正方体侧面的二十四个小正方形可分成八组，故得证。

如图11—26（正方体的展开图）为一种方案。

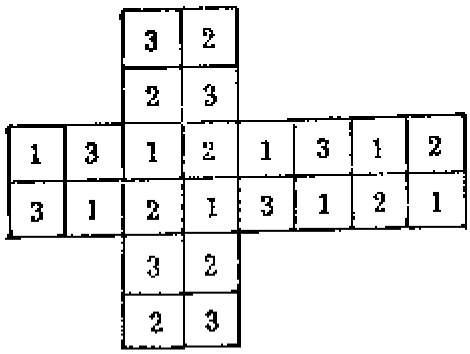


图 11—26

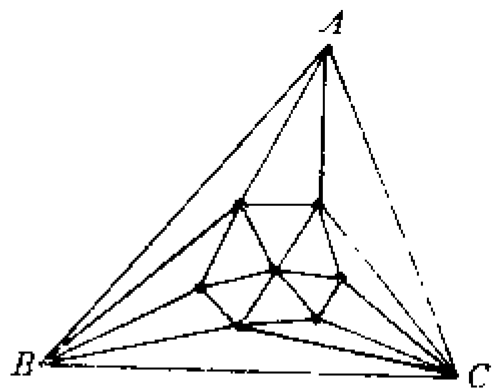


图 11—27

9. 共能画出十五个小三角形，如图 11—27 并且，只能画出15个小三角形。这是因为分割后的这些小三角形的内角和等于以原三角形内部的 7 个点为顶点的 7 个周角和再加上原三角形的三个内角，所以能分割成的小三角形的个数为

$$\frac{180^\circ+360^\circ\times 7}{180^\circ}=1+2\times 7=15.$$

由此可见，小三角形的个数与点的放置方法无关。此题还可做如下的推广：

①若三角形的内部有 n 个点，能分割成小三角形的个数是多少呢？显然，由上题的推广为

$$\frac{180^\circ+360^\circ\times n}{180^\circ}=2n+1,$$

所以，能且只能分割$2n+1$个小三角形。

②若把“三角形”改为“凸m边形”，则原题变为：

“在凸m边形内部，放置 n 个点，以这 $m+n$ 个点为顶点，能把原凸m 边形分割成多少个小三角形”

按上题的推广，可以得到此题的计算公式为：

$$x=\frac{(m-2)\times180°+360°\times n}{180°}=m+2n-2.$$

其中x是小三角形的个数。

10. 有图11—28和图11—29所示的两种作法。

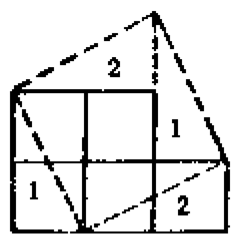


图 11—28

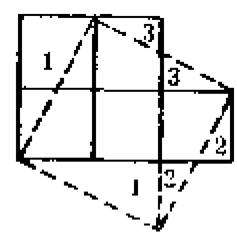


图 11—29

11. 略证： 小四边形（图11—30）是平行四边形，因为它的各边成对地平行于原四边形的对角线。这两条对角线把大四边形分成四个三角形，而把小四边形分成四个小平行四边形，每个小平行四边形的面积等于其相应小三角形面积的一半，因面，小四边形的面积等于大四边形面积的一半。这个结论对于非凸四边形也同样成立（图11—31），只是在证明时要把相应的三角形或平行四边形面积相加改为相减。

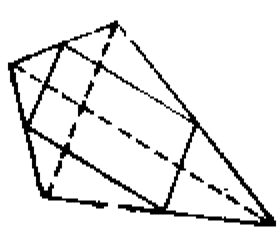


图 11—30

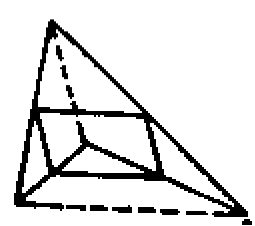


图 11—31

12. 略证： 如图11—32，先证四边形$AEQF$是平行四边形（E、F分别是AD、AK的中点），再证$\triangle PEQ\cong\triangle QFR$，将$\triangle QFR$平移，使$F$移至$E$，再绕$E$按逆时针方向

旋转90°，得到$\triangle PEQ$。证得$PQ=QR$，$\angle PQR=90°$，同理可得$PS=SR$，$\angle PSR=90°$。

13. 如图11—33，将一块直板的边落在砖头上底面两个相对顶点A_1、C_1上，并在直板上标出这两顶点，画出上底面一条对角线A_1C_1。然后，沿着这条对角线平行移动直板，使移动的距离$EA_1=A_1C_1$，并量出AE的距离。则AE的长即为砖头的对角线AC的长。因为$\triangle AA_1C_1\cong\triangle AA_1E$。

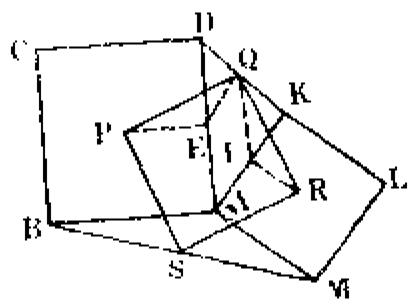


图 11—32

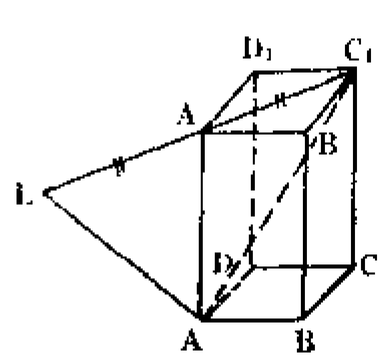


图 11—33

14. 如图11—34

这是一次性分割成八个等积部分的一种分法，当然还有其它的分割方法。

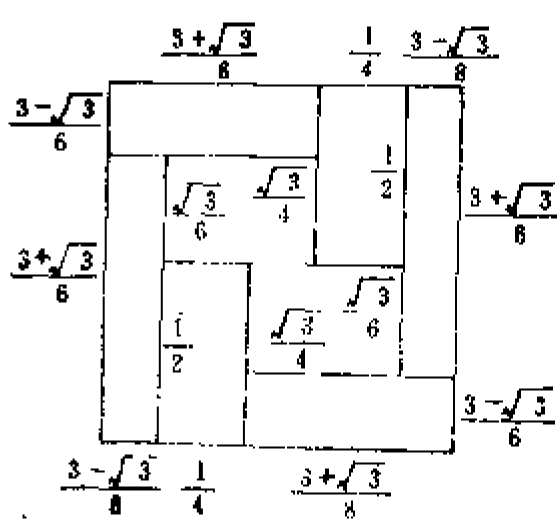


图 11—34

15. 如图11—35.

一个矩形（69×61）被一次性分割成九个小正方形. 图中的数字是各正方形的边长.

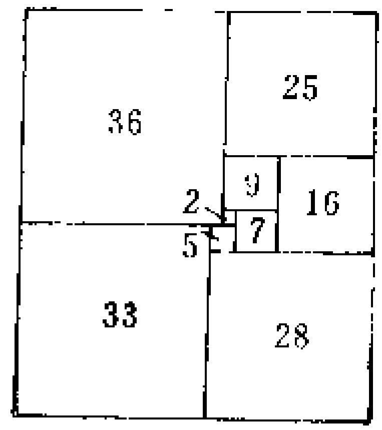


图 11—35

十二　抽屉原理

（一）基本原理

让我们从下面这个非常简单的事实谈起。

把四本书放到三个抽屜里，我们可以断言：至少有一个抽屜中有两本书或两本以上的书。否则若每个抽屉中最多有一本书，那么三个抽屉中最多有三本书，这与当初的数量不符。这就是抽屉原理，有的人也把抽屉原理叫做鸽巢原理。如果把 n 只鸽子放入 m 个鸽巢中，若$n>m$，那么必然有一个鸽巢至少放两只鸽子。这个原理十分平凡易懂，倘若能把这一通俗的道理与其它知识有机地结合起来，就能产生许多有用的结果，可以解决大量的美妙的高难度的数学题。因此，抽屉原理是参加数学竞赛者不可缺少的工具之一。

为了使用的方便，我们把抽屉原理总结成如下三个定理。

定理1　如果有n个东西，按照某种规则分成 m个组，且$n>m$（n,m为自然数），那么其中至少有一组包含两个或两个以上的东西。

证明：用反证法。若每一组中最多包含一件东西，那么 m 个组总共最多有m 个东西，因为$m<n$，这就与当初给定的东西的个数 n 不符。

定理2　如果 n 个东西，按照某种规律分成 m 个组，若

$n>km$（n,m,k为自然数），则至少有一个组包含$k+1$或$k+1$以上个东西。

这个定理的证明也用反证法，与定理 1 的证明相似，这里从略。

定理3 （1）$\begin{cases} ①若a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant nb, \\ \quad 则至少有某个a_i满足a_i\leqslant b; \\ ②若a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant nb, \\ \quad 则至少有某个a_i满足a_i\geqslant b。\end{cases}$

（2）设$a_1,a_2,\cdots,a_n$均为正数。

$\begin{cases} ③若a_1a_2\cdots a_n\leqslant b^n, \\ \quad 则至少有某个a_i\leqslant b; \\ ④若a_1a_2\cdots a_n\geqslant b^n, \\ \quad 则至少有某个a_i\geqslant b。\end{cases}$

证明自然用反证法，这里从略。

（二） 范例与方法

1．关于定理1

例1 某中学初中生共有367人，那么至少有两位同学同一天过生日。

这个判断是定理 1 的直接应用，我们把一年365天（闰年366 天）中的每一天看作一个“抽屉”即定理 1 中的组，再把367位同学的367个生日当做 367 本“书”或“东西”。既然东西的个数大于组的个数，由定理 1 知，至少有一天有两位同学或两个以上同学同一天过生日。

运用抽屉原理的关键在于确定分组对象，找出分组的原

则，即“制造抽屉”，再根据定理得出所需要的结论。

例2 在边长为1的正方形内有任意五个点，求证，其中至少有两个点，它们之间的距离不大于$\sqrt{2}/2$。

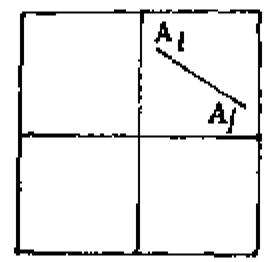


图 12—1

证：1）分类对象是平面上的五个点A_1, A_2, A_3, A_4，A_5。

2）制造抽屉，如图12—1，连结正方形对边中点，把原正方形分成边长为$\frac{1}{2}$的四个全等的小正方形。

3）由抽屉原理得：至少有两点A_i、A_j落入同一个小正方形之中，这两点的距离$s(A_i, A_j)$必小于等于小正方形内任意两点距离的最大值$\sqrt{2}/2$。

例3 任意给定五个整数．求证：其中必有二整数，其差是4的倍数。

证：1）分类对象是给定的五个整数a_1，a_2，a_3，a_4，a_5。

2）制造抽屉，我们作四个抽屉，并在抽屉上分别贴上标签0，1，2，3。

3）这五个整数如何装入这四个抽屉中呢？这要取决于它们被4除所得的余数。

一个整数a被4除得的非负余数，只有四种可能，一种可能是a能被4整除，这时余数是0，另三种情况分别是余1，余2，余3。我们把给定的五个整数都用4去除，按余数与标签一致的原则把这五个整数分别装入上述四个抽屉中

（比如：25应装在标签为 1 的抽屉中，31应装在标签为 3 的抽屉中等等）．应当注意的是同一个抽屉中的数被 4 除余数相同．由定理 1 知：五个数放入四个抽屉，至少有一个抽屉中起码包含两个整数a_i、a_j：

$$a_i = 4k + r_1,$$

$$a_j = 4l + r_2,$$

因为$r_1 = r_2$，则$a_i - a_j = 4(k - l)$．命题得证．

例4 对任意给定的 97 个两两不同的正整数$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{97}$．试证其中一定存在四个正整数，仅用减号、乘号和括号将它们适当组合为一个算式，其结果是1984的倍数．

解：$1984 = 31 \times 64$．我们把这97个正整数分成两大组，第一组包括32个正整数，第二组包括65个正整数．与前例的思想方法相同，把第一组的32个数用31去除，把余数相同的归为一个小组，由定理 1，至少有一个小组包含两个或两个以上的数，故必有a_i与a_j属于同一小组，那么

$$a_i = 31k + r_1, \quad a_j = 31l + r_2,$$

因为$r_1 = r_2$，则$a_i - a_j = 31(k - l)$．

同理把第二大组的65个数，用64去除必有某两个数a_p与a_q其余数相同，

$$a_p = 64k' + r'_1, \quad a_q = 64l' + r'_2,$$

$$\because \quad r_1' = r_2', \quad \therefore \quad a_p - a_q = 64(k' - l')．\text{于是}$$

$$(a_i - a_j)(a_p - a_q) = 31(k - l) \cdot 64(k' - l')$$

$$= 1984(k - l)(k' - l')．$$

则a_i, a_j, a_p, a_q这四个正整数合于所求．

请同学们想一想以下两个问题：

(1) 要想得到例4中的同样结果，最少需要给定多少个正整数？比97个再少些行不行？

(2) 如果把1984改为1988，原题应作怎样的改动？

2. 关于定理2

例5 某中学共有住校生60名，住在7间宿舍里，则至少有一间宿舍住着9个或更多的学生。

这里 $n=60$，$m=7$。因为 $60=8\times7+4$ 即 $60>8\times7$，$k=8$，$k+1=9$。由定理2立即得到上述结论。

例6 边长为8的正三角形中（包括周界），有9个点，以这9点为顶点分别画三角形，试证：这些三角形中至少有一个三角形的面积小于7。

证：如图12—2，在$\triangle ABC$中，$AB=BC=CA=8$，那么$\triangle ABC$的面积$S=16\sqrt{3}$。各边中点连线，把原正三角形分成四个小正三角形。每个小三角形的面积是$S/4=4\sqrt{3}$。因$9=2\times4+1$，由定理2知，至少有一个小三角形（包括周界），它包含3个或3个以上的点，我们就取这样的三个点，那么以这三点为顶点的三角形的面积必小于等于小正三角形的面积$4\sqrt{3}<7$，故结论正确。

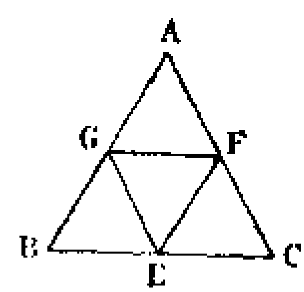


图 12—2

例7 在边长为1的正方形内有任意9个点，证明：其中至少存在三个点，它们组成的三角形的面积不大于1/8。

证：需先证明矩形内的任意三角形的面积小于或等于该矩形面积的一半。如图12—3，过$\triangle ABC$的一个顶点引矩形

一组对边的平行线，则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABB'}+S_{\triangle BCB'}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}S_{\square DMNG}+\frac{1}{2}S_{\square EMNF}=\frac{1}{2}S_{\square DEFG}.$$

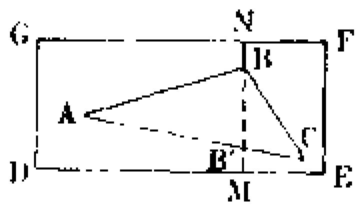


图 12-3

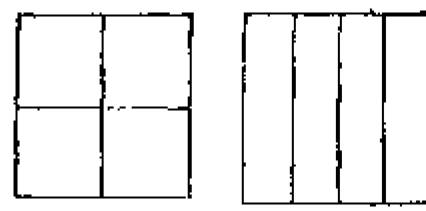


图 12—4

现将原正方形分成四个全等的矩形，图 12—4 所示两种分法均可。其小矩形的面积为 $\frac{1}{4}$. 因 $9=2\times4+1>2\times4$，由定理 2，至少有一个矩形包含三个或三个以上的点。这样的三个点组成的三角形的面积必小于或等于这三点所在的那个小矩形面积的1/2，即小于或等于1/8。

例8 把 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 这十个自然数，以任意的次序摆成一个圆圈，证明：一定存在三个相邻的数，它们的和数大于17。

证：首先确定1所在的位置，设为 A_1，然后将其它数所在的位置依次记为 $A_2,A_3,\cdots,A_{10}$（如图12—5），则

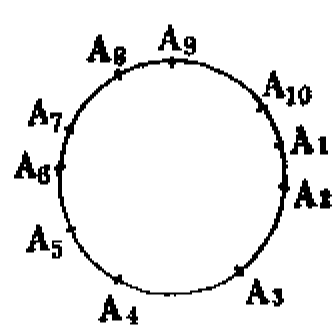


图 12—5

$$(A_2+A_3+A_4)+(A_5+A_6+A_7)+(A_8+A_9+A_{10})$$

$$=2+3+4+\cdots+9+10=54$$

$$=3\times17+3>3\times17.$$

由抽屉原理知，这三个括号中的三个数，至少有一个括号内的三个数之和大于17，故原命题得证。

例 9 平面上有六个点，其中任何三点都不共线。每两点之间连起直线段，并将每一条这样的线段涂上红色或蓝色。求证：一定存在一个三边具有相同颜色的三角形。

证：从任一点出发到其余五点共有五条线段，它们被染成红色或蓝色，因为 $5>2\times2$，由定理 2 知其中至少有三条线段同色，不妨设是红色，譬如 $\overline{AA_1}$，$\overline{AA_2}$、$\overline{AA_3}$（见图 12—6）是红色。现考虑$\triangle A_1A_2A_3$的三边，若有一边$\overline{A_iA_j}$也是红色，则$\triangle AA_iA_j$的三边都是红色。否则 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三边同为蓝色，命题得证。

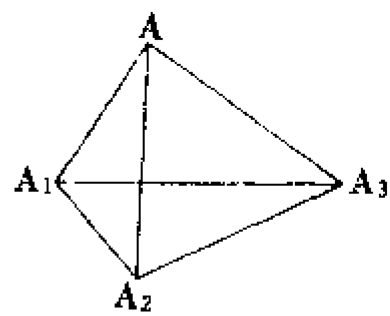


图 12—6

3。关于定理3

例10 在圆内或圆周上任取 8 个点，证明这 8 个点中，必有两个点的距离小于圆的半径。

证：8个点中至少有7个点不和圆心重合，过这 7 个点作圆的半径，若其中有某两点在同一个半径上，那么这两点的距离必然小于圆的半径。否则，这 7 个半径确定了 7 个圆心角α_1，α_2，…，α_7，且

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_7=360^\circ=6\times60^\circ<7\times60^\circ.$$

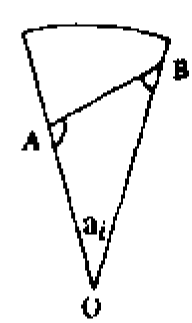


图 12—7

由定理 3 知必有某个$\alpha_i<60^\circ$，如图12—7A、B是当初给定 8

个点中的两个点，$\angle AOB=\alpha_i<60^\circ$，在$\triangle AOB$中，$\angle A+\angle B+\alpha_i=180^\circ$，$\angle A+\angle B=180^\circ-\alpha_i>120^\circ=2\times60^\circ$，由定理3知$\angle A$、$\angle B$中必有一个大于$60^\circ$，不妨设$\angle A>60^\circ$，由于在三角形中大角所对的边也大，故$\overline{AB}<\overline{OB}\leqslant r$（圆的半径）。

例11 把两个同心圆盘利用半径分成200等分，对于外边一个圆盘，100个分段涂上红色，另100个分段涂上蓝色，对于里边一个圆盘，把每个分段任意涂上红色或蓝色，求证可以把两个圆盘的位置相互配合，使得内外圆盘上有100个或更多个对应的分段颜色是相同的。

证： 我们令外圆盘位置固定，让里边的盘子逆时针转，转角依次为：$\frac{1}{200}\cdot2\pi$，$\frac{2}{200}\cdot2\pi$，…，$\frac{199}{200}\cdot2\pi$，$\frac{200}{200}\cdot2\pi$。

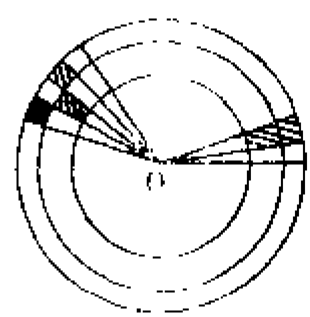


图 12—8

设内圆盘的转角为$\frac{k}{200}\cdot2\pi$时，我们数出来的内外颜色相同的分段的数目为n_k个。于是，经过上述200次旋转，我们数得数目的总和应为

$$n_1+n_2+\cdots+n_{200}.$$

另一方面，因为外圆盘红色、蓝色各100个分段，若我们着眼于内圆盘上某一固定分段(不论它是红色还是蓝色)，它在上述200次转旋过程中，恰好有100次内外同色。内圆盘上共有200个等分段，因此在上述200次旋转过程中数出

来的内外颜色相同的分段的总和应为200×100。从而有

$$n_1+n_2+\cdots+n_{200}=200\times100.$$

由定理3必有某一个$n_i\geqslant100$，命题得证。

（三） 练习题

1. 边长为1的等边三角形内有五个点，证明：至少有两个点，其距离小于$\frac{1}{2}$。

2. 已知9个自然数a_1，a_2，…，a_9，将它们重新排列后得到b_1，b_2，…，b_9。求证$(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdot\cdots\cdot(a_9-b_9)$是偶数。

3. 证明：一个分数形式的有理数化成十进小数时，一定是一个有限小数或无限循环小数。

4. 证明在任意六个人中总能找到三个人，他们或者都相互认识或者相互都不认识。

5. 在$\triangle ABC$的三边AB、BC和CA上，分别有和顶点不重合的任意三点M、K和L。试证：$\triangle LAM$、$\triangle MBK$和$\triangle KCL$中至少有一个三角形的面积不大于$\triangle ABC$的面积的$\frac{1}{4}$。

（四） 答案与提示

1. 取正三角形各边的中点，并把它们连结起来，把原三角形分成边长为$\frac{1}{2}$的四个全等的小三角形。然后用定理1

可知至少有两点落入同一个小正三角形中，又因正三角形内任意两点的距离都不会超过它的边长，于是结论得证。

2. 将这 9 个自然数分成奇数和偶数两类，由定理2知至少有一类起码包含五个数，不妨设 $a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3},a_{i_4},a_{i_5}$ 为偶数（奇数也一样），从而奇数的个数小于等于4，则 b_{i_1}，$b_{i_2},b_{i_3},b_{i_4},b_{i_5}$中必有偶数，∴ $(a_{i_1}-b_{i_1})(a_{i_2}-b_{i_2})(a_{i_3}-b_{i_3})(a_{i_4}-b_{i_4})(a_{i_5}-b_{i_5})$ 必是偶数。∴ $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_9-b_9)$是偶数。

3. $\pm m/n$（m,n为正整数）表示一个有理数，一个正整数被 n 除所得的非负余数只有 n 种可能：$0,1,2,\cdots,(n-1)$。因此在用 n 除m 的过程中，经过有限步以后，其余数必然重复出现。

4. 把每个人看作正六边形的一个顶点，若两个人互相认识，就把表示这两个人的两点间的线段涂上红色，否则就涂上蓝色，这样一来此题完全归结为例9。

5. 设$\triangle ABC$的面积为S，$\triangle LAM$、$\triangle MBK$、$\triangle KCL$、$\triangle MKL$的面积分别为S_1、S_2、S_3、S_4，我们欲证某个$S_i\leqslant S/4$，就不能孤立地看某一个小三角形。利用抽屉原理的定理3，只要证明$S_1+S_2+S_3\leqslant 3S/4$即可。与其等价的只要证明$S_4\geqslant S/4$ 就行了。应注意三角形三边中点连线可得的小三角形的面积等于原三角面积的1/4。

十三　数学趣味

（一）　范例与方法

1．代数

例1　把1991表成四个自然数a, b, c, d的平方和，即$1991 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$，且满足以下条件：

$1 \leqslant d < 10 \leqslant c < 20 \leqslant b < 30 \leqslant a < 40$。并求$a, b, c, d$。

思路：把1991进行因数分解，再利用配方法。

解：
$$
\begin{aligned}
1991 &= 11 \times 181 \\
&= (9+2) \times (100+81) \\
&= 9 \times 100 + 9 \times 81 + 2 \times 100 + 2 \times 81 \\
&= (3 \times 10)^2 + (3 \times 9)^2 + (10^2 + 2 \times 10 \times 9 + 9^2) \\
&\quad + (10^2 - 2 \times 10 \times 9 + 9^2) \\
&= 30^2 + 27^2 + 19^2 + 1^2
\end{aligned}
$$

即　$a = 30$，$b = 27$，$c = 19$，$d = 1$。

例2　不使用任何数学符号，用四个4写出一个最大的自然数。（可写成幂的形式）

思路：按要求把所有用四个 4 写成的自然数都写出来，然后比较它们的大小。

解：不使用任何数学符号，用四个 4 写出的自然数共有以下 8 个。

①$4444$　　②$444^4$　　③$44^{44}$　　④$4^{444}$

⑤$44^{4^4}$　　⑥$4^{44^4}$　　⑦$4^{4^{44}}$　　⑧$4^{4^{4^4}}$

∵　$4^4=256>44$，∴　$4^{4^{4^4}}>4^{4^{44}}$

又∵　$4^{11}>44$，∴　$4^{44}=(4^{11})^4>44^4$

∴　$4^{44^4}<4^{4^{44}}$

又　$44^{4^4}=44^{256}<64^{256}=(4^3)^{256}=4^{768}<4^{44^4}$

∴　四个 4 写成的最大数是$4^{4^{4^4}}$。

【说明】　$a^{b^{c^d}}$的含义如下：

先算$c^d=x$，再算$b^x=y$，最后算a^y。

例3　接连写出偶数个1，形成数 A，再写出一半那么多个 4 形成数 B，

试证$A+B+1$总是一个完全平方数。

思路：按要求先把$A+B+1$表示出来，再进行计算后，证明它是完全平方数。

证：设偶数为$2m$，m是任意自然数，

$$A+B+1=\underbrace{11\cdots1}_{2m\text{个}}+\underbrace{44\cdots4}_{m\text{个}}+1$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{m\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{m\text{个}}+\underbrace{11\cdots1}_{m\text{个}}+2\times\underbrace{22\cdots2}_{m\text{个}}+1$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{m\text{个}}\times(\underbrace{100\cdots0}_{m\text{个}}-1)+2\times\underbrace{11\cdots1}_{m\text{个}}+2\times\underbrace{22\cdots2}_{m\text{个}}+1$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{m\text{个}}\times\underbrace{99\cdots9}_{m\text{个}}+2(\underbrace{11\cdots1}_{m\text{个}}+\underbrace{22\cdots2}_{m\text{个}})+1$$

$$=\underbrace{33\cdots3}_{m\text{个}}\times\underbrace{33\cdots3}_{m\text{个}}+2\times\underbrace{33\cdots3}_{m\text{个}}+1$$

$$=(\underbrace{33\cdots3}_{m\text{个}})^2+2\times\underbrace{33\cdots3}_{m\text{个}}+1$$

$$=(\underbrace{33\cdots3}_{m\text{个}}+1)^2=\underbrace{33\cdots3}_{m-1\text{个}}4^2$$

例4 已知x，y,z是实数，且满足条件：

$x^2-yz-8x+7=0$………①

$y^2+z^2+yz-6x+6=0$…②求证：$1\leqslant x\leqslant 9$

思路 观察已知条件，可知yz和$y+z$都能用含x的代数式表示，再利用韦达定理和一元二次方程的根的判别式。

证： 由①得 $yz=x^2-8x+7$ ……………………………③

由③得 $(z+y)^2=yz+6x-6$ ………………④

将③代入④得 $(x+y)^2=x^2-2x+1$，即$y+z=\pm(x-1)$ ……………………………………………………………⑤

由④、⑤知 y,z是方程

$T^2\mp(x-1)T+(x^2-8x+7)=0$ …………………⑥

的解∵ y,z为实数，

∴ $\triangle=(x-1)^2-4(x^2-8x+7)\geqslant 0$

从而得 $x^2-10x+9\leqslant 0$

即 $(x-5)^2\leqslant 16$

∴ $-4\leqslant x-5\leqslant 4$

即 $1\leqslant x\leqslant 9$。

例5 十名运动员参加乒乓球循环赛，每两人之间只进行一场比赛，第一位参赛者胜x_1场，败y_1场，第二位参赛

者胜x_2场，败y_2场；……；第十位参赛者胜x_{10}场，败y_{10}场。

证明： $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{10}^2$

思路： 用求差法证明

证： $\because$ 每一位运动员都参加9场比赛，

$\therefore\quad x_1+y_1=x_2+y_2=\cdots=x_{10}+y_{10}=9$

由于每场比赛总有一人胜，一人败，故胜的总数=败的总数，

即$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=y_1+y_2+\cdots+y_{10}$。

$\therefore\quad (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2)-(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{10}^2)$

$=(x_1^2-y_1^2)+(x_2^2-y_2^2)+\cdots+(x_{10}^2-y_{10}^2)$

$=(x_1+y_1)\cdot(x_1-y_1)+(x_2+y_2)\cdot(x_2-y_2)$

$+\cdots+(x_{10}+y_{10})(x_{10}-y_{10})$

$=9[(x_1-y_1)+(x_2-y_2)+\cdots+(x_{10}-y_{10})]$

$=9[(x_1+x_2+\cdots+x_{10})-(y_1+y_2+\cdots+y_{10})]=0$

即 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{10}^2$

【说明】 本题中的十名参赛者可推广到任何大于1的自然数n名参赛者。

例6 若$x+\dfrac{1}{x}=a$（a为常数）

求 $x^{13}+\dfrac{1}{x^{13}}$的值。

思路： 巧妙利用$x\cdot x^{-1}=1$。

解： 先求 $x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=a^2-2$

$x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})^3-3x\cdot x^{-1}(x+x^{-1})=a^3-3a$

$x^4+x^{-4}=(x^2+x^{-2})^2-2=(a^2-2)^2-2=a^4-4a^2+2$

最后计算 $x^{13}+x^{-13}$

$$=(x^7+x^{-7})(x^6+x^{-6})-(x+x^{-1})$$

$$=[(x^4+x^{-4})\cdot(x^3+x^{-3})-(x+x^{-1})]$$

$$\cdot[(x^3+x^{-3})^2-2]-a$$

$$=[(a^4-4a^2+2)\cdot(a^3-3a)-a][(a^3-3a)^2-2]-a$$

$$=a^{13}-13a^{11}+65a^9-156a^7+182a^5-91a^3+13a。$$

2。几何

例7 已知a,b,c,d都是正实数，证明存在这样的三角形，它的三边等于$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$，$\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$，并计算这三角形的面积。

思路： 由已知条件可利用勾股定理，构造出符合条件的三角形。再计算面积

解 如图13—1，以$a+b,c+d$为边画一个矩形 $ABCD$

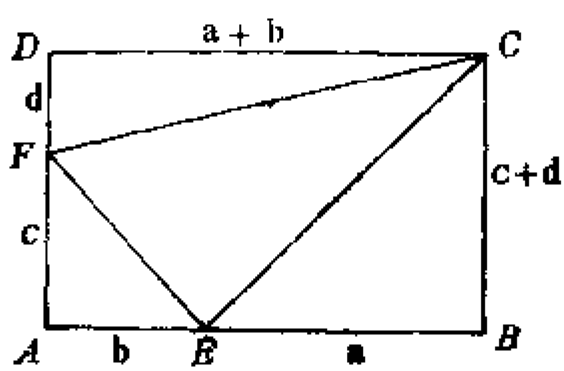


图 13—1

$AE=b$、$EB=a$，$AF=c$，$FD=d$。则

$EF=\sqrt{a^2+b^2}$，$CE=\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$，

$CF=\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$ 。

即符合条件的$\triangle CEF$是存在的。

$$S_{\triangle CEF}=S_{\square ABCD}-S_{\triangle AEF}-S_{\triangle CEB}-S_{\triangle CDF}$$

$$=(a+b)\cdot(c+d)-\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}a(c+d)$$

$$-\frac{1}{2}(a+b)\cdot d$$

$$=\frac{1}{2}(ac+bc+bd).$$

【说明】 本题若用海伦公式计算面积是使人望而生畏的。

例8 证明面积为1的三角形不能被面积小于 2 的平行四边形覆盖住。

思路： 用反证法。

证 假设面积为1的$\triangle ABC$能被一个面积小于2的$\square ARQP$所覆盖住。

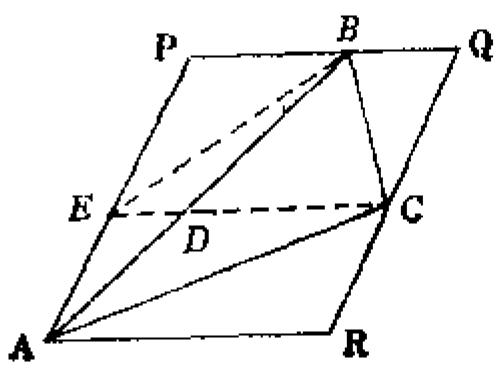


图 13—2

不失一般性，

$\square ABCD$ 为 $\triangle ABC$ 的外接平行四边形（如图13—2）

过 C 作$CE//AR$交PA于E，交 AB于D，连BE。则有

$$S_{\triangle CBD}\leqslant S_{\triangle CBE}=\frac{1}{2}\cdot S_{\square CQPE}$$

$$S_{\triangle CAD}\leqslant S_{\triangle CAE}=\frac{1}{2}S_{\square CRAE}$$ 从而有

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CBD}+S_{\triangle CAD}\leqslant\frac{1}{2}S_{\square CQPE}+\frac{1}{2}S_{\square CRAE}$$

$$=\frac{1}{2}S_{\square APQR}$$

即 $S_{\square APQR} \geqslant 2S_{\triangle ABC}=2$

这与已知$S_{\square APQR}<2$ 矛盾

所以面积为 1 的三角形不能被面积小于 2 的平行四边形所覆盖。

例9 在正△ABC内求一点，使它到三个顶点的距离之和最小。

思路：利用底和高一定的三角形中，以等腰三角形的周长为最短。

解：设 P 为正 △ABC 内任意一点，过 P 作 BC 的平行线，交AB于M，交AC于N，交中线AD 于 O。（如图 13—3）

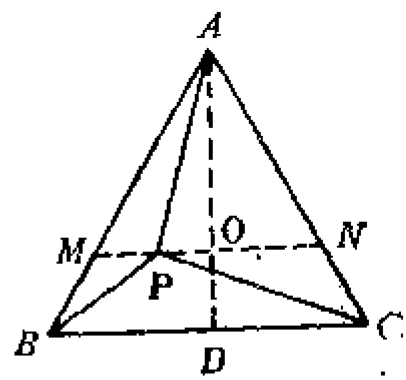


图 13—3

当P 点在 MN 上变动时，变动到 O点时，$PB+PC$ 最小。（根据底和高一定的三角形中，以等腰三角形周长最小）。而此时 PA 恰为 A 到 MN 的距离，也最小。可见，当 P 点在 MN 上变动时，以 O 点到三顶点的距离之和为最小。即，到三顶点距离之和最小的点必在中线 AD 上。由对称性，它也必在另外两条中线上。

故正△ABC的中心便是所求的点。

例10 已知△ABC中，$\angle ACB=90$。，分别以AC，BC为边向 △ABC 外部做等边 △ACD，△BCE，直线 DA 与 EB 相交于 F，

求证，$FC\perp DE$。

思路：设法证明C点是△DEF的垂心即可。（如图13—

4)

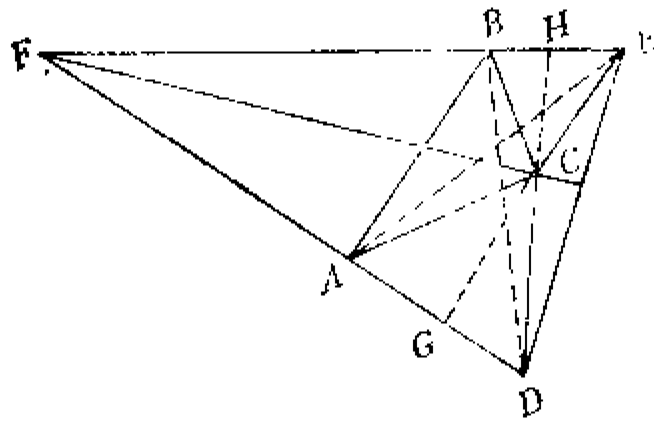


图 13—4

证：延长DC交EF于H，延长EC交DF于G。连结AE，DB。在$\triangle ACE$和$\triangle DCE$中，

$\because$ $AC=DC$，CE公共，$\angle ACE=90^\circ+60^\circ=150^\circ=360^\circ-150^\circ-60^\circ=\angle DCE$，$\therefore$ $\triangle ACE\cong DCE$。

$\therefore$ $AE=DE$，且$\angle AEG=\angle DEG$，即 EG是等腰$\triangle AED$的顶角平分线，$\therefore$ $EG\perp DF$。

同理可证 $DH\perp EF$。故C点是$\triangle DEF$的垂心。

$\therefore$ $FC\perp DE$。

【说明】 本题是巧用垂心，证明线段垂直的范例之一。

（二） 练习题

1. 已知小数 0.123456789101112131415161718192021…，则小数点后第1988位数字是几？

2. 计算$\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

$$+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

3. 证明 $2\times(\underbrace{22\cdots2}_{2n\text{位}}-\underbrace{11\cdots1}_{n\text{ 位}})$是两个相邻自然数之积。

4. 证明：一个单位圆（半径为1的圆）一定不能把面积大于2的矩形覆盖住。

5. 已知$ABCD$是任意凸四边形，M是AB的中点，N是BC的中点，P是CD边上的点且$DP:PC=1:3$，P是DA边上的点，且$DQ:QA=1:3$。判断四边形$PQMN$的形状，并加以证明。

（三） 答案与提示

1. 9。

2. 把每项分母有理化，结果为$\frac{9}{10}$。

3. 原式$=\underbrace{66\cdots6}_{n\text{ 个}}\times\underbrace{66\cdots6}_{n-1\text{个}}7$。

4. 用反证法。

5. 四边形$PQMN$是梯形。

连接AC，可证$MN//AC$，

取AD中点E，CD中点F，连EF，可证$PQ//EF//AC$，从而$PQ//AC$。

再取MN中点G，连PG，可知四边形$PQMG$是平行四边形，∴ $PG//QM$。

因为过直线 QM 外一点 P，能且只能引一条 QM 的平行线，$\therefore$ $QM /\!/ PN$。

故 $PQMN$ 为梯形。

十四　竞赛题选

(一)

1．填空题：

(1) 若$\frac{1}{a}>a$，则 a 的取值范围是________。

(2) 若 k 为正整数，且二次方程 $(k-1)x^2-px+k=0$ 有两个正整数根，则 $k^{kp}(p^p+k^k)+k^{p-1}$ 的值是________。

(3) 如图14—1，今有边长为 2 的正三角形纸板一块，请将这三角形分成三块，再拼成一个直角三角形，通过画图表示出来。

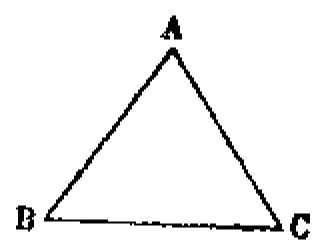


图 14—1

(4) 若 $$\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\cdots+\frac{1}{(2m-1)\cdot 2m}=\frac{1}{3976}，$$ 则$m=$________。

(5) 赵强同学在黑板上画了 7 个矩形，18 个菱形，5 个正方形，那么他在黑板画图形个数最少是________个。

(6) 当$|a|<2$时，则 a^2-2a-3 的最小值是________。

(7) 判断正误题的评分标准是，填对一道题得5分，填错一道题得0分，不填得2分，若找不到有662道题得分是相同的话，若最少得解答________道题。

(8) 如果定义$x*y=a$表示为$a^{x-y}=y$，那么$11*8=$________。

2. 选择题：

将下列各题中，唯一正确答案的代号字母用铅笔涂上。

(1) $|k|-k$的值是（　　）

〔A〕正数。〔B〕负数。〔C〕非正数。

〔D〕非负数。〔E〕任意实数。

(2) 若a、b均为实数，下列各命题中，正确的是（　　）

〔A〕若$a>b$，则$a^2>b^2$。〔B〕若$|a|>b$，则$a^2>b^2$。

〔C〕若$a>|b|$，则$a^2>b^2$。〔D〕若$a\neq b$，则$a^2\neq b^2$。

〔E〕若$a-b=0$，则$a\geqslant b$。

(3) 数3^{555}，4^{444}，5^{333}的大小关系是（　　）

〔A〕$3^{555}<4^{444}<5^{333}$。〔B〕$4^{444}<3^{555}<5^{333}$。

〔C〕$5^{333}<4^{444}<3^{555}$。〔D〕$5^{333}<3^{555}<4^{444}$。

〔E〕$3^{555}<5^{333}<4^{444}$。

(4) 若$x=1+3^{11}$，$y=1+3^{-11}$，下面正确的是（　）

〔A〕$y=x$。〔B〕$y=x-1$。〔C〕$y=\frac{1}{x-1}$。

〔D〕$y=\frac{x}{x-1}$。〔E〕$y=x+1$。

(5) 兄弟二人同时从家去上学，兄一半路程用速度a，另一半路程用速度b，弟以到校一半时间用速度a，另一半时

间用速度b，其结果是（　　）

〔A〕兄比弟先到校。〔B〕弟比兄先到校。

〔C〕兄不比弟先到校。〔D〕弟不比兄先到校。

〔E〕同时到校。

3．已知$\dfrac{x}{x^2+x+1}=a$，求$\dfrac{x^3}{x^6+x^3+1}$的值。

4．在$\triangle ABC$中，D为BC边上的中点，E在AB上，F在AC上，且$\angle EDF=90°$，求证$EF<BE+CF$。

5．已知$\sqrt{4x^2-4ax+a^2}=axy-a^2x^2-\dfrac{y^2}{4}$，

（1）求证：无论a为何值时，总有$y=4x^2$；

（2）如果$|x|=|y|$，求a的值。

6．如图14—2，$\triangle ABC$被通过它的三个顶点与一个内点的三条直线分成六个小三角形，其中四个小三角形的面积已在图中示出，求$\triangle ABC$面积。

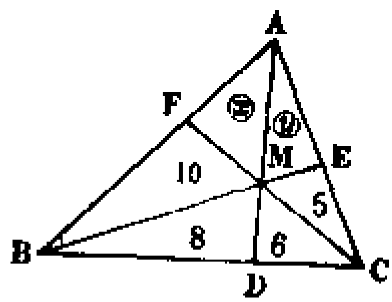


图　14—2

答案与提示

1．（1）$a<-1$或$0<a<1$。（2）1988。

（3）如图14—3。

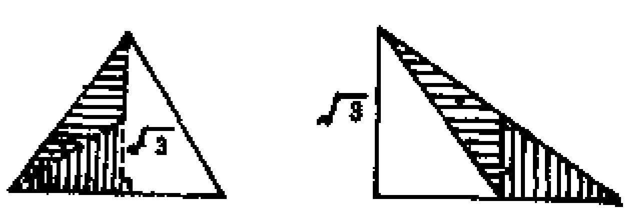


图　14—3

(4) $m=1988$。 (5) 20个。

(6) $a^2-2a-3=(a-1)^2-4$，最小值是 -4。

(7) 1988。 (8) $a^{11-8}=8$，$a=2$。

2. (1) [C]， (2) [C]，

(3) $(3^5)^{111}$， $(4^4)^{111}$， $(5^3)^{111}$， ∴[D]。

(4) [C]。

(5) 设距离为 s，$T_{兄}-t_{弟}=\left(\dfrac{\frac{s}{2}}{a}+\dfrac{\frac{s}{2}}{b}\right)-\dfrac{2s}{a+b}$

$=\dfrac{(a-b)^2}{2ab(a+b)}\geqslant 0$。兄比弟先到或同时到，选[$D$]。

3. 解：$\dfrac{x}{x^2+x+1}=a\Longrightarrow\dfrac{x^2+x+1}{x}=\dfrac{1}{a}$，

$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}-1$，

$\dfrac{x^3}{x^6+x^3+1}\Longrightarrow\dfrac{x^6+x^3+1}{x^3}=x^3+\dfrac{1}{x^3}$

$+1$，

至已方可求值。

4. 提示：FD 延长到M，使 $DM=FD$，$\triangle CFD\cong\triangle BMD$，∴ $BM=CF$，根据对称性证出$EM=EF$即可。

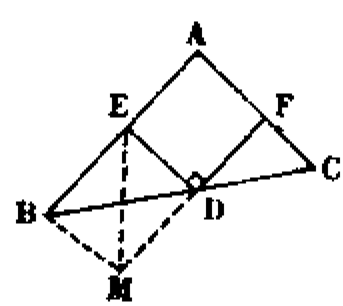


图 14—4

5. 略解：原式改变为

$|2x-a|=-\dfrac{1}{2}(2ax-y)^2$，

$$\left.\begin{array}{l}2x-a=0\\2ax-y=0\end{array}\right\}\Longrightarrow y=4x^2，若$$

$$|x|=|y|\Longrightarrow x=0,\ x=\pm\frac{1}{4}，则a=0或a=\pm\frac{1}{2}.$$

6. 设$S_{\triangle AFM}=y$。$S_{\triangle AME}=x$。

$$\frac{S_{\triangle MBD}}{S_{\triangle MDC}}=\frac{8}{6}\ （等高）\Longrightarrow\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{8}{6},$$

$$\frac{S_{\triangle AME}}{S_{\triangle MCE}}=\frac{x}{5}\ （等高）\Longrightarrow\frac{S_{\triangle BEA}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{x}{5},$$

$$\begin{cases}\dfrac{y+10+8}{x+5+6}=\dfrac{8}{6}\\[2mm]\dfrac{x+y+10}{8+6+5}=\dfrac{x}{5},\end{cases}$$ 可求出 x 与 y 即可。

（二）

1. 选择题：

(1) 关于 x 的方程 $a+2bx+cx^2=0$，当$ac<b^2$时，根的情况是（ ）.

A. 必有两个不相等的实根. *B*. 没有两个不相等的实根.

C. 不一定有两个不相等的实根. *D*. 一定有相等的实根.

(2) 顺次连结四边形各边的中点，所得四边形是菱形，那么原四边形的形状是（ ）

A. 等腰梯形. *B*. 矩形.

C. 菱形. *D*. 不仅限于以上几种图形.

(3) 计算$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

$+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$的值是（　　）

A. $\frac{9}{10}$.　　B. $\frac{3}{4}$.

C. 1.　　D. $\sqrt{2}$.

(4) 周长为有理数S（$S\neq 0$）的等腰三角形，底边上的高是底边的一半，则腰与底边上的高（　　）.

A. 都是有理数．B. 都不是有理数。

C. 腰是有理数，底边上的高不是有理数。

D. 腰不是有理数，底边上的高是有理数.

(5) 四边形$ABCD$中，$AB=CD$，$AD\neq BC$，M、N分别是AD、BC的中点，则AB与MN的大小关系是（　）。

A. $AB=MN$. B. $AB<MN$.

C. $AB>MN$. D. 以上三种情况都有可能出现。

(6) 已知 $P=\sqrt{1990\times1991\times1992\times1993+1}$ $+(-1991^2)$，则P的值是（　　）

A. 1989.　　B. 1990.

C. 1991.　　C. 1992.

(7) 把一个边长为 1 的正方形分割成面积相等的四部分，使得其中的一部分内存在三个点，以这三个点为顶点，能组成一个边长大于 1 的正三角形，那么满足上述性质的分割（　　）

A. 是不存在的。　　B. 恰有一个。

C。有有很多种，但不只是一种。D。有穷多种。

2．填空题：

(1) 已知$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2x+2\sqrt{x^2+7x}-35=0$，则$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=$______。

(2) 方程$x^2+25x+52=3\sqrt{x^2+25x+80}$ 的所有实数解之积=______。

(3) 凸四边形 $ABCD$ 的对角线相交于P，已知$\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CDP$ 的面积分别是$15cm^2$、$9cm^2$、$12cm^2$，则$\triangle ADP$的面积是______cm^2。

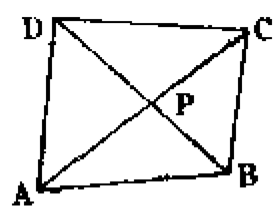


图 4－5

(4) 设$\frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}-3}$的整数部分是$m$，小数部分是$n$，则$198m+9n+n^2+1$的值为______。

(5) 已知a，b，c满足$a+b+c=0$，$abc=8$，则c的取值范围是______。

(6) 设a，b，c是非零实数，那么下式的运算$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{ab}{|ab|}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{ca}{|ca|}+\frac{abc}{|abc|}$的结果等于______。

(7) $\triangle ABC$中，$AB=AC=2$，BC边有1990个不同的点P_1，P_2，…，P_{1990}，则$m_1+m_2+\cdots+m_{1990}=$______。

3．解答题。

(1) 从自然数1，2，3，…，1990中，任取996个数，试证，其中必有两个数它们差是995。

(2) 以凸m边形（$m\geqslant 3$）的m个顶点和它内部的n个点（共$m+n$个点）为顶点，能把原凸m边形分割成若干个小三角形。这些小三角形的个数是个定值，并且与这n个点的位置无关。这个结论对吗？试证明你的判断。

(3) 用1，9，9，0四个数码组成的所有可能的四位数中，每一个这样的四位数与自然数n之和被7除余数都不为1，将所有满足上述条件的自然数n由小到大排成一列

$$n_1<n_2<n_3<n_4<\cdots,$$

试求：$n_1\cdot n_2$的值。

答案与提示

1. (1) 〔C〕。 (2) 〔D〕。 (3) 〔A〕。 (4) 〔B〕。5. 〔C〕。6. 〔B〕。7. 〔D〕。

2. (1) 6。 (2) 31。 (3) 20。
(4) 1990。 (5) $C<0$或$C\geqslant 2\sqrt[3]{4}$。 (6) 7或-1。
(7) 7960。

8. 证：

(1) 将自然数1，2，3，…，1990分成如下995组：

(1，996)，(2，997)，(3，998)，…，(995，1990)，每组中两数之差995。在题设1990个数中任取996个数，依抽屉原理必有两个数在同一组，这两个数之差是995。

(2) 这个结论是正确的。我们考查这若干个小三角形的内角和：由于分割是以$(m+n)$个点为顶点（即任何两条连

线都不交叉），故这些小三角形的内角和刚好等于以凸m边形内部的n个点为顶点的n个周角的和，再加上这凸m边形的内角和，即等于$360°\times n+(m-2)\times180°$。

因此，分割的小三角形的个数为

$$\frac{360°\times n+(m-2)\times180°}{180°}=2n+m-2\ （定值）.$$

即不论这n个点如何分布，小三角形的个数始终是$2n+m-2$。

(3) 1，9，9，0四个数字可以组成的四位数有：

1099，1909，1990，9019，9091，9109，9190，9901，9910共九个。这九个数被7除的余数分别为0，5，2，3，5，2，6，3，5。由于n与它们的和不能被7除余1，所以，n被7除的余数不能为1，3，6，5，3，6，2，5，3，即n被7除的余数不能是1，2，3，4，5，6而只能为0或4。又因为n为自然数，所以$n_1=4$，$n_2=7$，$n_1\cdot n_2=28$。

（三）

1．选择题：

(1)一个凸多边形的对角线都相等，那么这个多边形(　)

A．一定是四边形．　　B．一定是五边形．

C．可以是四边形或五边形．

D．各边都相等的多边形或各角都相等的多边形．

(2) 下列各数中，最小的正数是（　　）

A．$10-3\sqrt{11}$．　　B．$3\sqrt{11}-10$．

C．$18-5\sqrt{13}$．　　D．$51-10\sqrt{26}$．

(3) 方程$x^2+|x|-6=0$根的情况是（　　）

A. 只有一个根。B. 各根的和为-1。

C. 各根的和为零。D. 各根的积为-6。

(4) 在$\triangle ABC$内任取一点P，连结PA，PB，PC，则$\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CAP$中，钝角的个数是（　　）

A. 3。　B. 2。　C. 1。　D. 2或3。

(5) 若n是大于1的整数，则$P=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$的值（　　）

A. 一定是偶数。B. 一定是奇数。

C. 是偶数但不是2。D. 可以是偶数，可以是奇数。

(6) 若$\sqrt[1990]{M-1}=2$，$\sqrt[1991]{N+2}=5$，则$M\cdot N$的末位数字是（　　）

A. 0。　B. 1。　C. 5。　D. 9。

(7) 三角形两边长分别为a和b，且$0<a<b$，周长为l，则下列不等式中正确的是（　　）

A. $3a<l<3b$。　B. $2b<l<2(a+b)$。

C. $2a+b<l<2b+a$。　D. $l<4a<3b$。

(8) 将20个钉子钉在长方形木板上，它们在水平方向或垂直方向每相邻两个都间隔1cm，用一条橡皮套在如图所示的A、B、C、D的四个钉子上，那么形成四边形$ABCD$的面积是（　　）

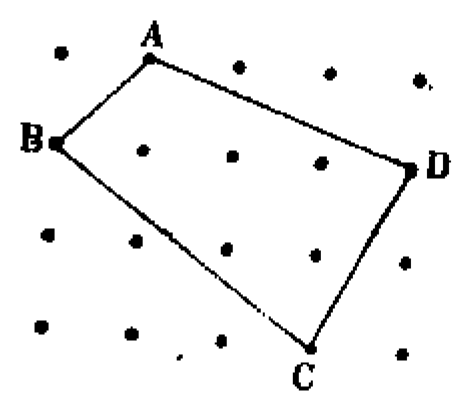


图 14—8

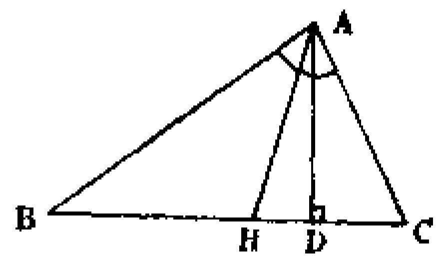
A. 4cm^2. B. $4\frac{1}{2}\text{cm}^2$

C. 6cm^2. D. $5\frac{1}{2}\text{cm}^2$.

2. 填空题：

(1) 如果 $A=\sqrt{13}-\sqrt{11}$，$B=\sqrt{15}-\sqrt{13}$，那么 A 与 B 的大小关系是______。

(2) 如图14—7，AD 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的高，AH 是 $\angle A$ 的平分线，$\angle C=75°$，$\angle B=35°$，则 $\angle HAD=$______。



14—7

(3) $2^{48}-1$ 可以被60和70之间整除的两个数是______。

(4) 用数字0，1，2，3，4，5分别填入下式六个空格内，使等式成立。（数字不得重复）

$$\sqrt{1\square 9\square\square\square}=\square\square 5.$$

(5) 如图14—8，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=40°$，$\angle C=20°$，$AD\perp AC$，$AB=1$，则 $CD=$______。

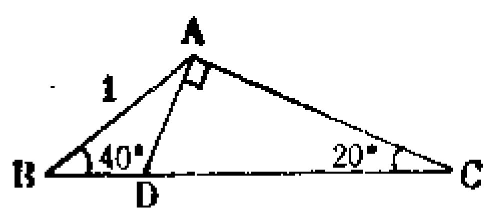


图 14—8

(6) 使 $\sqrt[5]{2916M-6804}$ 为自然数，则最小自然数 $M=$______。

3. 方程 $(1991x)^2-1990\times 1992x-1=0$ 的较大根为 α，方程 $1990x^2-1991x+1=0$ 的较小根为 β，求 $\alpha-\beta$。

4. 已知二次方程$x^2+(m-5)x-18=0$的二根绝对值的比是2:1，求m的值。

5. 证明：把104块糖分给15个小孩，必有2个小孩分得的糖块一样多。

6. 已知直线MN与不在直线上的两定点A和B，在直线MN上求一点P，使PA与PB平方的和为最小。

答案与提示

1.

题　　号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答　　案	C	D	C	D	B	C	B	C

2. (1) $A>B$。(2) $20°$。(3) 63和65。

(4) $\sqrt{119025}=345$。(5) 2。(6) 5。

3. 解设　$a=1991$，则原方程化为

$$a^2x^2-(a^2-1)x-1=0 \cdots\cdots ①$$

$$(a-1)x^2-ax+1=0 \cdots\cdots ②$$

由①得　$(a^2x+1)(x-1)=0$，

$$x_1=-\frac{1}{a^2},\ x_2=1。\because\ x_1<x_2,$$

$\therefore$　令$\alpha=1$。由②得 $[(a-1)x-1](x-1)=0$。

$$x_1=\frac{1}{a-1},\ x_2=1。$$

$\because$　$x_1<x_2$，令 $\beta=\dfrac{1}{a-1}$，

$\therefore\quad \alpha-\beta=1-\dfrac{1}{\alpha-1}=\dfrac{\alpha-2}{\alpha-1}=\dfrac{1989}{1990}$.

4. 解：设方程的二根为x_1，x_2，

依题意：$|x_1|:|x_2|=2:1$，

即　$|x_1|=2|x_2|$，……………………………………①

由根与系数关系，得$\begin{cases}x_1+x_2=-(m-5)\cdots\cdots\cdots\cdots② \\ x_1\cdot x_2=-18\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③\end{cases}$

将　$x_2=-\dfrac{18}{x_1}$代入①，得

$$|x_1|=2\left|-\frac{18}{x_1}\right|\frac{36}{|x_1|}，\ |x_1|^2=36.$$

$x_1=\pm6$，当$x_1=6$时，$x_2=-3$……⑧；

当$x_1=-6$时，$x_2=3$。……④··

将③，④分别代入②，得

$m=2$，$m=8$。

5. 证：如果15个小孩每人分得的糖数各不相同，至少需要$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=105$，而现在只有104块糖，必然从这15个小孩所分得的糖中，拿出一块，除0以外，从1—14任减去1，必得到相等的数字，使问题得证。（根据抽屉原理）。

6. 解：设线段AB的中点Q，由中线定理知，在直线MN上的任意一点P都满足。$PA^2+PB^2=2(PQ^2+AQ^2)=2PQ^2+\dfrac{AB^2}{2}$。$AB$定长，要使$PA^2+$

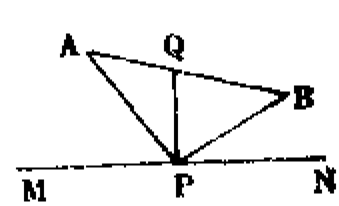


图　14—9

PB^2为最小，只要使PQ最小就够了。因为P在MN上，要使PQ最小，只要使点P为AB的中点Q在MN上的射影。因此，过Q作MN的垂线，P为垂足，则P满足PA^2+PB^2为最小的点。

（四）

1．选择题：

(1) 如果方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的两根互为倒数，那么（　　）

(A) $a=b$。 (B) $a=bc$。 (C) $c=a$。 (D) $c=ab$。

(2) 若$\dfrac{X}{a-b}=\dfrac{Y}{b-c}=\dfrac{Z}{c-a}$，$xyz\neq 0$，且$a$、$b$、$c$两两不等，则有（　　）

(A) $cx+ay+bz=0$。 (B) $cx=ay=bz$。

(C) $x+y+z=0$。 (D) $x=y=z$。

(3) 若$\sqrt[1987]{M}=3$，$\sqrt[1988]{N}=7$，且M、N为自然数，则$M\cdot N$的末位数字是（　　）

(A) 9。 (B) 7。 (C) 3。 (D) 1。

(4) $\triangle ABC$中，$a=4k$，$b=3k$，$c=4$ $(k>0)$，则k的取值范围是（　　）

(A) $\dfrac{4}{7}<k<4$。 (B) $\dfrac{7}{4}<k<4$。 (C) $k\geqslant 2$。

(D) $7<k<14$。

(5) 化简$\sqrt{-x^3}-x\sqrt{-\dfrac{1}{x}}$得（　　）

(A) $(x-1)\sqrt{-X}$.　(B) $(1-x)\sqrt{-X}$.

(C) $-(x+1)\sqrt{X}$.　(D) $(x-1)\sqrt{X}$.

(6) 方程$x^2-3|x|+2=0$的实数根的个数是（　　）

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

(7) 一个凸多边形，除了一个内角外，其余各内角的和为3290°，则这个内角的度数是（　　）

(A) 140°.　(B) 130°.　(C) 120°.　(D) 110°.

(8) 如图14—10，在平行四边形$ABCD$中，P为BC的中点，过P作BD的平行线交CD于Q，连结PA、PD，QA、QB，则图中与$\triangle ABP$面积相等的三角形，共有（　　）

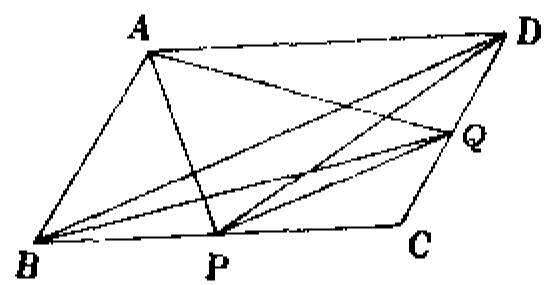


图 14—10

(A) 三个.　(B) 四个.

(C) 五个.　(D) 六个.

(9) $Rt\triangle ABC$的三条边长都是正整数，其中一条直角边长是方程$3x^2-32x-11=0$的一个根，则这个三角形的面积是（　　）

(A) $\frac{121}{2}$.　(B) 121.　(C) 330.　(D) 660.

(10) 在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$\angle B=60°$，$\angle A=75°$，则$\triangle ABC$的面积是（　　）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(B) $3+\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(C) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}$。

2。填空题：

(1) 当 $x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$， $y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$时，$3x^2-5xy+3y^2$的值是___，

(2) 若$a+\frac{1}{a}=3$，则$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$的值是________。

(3) 已知$-2a<x<-a$，化简$|x+a|+\sqrt{x^2-2ax+a^2}+2\sqrt{x^2+4ax+4a^2}$得________。

(4) 方程组$\begin{cases}x+y+xy=19\\x^2+y^2=25\end{cases}$的解是____________。

(5) 若方程$4x^2-4(k-1)x+k^2-7=0$的两根之差为2，则k的值为________，

(6) 如图14—11，在$\triangle ABC$中，M是BC的中点，AN平分$\angle BAC$， $BN\perp AN$于N， $AB=10$cm$MN=3$cm，$BC=15$cm，则$\triangle ABC$的周长为________cm。

(7) 如图14—12，$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle BAC$是直角，$AD\perp BC$于D，E是BC的中点，AF平分$\angle BAC$，如果把图中所有相等的锐角作为一组，那么，图中所有相等的

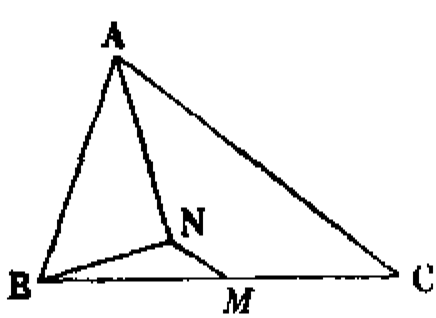


图 14—11

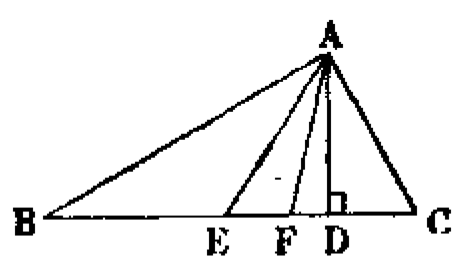


图 14—12

锐角共有________组。

(8) 若$|a\cdot b|+1=|a|+|b|$,则a,b的值分别为________________。

(9) 求值:$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{1987\times1988}$ $=$________。

(10) 某人步行9小时,先在平地上走,然后走上坡路,到达目的地后,沿原路返回,如果走平地、上坡、下坡的速度分别是4公里/小时、3公里/小时、6公里/小时,则这个人往返共走了______公里。

3. 证明方程$x^3-x-1988=0$没有整数解。

4. 甲乙两人同时分别从A、B两地相向而行,当甲到达AB中点处时,乙离A处还有24公里,而当乙到达AB的中点处时,甲离B处还有15公里,问甲到达B时,乙离A处还有多少公里?

5. 如图14—13,在$\triangle ABC$中,M、N分别在AB、AC上,且$BM=CN$,D、E分别是MN、BC的中点,过点A

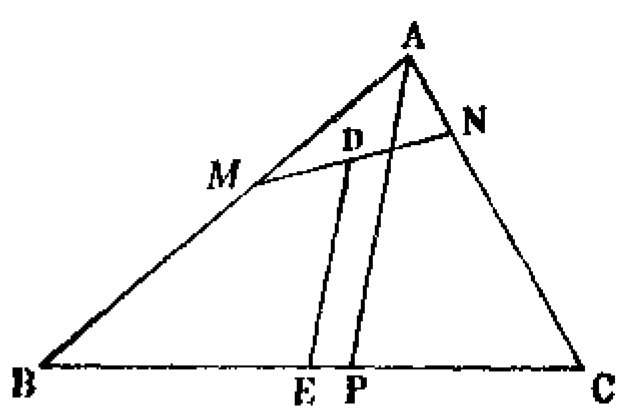


图 14—13

作$AP//DE$，AP交BC于P。

求证：$\angle BAP=\angle PAC$。

答案与提示

1.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
C	C	B	A	B	D	B	C	C	D

2.

(1) 280。 (2) $\sqrt{5}$。

(3) $4a$。 (4) $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=4, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=3. \end{cases}$

(5) $k=2$。 (6) 41。

(7) 4。 (8) $a=\pm 1$；b为任何实数。或

$b=\pm 1$；a为任何实数。

(9) $\frac{1989}{1988}$。 (10)36。

3. 证：原方程变形为：$x(x+1)(x-1)=1988$。

若原方程有整数解，这时$x(x+1)(x-1)$必能被3整除，而1988不能被3整除，故原方程没有整数解。

4. 解：设A、B两地的距离为x公里。

则 $\frac{x-24}{x/2}=\frac{x/2}{x-15}$，$x^2-52x+480=0$，

解得$x_1=40$；$x_2=12$（不合题意舍去）。

$x-2(x-24=40-2(40-24)=8$,

答：甲到达B时，乙离A处还有8公里。

5. （证法1）如图14—14，

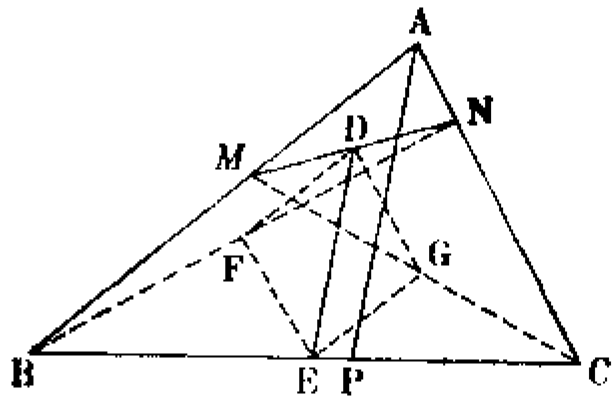


图 14—14

连结BN、CM，分别取BN，CM的中点F、G，连结DF、FE、EG、GD。

$\because$ D、F分别是MN、BN的中点，

$\therefore$ $DF//BM$，$DF=\frac{1}{2}BM$。

同理 $EG//BM$，$EG=\frac{1}{2}BM$

$EF//CN//GD$，$EF=GD=\frac{1}{2}CN$，

又$\because$ $BM=CN$，

$\therefore$ $DF=FE=EG=GD$。

即四边形$DFEG$是菱形。

$\therefore$ $\angle FDE=\angle EDG$，

又 $DF//AB$，$DE//AP$，

$\therefore$ $\angle BAP=\angle FDE$，

$\therefore\quad \angle FDE=\angle EDG$.

$\because\quad DF//AB,\ DE//AP$,

$\therefore\quad \angle FDE=\angle BAP$.

同理$\angle EDG=\angle PAC$,

$\therefore\quad \angle BAP=\angle PAC$.

（证法2）如图 14—15，过D点分别作$DF//AB$，$DG//AC$，且在DF上截取$DF=BM$，在DG上截取$DG=CN$，连结BF，BG，CF，CG，FC。

$\because\quad DF \underline{\underline{//}} MB$．$\therefore$ 四边形$MBFD$是平行四边形。$MD \underline{\underline{//}} BF$。

同理，$BF \underline{\underline{//}} GC$，$\therefore$ 四边形$FBGC$是平行四边形。

$\therefore$ $\square FBGC$的对角线FG必过BC的中点E。

又 $BM=CN$，$\therefore$ $DF=DG$，又$\because$ $FE=EG$，

$\therefore \angle PAC=\angle EDG$，因此$\angle BAP=\angle PAC$。

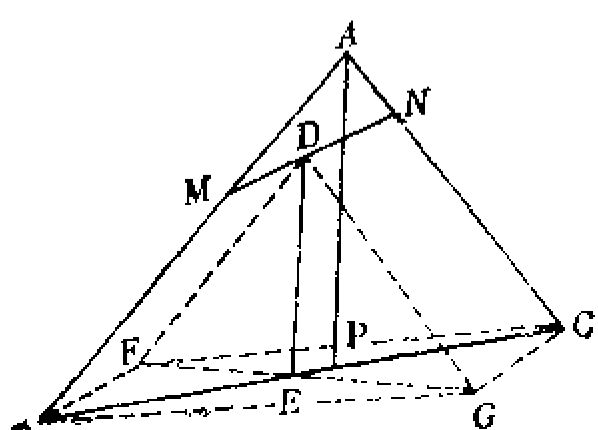


图 14—15

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学奥林匹克教练丛书　　（初中二年级用）
作者＝魏超群主编
页数＝２３９
ＳＳ号＝１１３１７４２７
出版日期＝１９９１年０７月第１版

前言
目录
目录