前　言

数学竞赛是数学课外活动的主要形式之一，它可以扩大学生的视野，锻炼学生的智慧，帮助学生理解数学在现实生活、生产、科技中的地位和作用，促进学生个性品质的形成和数学才能的发挥，有利于培养人才。

数学竞赛活动在世界各国都很活跃，迄今为止，国际数学奥林匹克（IMO）已经进行了31届比赛。自1985年我国首次参加第26届“IMO”以来，逐年取得优异的成绩，现已进入世界强国之列。为使这项活动更加深入、广泛地开展，有计划分层次地对不同年级的学生进行训练，我们编写了《数学奥林匹克教练》丛书。全书共三册，分别供初中一、二、三年级使用。

本套教练丛书以《中学数学教学大纲》为依据，参照《数学竞赛大纲》（草案），以现行初中代数、几何课本为基础，考虑到学生的实际水平，通俗易懂地渗透数学思想、数学方法，强化数学技能与技巧的训练，培养学生既能提高数学成绩，又能掌握参加各类数学竞赛的基本常识和解题要领。

每册教练书按相应的教科书内容，同步精选专题，介绍基本原理，范例与方法，给出相关的练习题与答案。

参加本册编写的原作者、刘振山、李国华、金广成、谢

永达、李成宏、徐滕茂、曹德厚、沈长亮、李长胜。在原书的基础上，马守诚、艺飞、吕品又进行了重新编写。在此对原作者表示感谢！

借本书出版的机会，敬请广大读者提出批评指正，我们致以谢意！

编者

1991年1月

目　录

一 整 数

数是我们迈进数学大门的第一步。于是自然数、整数、……就走过来了，它们的进一步发展则成为数学的一个重要分支——数论。数论是数学王国里一座绚丽多彩的大花园。在这里开放着无数朵奇异的鲜花，如世界知名的哥德巴赫猜想、费尔玛猜想、……，吸引了古今中外的许多知名学者为她们的灿烂开放贡献了宝贵的一生。我国古今数学家在这方面也有过卓绝的贡献，如我国古代的勾股定理、孙子定理、圆周率、……等。现代数学家华罗庚、陈景润、王元、……在哥德巴赫猜想问题的研究上，在世界上都处于领先地位，这种事例不胜枚举，在这一专题里我们想就初一同学能够接受的一些最基础的，也是非常有兴趣的，又是近年数学竞赛经常接触到的知识向同学们作一些简单的介绍，作为同学们走进这门殿堂的第一步，希望同学们能用智慧与汗水，浇灌这美丽的百花园，为我们伟大祖国的数学的未来作出自己的贡献。

（一）基本原理

1．奇数和偶数的基本性质

我们通常把自然数（正整数）分为两部分，其中被2除后余数为1的称为奇数，能被2整数（即余数为0）的称为

偶数。

0 作为偶数。

负整数同样可以分为负奇数和负偶数。

通常用 $2k-1$ 或 $2k+1$ 表示奇数，用 $2k$ 表示偶数（k为整数）。

对于奇偶数有以下明显的性质：

(1) 偶数±偶数＝偶数；

(2) 奇数±奇数＝偶数；

(3) 奇数个奇数的和是奇数；

(4) n 个整数的积，只要有一个数是偶数，则积必是偶数；

(5) n 个奇数的积，仍是奇数；

(6) 如果 n 个整数之和是偶数，则和项中出现奇数的个数必是偶数个；

(7) 偶数若能被奇数整除，则商必是偶数；

(8) 奇数除以偶数，永远不能整除；

(9) 任两个连续自然数 n、$n+1$，必为一奇一偶，且积 $n(n+1)$ 必是偶数；

(10) 对任一整数 a，有：① a 加偶数与 a 同奇同偶；② a 加奇数与 a 不同奇偶；③任三个整数 a、b、c 中，必有两数同奇偶。

2．整数整除的性质

整数 a 除以整数 b，除得的商正好是整数而没有余数叫做 a 能被 b 整除。

(1) 一个数的约数是有限的，其中最小的约数是 1，最

大的约数是它本身；

（2）一个数的倍数的个数是无限的，最小的倍数是它本身，最大的倍数不存在；

（3）一个整数的个位是偶数，则它一定能被2整除；

（4）一个整数的各位数字之和能被3整除，则它一定能被3整除；

（5）一个整数的个位数字是 0 或 5，则它一定能被 5 整除；

（6）个位数字以前的数字组成的数与个位数字的 2 倍的差能被 7 整除，则它一定能被 7 整除；

（7）一个整数的各位数字之和能被 9 整除，则它一定能被 9 整除；

（8）一个整数的奇位数字的和与偶位数字的和的差能被11整除，则它一定能被11整除。

3． 完全平方数的性质

（1）偶数 $n=2k$ 的平方数，一定是 4 的倍数；

（2）奇数$n=2k+1$的平方数，$(2k+1)^2=4k(k+1)+1$一定是 $8N+1$形的整数；

（3）平方数的个位数字只能是0、1、4、5、6、9。

4． 质数和合数

一个大于 1 的整数 a，如果除了 1 和本身以外不能再被其它正整数整除时，这个正整数叫做质数（或素数）；一个正整数除了 1 和本身外，还能被另外的正整数整除时，这个正整数叫做合数．于是全体正整数可以分为：数 1 、质数和合数三类。

质数、合数是整数中的重要概念。由于质数分布的不规则性，人们至今还没有一个一般方法去判断哪些自然数是质数。

除有关定义外，关于质数，我们要了解和掌握以下两个结论：

(1) 算术基本定理：任何大于1的自然数都可以分解成质数的乘积，如果不考虑这些质因数的顺序，这种分解的方法是唯一的。

(2) 质数中无最大数，即不存在最大的质数。

5. 最大公因数

同时整除两整数 m 与 n 的整数称为这两个数的公因数。

若整数 d 是整数 m 与 n 的一个公因数，并且它能被 m 与 n 的其它公因数都整除，则称 d 是 m 与 n 的最大公约数。

6. 互质数

若两个整数 m 与 n 的最大公约数是1，则称这两个整数互质。

7. 最小公倍数

若整数 m、n 均能整除整数 a，则称 a 是 m 与 n 的公倍数。

若整数 a 是 m 与 n 的一个公倍数，而且它均整除 m 与 n 的其它公倍数，则称 a 是 m 与 n 的最小公倍数。

8. 同余

整数 a 被整数 m 除，商数是 t，余数是 r，必有关系式：

$$a=m\times t+r,\ 0\leqslant r<m.$$

如果整数 a 和 b 分别除以正整数 m 所得的余数都是 r，即 $a=mt+r$，$b=ms+r$（t、s 为整数），那么称 a、b 对于模 m 同余。如 $18\div5$ 的余数是 3，$33\div5$ 的余数也是 3，那就称 18与33 对于模 5 同余。由于 $18=5\times3+3$，$33=5\times6+3$，所以容易推想到，对于模 5 而言，与18同余的一切整数可以表示为 $5\times t+3$（t 为整数），把所有这样的整数作为一类，称为以 5 为模的一个同余类，对于模 5 而言，一共可有五个同余类，它们的余数分别是 0、1、2、3、4。这五个同余类可以分别表示为：$5t$，$5t+1$，$5t+2$，$5t+3$，$5t+4$（t为整数）。对于任何一个整数来说，它总是属于这五类中的一类，并且也只能属于一类，这是不言而喻的。

一般地，对于模 m而言，应当有 m个同余类存在，分别表示为：

mt，$mt+1$，$mt+2$，…，$mt+(m-1)$，（t为整数）。任何一个整数必定属于并且也仅属于其中的一个同余类。

这样，一切整数就可以按照模 m来进行同余分类，把无数个整数分成有限个同余类，给我们解决问题提供了方便。特别地，按模 2 分类，就得奇数与偶数两类；如按模 3 分类，可以得如下形式表示的三类：$3t$，$3t+1$，$3t+2$（或 $3t-1$），（t 为整数），等等。

（二）范例与方法

例 1 若某数 N 接近 2000，小于 2000，能被 3 整除；被 5 除余 4；被 7 除余 1，求 N。

思路 在能被 3、5 整除的数中，即 3、5 的公倍数中找

出被 7 除余 1 的最小数；在能被 3、7 整除的数中，即3、7的公倍数中找出被 5 除余 4 的最小数，再加上 3、5、7 的最小公倍数 105 乘以 k（k 是正整数）就得出满足这个题目的数。

解：能被 3、5 整除，且被 7 除余 1 的最小数是15；能被 3、7 整除，且被 5 被余 4 的最小数是 84。因此满足这个问题的数 N 必满足下列条件：

（1）$N=105k+15+84$（k 是整数）；

（2）$N<2000$。

由上述条件可得：

$$105k+15+84<2000,$$

$$k<\frac{1901}{105}=18\frac{11}{105},$$

$\therefore\quad N=105\times18+15+84=1989$。

$\therefore\quad$ 满足这些条件的数 $N=1989$。

说明 此题的解法，可以推广到这一类问题，即一个数被几个数除，余几的问题，以 3 个数为例，可从其中两个数的公倍数中，找被第三个数除恰好余数满足条件的最小数，将几个最小数之和与这三个数的最小公倍数的 k 倍相加，即得出满足题意的所有数。

这是中国古代最典型的问题之一，也称作韩信点兵，解决这个问题的办法也称作“孙子定理”——中国剩余定理。

韩信点兵：有兵一队，若列成五行纵队，则末行一人；列六行纵队，则末行五人；列七行纵队，则末行四人；列十一行纵队，则末行十人。求兵数？

解：被 6、7、11 整除，被 5 除余 1 的最小数是 1386；被

5、7、11整除，被 6 除余 5 的最小数是1925；被5、6、11整除，被 7 除余 4 的最小数是 1320；被5、6、7整除，被11除余10 的最小数是 2110。于是

$$N = 1386 + 1925 + 1320 + 2100 = 6731,$$

$$6731 - 2310 \times 2 = 2111,$$

所以得 $N = 2111 + 2310k$。

即兵数是 2111 或 $2111 + 2310k$。

例 2 不论 n 是什么整数，$n^5 - n$ 能被 30 整除。

思路 因为 $30 = 2 \times 3 \times 5$，所以我们需分别说明 $n^5 - n$ 能被 2、3、5 整除即可。

这类问题的解法不少，其中常用因式分解的方法，把式子写成几个连续整数的乘积，再进行讨论。

有一个显见的结论：k 个连续整数的乘积一定能被 k 整除。

解： $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$

$$= (n-1)n(n+1)(n^2+1)。$$

显然前三个因式 $n-1$、n、$n+1$ 是三个连续整数，因为在两个连续整数中至少有一偶数，所以在三个连续整数中至少有一个偶数，所以它们的积必能被 2 整除。

又三个连续整数中一定有一个能被 3 整除的整数，所以它们的积必能被 3 整除。

而 2、3 互为质数，所以原式能被 6 整除。

改写原式 $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2 - 4 + 5)$

$$= (n-1)n(n+1)(n^2-4) + 5(n-1)n(n+1)$$

$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1)$$

第一部分是5个连续整数的乘积，能被5整除，第二部分显然是5的倍数，其和自然也是5的倍数。

由以上可得，不论n是什么整数，n^5-n能被30整除。

说明 用因式分解的方法，把一个多项式分解为若干个因式之积的形式，并且使这些因式中恰表现为n个连续整数的积的形式，从而根据整数的特征判断多项式能被n整除是解这类问题的常见方法。

大家不妨试一试，用这个办法解下一道题：

若n是自然数，则$n^4+2n^3+11n^2+10n$能被24整除。

提示：原式$=(n-1)n(n+1)(n+2)+12n(n+1)$。

例8 除以5时余数为2或3的整数，是不是完全平方数。

思路 整数是无限的，要想逐个验证这是不可能的，但是可以采取适当的方法把全体整数进行分类，化无限为有限，然后将有限的几类逐一平方看余数的情况，然后结合问题作出结论。

解：设k为整数，全体整数可分为以下五类：

$$5k、5k+1、5k+2、5k+3、5k+4.$$

即被5除余数为0、1、2、3、4的五种情况。现在把它们逐一平方：

$$(5k)^2=5(5k)^2+0;$$

$$(5k+1)^2=5(5k^2+2k)+1;$$

$$(5k+2)^2=5(5k^2+4k)+4;$$

$$(5k+3)^2=5(5k^2+6k+1)+4;$$

$$(5k+4)^2=5(5k^2+8k+3)+1.$$

根据上述情况可知，完全平方数除以5时的余数只能是0、1、4，决不会是2或3。所以除以5时，余数为2或3的整数不可能是完全平方数。

说明 整数、自然数是无限的，采取分类思想往往能化无限为有限，分类之后而逐一验证是一种常用的方法，大家不妨试一试下题。

若n为任意正整数，则$n(n^2-1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$能被7整除。

提示：按被7除将正整数分为七类，再仔细想一想如何验证。

例4 若a、b为任意自然数，$25a^2-5b\pm3$是不是完全平方数。

思路 利用整除性质，看$25a^2-5b\pm3$的末位数与完全平方数的末位数对比，看它是不是完全平方数。

解：$25a^2-5b=5(5a^2-b)$能被5整除，所以它的末位数必是0或5，因此$25a^2-5b\pm3$的末位数就只能是2、3、7、8，而完全平方数的末位数是0、1、4、5、6、9，

所以$25a^2-5b\pm3$不是完全平方数。

说明 验证一个数是不是完全平方数，除例3中考查它被几除时的余数特征之外，一般的情况是看它的末位数是否符合完全平方数的末位数的特征，这也是一种常用的解题方法。同学们不妨依此规律试一试下题。

有没有两个奇数的平方和等于1988？

提示：考察一下奇数的平方的末位数的特征。

例5 求这样的素数，当它加上10和14时仍为素数。

思路 这是一个找符合条件的素数问题，由于素数的分布无一定规律，因此我们从最小的素数试验起，希望能找到所要求的素数，然后再加以逻辑的证明。

证：$\because$ $2+10=12$，$2+14=16$，$\therefore$ 素数 2 不适合；

$\because$ $3+10=13$，$3+14=17$，$\therefore$ 素数 3 合乎要求；

$\because$ $5+10=15$，$5+14=19$，$\therefore$ 素数 5 不适合；

$\because$ $7+10=17$，$7+14=21$，$\therefore$ 素数 7 不适合；

$\because$ $11+10=21$，$11+14=25$，$\therefore$ 素数11不适合；

… … …

从上面观察，3 合乎要求。但符合题设的素数是否只有 3，这必须加以证明。证明除 3 以外的所有正整数加上 10 和 14均不能是素数。为此把正整数按模 3 同余分类，即$3k-1$，$3k$，$3k+1$（k为正整数）

$\because$ $(3k-1)+10=3k+9=3(k+3)$是合数，$(3k+1)+14=3k+15=3(k+5)$是合数，

$\therefore$ $3k-1$和$3k+1$这两类整数中的素数加上10和14后不能都是素数。

因此在 $3k-1$，$3k+1$ 两类整数中的素数加上10和 14 后当然也就不能都是素数。

对$3k$这类整数，只有在 $k=1$ 时 $3k$ 才是素数，其余均为合数。

所求的素数只能是 3。

例 6 若 1782，2628，1386，2044 四个整数都被同一个正整数相除，所得的余数相同，但不为零，求除数和余数

思路 因为是求除数和余数的问题，故可考虑用带余式。

解：设除数为 m，余数为 r（m、r 为正整数，且 $r<m$），则

$$1782=ma+r, \quad ①$$
$$2628=mb+r, \quad ②$$
$$1386=mc+r, \quad ③$$
$$2044=md+r, \quad ④$$

（a、b、c、d 为正整数）。

②－①，得 $(b-a)m=846$，

④－①，得 $(d-c)m=658$。

846，658 都能被 m 所整除，所以 m 是 846 与 658 的公因数，而 $846=2\times3^2\times47$，$658=2\times7\times47$，所以 $m_1=2$，$m_2=47$，$m_3=94$。

当 $m_1=2$ 时，$r=0$，$m_1=2$ 舍去。

当 $m_2=47$ 时，$r=43$，

当 $m_3=94$ 时，$r=90$。

故除数为47，余数为43；或除数为94，余数为90。

例7 试证方程 $x^2-5y^2=17$ 无整数解。

思路 如将原方程化为 $(x+\sqrt{5}y)(x-\sqrt{5}y)=17$，则从方程的左式可以看出，无法讨论适合原方程的整数 x 及 y。因此对整数 x、y 的可能取值情况可改为按 5 的倍数分类，即 $5k-2$，$5k-1$，$5k$，$5k+1$，$5k+2$（k 为整数，以下同）来考虑。

证：(1) 如 x 为 $5k$ 形式的整数，代入原方程，有

$5(5k^2-y^2)=17$。 ①

(2) 如 x 为 $5k\pm1$ 形式的整数，代入原方程，有

$5(5k^2\pm2k-y^2)=16$。 ②

(3) 如 x 为 $5k\pm2$ 形式的整数，代入原方程，有

$5(5k^2\pm4k-y^2)=13$。 ③

∵ 17或16或13均非3的倍数，∴ 上式①、②、③均不能成立，∴ 原方程也不可能有整数解。

例8 试确定最小的正整数 n，其末位数为6，若将末位的6移作首位数，则为原数的4倍。

思路 本题是第四届国际数学竞赛题(1962)，这是一道较典型的整数问题，除了整数表示方法外，还要运用一些技巧，最后用试验法求出最小的正整数 n。

解：设 n 是 k 位数，$n=a_ka_{k-1}\cdots\cdots a_1$，其中 $a_1=6$。

$n=\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_2}\times10+6$，

$4n=\overline{6a_ka_{k-1}\cdots\cdots a_2}$，即

$4n=6\times10^{k-1}+\overline{a_ka_{k-1}\cdots\cdots a_2}$。

记数 $\overline{a_ka_{k-1}\cdots\cdots a_2}=x$。

则 $4(10x+6)=6\times10^{k-1}+x$，

由此可得 $39x=6(10^{k-1}-4)$，

∴ $x=\dfrac{2(10^{k-1}-4)}{13}$。

因为2与13互质，所以 $10^{k-1}-4$ 能被13整除。

依次取 $k=2,3,4,5,6$，得出6不能被13整除，96不能被13整除，996不能被13整除，9996也不能被13整除，但99996能被13整除。

$$x = 2 \times 7692 = 15384.$$

于是 $n = 15384 \times 10 + 6 = 153846.$

验算 $615384 = 4 \times 153846.$

例9 设 a、b、c 是三个互不相等的正整数，求证：在 a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3 三个数中，至少有一个数能被 10 整除。（1986年全国初中数学竞赛试题）

思路 欲证 a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3 三个数中，至少有一个能被10整除，可先证这个数含有 2 与 5 的约数，按 a、b、c 为奇、偶数的各种可能，先证此三数均为偶数，再按 a、b、c 为 5 的倍数与非 5 的倍数，证其中一个数含 5 的约数即可。

证： $\because$
$$a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2),$$
$$b^3c-bc^3=bc(b^2-c^2),$$
$$c^3a-ca^3=ca(c^2-a^2).$$

$\therefore$ 在 a、b、c 中至少有一个偶数或者都是奇数时，这三个数 a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3 都是偶数，即都能被 2 整除。

当 a、b、c 中，若有一个能被 5 整除，则题目的结论成立。

若 a、b、c 都不能被 5 整除，则 a^2，b^2，c^2 的个位数只能是 1、4、6、9。从而 a^2-b^2，b^2-c^2，c^2-a^2 的个位数是从 1、4、6、9 中，任取一个（可以重复取）两两相减之差中必有 0 或 ± 5。

$\therefore$ a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3 三个数中至少有一个能被 5 整除。由于 2、5 互质，故这三个数中至少有一个能

被10整除。

说明 此题也是利用分类的思想来解的，只不过是利用了数的奇偶性进行分类，这是在研究关于数的问题常用的方法。

同学们可以用这种方法解下一道题。

设有四个正整数之和为9，求证它们的立方和不可能为100。

提示：四个正整数之和为9，因此这四个正整数之和是一个奇数，因此这四个正整数中只能有奇数个奇数，即可能是"三奇一偶"或"一奇三偶"。

例10 奇数平方的十位数必定是偶数.

思路 观察奇数平方后，十位以上的数的末位数与个位数平方之后的十位数之和。

解：设这个整数的个位数为 a（a 是奇数），则这个整数即可表示为

$10b+a$（b 是正整数，a 是奇数）

$$\therefore\quad (10b+a)^2=100b^2+20ab+a^2$$

$$=100b^2+10\cdot 2ab+a^2.$$

故这个数的十位上数字必等于 $2ab$ 末位数字与 a^2 的十位数字之和。而 a 是奇数，所以对

$a=1、3、5、7、9$ 必有

$a^2=1、9、25、49、81$

它们的十位数字都是偶数。

又 $2ab$ 是偶数，所以它的末位数字必是偶数。

两个偶数之和必是偶数，所以奇数平方的十位数字是偶

数。

说明 此题也可以作为回答其它问题的根据，把它看作"奇数的性质"。用解此题的方法还可以推出一切完全平方数的末两位数字的所有可能。

例11 a_1、a_2、a_3、…、a_n是由1、2、3、…、n任意排列的几个数，若n是奇数，则积

$$P=(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_n-n)$$

一定是偶数。

思路 这是一个"无限"的问题，我们仍然用分类思想去考虑：a_1、a_2、a_3、…、a_n尽管是打乱了顺序的一个排列，但是它们中的奇数、偶数的个数是不变的，积P中的因式是由这两列数两两搭配而组成，我们就从这里开始发现它们的规律。

解：因为n是奇数，又n个自然数1、2、3、…、n首尾都是奇数，所以它们所含的奇数的个数比偶数的个数多一个，若积P是奇数，它就必须是所有的因式都是奇数，那就要求a_1、a_2、a_3、…、a_n与1、2、3、…、n作差搭配时，a_1、a_2、a_3、…、a_n中的偶数都必须与1、2、3、…、n中的奇数结合，由于奇数比偶数多一个，所以只少有一对奇数相遇，结合成一个因式，这个由两个奇数作差而组成的因式必是偶数，因此积P必是偶数。

例12 已知一质数p与一奇数q之和为11，求p与q。

思路 根据奇数、偶数的和性质考察p与q之和，再结合质数概念去解决。

解：因为$p+q=11$，且q为奇数，

所以 p 必是偶数，既是偶数又是质数的数仅有 2，

所以 $p=2$，

因此 $q=9$。

说明 2是唯一的既是质数又是偶数的数，它在不少问题中，得到特殊的应用。如第33届美国中学数学竞赛试题之3：

三个质数 p、q 和 r，满足 $p+q=r$，以及 $1<p<q$，则 $p=$____。

同学们不妨一试。

例13 对于任何大于1的自然数 n，n^4+4 是合数。

思路 要说明一个数是合数，就要说明该数除了能被1和本身整除外，还能被另一个自然数整除，这就应该将 n^4+4 分解因式，并且每一个因式既不是1又不是它本身，那么它就必是合数。

解： $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2$

$$=(n^2+2)^2-(2n)^2$$

$$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2).$$

$\because$ $n>1$，

$\therefore$ $n^2-2n+2>1$

及 $n^2+2n+2>1$。

因此 n^4+4 是合数。

说明 本题解的过程中指出 $n^2-2n+2>1$ 及 $n^2+2n+2>1$ 是必须的，否则 n^4+4 是合数的理由不充分。

例14 三个正整数 a、b、c，满足 $a>b>c$，已知它们的

最大公约数是 15，a、b 的最大公约数是 75，a、b 的最小公倍数是1050，求 a、b、c 的值。

思路 弄清两个数的最大公约数和最小公倍数的关系，利用它们的关系，求出 a、b、c 的值。

解：因为 a、b 的最大公约数为75，要令 a、b 的另一个约数分别为 x、y，则有

$$a=75x，\ b=75y。$$

又根据最大公约数与最小公倍数的关系可得

$75\cdot x\cdot y=450$，

$\therefore\quad x\cdot y=6$

又$\because\quad x$、y 互质，

$\therefore\quad$ 6 只能分解得 6 和 1 或 3 和 2。

又$\because\quad a>b$，

$\therefore\quad a:b=6:1$ 或 $a:b=3:2$。

于是得

$a=450$、$b=75$ 或 $a=225$、$b=150$。

用同样办法可得

$b=150$、$c=105$

或$b=210$、$c=75$，

或$a=525$、$b=30$。

综合本题条件只能是

$a=225$、$b=150$、$c=105$。

说明 两个正整数的最大公约数和最小公倍数有如下关系：

设正整数 A、B 的最大公约数为 G，最小公倍数为 L，

$A=aG$，$B=bG$，则

$$L=abG=bA=aB,$$

$$A\cdot B=LG.$$

利用这种关系即可解这类问题。

例15 某卖油商店，只有能盛3kg和5kg的提桶各一个，顾客问售货员："我要买多于8kg的任意整数kg油，能量吗？"请你代售货员作个回答，如果能，说出理由，如果不能，举出一个例子。

思路 这又是一个"无限"的问题，我们可用分类的思想去处理这一问题。

解：能。

因为凡是大于8而又能被5整除的自然数，形如$5k$（$k=2$，3，4，……）都可用5kg桶直接售油。

例如：10、15、20、25、……等。

凡是大于8而又能被3整除的自然数，形如$3k$（$k=3$、4、5、……），都可用3kg桶直接售油

例如：9、12、15、18……等。

又因为大于8的自然数，都可以表示成下列形式：$3k$，$3k+1$，$3k+2$，（$k=3$，4，5……）。

凡被3整除得k余1的数，可变换成：

$$3k+1=3k+(2\times5-3\times3)$$
$$=(k-3)\times3+2\times5,$$

即先用$(k-3)$次3kg桶，再用2次5kg桶。

凡被3除得k余2的数，可变换成：

$$3k+2=3k+(5-3)$$

$$=(k-1)\times 3+5,$$

即先用$(k-1)$次 3kg 桶，再用 1 次 5kg 桶。

综上所述，多于 8kg 的任意整数 kg 油，是可用盛3kg和5kg 的提桶量。

说明 除用上述方法外，还可用

$5k+1=(k-1)\times 5+2\times 3,$

$5k+2=(k-2)\times 5+4\times 3,$

$5k+4=(k-1)\times 5+3\times 3,$

处理不能被 5 整除的自然数。

例16 记号$[z]$表示不超过 z 的最大整数。（例如：$[2.36]=2$）

设 x、y 满足下列方程组

$$\begin{cases} y=2[x]+3 & (1)\\ y=3[x-2]+5 & (2)\end{cases}$$

假设 x 不是整数，求 $x+y$ 的值。

思路 解方程组，注意$[x]$的特征。

解：(1)－(2)　得　$2[x]-3[x-2]-2=0$

$\because$　$[x-2]=[x]-2$（为什么？）

$\therefore$　$[x]=4$，于是 $y=11$

然而 x 不是整数，$\therefore$　$15<x+y<16$。

说明 记号$[z]$也叫整数部分，是今后在数学领域大有用处的，所以近年来在数学竞赛中常常出现带有此记号的题目。如：

1985 年省、市、自治区初中数学联赛试题一、5 题：

$$y=4\left(\frac{x+[u]}{4}-\left[\frac{x+[u]}{4}\right]\right)$$

且当　$x=1$，8，11，14时，$y=1$；

$x=2$，5，12，15时，$y=2$；

$x=3$，6，9，16时，$y=3$；

$x=4$，7，10，13时，$y=0$。

则表达式中的 u 等于（　　）。

(A) $\frac{x+2}{4}$；　　(B) $\frac{x+1}{4}$；

(C) $\frac{x}{4}$；　　(D) $\frac{x-1}{4}$。

1986年省、市、自治区初中数学联赛试题二、4题：

设 n 是自然数，且

$I=(n+1)^2+n-[\sqrt{(n+1)^2+n+1}]^2$ 则（　　）。

(A) $I>0$；(B) $I<0$；(C) $I=0$；

(D) 当 n 取不同的值时，以上三种情况，都可能出现。

1987年省、市、自治区初中数学联赛试题二、3题。

求方程 $[3x+1]=2x-\frac{1}{2}$ 的所有根的和。

同学们，上面的几例，你能会解吗？

例17　一个学生在给家的电报中，提出这样一个请求：

$$\begin{array}{rl} SEND & \text{（字意“寄”）} \\ +)\ MORE & \text{（字意“更多”）} \\ \hline MONEY & \text{（寄意“钱”）} \end{array}$$

这个式子恰好是由三个英语单词组成，同学们可查一下词典即可知他们的意思，是很有趣的〔注〕，如果每一个字母

表示一个不同的数字请把这个式子翻译过来。

思路：根据个位数字之和的特征，首先推测M，之后推测 S，依此法逐次推下去。

解：根据两个个位数字之和的特征，易得

$M=S+M$ 或 $M=S+M+1$，而 $M\leqslant 9$，$S\leqslant 9$，

$\therefore\quad M+S\leqslant 18$ 或 $M+S+1\leqslant 19$。

$\therefore\quad M=1$。

再进一步根据和进位特征得 $S+1$ 或 $S+1+1$ 是一个两位数，所以 S 只有两种可能 $S=8$ 或 $S=9$。

我们首先看 $S=8$ 是否可能？

若 $S=8$，则在百位列上一定要有1进位上来，使得千位列上的加法得到

$$S+M+1=8+1+1=10$$

因此，就有 $O=0$，于是电文就理解为

$$\begin{array}{r} 8END \\ +)\ 10RE \\ \hline 10NEY \end{array}$$

由于百位列上为 $E+0=N$ 且 $E\neq N$，所以十位列上必有 1 进位，又 $E\leqslant 9$，因此将有 $E=9$，于是有 $E+0+1=9+0+1=10$，这迫使我们设 $N=0$，而上面已有$O=0$，这是不可能的，所以 $S\neq 8$。只有 $S=9$。因而电文可以理解为

$$\begin{array}{r} 9END \\ +)\ 10RE \\ \hline 10NEY \end{array}$$

$\because\ E\neq N$，$\therefore$ 在百位列上的加法必导致 $E+1=N$，这就使电文变为

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & 9 & E & (E+1) & D \\
+) & & 1 & 0 & R & E \\
\hline
 & 1 & 0 & (E+1) & E & Y
\end{array}
$$

这样在十位列上的加法有两种可能：

(1) $(E+1)+R=10+E$；

(2) $(E+1)+R+1=10+E$。

第一种情况是不可能的，这会导致 $R=9$，$\because$ 已有 $S=9$，$\therefore$ 只能是第 (2) 种情况，$R=8$。因而电文又变为：

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & 9 & E & (E+1) & D \\
+) & & 1 & 0 & 8 & E \\
\hline
 & 1 & 0 & (E+1) & E & Y
\end{array}
$$

最后，在个位列上的和一定是进 1 的，所以

$D+E=10+Y$。

对于 D、E、Y 这三个字母，仅可在2、3、4、5、6、7中选取，其中任意两个数的和超过 10 的有

$6+7=13$，$5+7=12$，$4+7=11$，$6+5=11$。

$\because$ $Y\neq1$，$\therefore$ 只有如下两种可能：

$Y=2$ 或 $Y=3$。

现在看若 $Y=3$，则 $D+E=13$，故有

$E=7$ 或 $D=7$

若 $E=7$，则在百位列上必有

$N=E+0+1=7+0+1=8$，$\because$ $R=8$，$\therefore$ $N\neq8$，故 $E\neq7$。

若 $D=7$，则 $E=6$，于是

$N=E+1=6+1=7$，导致 $D=N=7$ 这也不可能。

$\therefore$ 只能是 $Y=2$，于是 $D+E=12$，在可选择的数字

3、4、5、6、7 中，和为 12 的两个数仅可能是 5 与 7，

$\because$ $E \neq 7$，$\therefore$ $E=5$，$D=7$。因此我们的问题的唯一解是

$$\begin{array}{r} 9567 \\ +)\ 1085 \\ \hline 10652 \end{array}$$

例18 从数1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12……59 60中删去 100 个数码，使余下之数为最小。

思路：首先要看共有多少个数码，去掉 100 个数码，使余下之数是个几位数；其次是在余下的数的最高位尽可能地保留数码较小的数。

解：这个数有111个数码，去掉100个数码，余下的是一个11位数。我们在高位上尽可能保留较小的数，首先看在高数位上保留 0，为方便观察，现将这个数写成如下形式：

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	~~1~~0
~~11~~	~~12~~	~~13~~	~~14~~	~~15~~	~~16~~	~~17~~	~~18~~	~~19~~	~~2~~0
~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~	~~3~~0
~~31~~	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	~~37~~	~~38~~	~~39~~	~~4~~0
~~41~~	~~42~~	~~43~~	~~44~~	~~45~~	~~46~~	~~47~~	~~48~~	~~49~~	~~5~~0
~~5~~1	~~5~~2	~~5~~3	~~5~~4	~~5~~5	~~5~~6	~~5~~7	~~5~~8	~~5~~9	60

第一步，划掉前 5 行 0 前面的数；第二步，划掉第六行上，6，7,8,9，还余下20个数码；第三步再划掉九个 5 字，余下的就是所求：

0 0 0 0 0 1 2 3 4 5 0。

【注】 *SEND* 是“寄”、“送”的意思；*MORE* 是“更

多”的意思；*MONEY* 是“钱”的意思。连在一起就是“寄更多的钱来”。

（三）练 习 题

1．填空题

（1）分解质因数 999999＝________。

（2）与1989的乘积是一个整数的平方的最小整数是________。

（3）具有 6 个约数的数中，最小的数是________。

（4）两个相邻的奇数都是质数，就称它们是一对孪生质数，如（3，5）、（11，13）、（17，19），请您再写出三对孪生质数________。

（5）在不大于1991的自然数中是 3 的倍数，但不是 5 的倍数的数有______个。

（6）数777^{777}的末位数是____。

（7）若某整数的平方数的十位数字是 7，则这整数的平方数的个位数字是______。

（8）九个连续的质数的和是一个偶数，如果将这九个质数从大到小排列是 a、b、c、d、e、f、g、h、i，则

$(c\cdot d-a)\cdot i\cdot g+[(b+e)-(f+h)]=$______。

（9）已知自然数 a、b、c（其中 $c\geqslant3$），a 除以 c 余 1，b 除以 c 余 2，则 ab 除以 c 的余数是______。

（10）一个自然数与 3 的和是 5 的倍数，与 3 的差是 6 的倍数，则这个最小自然数是____。

（11）三个数 $\overline{2x3}$ 与 $\overline{5y9}$，满足 $\overline{2x3}+\overline{326}=\overline{5y9}$，且 $\overline{5y9}$

能被9整除，则 $x+y=$ ______。

(12)一篮鸡蛋，二二数余1，三三数余1，四四数余1，五五数余1，六六数余1，七七数恰好数完，篮中最少有鸡蛋______个。

2. 选择题

(1) 给出下面的结论：

①凡是质数，都是奇数。

②凡是偶数，都是合数。

③如果两个数是互质的，那么这两个数都是质数。

④有一个数，最小的约数是它本身，最大的约数也是它本身。

其中，正确的是（　　），

(A) ①；(B) ②；(C) ③；(D) ④。

(2) 在整数0、1、2、3、4、5、6、7、8、9中，质数的个数为 x，偶数为 y，完全平方数为 z，则 $x+y+z=$（　　）。

(A) 13；(B) 12；(C) 11；(D) 10。

(3) 在前100个自然数中，有（　　）个数能被2、3、4、5这四个数都整除。

(A) 0；(B) 1；(C) 2；(D) 3。

(4) 任意调换五位数12345各数位上的数字的位置所得的五位数中，质数的个数是

(A) 0；(B) 4；(C) 8；(D) 12。

(5) 从1、2、3、4、5、6、7、8、9中任取5个数，则

①其中必有两数互质；

②其中必有一数是另一数的倍数；

③其中必有一数的2倍是另一数的倍数。

以上结论中，正确的个数为（　　）。

（A）0个；（B）1个；（C）2个；（D）3个。

（6）$P=a(a+1)+1$，$Q=a(a+1)(a+2)(a+3)+1$，其中a为自然数，则（　　）。

（A）P、Q都是完全平方数；

（B）P是完全平方数，Q不是；

（C）Q是完全平方数，P不是；

（D）P、Q都不是完全平方数。

（7）对所有奇数k，整数N整除k^2-1，这种N的最大值是（　　）

（A）2；（B）4；（C）8；（D）16。

（8）当n是自然数时，n^2-n+1与n^2+n-1中

（A）可能有公约数2和3；

（B）可能有公约数2，但3一定不是公约数；

（C）可能有公约数3，但2一定不是公约数；

（D）2、3都一定不是它们的公约数。

（9）n是满足下列条件的最小整数：大于1，没有小于10的质因数，又不是质数，则（　　）

（A）$100<n\leqslant110$；（B）$110<n\leqslant120$；

（C）$120<n\leqslant130$；（D）$130<n\leqslant140$。

（10）把由1开始的自然数依次写下去，直写到198位为止：

$$\underbrace{123456789101112\cdots\cdots}_{198\text{位}}$$

则这个数用 9 除的余数是（　　）

（A）4；（B）6；（C）7；（D）8

3．若自然数 a 不是 5 的倍数，则

a^8+3a^4-4能被 100 整除，

4．当 p 和 q 都是大于 5 的任意奇数时，则 p^4-q^4 总能被 80 整除。

5．$53^{53}-33^{33}$ 必是 10 的倍数。

6．任给五个整数，证明必能从其中选出三个，使得它们的和能被 3 整除。

7．三个连续奇数的平方和加1，能被12整除，但不能被24整除。

8．$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3$对任何自然数 n 都是能被3整除的整数。

9．已知 a、b、c、d 为整数，若 $ab+cd$ 能被 $a-c$ 整除，则 $ad+bc$ 也能被 $a-c$ 整除。

10．有一整数，除 300、262、205，得到相同的余数，求这个整数。

11．两个数的最小公倍数是 975，并且这两个数被它们的最大公约数除，所得商的和是18，求这两个数。

12．一个自然数加上34之后是一个完全平方数，这个自然数减去55后又是一个完全平方数，求这个自然数。

13．设 n 是由数字 0 和 8 组成，且又是15的倍数的最小正整数，计算 $n/15$。

14．若 p 和 $p+2$ 都是大于 3 的质数，则 $p+1$ 能被6整

除。

15. 求下面算式中，四个方框中数字的总和是多少？

$$\begin{array}{r} \square\square \\ +)\ \square\square \\ \hline 149 \end{array}$$

16. 下式中的不同字母代表0、1、2、3、4、5、6、7、8、9中不同数字，试译出原式：

$$\begin{array}{r} 5ONAL5 \\ +)\ GERAL5 \\ \hline ROBERT \end{array}$$

17. 试译出下式：

$$\begin{array}{r} ※※※ \\ 5*\,\overline{)\,6***} \\ *7 \\ \hline *** \\ 5** \\ \hline 0 \end{array}$$

18. 1 2 3 4……99 100，划去100个数字，使剩下的数为首数不是0，且数值最小，求这个数。

19. 把偶数个球分成两组，使一组球的个数比另一组球的个数多，那么两组球的个数的差是奇数还是偶数，若球的总数是奇数，其结论如何？

（四）提示与答案

1. 填空题：(1) $3^3\times7\times11\times13\times37$。(2) 13×17。(3) 12。(4) (5，7)、(29，31)、(41，43)。(5) 531。(6) 7。(7) 6。(8) 2000。(9) 2。(10) 27。(11) 6。(12) 301。

2. 选择题：(1) D. (2) A. (3) B. (4) A.(5) C. (6) C. (7) C. (8) D. (9) C. (10) B.

3. 先分解，原式$=(a^2+1)(a^2-1)(a^4+1)$，再用分类思想把 a 划分为$a=5n\pm1$，$a=5n\pm2$，之后，观察各因式，有两个因式均能被 5 整除且整个式子能被 4 整除。

4. 解：设 $p=2m+1$，$q=2n+1$（m、$n>2$ 的整数），则

$p^4-q^4=8[2(m^2+n^2+m+n)+1](m+n+1)(m-n)$

$m+n+1$ 与 $m-n$ 中必有一偶数，因而 p^4-q^4能被16整除。

又 p，q 的末位数只能是 1、3、7、9 之一，所以 1^4、3^4、7^4、9^4 的末位数都是 1，于是 p^4-q^4 的末位数是 0，这表明 p^4-q^4 能被 5 整除。

又 16、5 互质，所以 p^4-q^4 能被80整除。

5. 解： 因为以 3 为尾数的整数，它的 $4k$ 次幂的个位数是1，$(4k+1)$次幂的个位数是3，$(4k+2)$次幂的个位数是9，$(4k+3)$ 次幂的个位数是 7，所以 53^{53}的个位数是3，33^{33}的个位数也是 3，故 $53^{53}-33^{33}$ 的个位数是 0，它是10的倍数。

6. 证：因为任意一个整数被 3 除，余数有0、1、2三种可能。任给的五个整数被 3 除所得的 5 个余数中，若0、1、2 都出现，则余数为 0、1、2 的三个余数的和一定能被 3 整除；若五个余数中只出现 0、1、2 中的两个或一个，则其中必有一个余数至少出现三次，故余数相同的三个数的和一定能被 3 整除。

7. 解： 设三个连续奇数分别为$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$(n

为自然数），则

$$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1$$

$$=12(n^2+n+1)$$

∴ $[(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1]$能被12整除。

∵ $n^2+n+1=n(n+1)+1$，$n(n+1)$为偶数，

∴ n^2+n+1 为奇数，即 n^2+n+1 无 2 的因数.

∴ $[(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1]$不能被 24 整除。

8．解：∵$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3=\frac{1}{2}(2n^3+3n^2+n-6)$

$$=\frac{1}{2}[n(n+1)(2n+1)-6]$$

$$=\frac{1}{2}[n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n-1)-6]$$

又∵ $n(n+1)(n+2)$、$(n-1)n(n+1)$都是 6 的倍数，

∴ $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3$ 能被 3 整除。

9．解：∵ $ad+bc=ad+ab-ab+cd-cd+bc$

$$=ab+cd+(ad-cd-ab+bc)$$

$$=(ab+cd)+(a-c)(d-b)$$

∵ $(ab+cd)$能被 $a-c$ 整除，$(a-c)(d-b)$ 也能被 $a-c$ 整除，

∴ $[(ab+cd)+(a-c)(d-b)]$能被 $a-c$ 整除。

即 $(ad+bc)$能被 $a-c$ 整除。

10．19．提示：这个数应是300－262，262－205的公约

数。

11. 75，195。

12. 1991。

13. $n=8880$，$\frac{n}{15}=592$。

14. 解：大于 3 的质数 p，$p+2$ 必都是奇数，所以 $p+1$ 是偶数，即 $p+1$ 必能被 2 整除。

又 p、$p+1$、$p+2$ 中必有一数能被 3 整除，而 p、$p+2$ 是质数，所以只能是 $p+1$ 能被 3 整除，又 2、3 互质，所以 $P+1$ 能被 6 整除。

15. 23。

16.
$$\begin{array}{rr} & 526485 \\ +) & 197485 \\ \hline & 723970 \end{array}$$

17.
$$\begin{array}{r} 109 \\ 57\overline{)6213} \\ \underline{57} \\ 513 \\ \underline{513} \\ 0 \end{array}$$

18. 1000001234061626З……99100。

19. 提示：偶－偶＝偶；奇－奇＝偶；偶－奇＝奇；奇－偶＝奇。

二　整　式

（一）基本原理

1． 整式的运算

（1）整式的加减法。

（2）整式的乘法。

单项式乘以单项式。

单项式与多项式相乘。

多项式乘以多项式。

幂的运算法则：

同底数幂相乘　$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$。

同底数幂相除　$a^m \div a^n \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$。

幂的乘方　$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$。

积的乘方　$(ab)^m = a^m b^m$。

（3）乘法公式

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$；

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$；

$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$。

例1 若$abc = 1$，求证$\dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{b}{bc+b+1} + \dfrac{c}{ca+c+1} = 1$。

思路： 根据题中已知条件，变化等式左端使其成为一分式且分子与分母相等。

证： 由 $abc=1$，得 $c=1/ab$，将其代入求证等式的左端。

$$左边=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{b\frac{1}{ab}+b+1}+\frac{1/ab}{\frac{1}{ab}\cdot a+\frac{1}{ab}+1}$$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}$$

$$=\frac{ab+a+1}{ab+a+1}=1。$$

例2 若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，求证

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}\quad (n\text{ 为整数})。$$

证： 由已知得

$$bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)=abc$$

即 $(a+b+c)(bc+ac)+ab(a+b)=0$

$(a+b)(ac+bc+c^2+ab)=0$，

$\therefore$ $(a+b)(b+c)(c+a)=0$。

得 $a=-b$ 或 $b=-c$ 或 $c=-a$。

当 $c=-a$ 时，求证等式

$$左端=\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{(-a)^{2n+1}}=\frac{1}{b^{2n+1}}。$$

右端 $=\frac{1}{b^{2^n+1}}$。

$\therefore$ 原式成立。同理可证$a=-b$或$b=-c$时，原式也成立。

说明 证条件等式问题时，当条件直接代入行不通时，可适当地变换条件，以达到代入的目的。

例3 若 $y+\frac{1}{z}=1$，$z+\frac{1}{x}=1$，求证 $x+\frac{1}{y}=1$。

思路 消去结论式中没有的字母 z。

证： $\because$ $z+\frac{1}{x}=1$，得$z=\frac{x+1}{x}$，代入 $y+\frac{1}{z}=1$，

得 $y+\frac{x}{x-1}=1$，

$\therefore$ $xy-y+x=x-1$ （$\because x-1\neq 0$）。

$\therefore$ $xy+1=y$，$\therefore$ $x+\frac{1}{y}=1$ （$\because x-1\neq 0$）。

例4 若$x+y=a$，$x^2+y^2=b^2$，$x^3+y^3=c^3$。

求证 $a(3b^2-a^2)=2c^3$。

思路 消去 x、y。

证： $\because$ $x+y=a$，

$\therefore$ $x^2+2xy+y^2=a^2$ (1)

把$x^2+y^2=b^2$代入(1)式得 $xy=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$。

又$\because$ $x^3+y^3=c^3$；

即 $(x+y)(x^2-xy+y^2)=c^3$ (2)

将 $x+y=a$，$x^2+y^2=b^2$，$xy=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$ 代入(2)

得 $a\left[b^2-\frac{1}{2}(a^2-b^2)\right]=c^3$, ∴ $a(3b^2-a^2)=2c^3$。

说明 在例3与例4中，是采用消去结论式中没有的字母。

例5 已知$x>y>z>0$，求适合等式

$$xyz+xy+zy+zx+x+y+z=1989$$

的整数x、y、z的值。

解：原式可以变为：$(x+1)(y+1)(z+1)=1990$，而1990可分解为$199\times5\times2$。由于设$x>y>z$，故知 $1+x=199$，$1+y=2$，$1+z=2$，

或者 $1+x=199$，$1+y=10$，$1+z=1$，

或者 $1+x=39x$，$1+y=5$，$1+z=1$，

或者 $1+x=995$，$1+y=2$，$1+z=1$。

又由$z>0$，可知适合等式的是

$$x=198,\ y=4,\ z=1.$$

例6 若$b^2+bc=2ac$，$9a^2=6ab+7bc$，求$a:b:c$的值。

思路 由已知先求出$a:b$，然后再求出$b:c$，最后求出$a:b:c$。

解：由$b^2+bc=2ac$，得$c=\frac{b^2}{2a-b}$，代入$9a^2=6ab+7bc$，化简得

$$18a^3-21a^2b+6ab^3-7b^3=0.$$

$$3a^2(6a-7b)+b^2(6a-7b)=0,$$

$$(3a^2+b^2)(6a-7b)=0,$$

∴ $3a^2+b^2=0$或$6a-7b=0$。

当$3a^2+b^2=0$时，必有$a=b=c=0$，舍去。

当$6a-7b=0$时，$a:b=7:6$。

再由 $c=\dfrac{b^2}{2a-b}=\dfrac{3}{4}b$，即 $b:c=4:3$，

∴ $a:b:c=14:12:9$。

例7 证明恒等式：$(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$。

思路：将求证等式左边各项化为两数和或差的形式，然后乘方。

证：
$$
\begin{aligned}
\text{左边}&=[(a+b)+(c+d)]^2+[(a+b)-(c+d)]^2+\\
&\quad [(a-b)+(c-d)]^2+[(a-b)-(c-d)]^2\\
&=2(a+b)^2+2(c+d)^2+2(a-b)^2\\
&\quad +2(c-d)^2\\
&=2[(a+b)^2+(a-b)^2]+2[(c+d)^2\\
&\quad +(c-d)^2]\\
&=4(a^2+b^2+c^2+b^2)=\text{右边}.
\end{aligned}
$$

例8 试证对任意正整数k，$2k-1$和$2k+1$两数中至少有一个不能等于两整数的平方和。

思路 证明任何两整数平方和被4除余数都不为3。

证：若k为奇数，设$k=2m+1$，则$2k+1=4m+3$；若k为偶数，设$k=2m$，则$2k-1=4m-1=4(m-1)+3$。

即$2k-1$，$2k+1$两奇数中至少有一个被4除余3。我们来证明形如$4m+3$的整数不可能等于两整数的平方和。

假设$4m+3$等于a^2+b^2（a，b为整数），

若a，b都是奇数，则 $a^2+b^2=4m_1+1+4m_2+1$

$=4m+2$；

若a，b都是偶数，则$a^2+b^2=4m_1+4m_2=4m$；

若a，b为一奇一偶，则$a^2+b^2=4m_1+1+4m_2=4m+1$，

可知任何两整数平方和被 4 除余 3 的整数不可能等于两整数平方之和。

故 $2k-1$，$2k+1$ 中至少有一个不能等于两整数平方和。

例9 设a，b，c，d 都是整数，且$m=a^2+b^2$，$n=c^2+d^2$，则 mn 也可表成两个整数的平方和，试证明之。

思路 利用两数和的平方公式。

证：$m\cdot n=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$=a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2$$

$$=a^2c^2-2bcad+b^2d^2+b^2c^2+2abcd+a^2d^2$$

$$=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2.$$

$\because$ a，b，c，d 是整数，

$\therefore$ $ac-bd$和$bc+ad$也是整数。

$\therefore$ $m\cdot n$ 可表示成两个整数的平方和。

（三）练习题

1. 设a、b、c、d是整数，且ac、$bc+ad$、bd都能被整数 n 整除。证明：bc、ad也能被 n 整除。

2. 设 a，b 是正整数，求满足$\dfrac{a-b}{ab}+\dfrac{1}{6}=0$ 的一切正整数a、b的值。

3. 求使得m^2+m+7 是完全平方数的所有整数m的积。

4. 若$m^2=m+1$，$n^2=n+1$，且$m\neq n$，求m^5+n^5 的值。

5. 设a，b为不相等的实数，且$a^2+2a-5=0$，$b^2+2b-5=0$，求a^2b+ab^2的值。

6. 设$a^2+2a-1=0$，$b^4-2b^2-1=0$，且$1-ab^2\neq 0$，求$\left(\frac{ab^2+b^2+1}{a}\right)^{1990}$的值。

7. 若$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$是$x$的平方式，求证：$a=b=c$。

8. 证明：$(1+a+a^2+\cdots+a^n)^2-a^n=(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})(1+a+a^2+\cdots+a^{n+1})$，其中$n$是自然数。

9. 设x，y，z是不相等的整数，证明$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$能被$5(x-y)(y-z)(z-x)$整除。

10. 设a，b，c为正数，并且$\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}=3$。证明$a=b=c$。

11. 由0，1，2，3，4，5，6这七个数字能组成许多没有重复数字的七位数，其中有一些是55的倍数。在这些55的倍数中，求出最大和最小的。（要求写出推理过程）

12. 证明　不存在整数a和b，使得

$$a^2+b^2=1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n.（其中7\leqslant n<14）$$

13. 求出满足$a^2+b^2=720$的所有正整数解，其中$a\leqslant b$。

14. 证明：(1) 不存在整数n，使得n^2+n+1能被5整除；

(2) 存在无数多个整数n，使得n^2+n+1能被343整除。

15. 求一个不能用三个不相等的合数之和表示的最大奇数。

（四）答案与提示

1．解：设$bc+ad=pn$（p为自然数），则$\frac{bc}{n}+\frac{ad}{n}=p$，

$\frac{abcd}{n}+\frac{(ad)^2}{n}=adp$．∵$bd$、$ac$可被$n$整除，∴ $\frac{abcd}{n}$为整数，因而$\frac{(ad)^2}{n}$为整数，即ad可被n整除．同理bc可被n整除．

2．$a=2$，$b=3$；$a=3$，$b=4$；

$a=4$，$b=12$；$a=5$，$b=30$．

3．84．

4．11．

5．10．

6．1

7．解：原式$=3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$

$$=(\sqrt{3}x+k)^2=3x^2+2\sqrt{3}kx+k^2$$

∴ $\sqrt{3}k=a+b+c$，$k^2=ab+bc+ca$，

∴ $3(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2$，

∴ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$，

∴ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，∴ $a=b=c$．

8．证：设$1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=x$，则

$$1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+a^n=x+a^n,$$

$$1+a+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1}=x+a^n+a^{n+1},$$

因此只需证明 $(x+a^n)^2-a^n=x(x+a^n+a^{n+1})$成立，

即证明　$x(1-a)=1-a^n$成立。

$\because$　$x(1-a)=x-ax$

$$=(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})$$

$$-a(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})$$

$$=(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})$$

$$-(a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}+a^n)$$

$$=1-a^n$$

$\therefore$　$(x+a^n)^2-a^n=x(x+a^n+a^{n+1})$

因此 $(1+a+a^2+\cdots+a^n)^2-a^n=$

$(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})(1+a+a^2+\cdots+a^{n+1})$。

9. 证：设$x-y=a$，$y-z=b$，则

$z-x=-(x-z)=-[(x-y)+(y-z)]=-(a+b)$。

$\therefore$　$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

$$=a^5+b^5-(a+b)^5$$

$$=a^5+b^5-a^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4-b^5$$

$$=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$$

$$=-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$$。

$\because$　a^2+ab+b^2是整数，

$\therefore$　$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$能被

$-5ab(a+b)=5(x-y)(y-z)(z-x)$整除。

10. 证：设$\frac{c}{b}=x^3$，$\frac{a}{c}=y^3$，$\frac{b}{a}=z^3$，则

$$x^3\cdot y^3\cdot z^3=\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}=1，\text{即 } xyz=1。$$

因此　$x^3+y^3+z^3=3xyz$，

$\therefore \quad (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$。

但 $x+y+z\neq 0$，$\therefore \quad x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$。

即 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$。$\therefore \quad x=y=z$。

因此 $c^2=ab$，$b^2=ac$，$a^2=bc$，$\therefore \quad a=b=c$。

11. 解：设这样的七位数的奇数位上的四个数字的和为 A，偶数位上的三个数字的和为 B，则 $|A-B|=11k$（k 为自然数或 0）。又 $A+B=21$，

$\because \quad A$、B 都是小于 21 的正数，$\therefore \quad |A-B|<21$，又 $\because \quad A+B$ 为奇数，$\therefore \quad A-B\neq 0$，即 $k\neq 0$。从而只能有 $k=1$，即 $|A-B|=11$。$\therefore \quad A$ 和 B 中一个是 $\frac{21+11}{2}=16$，另一个是 $\frac{21-11}{2}=5$。

由于0，1，2，3，4，5，6中最小的四个数的和是6（大于 5）$\therefore \quad A=16$，$B=5$。

这七个数中三数之和为 5 的只有 0，1，4 和 0，2，3 两种，$\therefore$ 或者①$B=0+1+4$，$A=2+3+5+6$，

或者②$B=0+2+3$，$A=1+4+5+6$，

由于 0 总在三个数那一组中（即偶数位上），$\therefore$ 0 不可能是末位数，$\because$ 所求数是55的倍数，$\therefore$ 末位数必是5。即得到最小数是1042635。最大数是6431205。

12. 证：由于$7\leqslant n<14$，于是$1\times 2\times 3\times\cdots\times n$能被 7 整除，即$a^2+b^2$能被 7 整除。

若 a 不是 7 的倍数，设$a=7t+r(r=1,\ 2,\cdots,6)$，则 a^2 为 $7k+1$，$7k+2$，$7k+4$ 型的数。

于是a^2+b^2为$7k+1$，$7k+2$，$7k+3$，$7k+4$，$7k+5$，$7k+6$型的数，从而a^2+b^2不能被7整除。

于是a和b必定是7的倍数，从而a^2+b^2是49的倍数，然而当$7\leqslant n<14$时，$1\times2\times3\times\cdots\times n$不可能是49的倍数。因此满足题设等式的$a$和$b$不存在。

13. 解：由于$a^2+b^2=720=2^4\times3^2\times5$，$\therefore$ a和b必定是3的倍数。

设$a=3u$，$b=3v$，则$u^2+v^2=2^4\times5$。于是u和v必定是偶数。

再设$u=2p$，$v=2q$，则$p^2+q^2=2^4\times5$，同理p和q必定同为偶数。

设$p=2x$，$q=2y$，则$x^2+y^2=5$。由于$a\leqslant b$得$x=1$，$y=2$，$\therefore$ $a=12$，$b=24$。这是唯一的一组符合题设条件的解。

14.（1）证：设$n=5k+r$，k为整数，$r=0$，1，2，3，4。代入n^2+n+1，对r进行讨论。

（2）证：$\because$ $343=7^3$，故设$n=7k+r(r=0,\pm1,\pm2,\pm3)$。

$$n^2+n+1=49k^2+14kr+7k+r^2+r+1.$$

当$r=2$或-3时，r^2+r+1是7的倍数。不妨设$r=2$，此时$n^2+n+1=7(7k^2+5k+1)$。由此，本题转化为求k，使$7k^2+5k+1$是7^2的倍数。为此，设$k=7t+p$，$p=0$，±1，±2，±3。

$$7k^2+5k+1=7(7t+p)^2+35t+5p+1.$$

当$p=-3$时，是7的倍数，取$p=-3$，此时，$7k^2+5k$

$+1=7^3t^2-7\times16t+49=7(7^2t^2-16t+7)$。由此本题又转化为求 t，使 7^2t^2-16+7是 7 的倍数，为此设 $t=7u$ 即可。

此时 $n=7^3u-19$，由于 u 可取任意整数，得证。

15。解：最小的不相等的三个合数之和为$4+6+8=18$。我们证明17是不能用三个不相等的合数表示的最大奇数。

事实上，只要证明不小于19的奇数$2k-1$总可以表示成三个不相等的合数之和就可以了。

由于 $2k-1=4+9+(2k-14)$。

由$k\geqslant10$得$2k-14\geqslant6$，于是 4，9 和 $2k-14$是三个不相等的合数，于是17是满足条件的最大奇数。

三 一元一次方程

一元一次方程是中学数学中最基本的方程，它是学习其它类型方程的基础。

（一） 基本原理

1. 基本概念

（1）等式；（2）方程；（3）方程的解；（4）解方程；（5）同解方程；（6）一元一次方程；（7）最简方程。

2. 等式的性质

（1）若$a=b$，则$a+c=b+c$或$a-c=b-c$。

（2）若$a=b$，则$ac=bc$或$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}(c\neq0)$。

3. 方程同解原理

（1）同解方程是指两个方程的解完全相同。所谓“完全相同”是指这两个方程的解的个数相同，每个解的得数也相同。

（2）方程同解原理

(i) 方程的两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，所得方程与原方程是同解方程。

(ii) 方程的两边都乘以（或都除以）不等于零的同一个数（或式），所得方程与原方程是同解方程

利用方程同解原理(i)、(ii)，可以把比较复杂的方程变

形为与它同解的较简单的方程。因此同解原理是解一元一次方程的最基础的理论依据。但要特别注意：运用同解原理（ii）时，方程的两边不能用零去乘或除。

4．一元一次方程的解法

解一元一次方程，就是根据方程同解原理把方程变形，化成最简形式 $ax=b$（$a\neq0$），直到求出 $x=\frac{b}{a}$ 为止。

其一般步骤如下：

（1）去分母；（2）去括号；（3）移项；（4）合并同类项，化成最简方程 $ax=b$（$a\neq0$）的形式；（5）方程的两边都除以未知数的系数得出方程的解 $x=\frac{b}{a}$。

这五步中（1）、（3）、（5）是同解变形（"形"与"值"均变，但方程解不变），（2）、（4）是恒等变形（它的实质是"形"变"值"不变）。在具体解方程时，要根据方程的形式灵活安排解题步骤（熟练后，解题步骤可以简化），不要死套上述步骤。

5．一元一次方程的应用

（1）列方程解应用题的一般步骤

（i）审题：审题就是要透彻地理解题意，它是解应用问题的基础。只要弄清楚问题中的已知量、未知量各是什么，它们之间有哪些等量关系，才能合理地设未知数，正确地列出方程。

（ii）设元（未知数）：设未知数的方法有直接设法和间接设法两种。直接设法是求什么就设什么为未知数；间接设

法是把与所求未知量有密切关系的某些量设为未知数．两种方法没有原则区别，可以灵活选用。

(iii) 列方程：即找出已知数量与未知数量的等量关系，用方程式表示出来。

(iv) 解方程：即求方程解的过程，最后求出方程的解。

(v) 检验：求出方程的解不一定都是方程的解，还须检验该解是否符合题意。

(vi) 答：这是对问题结论的回答。回答必须明确，与问题的要求相一致，并要注明所求量的单位名称。

以上六步是解应用题的一个整体，可简单归结为六个字：审、设、列、解、检、答。其中“设”和“列”是解决问题的关键。

(2) 一元一次方程应用题的基本类型

(i) 和差倍分问题

这类问题所包含的关系有两种：①倍数关系；②和差关系。

(ii) 等积变形问题

这类问题涉及到几何图形．解决这类问题关键要掌握两点：一是形状改变，而体积（或面积）不变；二是需要掌握有关几何图形中各元素之间相互关系的公式。

(iii) 行程问题

这类问题包含两种关系：①追及；②相遇．行程问题主要就是要研究以下三种基本量之间的关系：

$$路程 = 速度 \times 时间.$$

这个关系式的另外两种变形：

$$时间=\frac{路程}{速度}，速度=\frac{路程}{时间}.$$

(iv) 劳动力分配问题

这类问题，实际就是研究人数的增加与减少问题。主要有三种情况：①只有调进，没有调出，即人数增加；②只有调出，没有调进，即人数减少；③甲方调出到乙方，就是甲方人数减少，乙方人数增加。

(v) 工程问题

解工程问题，同样要掌握三种基本量，即工作量、工作效率（即单位时间内所完成的工作量）、工作时间以及它们之间的关系。这三者之间的内在规律是：工作量＝工作效率×工作时间，这个关系式的另外两种变形是：

$$工作时间=\frac{工作量}{工作效率}，工作效率=\frac{工作量}{工作时间}.$$

在解这类问题的过程中，有时把工作量看成是一个整体，就是看成1。这时工作效率$=\frac{1}{工作时间}$，工作时间$=\frac{1}{工作效率}$.

(vi) 浓度问题

有关浓度的三种基本量是：浓度、溶液和溶质，解决此类问题要弄清下面两个问题：

①浓度、溶液和溶质的概念；

②浓度、溶液和溶质间的关系。

这三种基本量间的关系是：

溶质重量＝溶液重量×百分数（浓度）。

这个关系式的另外两种变形是：

$$百分数=\frac{溶质重量}{溶液重量}，\quad 溶液重量=\frac{溶质重量}{百分数}。$$

（Ⅶ）数字问题

对于数字问题，主要是要弄清楚怎样用含有字母的代数式来表示一个多位数。一般地，如果十位上的数字是 a，个位上的数字是 b，那么这个两位数就用 $10a+b$ 的形式来表示。如果能把一个多位数正确地用和的形式表示出来，那么列方程解有关多位数的应用题，并不困难。

（二）范例与方法

例1 解关于 x 的方程 $\frac{x}{m}-\frac{x}{n}=1$（$m$、$n$ 为实数）。

思路 因为此方程中m、n是待定系数，所以应该讨论。

解：把方程化简为 $(n-m)x=mn$。

讨论：①若$n\neq m$时，即$n-m\neq 0$，则 $x=\frac{mn}{n-m}$，有唯一解；②若$n=m=0$时，则有无数多个解；③若$n=m\neq 0$时，则无解。

说明 （1）解含有字母系数的方程要对字母进行讨论。（2）此类方程的解可能是唯一的；无数多个解；也可能无解。

例2 解方程 $\frac{1.8-8x}{1.2}-\frac{1.3-3x}{2}-\frac{5x-0.4}{0.3}=0$。

思路 此方程的分母含小数，可把分母化为整数再求解。

解： 利用分数的基础性质，原方程可化为

$$\frac{18-80x}{12}-\frac{13-30x}{20}-\frac{50x-4}{3}=0$$

$$90-400x-39+90x-1000x+80=0$$

$$-1310x=-131$$

$$x=0.1.$$

注意 利用方程同解原理（ii），在方程的两边都除以未知数的系数时，不要错误地认为大数（1310）就一定是被除数，这一点务必注意。

例3 给定方程 $\frac{x-1}{2}+\frac{ax+1}{3}=\frac{ax-3}{6}+1$，解答以下两问：

(1) a 为何值时，此方程无解？

(2) 若 $x=\frac{4}{5}$ 是方程的解，确定 a 的值。

思路 解此方程时，可以先根据方程同解原理（ii），在方程的两边都乘以各分母的最小公倍数（2、3和6的最小公倍数是6），把方程里各分母去掉。然后化成最简方程 $ax=b$ 的形式，再求解。

解： (1) 此方程经过整理后，得

$$(3+a)x=4$$

当 $3+a=0$ 即 $a=-3$ 时，此方程无解。

(2) ∵ $\frac{4}{5}$ 是方程的解，∴ 将 $x=\frac{4}{5}$ 代入此方程或代入 $(3+a)x=4$ 中得 $(3+a)\cdot\frac{4}{5}=4$，从而得 $a=2$。

注意 去分母时，不要忘记把常数“1”乘以6。

例4 解方程

$$\frac{2-\frac{0.2x-1}{8}}{6}-\frac{\frac{0.2x-1}{4}}{4}=\frac{1-2(1-0.2x)}{3}.$$

思路 此方程可以用换元法求解。先求出新未知数的值，再求 x。

解：设 $\frac{0.2x-1}{8}=y$，代入原方程得

$$\frac{2-y}{6}-\frac{2y-3}{4}=\frac{1+16y}{3},\quad y=\frac{1}{8}.$$

$\therefore\quad \frac{0.2x-1}{8}=\frac{1}{8}$，从而 $x=10$。

说明 某些方程用换元法解，有时比较简便。

例5 解方程 $|x-2|+|2x+1|=7$。

思路 这是带有绝对值符号的一元一次方程，首先要考虑去掉绝对值符号。

解：当 $x\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，则原方程为 $2-x+(2x+1)=7$，解得 $x=-2$；当 $-\frac{1}{2}<x\leqslant2$ 时，则原方程为 $2-x+2x+1=7$，解得 $x=4$，即无解；当 $x>2$ 时，则原方程为

$x-2+2x+1=7$，解得 $x=\frac{8}{3}$。

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=\frac{8}{3}$，$x_2=-2$。

说明 先用零点法求出零点：$x=2$，$x=-\frac{1}{2}$。在

$x \leqslant -\frac{1}{2}$、$-\frac{1}{2} < x \leqslant 2$以及$x > 2$的情况的限制条件下，去掉绝对值符号，然后再解方程。

例6 当a为何值时，方程 $a(x+1)+(a^2+12)x=3$有无数多个解？

思路： 把已知方程化成最简方程$ax=b$的形式，只要满足$a=b=0$，方程才有无数多个解。

解： 把已知方程变形为 $(a^2+a-12)x=3-a$，

只有满足$\begin{cases} a^2+a-12=0, \\ 3-a=0. \end{cases}$ 解之 $a=3$

$\therefore$ 当$a=3$时，原方程有无数多个解。

例7 已知方程$|x|=mx+1$有一个负根且没有正根，那么m的取值范围如何？

解： 设x是方程的负根，则$-x=mx+1$，由此

$x=\frac{-1}{m+1}<0$，$\therefore$ $m+1>0$，即$m>-1$。显然$m>-1$时方程有负根。

假设方程有一个正根x，则$x=mx+1$，由此$(1-m)x=1$，$x=\frac{1}{1-m}>0$，则$m<1$。

所以方程有一个负根而没有正根的条件是$m>-1$成立，而且$m<1$不成立。故$m\geqslant 1$。

例8 要从含盐12.5%的盐水40公斤蒸发掉水分，制出含盐20%的盐水来，应蒸发掉多少水？

解： 设蒸发掉的水为x公斤，依题意，得

$$(40-x)\times 20\% = 40\times 12.5\%$$

解此方程，得 $x=15$。

答：应蒸发掉15公斤水。

例9 往A、B两个容器里连续注水，A容器的水面每分钟升高0.4cm，B容器的水面每分钟升高0.3cm，设现在的水面高度A为46cm，B为24cm，问A的水面高度何时是B的水面高度的2倍？

解：设从现在起 x 分钟后，A 的水面高度是B的水面高度的2倍。则

$$46+0.4x=2(24+0.3)$$

解此方程，得 $x=-10$。

答：从现在起10分钟前，A 的水面高度是B 的水面高度的2倍。

说明 从现在起－10分钟之后，即从现在起10分钟之前，水面高度A是42cm，B是21cm，这是符合题意的。

注意 列方程解应用题时，有的方程的解是负值，但不一定都不符合题意。

例10 一条山路，某人从山下往山顶走，走了1小时还差1公里。从山顶到山下50分钟可以走完，已知下山的速度是上山速度的1.5倍，求山路的长。

解：设山路长为 x 公里，则

$$\frac{x-1}{60}\times 1.5=\frac{x}{50}$$

解这个方程，得 $x=5$。

答：山路的长是5公里。

例11 一辆汽车在第一次旅程中用去油箱汽油的$\frac{1}{4}$，在

第二次旅程中用去余下的汽油的$\frac{1}{5}$，这样油箱里还剩汽油6 kg，油箱里原来有汽油多少kg？

思路 先把油箱里原有的汽油看成是整体"1"，然后根据题意列出方程。

解： 设油箱里原来有汽油为x kg，则

$$\left[1-\frac{1}{4}-\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{5}\right]x=6$$

解此方程，得 $x=10$。

答： 油箱里原有汽油10kg。

例12 从家里骑摩托车到火车站，如果每小时行30km，那么比开车时间早到15分钟，如果每小时行18km，那么比开车时间迟到15分钟。现在打算在开车时间早10分钟到达，那么骑摩托车的速度应该是多少？

思路 此题设间接未知数，解起来较简捷。

解： 设从家到火车站的距离为x km，则

$$\frac{x}{30}+\frac{1}{4}=\frac{x}{18}-\frac{1}{4}$$

解得 $x=\frac{25}{4}$ (km)

故从家骑摩托车到开车的时间为

$$\frac{45}{2\times 30}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1\ (\text{小时})$$

$$\therefore\quad \frac{45/2}{1-\frac{10}{60}}=\frac{45/2}{\frac{5}{6}}=\frac{45}{2}\times\frac{6}{5}=27\ (\text{km/小时})。$$

答： 早到10分钟，骑摩托车的速度应该是27km/小时。

（三）练习题

1. 填空题

（1）如果数 p 增加它的 $x\%$ 后得 q，那么 q 等于______。

（2）某数 x 的31%比它的倒数的 $\frac{2}{3}$ 还多 $\frac{2}{3}$，则关于 x 的方程是________________。

（3）当 $k=$____时，方程 $3x-k=x+1$ 与方程 $2x+1=2-x$ 是同解方程。

（4）已知方程 $mx+2=2(m-x)$ 的解为0.5，则 $m=$____。

（5）关于 x 的方程 $2a(x-3)+3b(1-x)=x-3$ 有无数多个解时，$a=$____，$b=$____。

（6）若方程 $a(2x-1)=3x-2$ 的解为正数，则 a____或 a____。

（7）当 k____时，关于 x 的方程 $\frac{2}{3}x-3k=5(x+k)+1$ 的解是负数。

（8）若方程 $a(x-2)=2x+3$ 的解为负数，则 a 的范围是________。

2. 选择题

（1）下列方程中，是一元一次方程的有（　　）。

(A) $\frac{x-1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{2-x}{7}$。　　(B) $\frac{1}{x}=x+3$。

(C) $x^2-2x=3$。　　(D) $x+2=y-1$。

（2）在实数范围内和方程 $x-3=7-x$ 同解的方程有

(　　)

(A) $x(x-3)=x(7-x)$； (B) $x^3(x-3)=x^2(7-x)$

(C) $\sqrt{x-1}(x-3)=\sqrt{x-1}(x-7)$；

(D) $(x^2+1)(x-3)=(x^2+1)(x-7)$。

(3) 方程 $2x+3=2(x+1)$ 的解是（　　）

(A) 0； (B) 无数多个解；

(C) 无解； (D) $2\frac{1}{2}$。

(4) 下列方程中，只有一个解且解为零的方程是(　　)

(A) $4x-3=2(2x+1)$；(B) $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}=\frac{x-3}{4}+\frac{5}{12}$；

(C) $\frac{5(x-3)-3}{6}=\frac{x-6}{2}-\frac{x}{3}$；

(D) $2\left(\frac{x}{3}-7\right)=14-\frac{x}{3}$。

(5) 方程 $|x|=1$ 的解是（　　）。

(A) 1；(B) -1；(C) ±1；(D) 无解。

(6) 使方程 $(m+1)x=m-1$ 有解的 m 值是（　　）。

(A) $m\neq0$； (B) $m\neq-1$；

(C) $m\neq\pm1$； (D) $m\neq1$。

(7) 已知 $y=1$ 是方程 $2-\frac{1}{3}(m-y)=2y$ 的解，那么关于 x 的方程 $m(x-3)-2=m(2x-5)$ 的解是（　　）

(A) $x=-10$； (B) $x=0$；

(C) $x=\frac{4}{3}$；　　(D) 无数多个。

(8) 方程$|x-1|+|x-2|+3=0$的解是（　）

(A) $x=1$。 (B) $x=2$。 (C) $x=-3$。 (D) 无解。

(9) 关于x的方程$a(x-a)=b(x-b)$有唯一解，a、b满足的条件是（　）

(A) $a\neq0$，$b=0$；　　(B) $a=0$，$b\neq0$；

(C) $a\neq0$，$b=0$；　　(D) $a\neq b$。

(10) 实数a是方程$|1-x|=1+|x|$的解，则$|a-1|$等于（　）

(A) $a-1$；　　(B) $1-a$；

(C) $\pm(a-1)$；　　(D) 1。

(11) 方程$\frac{0.4x+0.9}{0.5}-\frac{x-5}{2}=\frac{0.03+0.02x}{0.03}$的解是（　）

(A) 7；　(B) 8；　(C) 9；　(D) 10。

(12) 关于x的方程$\frac{n+x}{m}=\frac{x-m}{n}+2$ $(m\neq n)$的解是（　）

(A) $n-m$；　　(B) $n+m$；

(C) $m-n$；　　(D) $-n-m$。

(13) 如果a、b为实数，那么方程$ax=b$的解是（　）

(A) $\frac{b}{a}$；　　(B) $\frac{a}{b}$；

(C) 无解；　　(D) 需要讨论

(14) 如果a增加$p\%$得b($a>0$，$p>0$)，而b减少$q\%$

得 a，那么 p 与 q 的关系是（　　）

(A) $p=q$；　　(B) $p=-q$；

(C) $p=\dfrac{100q}{100+q}$；　　(D) $q=\dfrac{100p}{100+p}$。

(15) 如果 $m\neq 0$，那么关于 x 的方程 $(m+2n)x+n^2+n=(m+n)(2x+n)$ 的解是（　　）。

(A) $\dfrac{mn-n}{m}$；　　(B) $\dfrac{n-mn}{3m}$；

(C) $\dfrac{n-mn}{m}$；　　(D) $\dfrac{n-mn}{2m}$。

3. 解方程

(1) $x=1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{8}+\dfrac{x}{16}$。

(2) $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x-3\right)-3\right]-3\right\}-3=0$。

(3) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}(x-2)+1\right]+3=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{1}{6}(5x-1)+6\right]+2$。

(4) $\dfrac{1}{2}\left\{x-\dfrac{1}{2}\left[x-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right]\right\}=1$。

(5) $\dfrac{0.2x-0.1}{0.3}-\dfrac{0.1x+0.01}{12}=\dfrac{0.2x+0.1}{0.4}-1$。

(6) $x-\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{3+x}{4}}{2}=3-\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{6-x}{3}\right)}{2}$。

(7) $|4x-1|=3$。

(8) $\dfrac{1}{5}(7x+4)+x=\dfrac{1}{2}|3x-5|$。

(9) $\frac{x}{a-b}-\frac{b}{a+b}=\frac{x}{a+b}+\frac{a}{a-b}$.

(10) $(m-3)(m+2)x=m-2(2x+1)$.

4. 应用题

(1) 甲、乙、丙三个数的比是7:9:12，甲、乙两数的和减去丙数等于20，求这三个数。

(2) 运动员攀登一座山峰，上山用18分钟，沿原路下山速度加快1/5，运动员下山时间用多少分钟?

(3) 一次考试出了25个题，答题时只需要在所附的答案中选定一种，答对一题给 4 分，不答或答错一题扣 1 分，如果一个学生得90分，请问他答对了几个题?

(4) 用浓度为20%和80%的两种硫酸，混合制成56%的硫酸100kg，需用浓度20%的硫酸多少kg?

(5) 一个工厂去年的总产值比总支出多 500 万元，今年总产值比去年增加15%，总支出节约10%，因此总产值比总开支多950万元。求去年的总产值和总支出。

(6) 某市举行环城自行车比赛，最快的人在开始后35分钟第一次与最慢的人相遇，已知最慢人的速度的 5/7，环城一周是 6 千米，两人的速度各是多少?

(7) 某工厂甲、乙两个车间共有 445 人，后来由于生产需要，由乙车间调出10人去甲车间，如果调配后甲车间的人数是乙车间人数的1.5倍，求甲、乙两车间原来各有多少人?

(8) 有一铁条，如果围成长与宽的比是 2:1 的长方形则少 20 厘米，如果宽不变围成长与宽的比是1.5:1的长方形，则又多10厘米，求铁条的长?

(9) 要铺设一条650米长的地下管道，由甲、乙两个工程队从两头相向施工，甲队每天铺设48米，乙队比甲队每天多铺设22米，乙队比甲队晚开工21天，问乙队开工多少天后，两队完成整个铺设任务的80%？

(10) 两只缸内共有48桶水，现甲缸给乙缸加水，使乙缸水量增加1倍，然后乙缸又给甲缸加甲缸剩余水的1倍，则两缸内的水量相等。问最初两只水缸内各有多少桶水？

(11) 一个四位数的自然数，它的千位数字是1，若把1移到个位上去，则所得的新数是原数的5倍少69，求这个四位数。

(12) 一蓄水池有甲、乙、丙三个放水管，甲单独放水12小时可以把水池注满，乙单独放水16小时可以把水池注满，丙单独排水15小时可以把水排完，现在甲、乙同时开放6小时后关闭乙管，打开丙管，问再过几小时可把水池注满？

(13) 某学生骑自行车从学校去县城，先以每小时12千米的速度下山，而后又以每小时9千米的速度通过平路，到达县城共用去55分钟，返回时他以每小时9千米的速度通过平路，而后以每小时4千米的速度上山回到学校，又用去$1\frac{1}{2}$小时，问从学校到县城有多少千米？

(14) 容积为5升的容器盛满酒精，第一次倒出它的2/3后，用水加满；第二次倒出它的1/3后，再用水加满，这时它的浓度为20%。问原来酒精的浓度是多少？

(15) 现在是10点和11点间的某一时刻，在这之后6分

钟。分针的位置与在这之前3分钟的时针位置反向成一直线，求现在的时刻。

（四）答案与提示

1. (1) $q=p(1+x\%)$； (2) $31\%\cdot x-\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$；

(3) $k=-1/3$； (4) $m=2$； (5) $a=2$、$b=1$； (6) $a<2/3$或$a>2$； (7) $k>-1/8$； (8) $-3/2<a<2$。

2. (1) A；(2) D；(3) C；(4) C；(5) C；(6) B；(7) B；(8) D；(9) D；(10) B。

(11) 提示：用验证法解。用 $x=7$ 代入方程得，左边 $=32/5$，右边 $=17/3$，可排除（A）；用$x=8$代入方程得，左边 $=67/10$，右边 $=19/3$，可排除（B）；用 $x=9$ 代入方程得，左边 $=7$，右边 $=7$，因此应选（C）。

(12) 提示：用验证法解之。用（A）、（B）分别代入方程解之得，左≠右，故应既排除（A）又排除（B），用（C）代入方程解，得左 = 右 = 1，则应选（C）。

(13) 提示：用排除法解之。令 $a=0$，此时 b/a没有意义，故可排除（A）；令 $a=1$，$b=2$，此时方程的解是 2，故可排除（B）及（C），所以应选（D）。

(14) 提示：用特殊值法解。令 $a=100$，$q=25$，由题意得 $a(1+p)=b$，于是$b=100(1+25\%)=125$；又由$b(1-q\%)=a$得$q=\left(1-\frac{a}{b}\right)\times100=\left(1-\frac{100}{125}\right)\times100=20$。通过上述数据，可以排除（A）、（B）、（C），而恰好满足（D），故

应选（D）。

（15）提示：用特殊值法解之。令$m=3$，$n=2$，可得原方程的解是$-\frac{4}{3}$，而此时（A）$\frac{mn-n}{m}=\frac{4}{3}$；（B）$\frac{n-mn}{3m}=-\frac{4}{9}$；（C）$\frac{n-mn}{m}=-\frac{4}{3}$；（D）$\frac{n-mn}{2m}=-\frac{2}{3}$。这样就排除了（A）、（B）和（D），故应选（C）。

3.（1）$x=16$。（2）$x=90$。（3）x为任何实数。（4）$x=17/6$。（5）$x=1/2$。（6）$x=3$。（7）$x_1=1$，$x_2=-1/2$。（8）$x=17/39$。（9）提示：需要讨论。当$b\neq 0$时，$x=\frac{a^2+b^2}{2a}$；当$b=0$时，无解。（10）原方程可化为：

$$m^2x-mx-6x+4x=m-2.$$

$$\therefore\quad (m-2)(m+1)x=m-2. \qquad \text{(i)}$$

① 当$m-2=0$时，（i）式为$0\cdot x=0$，x可为任何实数；

② 当$m-2\neq 0$时，若$m+1\neq 0$，则$x=\frac{1}{m+1}$；若$m+1=0$，则$0\cdot x=-3$，无解。

∴ 当 $m\neq 2$ 且 $m\neq -1$ 时，$x=\frac{1}{m+1}$；

当$m=2$时，x可为任何实数；

当$m\neq 2$且$m=-1$时，原方程无解。

4.（1）提示：设甲、乙、丙三个数的最大公约数为x，则甲、乙、丙三个数分别为$7x$、$9x$和$12x$。再根据题意列出方程，即可得解。

(2) 提示：两种解法。一种是算术解法（略）；另一种是代数解法。即设两个未知数，解时消去一个未知数。略解为：设上山时速为 x 千米/小时，下山所用时间为 t 小时，则有

$$t=\frac{18x/16}{\left(1+\frac{1}{5}\right)x}$$ ，解之 $t=\frac{1}{4}$（小时）=15（分钟）。

(3) 提示：设答对了 x 个题，则有

$4x-(25-x)\times 1=90$，解之 $x=23$。

(4) 设需用浓度为20%的硫酸 x kg，则有

$20\%\cdot x+80\%\times 100=100\times 50\%$，解之 $x=40$。

(5) 提示：若设去年总产值为 x 万元，那么去年的总支出应为（$x-500$）万元，今年的总产值为$(1+15\%)$万元，今年的总支出为（$x-500)(1-10\%$）万元。根据题意列出方程，求出 $x=2000$（万元），那么去年的总支出是（$x-500$）万元，即1500万元。

(6) 设最快人的速度是 x 千米，则最慢人的速度应是 $\frac{5}{7}x$ 千米。有 $35x-\frac{5}{7}x\times 35=6$

解之得 $x=\frac{3}{5}$，∴ $\frac{5}{7}x=\frac{3}{7}$。

(7) 设甲车间原有 x 人，则乙车间原有（$445-x$）人，有

$x+10=(445-x-10)\times 1.5$，

$x=257$。

把 $x=257$ 代入 $445-x$ 中，得 $445-257=188$。

(8) 略解：设宽为 x_{cm}，由题意可得

$$2(2x+x)-20=2(1.5x+x)+10,$$

解之　$x=160$。

(9) 设乙队开工 x 天后，两队完成整个铺设任务的80%，由题意可得

$$48(x+1)+(48+22)x=650\times 80\%.$$

解之　$x=4$。

(10) 设甲缸原有水为 x 桶，则乙桶原有水应为 $(48-x)$ 桶，有

$$2[x-(48-x)]=2(48-x)-[x-(48-x)]$$

解得　$x=30$，$48-x=18$。

(11) 设除去第一位数字以外的 3 位数为 x，由题意可得

$$5(1\times 10^3+x)-69=10x+1,$$

解得　$x=986$，∴　这四位数是1986。

(12) 设再过 x 小时可以把水池注满，则有

$$\frac{6+x}{12}+\frac{6}{16}-\frac{x}{15}=1$$

解得　$x=7.5$。

(13) 提示：此题可设间接未知数，即设山路之长为 x 千米，则有

$$9\left(\frac{11}{12}-\frac{x}{12}\right)=8\left(1\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)$$

由此方程求得 $x=3$。由 $x=3$，再求得从学校到县城是 9 千米。

(14) 设原来酒精浓度为 $x\%$，则有

$$5\cdot x\%\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=5\times 20\%$$

解之 $x=90$。

(15) 提示：设现在的时刻是10时 x 分，时针比 10 点时的位置前进了$x/12$格，6分钟后分针前进了 6格，3分钟前时针在现在位置前3/12格。由题意，得

$$\left[10-\left(\frac{x}{12}-\frac{3}{12}\right)\right]+(x+6)=30$$

解此方程得 $x=15$。

答：现在的时刻是10点15分钟。

四　一元一次不等式

（一）基本原理

1．有理数的性质

（1）两个正数，绝对值大的数较大；两个负数，绝对值大的反而小。

（2）已知a是有理数，

当$a\geqslant 0$时，$|a|=a$；

当$a<0$时，$|a|=-a$。

（3）正数大于零和一切负数，负数小于零和一切正数。

2．不等式的基本性质

（1）若$a>b$，则$a-b>0$；若$a<b$，则$a-b<0$。

（2）若$a>b$，则$a\pm c>b\pm c$；若$a<b$，则$a\pm c<b\pm c$

（3）若$a>b$，$c>0$，则$ac>bc$；若$a>b$，$c<0$，则$ac<bc$。

（4）若$a>b$，$b>c$，则$a>c$。

（5）若$a>b>0$，$c>d>0$，则$ac>bd$。

3．常用的两个基本不等式

（1）a是有理数时，$a^2\geqslant 0$（当$a=0$时，取等号）；

（2）a是有理数时，$|a|\geqslant 0$（当$a=0$时，取等号）。

4．一元一次不等式

任何一个一元一次不等式都可化成标准形式$ax>b$（或

$ax<b$）。它的解有下列情况：

(1) 当 $a\neq 0$ 时，$\begin{cases} a>0, & x>\dfrac{b}{a}. \\ a<0, & x<\dfrac{b}{a}. \end{cases}$

(2) 当 $a=0$ 时，$\begin{cases} b\geqslant 0, & \text{不等式的解集为空集;} \\ b<0, & \text{不等式的解集为全体有理数.} \end{cases}$

（二） 范例与方法

例1 求不等式 $\dfrac{x}{3}-\left(1-\dfrac{3}{2}x\right)\leqslant\dfrac{x+8}{6}+1$ 的非负整数解。

思路：先求不等式的解集，在解集中找出所有的非负整数。

解：化简不等式 得 $2x-6\left(1-\dfrac{3}{2}x\right)\leqslant x+14$。

整理 得 $10x\leqslant 20$

∴ $x\leqslant 2$

∴ 不等式的非负整数解为 0,1,2。

例2 关于 x 的不等式 $a(x-1)>x+1-2a$ 的解集是 $x<-1$，试求 a 的值。

思路 将不等式化简整理成标准不等式，结合 $x<-1$ 的条件。

解：原不等式转化为 $ax-x>1-a$。

整理 得 $(a-1)x>-(a-1)$

显然 当 $a-1<0$ 时，不等式的解为 $x<-1$。

$\therefore\quad a<1$。

例3 已知a、b是有理数，下列四个式子，哪一个正确（有唯一正确答案）（　　　）

(A) 若$a>b$，则$a^2>b^2$；(B) 若$|a|>b$，则$a^2>b^2$；

(C) 若$a>|b|$，则$a^2>b^2$；(D) 若$a^2>b^2$则$|a|>b^2$。

思路 要肯定某个结论的正确不容易，而否定某个结论，只要举出一个反例即可。

解： 从已知条件：(A) $a=-1, b=-2, a>b$但$(-1)^2>(-2)^2$不成立，得(A)不正确。同样(B)也不正确。(C)不易判断，先判断(D)。当$a=-3$，$b=-2$，有$a^2>b^2$，但$|-3|>(-2)$不成立。故(C)正确。

例4 已知a，b都是正数，$x>1$。下列不等式中哪一个正确（有唯一正确答案）。

(A) $\dfrac{bx}{a(x+1)}<\dfrac{bx}{a(x-1)}<\dfrac{b(x+1)}{ax}<\dfrac{b(x+1)}{ax}$；

(B) $\dfrac{b(x-1)}{ax}<\dfrac{b(x+1)}{ax}<\dfrac{bx}{a(x+1)}<\dfrac{bx}{a(x-1)}$。

(C) $\dfrac{bx}{a(x-1)}<\dfrac{b(x+1)}{ax}<\dfrac{b(x-1)}{ax}<\dfrac{bx}{a(x+1)}$；

(D) $\dfrac{b(x-1)}{ax}<\dfrac{bx}{a(x+1)}<\dfrac{b(x+1)}{ax}<\dfrac{bx}{a(x-1)}$。

思路 用满足条件的特殊值代替字母，通过计算特例来比较：$\dfrac{bx}{a(x+1)}$，$\dfrac{bx}{a(x-1)}$，$\dfrac{b(x-1)}{ax}$，$\dfrac{b(x+1)}{ax}$，的大小。

解： 设$a=b=1$，$x=2$。

$$\frac{bx}{a(x+1)}=\frac{2}{(2+1)}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{bx}{a(x-1)}=\frac{2}{(2-1)}=2.$$

$$\frac{b(x-1)}{ax}=\frac{(2-1)}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{b(x+1)}{ax}=\frac{(2+1)}{2}=\frac{3}{2}.$$

$\because \quad \frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{2}<2,$

$\therefore \quad \frac{b(x-1)}{ax}<\frac{bx}{a(x+1)}<\frac{b(x+1)}{ax}<\frac{bx}{a(x-1)}.$

故 (D)正确。

说明 上面用特殊值法进行比较大小，利用这种方法解选择题，判断题简便迅速，但要注意，在特殊情况下成立的命题是一般情况下命题成立的必要条件。不能用特殊情况来替代一般情况的证明。

例5 某旅社有房间若干，准备安排一行人住宿。如果每间安排 4 人还余下22人；如果每间安排 8 人，还有一个房间不满不空。求这一行人数和房间数。

思路 设有房间 x 间，如果每间安排 8 人这样有 $8x$ 个人，由于有一间人数不够 8 人，这样总人数小于 $8x$。如果减少一间，每间安排 8 人，显然有些人没有房间。这样总人数大于$8(x-1)$。

解：设客房有 x 间，则总人数 $(4x+22)$ 人。

根据题意　得

$$8(x-1)<4x+22<8x$$

解之得　$\dfrac{22}{4}<x<\dfrac{30}{4}$

∵　房间数为整数，∴　$x=6$。

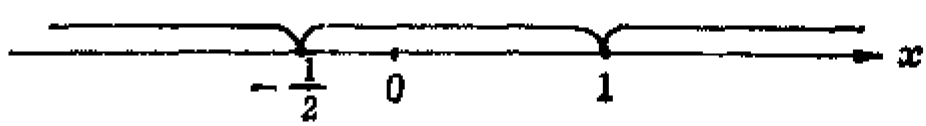
总人数　$4x+22=4\times6+22=46$

答　这一行46人。房间有6间。

说明　解不等式应用问题与解方程应用问题类似，方程应用是找等量关系，而不等式应用是找不等量关系。

例6　求不等式$|x-1|+|2x+1|>3$的解集。

思路　先去掉绝对值符号。显然$x=-\dfrac{1}{2}$，$x=1$是确定$x-1$和$2x+1$正、负号的分界点，如下图：



需进行讨论。

解：当$x\leqslant-\dfrac{1}{2}$时，　　　　(1)

$$|x-1|=-(x-1)=1-x.$$

$$|2x+1|=-(2x+1)=-2x-1.$$

原不等式变为　$1-x-2x-1>3$。

解　之得　$x<-1$。　　　　(2)

由(1)和(2)　知　$x<-\dfrac{1}{2}$是原不等式的解。

当　$-\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，　　(3)

$|x-1|=-(x-1)=1-x$。

$|2x+1|=2x+1$

原不等式变为　$1-x+2x+1>3$

解之得　$x>1$。　　(4)

由(3)和(4)知，原不等式的解集为空集。

当　$x\geqslant 1$ 时，　　(5)

$|x-1|=x-1$，$|2x+1|=2x+1$

原不等式变为　$x-1+2x+1>3$

解之得　$x>1$。　　(6)

由(5)和(6)知，原不等式的解为 $x>1$。

由以上的讨论，原不等式的解集为$x<-\frac{1}{2}$或$x>1$。

例7　已知　$x>0$，(1) 求证　$\frac{100+x}{17+x}<\frac{100}{17}$。

(2) 在分数$\frac{100+x}{17+x}$和$\frac{100}{17}$之间只有两个正整数，求x的一切可能正整数值。

思路　欲证$A>B$，只要证$A-B>0$成立即可。这是比较两数大小的基本方法，称为作差法。

(1) **证**：作差$\frac{100+x}{17+x}-\frac{100}{17}$

$$=\frac{17(100+x)-100(17+x)}{17(17+x)}$$

即 $\frac{100+x}{17+x}-\frac{100}{17}=-\frac{83x}{17(17+x)}$

$\because$ $x>0$，$\therefore$ $-\frac{83x}{17(17+x)}<0$。

即 $\frac{100+x}{17+x}-\frac{100}{17}<0$。

因此 $\frac{100+x}{17+x}<\frac{100}{17}$。

(2) **解**：因为 $\frac{100}{17}=5\frac{15}{17}$，易知$5<\frac{100}{17}<6$。

$\because$ 在$\frac{100+x}{17+x}$和$\frac{100}{17}$之间只有两个正整数，$\therefore$ 这两个正整数只能是3和4。

因此 $2<\frac{100+x}{17+x}<3$。

化简 得 $2(17+x)<100+x<3(17+x)$。

解之得 $24\frac{1}{2}<x<66$。

故x的整数解为 25，26，27，……64，65。

例8 已知a,b,c都不为零，$a+b+c=0$。

试证 ab,bc,ca中至少有一个是负数。

思路 显然只要证$ab+bc+ca<0$即可，就能说明ab，bc,ca中至少有一个是负数。

证：由已知条件 $a+b+c=0$。

有 $0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$。

$\because$ $a^2+b^2+c^2$恒大于零，$\therefore$ $2ab+2bc+2ca<0$。

即　$ab+bc+ca<0$。

因此　ab,bc,ca中至少有一个负数。

例9　已知 x、y、z 都是小于 1 的正数。

试证　$x(1-y)y(1-z)z(1-x)\leqslant\frac{1}{64}$。

思路　观察不等式两端，发现只要能证得 $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$，$y(1-y)\leqslant\frac{1}{4}$，$z(1-z)\leqslant\frac{1}{4}$ 成立。再利用不等性质，即可证之。

证：先证 $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$。

作差　$\frac{1}{4}-x(1-x)=\frac{1}{4}-x+x^2=\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}x+x^2$

$$=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$$

$\because$　$0<x<1$，　$\therefore$　$\frac{1}{2}-x\geqslant0$ 或 $\frac{1}{2}-x<0$。

但　$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$为非负数，即$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\geqslant0$。

$\therefore$　$\frac{1}{4}-x(1-x)\geqslant0$，即 $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$。

同理　可证　$y(1-y)\leqslant\frac{1}{4}$，$z(1-z)\leqslant\frac{1}{4}$ 成立

$\because$　$x(1-x)>0$，$y(1-y)>0$，$z(1-z)>0$。

$\therefore$　$x(1-x)y(y-y)z(1-z)\leqslant\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$。

故　$x(1-y)y(1-z)z(1-x)\leqslant\frac{1}{64}$。

（三） 练习题

1．求不等式 $\frac{2x+6}{3}-x \geqslant \frac{x-1}{2}+\frac{x}{6}$ 的非负整数解。

2．m 取何值时，不等式 $2x+m>mx+1$ 的解集为任何有理数。

3．试比较下列数的大小：

(1) $\frac{10}{17}$，$\frac{12}{19}$，$\frac{15}{23}$，$\frac{20}{33}$，$\frac{60}{37}$ 用"<"将它们连结起来。

(2) $-\frac{32}{29}$，$-\frac{12}{11}$，$-\frac{16}{15}$，$-\frac{16}{89}$ 用">"将它们连结起来。

4．已知 $a>0$，$b<0$，$a+b<0$，试将 a，$-a$，b，$-b$，$a-b$，$b-a$ 按从小到大的次序排列。

5．已知 $4 \leqslant x \leqslant 10$，$\frac{1}{2}x \leqslant y \leqslant 2x$，$z=x+y$，则 z 的范围是在哪两个数之间。

6．第一部电子计算机存储了 $5^7 \times 7^5$ 个数据，第二部电子计算机中存储 $5^5 \times 7^7$ 个数据。试比较两个电子计标机储存数据的大小。

7．一个两位数，个位上的数比十位上的数大3，且这个两位数大于20而小于30。求这个两位数。

8．某宾馆一楼客房比二楼少5间，一行48人若全安排住一楼，每间住 4 人，房间不够；每间住 5 人，有房间没住满5人，又若全安排住二楼，每间住 3 人，房间不够；每间住 4 人，有房间没住满 4 人，求宾馆一楼有几间客房。

9. 将一些同学编成12组参加劳动。如果每组分配人数比预定人数多2名，那么同学总人数将超过84名；如果每组分配人数比预定人数少1名，那么总人数不到60人。求每组同学人数。

10. 求不等式 $|x|-|x+1|<1$的解集。

11. 已知$x^2>y^2$，且$x>0$，$y>0$。求证 $x>y$。

12. 已知a、b为任何有理数。求证$a^2+b^2\geqslant 2ab$。

13. 已知a、b、c为有理数，$x=a^2-b$，$y=b^2-c$，$z=c^2-a+1$。求证x、y、z中至少有一个是正数。

14. 已知$abcd>0$，$a<0$，$b<d$，$d>0$，那么正确的是哪一个。

(A) $a<0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$。

(B) $a>0$，$b<0$，$c>0$，$d<0$。

(C) $a<0$，$b<0$，$c<0$，$d>0$。

(D) $a<0$，$b>0$，$c<0$，$d<0$。

(E) 以上答案都不对。

15. 如果$a<b<c$，$x<y<z$，下列四个代数式的值最大的是哪一个(　　　　)

(A) $ax+by+cz$；(B) $ax+bz+cy$；

(C) $ay+bx+cz$；(D) $az+bx+cy$。

16. 已知$a<0$，$-1<b<0$，则a，ab，ab^2之间的大小关系是：

(A) $a>ab>ab^2$；　(B) $ab^2>ab>a$；

(C) $ab>a>ab^2$；　(D) $ab>ab^2>a$。

（四） 提示与答案

1. 非负整数解是$x=0$，1,2。

2. 将不等式整理为$(2-m)x>1-m$。显然当$2-m$等于零时，即$m=2$时，不等式变为$0\cdot x>1-m$。解集为全体有理数。

3. 解：（1）因为分子的最小公倍数为60。

$$\frac{10}{17}=\frac{60}{102},\quad \frac{12}{19}=\frac{60}{95},\quad \frac{15}{23}=\frac{60}{92},\quad \frac{20}{33}=\frac{60}{99},\quad \frac{60}{37}.$$

不难得出$\frac{60}{102}<\frac{60}{99}<\frac{60}{95}<\frac{60}{92}<\frac{60}{37}$。得$\frac{10}{17}<\frac{20}{33}<\frac{12}{19}<\frac{15}{23}<\frac{60}{37}$。

（2）同上。得$-\frac{16}{15}>-\frac{16}{89}>-\frac{12}{11}>-\frac{32}{29}$。

4. 提示：用特殊值法。$\because$ $a>0$，$b<0$，$a+b<0$设$a=1$，$b=-2$。此时满足$a+b<0$。再计算它们的值。答案为 $b-a<b<-a<a<-b<a-b$。

5. 解：$\because$ $4\leqslant x\leqslant 10$，$\frac{1}{2}x\leqslant y\leqslant 2x$，$\therefore$ $2\leqslant y\leqslant 20$。

$4+2\leqslant x+y\leqslant 10+20$，故 $6\leqslant z\leqslant 30$

6. 解：$5^7\times 7^5-5^5\times 7^7=5^5\times 7^5(5^2-7^2)$

$\because$ $5^2-7^2<0$。$\therefore$ $5^7\times 7^5-5^5\times 7^7<0$。

故 第一部电子计算机储存的数据多。

7. 这个两位数是23。

8. 解：设一楼客房有x间，则二楼客房有$(x+5)$间。

根据题意 得 $\begin{cases} 4x<48 \\ 5x>48 \\ 3(x+5)<48 \\ 4(x+5)>48. \end{cases}$

解得 $\frac{48}{5}<x<11$，$x=10$。

答：宾馆一楼有10间客房。

9. 每组有6名同学。

10. 分三段讨论：$x<-1$，$-1\leqslant x<0$，$x\geqslant 0$。

不等式的解集为$x\geqslant 0$。

11. 证： $\because$ $x^2>y^2$，$\therefore$ $x^2-y^2>0$。

而 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，$x>0$，$y>0$。

由 $x+y>0$，$(x+y)(x-y)>0$。

$\therefore$ $x-y>0$。

12. 用作差法比较大小。

13. 只须证$x+y+z>0$即可。

14. (E) 正确。

15. 用作差法比较大小。(A) 最大。

16. 用特殊值法，计算特例。(D) 正确。

五　二元一次不定方程

（一）　基本原理

1. 不定方程：含有未知数的个数多于方程个数的方程（或方程组）叫做不定方程（或不定方程组）。

2. 二元一次不定方程：形如$ax+by=c$（a、b是不为零的常数）的方程。

3. 不定方程的解：一般来说，简单的不定方程是在一定条件下求解。通常求它的整数解。

3. 解不定方程一般涉及下列知识：

（1）正整数的唯一分解定理。

（2）奇、偶数的基本性质。

（3）不等式的性质及有关不等式。

（二）　范例与方法

一　逐步分离整数法

例1　试说明：方程$6x+3y=17$没有整数解。

思路　假设方程有整数解，即x、y为整数。则y一定可以用x的代数式表示，并且这个代数式是由整式与整数表示。否则，y不是整数。由上面的分析，从而得知本题的解题方法。

解：将方程$6x+3y=17$变形，得$y=\frac{-6x+17}{3}$。

若方程有整数解，则y一定可以表示为整数与整式和的形式。

$$y=\frac{(-6x+15)+2}{3}=-2x+5+\frac{2}{3}.$$

当x为整数时，$(-2x+5)$也是整数。

$\because$ $(-2x+5)+\frac{2}{3}$不可能为整数。

$\therefore$ $y=-2x+5+\frac{2}{3}$，y不可能为整数。由上面的讨论，得知

方程$6x+3y=17$没有整数解。

例2 求方程 $3x+5y=20$的整数解。

思路 把方程变形为 $x=\frac{20-5y}{3}=6-y+\frac{2-2y}{3}$

若 x、y都是整数，则$\frac{2-2y}{3}$也必须是整数。设$\frac{2-2y}{3}=t$（t是整数）。这样x、y可表示为

$$x=6-y+t,\quad y=\frac{2-3t}{2}. \qquad (1)$$

从(1)知，当t是整数，y也是整数时，则$x=6-y+t$一定是整数。问题是t为整数时，$y=\frac{2-3t}{2}$能否表示为整数。

由 $y=\frac{2-3t}{2}=1-t-\frac{t}{2}$，当 t 是2的倍数时，y 表示是整数。不妨设 $\frac{t}{2}=u$（u是整数） (2)

则 $t=2u$，$y=1-3u$。

由 $x=6-y+t$，$t=2u$。得 $x=6-(1-3u)+2u=5u+5$。

即 $\begin{cases}x=5u+5\\y=1-3u\end{cases}$（$u$是整数），

通过（1）和（2）两步逐步分离整数的方法。x、y 可以用整数和整式表示。所以方程有整数解。

解法 （略）答案 $\begin{cases}x=5u+5\\y=1-3u\end{cases}$（$u$是整数）。

说明 逐步分离整数法是求二元一次不定方程整数解的有效方法，解题步骤如例2的分析。另外（例2）不定方程的解的形式是用式子表示的，表明方程有无穷多解。

例3 甲种汽车运货每次装货物3吨，乙种汽车运货每次装货物2.5吨。现在有货物38吨，要一次运完，要求每辆汽车都要装满。问甲、乙两种汽车各需要多少辆。

解：设甲种汽车需要 x 辆，乙种汽车需要 y 辆。根据题意 $3x+2.5y=38$，$y=\frac{76-6x}{5}=15-x+\frac{1-x}{5}$。

设 $\frac{1-x}{5}=t$（t是整数），则 $x=1-5t$。

由 $y=15-x+\frac{1-x}{5}$，得 $y=15-(1-5t)+t=14t+6$。

$\therefore$ 方程的整数解是$\begin{cases}x=1-5t\\y=14t+6\end{cases}$（$t$是整数）。

由于x、y表示所需要汽车辆数，所以x、y表示为非负整数，即$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$。

因此$\begin{cases}1-5t\geqslant 0 & (1)\\14t+6\geqslant 0 & (2)\end{cases}$

解这个不等组。由（1）$t\leqslant\frac{1}{5}$，由（2）$t\geqslant-\frac{7}{3}$。

即 $-\frac{7}{3}\leqslant t\leqslant\frac{1}{5}$。$t$是整数，$\therefore t=-2$，$-1$，$0$。

把$t=-2$，-1，0分别代入整数解的表达式中，得

$\begin{cases}x=11\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=6\\y=8,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=14.\end{cases}$

答：甲种汽车11辆乙种汽车2辆，或甲种汽车6辆乙种汽车8辆，或甲种汽车1辆乙种汽车14辆装满货物就可一次运完。

二 因式分解法

例4 求不定方程$x^2-y^2=35$的正整数解。

思路 观察发现方程左端可因式分解。

即 $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$。若x、y表示整数，则$(x+y)$与$(x-y)$的积为35。说明$(x+y)$、$(x-y)$都是35的一个因数。

根据正整数的唯一分解定理：

$35=5\times 7$，$35=5\times 7=1\times 35$。

欲求方程的正整数解，这样$x+y>x-y$。不定方程间

题转化成可解的二元一次方程组问题。

解：原方程变为 $(x+y)(x-y)=35$。

设x、y是正整数，则$x+y>x-y$。

原方程转化为以下方程组

$$\begin{cases}x+y=7\\x-y=5,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=35\\x-y=1.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=6\\y=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=18\\y=17.\end{cases}$$

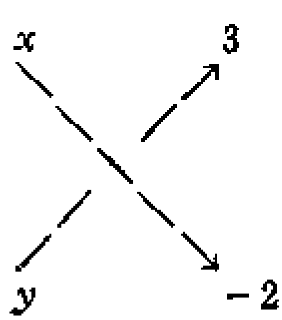
∴ 原方程的正整数解：$x=6$，$y=1$或$x=18$，$y=17$。

说明 如果本题改为求整数解。这要考虑35的正负因数。即 $35=(\pm5)\times(\pm7)=(\pm1)\times(\pm35)$。这样，原方程问题转化为求八组方程组的整数解。因此，用因式分解和正整数质因数分解是解不定方程的常用方法。

例4 求不定方程 $xy-2x+3y=12$ 的解。

思路 尝试用因式分解的方法。将方程变形为$xy-2x+3y-12=0$。方程的左端含有xy二次项、$-2x+3y$一次项及常数项-12。把方程左端的多项式因式分解。其方法如下：

二次项　　　　常数项



$\xrightarrow{\text{十字相乘}}$ 得 $-2x$ 和 $3y$，

相加 $-2x+3y$，恰好是方程中一次项．这样方程转化为 $(x+3)(y-2)=6$。

解：由原方程因式分解，得 $(x+3)(y-2)=6$。

$\because$ 6的因数有 ±1、±2、±3、±6。

原方程转化为：

$$\begin{cases}x+3=-1,\\y-2=-6.\end{cases}\quad\begin{cases}x+3=1,\\y-2=6.\end{cases}\quad\begin{cases}x+3=-2,\\y-2=-3.\end{cases}\quad\begin{cases}x+3=2,\\y-2=3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+3=-6,\\y-2=-1.\end{cases}\quad\begin{cases}x+3=6,\\y-2=1.\end{cases}\quad\begin{cases}x+3=-3,\\y-2=-2.\end{cases}\quad\begin{cases}x+3=3,\\y-2=2.\end{cases}$$

解以上八个方程组，得不定方程 $xy-2x+3y=12$ 的八组解：

$$\begin{cases}x=-4\\y=-4,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2\\y=8,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-5\\y=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1\\y=5,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-9\\y=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=3\\y=3,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-6\\y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=0\\y=4.\end{cases}$$

说明　初中阶段所学习的“十字相乘法”因式分解二次三项式的方法，对于一个含有二次项、一次项、常数项的多项式进行因式分解其方法与“十字相乘法”因式分解二次三项方法类似。

三　偶数、奇数分析法

例5　求证：不定方程 $x^2-y^2=4k+2$（k 是整数）没有整数解。

思路　整数可以分成奇数、偶数两类．假若方程有整数解．则 x、y 可以表示为奇数或偶数．这样对方程进行奇、偶数解讨论。

解：假设方程有整数解，则x、y表示为整数。

$\because \quad x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

当x、y同奇数或同偶数时，$x-y$与$x+y$同为偶数。

当x、y其中一个是奇数，另一个为偶数时，$x-y$与$x+y$同奇数。

若$x+y$与$x-y$同为偶数时，则方程的左端$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$是偶数，是4的倍数，可表示为$4k$（k是整数）。方程的右端是$4k+2$的整数，左端$\neq$右端。因此方程没有偶数解。

若$x+y$与$x-y$同为奇数时，则方程的左端$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$是奇数，奇数可表示为$(4k+1)$或$(4k+3)$的整数。方程的右端是$4k+2$的整数，左端$\neq$右端。因此方程没有奇数解。

综上讨论，方程没有整数解。

例6 已知三个质数的积，恰好等于它们的和的5倍，求这三个质数。

思路 设三个质数分别为x、y、z。根据已知条件$xyz=5(x+y+z)$。通过方程得知xyz能被5整除，说明xyz积的末位数字是零或5。x、y、z其中一个数一定是偶数，这个数是2，另一个数一定是5，不妨设$x=2$，$y=5$。则$z=7$。

解法 （略）。

说明 在质数范围内，只有一个偶数2，其余都是奇数。对于（例5）的奇偶性的讨论，运用了$4k+1$或$4k+3$表示奇数，这是常用的方法。

四 不等式法

例7 用100元钱恰好买三种笔共100支，其中金笔每支10元，铱金笔每支3元，圆珠笔每支0.5元，试问三种笔各买几支。

思路 设x、y、z表示三种笔的支数。因为所买笔的支数应当是正整数，所以$x>0$，$y>0$，$z>0$。利用这一条件可以求出x、y、z的取值范围。

解：设买x支金笔，y支铱金笔，z支圆珠笔。根据题意

$$\begin{cases} x+y+z=100 & (1) \\ 10x+3y+0.5z=100 & (2) \end{cases}$$

由(1)、(2)化简整理，得 $19x+5y=100$。

$\because$ x、y是正整数，即$x>0$、$y>0$。

$\therefore$ $x>0$，$\dfrac{100-19x}{5}>0$。解这两个不等式得

$0<x<\dfrac{100}{19}$。

$\because$ x是整数，$0<x<\dfrac{100}{19}$，$\therefore x=1,2,3,4,5$。

又$\because$ $y=\dfrac{100-19x}{5}$，y是正整数，$\therefore 100-19x$必是5的倍数。把$x=1,2,3,4,5$分别代入$y=\dfrac{100-19x}{5}$中。只有$x=5$时，y为整数，且$y=1$。

当 $x=5$，$y=1$时，$z=94$。

因此，方程组的解是$\begin{cases} x=5 \\ y=1 \\ z=94. \end{cases}$

答：用100元恰好买5支金笔，1支钛金笔，94支圆珠笔。

例8 求方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$的正整数解，其中$x\neq y\neq z$。

解：$\because$ $x\neq y\neq z$，又x、y、z为正整数，

$\therefore$ 可以设$x<y<z$，即$\frac{1}{x}>\frac{1}{y}>\frac{1}{z}$。

这样 $\frac{1}{x}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$，

有 $\frac{1}{x}<1<\frac{3}{x}$，得$1<x<3$，而$x$为正整数，$\therefore$ $x=2$。

当$x=2$时，方程变为 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$。

又$\because$ $\frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y}+\frac{1}{y}$，

有 $\frac{1}{y}<\frac{1}{2}<\frac{2}{y}$，得$2<y<4$，而$y$为正整数，$\therefore y=3$。

把$x=2$，$y=3$代入方程中，解得$z=6$。

$\therefore$ 方程的正整数解是$x=2$，$y=3$，$z=6$。

说明 利用简单的不等式估计解的范围是解不定方程的重要方法。（例8）如果不限定条件$x\neq y\neq z$，方程将有七组整数解。

（三） 练习题

1. 求方程$2x+5y=29$的整数解。

2. 求方程$3x+8y=52$的正整数解。

3. 求方程 $7x-4y=2$ 的正整数解。

4. 求证：方程 $x^2+y^2-8z=6$ 无整数解。

5. 有一个整数，加上100则为一完全平方数，如果加上168，则为另一个完全平方数。求这个数。

6. 一个两位数，十位上数字的 6 倍与个位上数字的4倍的和再与原数相加等于它的两位数字互换位置所得到的数。求所有这样的正整数。

7. （我国古代有名的“孙子问题”）今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？

8. 求方程 $x^2+xy-x-2y-4=0$ 的整数解。

9. 求方程 $x^y+1=z$ 的质数解。

10. 求方程 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{u^2}=1$的所有正整数解。

11. 在1992年中，将有一些青年人的年龄与他们出生年的数字之和相同，求这些青年人的出生年代。

（四） 提示与答案

1. 根据逐步分离整数法 $y=5+\frac{4-2x}{5}$，

设 $\frac{4-2x}{5}=t$（t是整数），则$y=5+t$。

由 $\frac{4-2x}{5}=t$，得 $x=2t-2+\frac{t}{2}$。

再设 $\frac{t}{2}=u$（u是整数），$t=2u$。

解得 $\begin{cases}x=5u-2\\y=2u+5\end{cases}$（$u$是整数）。

2. 根据逐步分离整数法，得方程的整数解是

$$\begin{cases}x=-4u+20\\y=u-1\end{cases}（u是整数），$$

因为求方程的正整数解相当于求不等式组

$$\begin{cases}-4u+20>0\\u-1>0\end{cases} 的整数解，$$

求得 $1<u<5$，$u=2,3,4$。

所以方程的正整数解是 $\begin{cases}x=12\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=8\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=3.\end{cases}$

3. 正整数解是 $\begin{cases}x=4t-2\\y=7t-4\end{cases}$（$t$是正整数）。

4. 证：假设方程有整数解，即x、y、z是整数．将方程变形 $x^2+y^2=8z+6$。

若x、y都是偶数，则x^2+y^2是 4 的倍数，而 $8z+6$ 不是4的倍数．方程的左、右两端不相等。

若 x、y 都是奇数，不妨设 $x=2m+1$，$y=2n+1$（m、n是整数），则 $x^2+y^2=4[m(m+1)+n(n+1)]+2$，其中$m(m+1)$与$n(n+1)$是偶数。这样 x^2+y^2可表为 $8k+2$ 的形式．而方程的右端是$8z+6$，方程的左、右两端不相等。

若x、y是一个奇数一个偶数，则 x^2+y^2 是奇数而 $8z+6$ 是偶数。方程的左、右两端不相等。

所以　方程没有整数解。

5．解：设这个整数为x，依题意得方程组

$$\begin{cases}x+100=m^2 & (1)\\ x+168=n^2 & (2)\end{cases}$$

其中 m、n 是正整数。

(2)－(1)得$(n-m)(n+m)=68$。这里$n-m$，$n+m$同奇偶性，只有$n-m$，$n+m$同为偶数，才能使此式成立。

∵　m、n都是正整数，得　$n+m>n-m$。

由　$(n+m)(n-m)=68=2\times34=4\times17$，

则　$n+m=34$，$n-m=2$。

解得　$n=18$，$m=16$，$x=156$。

6．解　设这个两位数的十位上数字为x，个位上数字为y。依题意

$$6x+4y+10x+y=10y+x.$$

$$3x-y=0,\ y=3x.$$

∵　$0\leqslant x\leqslant9$，$0<y\leqslant9$，方程转化为

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant9\\ 0<3x\leqslant9.\end{cases}$$

这个不等式组的整数解为$x=1$，2,3。∴　$y=3$，6,9。

这个两位数是　13、26、39。

7．本题简意是：一些东西的数目被3除余2，被5除余3，被7除余2．求这些东西有多少？

解　设物的数目为m，被3、5、7除的商分别为：x、y、z。依题意

$$\begin{cases}3x+2=m & (1)\\ 5y+3=m & (2)\\ 7z+2=m & (3)\end{cases}$$

先消去 m。

$(1)-(3)$，得　$3x-7z=0$　　(4)

$(1)-(2)$，得　$3x-5y=1$　　(5)

由(4)，得　$\begin{cases}x=-7t\\ z=-3t\end{cases}$ （t 是整数）。

把 $x=-7t$ 代入(5)得

$21t+5y=-1$。

解得　$\begin{cases}t=5u-1\\ y=-21u+4\end{cases}$ （u是整数）

由　$\begin{cases}x=-7t\\ z=-3t\end{cases}$ 和 $\begin{cases}t=5u-1\\ y=-21u+4,\end{cases}$

得　$\begin{cases}x=7-35u\\ y=4-21u\\ z=3-15u\end{cases}$ （u是整数）。

$\because$　$x>0$，$y>0$，$z>0$。

解不等式组　$\begin{cases}7-35u>0\\ 4-21u>0\\ 3-15u>0,\end{cases}$

解集为　$u<\frac{4}{21}$。

$\because$　u表示为整数，$\therefore$　由 $u<\frac{4}{21}$，u的取值只能是：0，-1，-2，-3，……。

当 $u=0$时，$\begin{cases}x=7\\y=4\\z=3,\end{cases}$

$m=23$。

当 $u=-1$时，$m=128$。

$u=-2$时，$m=233$。

………… …………。

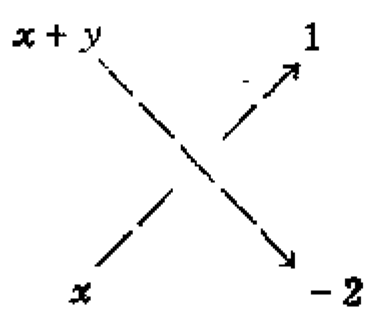
其中 23是所求的最小正整数。

说明 这是《孙子算经》上的一道题，当时记载的答案就是23。它是世界闻名的三个中国古代问题之一。

8. 用逐步分离整数法。

$$y=-\frac{x^2-x-4}{x-2}=-(x+1)+\frac{2}{x-2}$$

用因式分解法（十字相乘）



$x(x+y)-x-2y-2=2$。

即 $(x+y+1)(x-2)=2$。

解得 $x=1,3,0,4$。

$y=-4,-2,-2,-4$。

9. 由x^y+1得知y不能为奇的质数。否则，x^y+1可因式分解。不妨设$y=3$，则$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$，又

$x^3+1=z$，这样 z 不是质数。

因此 y 只能是偶质数，$y=2$。

通过质数的奇偶性的讨论，易知 $x=2$，$y=2$，$z=5$。

10. 因为是求方程的正整数解．显然 x、y、z、u 其中任何一个都不等于1。

不妨设 $x^2\leqslant y^2\leqslant z^2\leqslant u^2$。

则 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{u^2}\leqslant\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^2}$

即 $1\leqslant\frac{4}{u^2}$，得 $u^2\leqslant4$，$u=2$。

这样方程变为 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{3}{4}$。

同理 $z^2\leqslant4$，$y^2\leqslant4$，$x^2\leqslant4$，

解得 $x=y=z=u=2$。

11. 提示 这些青年人一定出生在20世纪，可设生的年代为 $1900+10x+y$。其中 x、y 都是0到9的整数。

依题意 $1992-(1900+10x+y)=1+9+x+y$

得 $11x+2y=82$。

解得 $x=6$，$y=8$。年代为1968。

六　二元一次方程组

（一）基本原理

1．二元一次方程组：由几个一次方程组成并且含有两个未知数的方程组。

2．方程组的解：方程组里各个方程的公共解。

3．二元一次方程组的一般解法

（1）代入法。

（2）加、减消元法。

4．二元一次方程组的解的情况

已知方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

（1）当 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ 时，有唯一组解。

（2）当 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ 时，无解。

（3）当 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ 时，有无数组解。

总之　解二元一次方程组或其它方程组其基本方法是通过各种途径逐步消元，减少未知数的个数，来实现求解的目的。

（二）范例与方法

一 观察分析解二元一次方程组

例1 解方程组 $\begin{cases}3(x-1)=y+5 & (1)\\ 5(y-1)=3(x+5) & (2)\end{cases}$

思路 通过观察方程组中含有 $(x-1)$ 和 $(y-1)$。若以 $(x-1)$，$(y-1)$ 为未知数，将方程(1)和(2)变形后求解。

解一：代入消元法或加、减消元法。（略）

解二：原方程组变形为

$$\begin{cases}3(x-1)=(y-1)+6 & (1)\\ 5(y-1)=3(x-1)+18 & (2)\end{cases}$$

(1)+(2)，得 $5(y-1)=(y-1)+24$，

求得 $y=7$，代入(1)式得 $x=5$。

∴ 原方程组的解是 $\begin{cases}x=5\\ y=7.\end{cases}$

说明 解法二从解题运算来看不一定比解法一简便多少。但这种观察分析的方法是解决问题常用的思考方式。

例2 解关于 x、y 的方程组

$$\begin{cases}2x-7y-n=0 & (1)\\ 3x-3y+n=0 & (2)\end{cases}$$

思路 观察分析，抓住方程组的特点。发现方程组的常数项互为相反数。消去常数项，化简方程。

解：将(1)+(2)，得 $5x-10y=0$，$x=2y$。

把 $x=2y$ 代入(1)和(2)，得 $y=-\frac{n}{3}$。

把 $y=\frac{n}{3}$ 代入 $x=2y$ 中，得 $x=-\frac{2}{3}n$

∴　方程组的解为 $\begin{cases} x=-\frac{2}{3}n \\ y=-\frac{1}{3}n. \end{cases}$

例3 解方程组 $\begin{cases} \frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7} & (1) \\ x+y+z=45 & (2) \end{cases}$

思路　方程(1)的特点是 $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$ 是连等式且比值相等。不妨设它们的公比为 $k(k\neq0)$，则 $x=3k$，$y=5k$，$z=7k$。三个未知数转化成一个未知数。以达到消元求解的目的。

解：设 $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}=k(k\neq0)$，

则　$x=3k$，$y=5k$，$z=7k$，分别代入(2)

得　$3k+5k+7k=45$，$k=3$。

∴　方程组的解 $\begin{cases} x=9 \\ y=15 \\ z=21. \end{cases}$

二　关于二元一次方程的解的问题

例4　已知 $\begin{cases} kx+3y=2 & (1) \\ 2x+(k-1)y=k & (2), \end{cases}$ 问 k 取何值时，方程组至少有一组解。

思路　消元。将方程组转化成一元一次方程，运用一元

一次方程的解进行讨论。

解：由 (1)得 $y=\frac{2-kx}{3}$ 代入(2)得

$$2x+(k-1)\frac{2-kx}{3}=k$$

$$-(k-3)(k+2)x=k+2 \tag{3}$$

讨论 当$-(k-3)(k+2)\neq 0$时，方程(3)有唯一解。

$$x=-\frac{1}{k-3}$$

当 $k=3$时，方程(3)无解。

当$k=-2$时，方程(3)变为$0\cdot x=0$，有无穷多解。

综上讨论 当$k\neq 3$且$k\neq -2$，或$k=-2$时。原方程组至少有一组解。

说明 二元一次方程组经过消元后，转化为一元一次方程。方程组的解的情况与形如：$ax=b$（$a\cdot b$是常数）的解的情况是相同的。

形如 $ax=b$的一元一次方程的解有三种情况：

当$a\neq 0$时，唯一解$x=\frac{b}{a}$。

当$a=0$，$b=0$时，无穷多解。

当$a=0$，$b\neq 0$时，无解。

本题可以用上述方程组解的三种情况进行讨论。

例5 已知方程组

$$\begin{cases}1990(x-y)+1991(y-z)+1992(z-x)=0\\1990^2(x-y)+1991^2(y-z)+1992^2(z-x)=0,\end{cases}$$

求 $z-y$的值。

思路 方程组中含有三个未知数，显然运用二元一次方程组的一般解法来解是困难的。但是消元的思想不能变，观察其特点可以发现方程组中的1990、1991、1992有微妙的关系。x、y、z三个未知数在方程组中对称出现，从这两个特点着手解题将会十分简便。

解： $1990^2=(1991-1)^2=1991^2-2\times1991+1$,

$1992^2=(1991+1)^2=1991^2+2\times1991+1$,

由 $1990^2(x-y)+1991^2(y-z)+1992^2(z-x)=0$

的左端 得

$$1991^2[(x-y)+(y-z)+(z-x)]$$

$$-2\times1991[(x-y)-(z-x)]+[(x-y)$$

$$+(z-x)],$$

$$-2\times1991(2x-y-z)+(z-y)=0.$$

由方程 $1990(x-y)+1991(y-z)+1992(z-x)=0$的

左端 得

$$1991[(x-y)+(y-z)+(z-x)]-1991[(x-y)$$
$$-(z-x)],$$

$$-1991(2x-y-z)=0.$$

因此原方程组变形为

$$\begin{cases}-1991(2x-y-z)=0\\-2\times1991(2x-y-z)+(z-y)=0.\end{cases}$$

易知 $z-y=0$.

例6 设$[a]$表示不超过a的最大整数。x、y满足方程组

$$\begin{cases}y=2[x]-3\\y=3[x-2]+5.\end{cases}$$

若 x 不是一个整数，则 $x+y$ 是在哪两个整数之间。

思路 由已知条件，x 不是一个整数，显然 $[x-2]\neq x-2$。$[x-2]$ 应当等于 $[x]-2$。从而问题转化为解二元一次方程组。

解：原方程变为 $\begin{cases} y=2[x]-3 & (1) \\ y=3([x]-2)+5 & (2) \end{cases}$

由(1)和(2)，得 $2[x]-3=3[x]-1$

有 $[x]=-2$。把 $[x]=-2$ 代入(1)得

$y=-7$。

由 $[x]$ 的定义知 当 $[x]=-2$ 时，则 $-3<x<-2$。

所以 $-10<x<-9$。

说明 根据 $[x]$ 的定义，形如 $[x-n]$（n 是整数）等于 $[x]-n$，这一点应与证明。

三 应用题

例7 三个容器内都有水，如果把甲容器内的水倒入乙容器，再把乙容器内的水倒入丙容器，最后再把丙容器内1/10的水倒入甲容器，那么各容器的水都是 9 kg。问每个容器里原有水各多少？

思路 解应用问题的关键是根据题中的已知条件，建立条件等式。

解：设甲容器原来有水 x kg，乙容器原来有水 y kg，丙容器原来有水 z kg。根据题意，得

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) + z\right] = 9 \\ \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) = 9 \\ \frac{9}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) + z\right] = 9, \end{cases}$$

化简 $\begin{cases} 27x + y + 4z = 360 \\ x + 3y = 36 \\ x + 3y + 12z = 120. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \\ z = 7. \end{cases}$

答：（略）

例8 五个工程队完成一项工程，已知甲、乙、丙合作7.5小时完成；甲、丙、戊合作5小时完成；甲、丙、丁合作6小时完成？乙、丁、戊合作4小时完成，问五个工程队合作需几小时完成。

思路 工程问题涉及三个量：总工程量、完成工程需要的时间、完成工程的速度。这题总工程量未知，应设为整体1。如果设五个工程队独立完成这一项工程的时间为：x、y、z、m、n，那么$\frac{1}{x}$、$\frac{1}{y}$、$\frac{1}{z}$、$\frac{1}{m}$、$\frac{1}{n}$表示它们完成这项工程的速度，这样五个工程队合作所需要时间

$$t = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}}.$$

问题的关键是求$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$的值。

解：设甲、乙、丙、丁、戊独立完成各需要x、y、z、m、

n 小时，则 $\frac{1}{x}$、$\frac{1}{y}$、$\frac{1}{z}$、$\frac{1}{m}$、$\frac{1}{n}$ 表示完成这项工程的速度。

根据题意

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{15} & (1) \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{n}=\frac{1}{5} & (2) \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{m}=\frac{1}{6} & (3) \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{4} & (4) \end{cases}$$

将(1)＋(2)＋(3)＋(4)，得

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{4} \qquad (5)$$

把(5)－(4)×2，得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$，代入(2)、(3)，得

$$\frac{1}{n}=\frac{7}{60} \qquad (6)$$

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{12} \qquad (7)$$

将(1)＋(7)＋(6)，得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$

所以　五个工程队合作完成工程的时间是 3 小时。

答：（略）。

说明　方程组的问题，一般来说未知数的个数与方程的个数相同。如果未知数的个数多于方程的个数，则方程组的解是不确定的。本题的解题技巧是把 $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}$ 当作一个未知

数。这样方程组中未知数的个数与方程的个数相同，方程组可解。

四　解特殊方程组

例9　解方程组 $\begin{cases}(x+y)(x+y+z)=18 & (1)\\(y+z)(x+y+z)=30 & (2)\\(z+x)(x+y+z)=24 & (3)\end{cases}$

思路　不难看出方程组中未知数在各个方程中对称出现，且含有公因式$(x+y+z)$。如果将三个方程相加，可以求得$(x+y+z)$的值，从而可以简化方程组。

解： 将(1)+(2)+(3)，得

$$(x+y+z)(x+y+y+z+z+x)=72$$

$$(x+y+z)^2=36$$

$$\therefore x+y+z=-6 \text{ 或 } x+y+z=6$$

这样，原方程组化简为

$$(\text{I})\begin{cases}x+y=-3\\y+z=-5\\z+x=-4\end{cases} \quad \text{或} (\text{II})\begin{cases}x+y=3\\y+z=5\\z+x=4.\end{cases}$$

不难得出，原方程组的解是

$$\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3,\end{cases} \qquad \begin{cases}x=7\\y=8\\z=9.\end{cases}$$

说明　象本题的方程组及方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)每个方程在方程组中的形式具有对称性。在这种情况下，把三个式子相加、或相乘、或两两相比，具体问题灵活处理，将十分简便。

例10 解方程组 $\begin{cases} x=\dfrac{2z^2}{1+z^2} \\ y=\dfrac{2x^2}{1+x^2} \\ z=\dfrac{2y^2}{1+y^2}. \end{cases}$

思路 方程组的右边的式子具有对称性。把式子中的字母换成另一个字母表示，其式子所表示的形式不变。观察方程组，$x=y=z$ 是一组解。当 $x\neq0$，$y\neq0$，$z\neq0$ 时，由 $x=\dfrac{2z^2}{1+z^2}$ 化简成 $\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{z^2}+1$ 得以启发。

解：当 $x\neq0$，$y\neq0$，$z\neq0$ 时，

原方程变为
$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{z^2}+1 & (1) \\ \dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{x^2}+1 & (2) \\ \dfrac{2}{z}=\dfrac{1}{y^2}+1 & (3) \end{cases}$$

将(1)+(2)+(3)，得

$$\left(\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+1\right)+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}+1\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{z}-1\right)^2=0$$

所以，$x=y=z=1$。

原方程组的解是 $x=y=z=0$ 或 $x=y=z=1$。

说明 原方程组的化简是在 $x\neq0$，$y\neq0$，$z\neq0$ 的条件下进行的；而 $x=y=z=0$ 是方程组的解。两者不矛盾，后者不是解出来的，是观察方程组得到的。这一点往往在解题

中容易遗漏。

（三）练习题

1．已知方程 $a(3x+2)+b(2x+3)=8x+3$ 有无穷多解．试求 a 和 b 的值。

2．已知 $|3y-543|+|ax-y-x|=0$，a 取何值时，x 的值是1991。

3．对于 k、m 取哪些值，方程组

$$\begin{cases} y=kx+m \\ y=(2k-1)x+4 \end{cases}$$ 至少有一组解。

4．k 取什么值时，方程 $\begin{cases} 3x-5y=2x \\ 2x+7y=k-18 \end{cases}$ 的解互为相反数，并求出它们的解。

5．已知 $\begin{cases} 3x+7y+z=6 \\ 4x+10y+z=7, \end{cases}$

求 $x+y+z$ 的值。

6．m 等于什么数时，以下联立方程组成立：

$$\begin{cases} x+y=1 \\ mx+y=2 \\ x+my=3. \end{cases}$$

7．解方程组 $\begin{cases} xy=3 \\ yz=2 \\ zx=6. \end{cases}$

8．解方程组 $\begin{cases} x+y-z=4 \\ \dfrac{x}{5}=-\dfrac{y}{6}=\dfrac{z}{7}. \end{cases}$

9. 解方程组 $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{6}{5}\\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{12}{7}\\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

10. 解方程组 $\begin{cases}(x+2y)(x+2z)=-16\\ (y+2x)(y+2z)=8\\ (z+2x)(z+2y)=-7.\end{cases}$

11. 汽车在平路上速度是每小时30千米，上坡路每小时28千米，下坡路每时35千米。汽车在142千米的路程中，去时用$4\frac{1}{2}$小时，返回用4小时42分。这段路平路有多少千米。

12. 已知四个数的和为100。第一个数加4，第二个数减4，第三个数乘4，第四个数除以4，其结果相等，求这四个数各是多少。

（四）提示与答案

1. 当$3a+2b-8=0$且$3-(2a+3b)=0$时，方程组有无穷多解。

联立方程 $\begin{cases}3a+2b=8\\ 2a+3b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3\frac{3}{5}\\ b=-1\frac{2}{5}.\end{cases}$

2. 根据绝对值的意义，只有$3y-543=0$同时$ax-y-x=0$，等式成立。联立方程，解得$a=1\frac{1}{11}$。

3. 当 $k\neq 1$，m 为任何实数，或 $k=1$，$m=4$ 时，方程组至少有一组解。

4. 利用条件 $x+y=0$，将方程变形为

$$\begin{cases}3(x+y)-8y=2k\\2(x+y)+5y=k-18\end{cases}，解得\begin{cases}y=-\dfrac{1}{4}k\\y=\dfrac{k-18}{5}.\end{cases}$$

解得　$k=8$。

5. $x+y+z=4$。

6. 利用方程的对称性，三个方程相加，得 $m=4$。

7. 解　将(1)×(2)×(3)，得 $(xyz)^2=36$，联立方程

$$\begin{cases}xy=3\\(xyz)^2=36,\end{cases}\quad\begin{cases}yz=2\\(xyz)^2=36,\end{cases}\quad\begin{cases}zx=6\\(xyz)^2=36.\end{cases}$$

解得　$\begin{cases}x=-3\\y=-1.\\z=-2.\end{cases}$　　$\begin{cases}x=3\\y=1\\z=2.\end{cases}$

8. $\begin{cases}x=-\dfrac{5}{2}\\y=3\\z=-\dfrac{7}{2}.\end{cases}$

9. 将原方程组分离成 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}\\\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{12}\\\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{4},\end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4. \end{cases}$

10. 解：将原方程变形。

$$\begin{cases} [(x+y+z)+(y-z)][(x+y+z)-(y-z)]=-16 \\ [(x+y+z)+(z-x)][(x+y+z)+(z-x)]=8 \\ [(x+y+z)+(x-y)][(x+y+z)-(x-y)]=-7, \end{cases}$$

设 $x-y=a$，$y-z=b$，$z-x=c$，$x+y+z=d$，有

$$\begin{cases} d^2-b^2=16 \\ d^2-c^2=8 \\ d^2-a^2=-7 \\ a+b+c=0 \end{cases} \quad (*)$$

解方程组（*），得

$$\begin{cases} a_1=4 \\ b_1=-5 \\ c_1=1 \\ d_1=3, \end{cases} \quad \begin{cases} a_2=-4 \\ b_2=5 \\ c_2=-1 \\ d_2=-3, \end{cases} \quad \begin{cases} a_3=4 \\ b_3=-5 \\ c_3=1 \\ d_3=-3, \end{cases} \quad \begin{cases} a_4=-4 \\ b_4=5 \\ c_4=1 \\ d_4=3. \end{cases}$$

代入原方程组，得

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=-2 \\ z_1=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=2 \\ z_2=-3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=0 \\ y_3=-4 \\ z_3=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=0 \\ y_4=4 \\ z_4=-1. \end{cases}$$

11. 设平路有 x km，去时上坡路有 y km，则下坡路有 $[142-(x+y)]$ km。根据题意，得

$$\begin{cases} \dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{28}+\dfrac{142-(x+y)}{35}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{x}{30}+\dfrac{142-(x+y)}{28}+\dfrac{y}{35}=\dfrac{47}{10}. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=30 \\ y=42. \end{cases}$

答：平路有30km。

12. 设第一个数为 x，第二个数为 y，第三个数为 z，第四个数为 m。根据题意，得

$$\begin{cases} x+y+z+m=100 \\ x+4=y-z=4z=\dfrac{m}{4}. \end{cases}$$

解得 $x=12$，$y=20$，$z=4$，$m=64$。

七　因式分解

（一）基本原理

1．基本概念

(1) 一元多项式：形如 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 称为关于 x 的一元多项式。其中 n 为非负整数，a_0，a_1，a_2，…，a_n 都是常数。

(2) 因式分解：把一个多项式化成几个整式乘积的形式，叫做多项式的因式分解。

【说明】 因式分解的最后结果与要求在什么范围(数域)内分解有关。

(3) 公因式：一个多项式每一项都含有的相同因式，叫做这个多项式的公因式。

2．基本方法

(1) 提取公因式法；

(2) 运用公式法：

$$\begin{cases} a^2+2ab+b^2=(a+b)^2, \\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2, \\ a^2-b^2=(a+b)(a-b), \\ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2), \end{cases}$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3,$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3;$$

(3) 分组分解法。

3. 特殊方法

(1) 十字相乘法;

(2) 配方法;

(3) 求根公式法;

(4) 待定系数法;

(5) 用综合除法分解因式;

(6) 用拆项或插项的方法分解因式;

(7) 轮换对称式的分解法。

(二) 范例与方法

例1 在六位数 $abcdef$ 中,若 $a=d$,$b=e$,$c=f$,求证:这个六位数能被 7,11,13 整除。

思路 先把这个六位数用代数式表示出来,再利用已知条件进行等量代换,合并同类项后,提取公因式进行因式分解,最后把提取的公因式中的数字进行质因数分解即可。

证: 设这个六位数为M,则

$$M=100000a+10000b+1000c+100d+10e+f$$

$\because$ $a=d$,$b=e$,$c=f$

$$\therefore\ M=100000a+10000b+1000c+100a+10b+c$$
$$=100100a+10010b+1001c$$
$$=1001(100a+10b+c)$$
$$=7\times11\times13(100a+10b+c).$$

∴ 这个六位数能被7，11，13整除。

例2 分解因式 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$。

思路 先分组，后应用公式。

解： 原式 $=(b^2+2bc+c^2)+(2ab+2ac)+a^2$

$$=(b+c)^2+2a(b+c)+a^2$$

$$=(b+c+a)^2$$

说明 例2的结果应记住，可当公式用。

例3 若 $x+y+z=0$，求证 $x^3+y^3+z^3=3xyz$。

思路 若证 $x^3+y^3+z^3=3xyz$，可证 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$，如果把 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 分解因式后，能出现因式 $x+y+z$，利用已知条件 $x+y+z=0$，即得证。

解： $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+z^3-3x^2y-3xy^2-3xyz$$

$$=[(x+y)^3+z^3]-3xy(x+y+z)$$

$$=(x+y+z)[(x+y)^2-z(x+y)+z^2]-3xy(x+y+z)$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

∵ $x+y+z=0$，∴ $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$。

∴ $x^3+y^3+z^3=3xyz$。

【说明】： 这个结论告诉我们，如果三个数的和为零，那么这三个数的立方和等于这三个数乘积的3倍。它在解决某些三次式因式分解时，常常可以使问题迅速得以解决。另外，如果没有已知条件 $x+y+z=0$，$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-zy)$ 也应当熟知。例如分解因式 $x^3+y^3-1+3xy$ 可直接应用上式结论得

$$x^3+y^3-1+3xy$$
$$=x^3+y^3+(-1)^3-3\cdot x\cdot y\cdot(-1)$$
$$=(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+x+y)$$
$$=(x+y-1)(x^2-xy+y^2+x+y+1).$$

例4 若 $a+b+c+d=0$，求证：

$$a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d).$$

证：由 $a+b+c+d=0$，可得 $b+c=-(a+d)$，

$a=-(b+c+d)$，则

$$a^3+b^3+c^3+d^3=(a^3+d^3)+(b^3+c^3)$$
$$=(a+d)(a^2-ad+d^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2)$$
$$=(a+d)[(a^2-ad+d^2)-(b^2-bc+c^2)]$$
$$=(a+d)[(b+c+d)^2+(b+c+d)d+d^2-b^2+bc-c^2]$$
$$=(a+d)(b^2+c^2+d^2+2bc+2bd+2cd+bd+cd+d^2+d^2-b^2+bc-c^2)$$
$$=3(a+d)(bc+bd+dc+d^2)$$
$$=3(a+d)(b+d)(c+d)$$

说明 例4是例3的一个推广，当 $d=0$ 时就得到例3的结论。例3与例4的证题思想几乎一样，都是利用已知条件，进行简单的等量代换，再进行因式分解，就能使问题得到解决。

例5 若 a、b、c、d 都为非负数，且满足 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，则 $a=b=c=d$。

思路 把 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ 变形为 $a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$，然后将等式左端进行因式分解，出现了

因式$(a-b)^2$、$(c-d)^2$、$(ab-cd)^2$之和的形式，从而使问题得到解决。

解：把原等式变形为

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0,$$

$$(a^4-2a^2b^2+b^4)+(c^4-2c^2d^2+d^4)+(2a^2b^2-4abcd+2c^2d^2)=0,$$

即 $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$。

$\therefore$ $a^2=b^2$，$c^2=d^2$，$ab=cd$。

由 a、b、c、d 为非负数，得$a=b$，$c=d$，$a=c$ 或 $b=d$。

$\therefore$ $a=b=c=d$。

例6 请看下列事实：

$11-2=3^2$，

$1111-22=33^2$，

$111111-222=333^2$，

$11111111-2222=3333^2$，

……………

依此推下去，你能得出什么结论？请证明你发现的结论。

解：注意观察给出的数学表达式的结构，可以得出

$$\underbrace{1111\cdots111}_{2n个}-\underbrace{22\cdots2}_{n个}=\underbrace{33\cdots3}_{n个}{}^2$$这个有趣的结论。

下面我们来证明这个结论。

$$\underbrace{111\cdots\cdots1}_{2n个}-\underbrace{22\cdots2}_{n个}=\frac{10^{2n}-1}{9}-2\cdot\frac{(10^n-1)}{9}$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}-1-2\times10^{n}+2)$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}-2\times10^{n}+1)=\frac{1}{9}(10^{n}-1)^{2}$$

$$=\left(\frac{10^{n}-1}{3}\right)^{2}=\left(\frac{\overbrace{999\cdots9}^{n个}}{3}\right)^{2}=\underbrace{333\cdots3}_{n个}{}^{2}.$$

说明 通过因式分解来解决这样问题的关键是把一个数字变型写成10的整数幂的形式。

例7 把$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$因式分解。

思路：先把$(x+1)$与$(x+4)$相乘，再把$(x+2)$与$(x+3)$相乘．这样可以保证乘积后所得的二次三项式的一次项系数相同．以便利用十字相乘法进行下一步分解。

解：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

$$=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-24$$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+4+2)-24$$

$$=(x^2+5x+4)^2+2(x^2+5x+4)-24$$

$$=(x^2+5x+4+6)(x^2+5x+4-4)$$

$$=(x^2+5x+10)(x^2+5x)$$

$$=x(x+5)(x^2+5x+10)$$

例8 分解因式$x^2+3xy+2y^2+5x+8y+6$。

思路 完全的二次三项式的因式分解，一般来说可以将原式看成关于一个未知数的二次三项式，然后利用十字相乘法进行分解。还可以利用求根公式法进行分解。但此题的技

巧性较强。实际上在解此题的过程中，可以十分巧妙地连续使用两次十字相乘法。

解：$x^2+3xy+2y^2+5x+8y+6$

$=(x+y)(x+2y)+5x+8y+6$

$=(x+y+3)(x+2y+2)$。

例9 把$4(x^2+3x+1)^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2$分解因式。

思路一 可先利用平方差公式，然后再利用十字相乘法进行分解。

解一：$4(x^2+3x+1)^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2$

$=(2x^2+6x+2+x^2+x-4)(2x^2+6x+2-x^2-x-4)-(x^2+5x+6)^2$

$=(3x^2+7x-2)(x^2+5x+6)-(x^2+5x+6)^2$

$=(x^2+5x+6)(2x^2+2x-8)$

$=2(x+2)(x+3)(x^2+x-4)$。

思路二：应用该题中的$x^2+3x+1=\dfrac{(x^2+x-4)+(x^2+5x+6)}{2}$的关系可以使问题简化。

解二 $4(x^2+3x+1)^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2$

$=4\left[\dfrac{(x^2+x-4)+(x^2+5x+6)}{2}\right]^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2$

$=(x^2+x-4)^2+2(x^2+x-4)(x^2+5x+6)+(x^2+5x+6)^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2$

$=2(x^2+x-4)(x^2+5x+6)$

$=2(x+2)(x+3)(x^2+x-4)$。

下面简单说说用待定系数法进行因式分解的问题。

先交待一下关于多项式恒等定理。

如果 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$ 是一个恒等式，那么必须而且只需 $a_0=b_0, a_1=b_1, \cdots, a_n=b_n$。

再说明用待定系数法进行因式分解的方法。

先按题意列出一个待定系数的恒等式，然后根据多项式的恒等定理，比较恒等式两边各对应项的系数，列出方程组，最后解这个方程组，求出待定系数的值。

例10 用待定系数法分解因式

$6x^2-7xy-3y^2-x+7y-2$。

思路 先分解 $6x^2-7xy-3y^2=(3x+y)(2x-3y)$，由于原式是二次式，若原式可以分解，则两个因式都是一次式，因此，可设它们是 $(3x+y+m)$ 和 $(2x-3y+n)$，其中 m、n 是待定系数，如果 m、n 存在，求出它们的值，问题就解决了。

解： 设 $6x^2-7xy-3y^2-x+7y-2$

$$=(3x+y+m)(2x-3y+n)$$

$$=6x^2-7xy-3y^2+(2m+3n)x+(n-3m)y+mn$$

比较对应项系数，得

$$\begin{cases} 2m+3n=-1 & (1)\\ -3m+n=7 & (2)\\ m\cdot n=-2 & (3)\end{cases}$$

解 (1) 和 (2) 得 $m=-2, n=1$，而 $m\cdot n=-2$ 适合(3)，故 m 和 n 存在。

$\therefore\quad 6x^2-7xy-3y^2-x+7y-2=(3x+y-2)(2x-3y+1)$。

例11 分解因式 $a^4+a^2b^2+b^4$。

思路 $\because\quad (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$=a^4+a^2b^2+b^4$。

由于因式分解的过程是乘法过程的逆过程，我们自然想到，要分解 $a^4+a^2b^2+b^4$，只要先把它变形为 $a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$，这样就可以用分组分解的方法了。

解：$a^4+a^2b^2+b^4$

$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

说明 通过此例，我们发现了一个分解因式常用的技巧，就是必要时可以把待分解式中的一项拆成两项，甚至可插入能互相抵消的两项，增加项数，以利于进行分组分解。

例12 分解因式 a^4+4b^4。

解：a^4+4b^4

$=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2$

$=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$

$=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$

$=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$。

例13 分解因式$a^3+b^3+c^3-3abc$。

思路 在前面两个例题中，拆项或插项时，都是设法凑出一个完全平方来。本题中a、b、c的次数都是三次的，自然想到是否可以用凑出一个完全立方的方法来解决，显然如要凑出$(a+b+c)^3$来过繁，所以我们可以先试试凑出一个$(a+b)^3$。

解：$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]$

$\quad-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2)-ac-bc+c^2-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$。

例14 分解因式x^3-7x+6。

思路 观察此题中的三个项，容易看出可把一次项$-7x$拆成$-x-6x$，变成四项后再分组分解，也可把常数项6拆成$-1+7$，再分组分解。

解一：$x^3-7x+6=x^3-x-6x+6$

$=x(x-1)(x+1)-6(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x-2)(x+3)$。

解二：x^3-7x+6

$=x^3-1-7x+7$

$=(x-1)(x^2+x+1)-7(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x-2)(x+3)$。

例15 分解因式 x^3+x+30。

思路 对于此题，若想拆一次项是很难入手的，自然想到拆常数项。把常数项拆成两个数的和后，其中一个数要与 x^3 分在一组分解，所以这个数必须是一个立方数，即是 ± 1，± 8，± 27，± 36，……，我们从小到大一一试验，发现把30拆成 $27+3$ 是可行的。

解：x^3+x+30

$=x^3+27+x+3$

$=(x+3)(x^2-3x+9)+(x+3)$

$=(x+3)(x^2-3x+10)$。

例16 分解因式 x^3+2x^2+2x+1。

思路 用拆项法分解因式时，不仅可以拆待分解式中的一项，有时还可以拆两项、三项甚至更多。此题可将中间两项即 $2x^2$ 与 $2x$ 分别拆成两项，然后用提取公因式法分解。

解一：$x^3+2x^2+2x+1=x^3+x^2+x^2+x+x+1$

$=x^2(x+1)+x(x+1)+(x+1)$

$=(x+1)(x^2+x+1)$。

解二：$x^3+2x^2+2x+1=x^3+x^2+x+x^2+x+1$

$=x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=(x+1)(x^2+x+1)$。

例17 分解因式 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$。

思路 此题中含有三个字母 a、b、c，按照某种次序轮换，所得的代数式不变，像这样代数式叫关于这些字母的轮换对称式。

关于齐次轮换对称式的因式分解，一种方法是对某一字

母进行整理，但常用的方法是根据因式定理，用观察法找到它们的某一因式，再由齐次轮换对称式的性质写出其余因式，最后由待定系数法完成因式分解

解：$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$$=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)$$

$$=(b-c)a^3-(b-c)(b^2+bc+c^2)a$$

$$+(b-c)(b+c)bc$$

$$=(b-c)[a^3-a(b^2+bc+c^2)+(b+c)bc]$$

$$=(b-c)(a^3-b^2a-abc-ac^2+b^2c+bc^2)$$

$$=(b-c)[(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c-a)(c+a)]$$

$$=(b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$$

$$=(b-c)(c-a)[(b-a)c+(b-a)(b+a)]$$

$$=(b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$$

$$=-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

例18 分解因式$(x+y+z)^5-(y+z-x)^5$

$$-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5.$$

解：当 $x=0$ 时，原式$=0$，故原式有 x 的因子。故原式是轮换对称式，所以它同时有 y 和 z的因子。因为原式和xyz分别是五次和三次齐次对称式，故还应有三个字母的二次轮换对称式，它可表示为 $m(x^2+y^2+z^2)+n(xy+yz+zx)$，

即原式$=xyz[m(x^2+y^2+z^2)+n(xy+yz+zx)]$　　(1)

在 (1) 式中令 $x=y=z=1$，得$m+n=80$；

令 $x=y=1, z=-1$，得$3m-n=240$。

解得 $m=80$，$n=0$，

$\therefore\ (x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z-x-y)^5$

$-(x+y-z)^5=80xyz(x^2+y^2+z^2)$。

最后介绍一下利用综合除法进行因式分解的问题。

余数定理和因式定理。

余数定理：多项式 $f_{(x)}=a_0x^n+\cdots+a_n$ 除以 $x-a$ 所得到的余数，等于当 $x=a$ 时，$f(x)$ 的值 $f(a)$。

因式定理：多项式 $f(x)$ 当且仅当 $f(a)=0$ 时，才有因式 $x-a$。

综合除法。

已知多项式 $f_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，求 $f_{(x)}$ 除以 $x-a$ 的商式和余式。

解：设 $f_{(x)}=(x-a)q_{(x)}+r$（$q_{(x)}$ 为 $n-1$ 次多项式）

$q_{(x)}=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$，（$r$ 为常数），则

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$=b_0x^n+(b_1-ab_0)x^{n-1}+\cdots+(b_{n-1}-ab_{n-2})x+r-ab_{n-1}$

由待定系数法得

$$
\begin{aligned}
&b_0=a_0,\\
&b_1=a_1+ab_0,\\
&b_2=a_2+ab_1,\\
&\cdots\cdots\\
&b_{n-1}=a_{n-1}+ab_{n-2},\\
&r=a_n+ab_{n-1}.
\end{aligned}
$$

即
$$
\begin{array}{cccccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_{n-1} & a_n & a\\
 & ab_0 & ab_1 & \cdots\cdots & ab_{n-2} & ab_{n-1} & \\
\hline
a_0 & a_1+ab_0 & a_2+ab_1 & \cdots\cdots & a_{n-1}+ab_{n-2} & a_n+ab_{n-1} &
\end{array}
$$

这种求多项式 $f_{(x)}$ 除以 $(x-a)$ 所得的商式和余数的方法

称为综合除法。

例如 用综合除法求$(3x^4-4x^3-5x^2+6x-7)\div(x-2)$的商式和余式。

解：

$$\begin{array}{rrrrr|r}
3 & -4 & -5 & 6 & -7 & 2 \\
 & 6 & 4 & -2 & 8 & \\
\hline
 & 2 & -1 & 4 & 1 &
\end{array}$$

$\therefore$ 商式为$3x^3+2x^2-x+4$，余数为1。

即$(3x^4-4x^3-5x^2+6x-7)\div(x-2)$

$=3x^3+2x^2-x+4\cdots\cdots1$

下面再研究利用综合除法进行因式分解。

定理：如果n次整系数多项式$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$能被$x-m$整除，那么$m$一定是$a_n$的因式。

例19 把$f(x)=x^4-10x^3+35x^2-48x+18$分解因式。

解： 试除数为±1，±2，±3，±6，±9，±18。

$\because$ $f(3)=3^4-10\cdot3^3+35\times3^2-48\times3+18=0$

$\therefore f(x)$一定能被$x-3$整除

利用综合除法得

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -10 & 35 & -48 & 18 & 3 \\
 & 3 & -21 & 42 & -18 & \\
\hline
 & -7 & 14 & -6 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore$ $x^4-10x^3+35x^2-48x+18$

$=(x-3)(x^3-7x^2+14x-6)$

再设$g(x)=x^3-7x^2+14x-6$

$g(3)=3^3-7\times3^2+14\times3-6=0$

$\therefore$ $x^3-7x^2+14x-6=(x-3)(x^2-4x+2)$

$$\therefore\quad x^4-10x^3+35x^2-48x+18$$
$$=(x-3)^2(x^2-4^2+2)。$$

（三）练习题

1．求证：对于任意自然数n，3^{n+3}与3^n的和都能被 4 和7整除。

2．分解因式$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$。

3．如果a、b、c皆为正数，且$a^4+b^4+c^4=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$，那么$a=b=c$。

4．已知$a^3+\dfrac{1}{a^3}=0$，求证$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=3$。

5．请看下列事实：

$$\frac{1}{3}(111-30)=3^2$$

$$\frac{1}{3}(111111-3300)=33^2$$

$$\frac{1}{3}(111111111-333000)=333^2$$

$$\frac{1}{3}(111111111111-33330000)=3333^2$$

……

依此推下去，你能得出什么结论？请证明你发现的结论。

6．把$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$因式分解。

7．把$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$因式分解。

8．用待定系数法把$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$分解因式。

9. 用综合除法分解因式 $f(x)=x^3-4x^2+x+6$。

10. 分解因式：$4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$。

11. 分解因式：$a^3b-ab^3+a^2+b^2+1$。

12. 分解因式：$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$。

13. 分解因式：a^6-b^6。

14. 分解因式：$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$。

15. 分解因式：$x^4-x^2y^2+y^4-2y^2+1$。

16. 二次三项式 $y^2+2xy+2x+my-3$，当 m 为何值时，能分解为一次因式的连乘积。

17. 满足等式 $p^2+q^2=7pq$ 的正实数 p、q，能使关于 x、y 的多项式 $xy+px+qy+1$ 分解成两个一次因式的积，求 p 与 q 的值。

18. 分解下列各式：

(1) $x^4+x^3+6x^2+5x+5$；

(2) $x^3-9ax^2+27a^2x-26a^3$；

(3) a^5+a+1；

(4) $x^4+3x^3+6x^2+6x+4$。

(四) 答案与提示

1. $3^{n+3}+3^n=3^n(3^3+1)=28\cdot3^n=4\times7\times3^n$。

2. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

$=(a^2-2ab+b^2)-(2ac-2bc)+c^2$

$=(a-b)^2-2(a-b)c+c^2$

$=(a-b-c)^2$。

3. $a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2$

$$=2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$$

$$=(a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2.$$

4. 由$a^3+\dfrac{1}{a^3}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a^2-1+\dfrac{1}{a^2}\right)=0$，而$a+\dfrac{1}{a}\neq 0$，可得$a^2-1+\dfrac{1}{a^2}=0$，∴ $a^2+\dfrac{1}{a^2}=2$，从而$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2+\dfrac{1}{a^2}+1=3$。

5. 结论是：$\dfrac{1}{3}(\underbrace{111\cdots1}_{3n个}-\underbrace{333\cdots3}_{n个}\underbrace{000\cdots0}_{n个})$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{10^{3n}-1}{9}-3\,\frac{10^{2n}-1}{9}+3\,\frac{10^{n}-1}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{27}(10^{3n}-3\cdot 10^{2n}+3\cdot 10^{n}-1)=\frac{1}{27}(10^{n}-1)^3$$

$$=\left[\frac{1}{3}(10^{n}-1)\right]^3$$

$$=\left(\frac{\overbrace{999\cdots\cdots9}^{n个}}{3}\right)=\underbrace{333\cdots3}_{n个}.$$

6. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

$=[(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)]+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8+15)+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+7+8)+15$

$=(x^2+8x+7)^2+8(x^2+8x+7)+15$

$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$.

7. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$

$=b^2c+bc^2+c^2a-ca^2-a^2b-ab^2$

$=(bc^2+ac^2)-(ab^2+a^2b^2)-(ca^2-cb^2)$

$=c^2(a+b)-ab(a+b)-c(a^2+b)(a-b)$

$=(a+b)(c-a)(b+c)$。

8. 用待定系数法得

$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$

$=(2x-3y+1)(2x+y-3)$。

9. 解：试除余数为±1，±2，±3，±6。

$\because$ $f_{(-1)}=0$，$\therefore$ $f_{(x)}$有因式$[x-(-1)]$。

$\therefore$ $f_{(a)}=(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x+1)(x-2)(x-3)$。

10. 解：原式$=[2(ab+cd)]^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2$

$-b^2+c^2+d^2)$

$=[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]$

$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a$

$+b+c+d)$。

11. 解：原式$=a^3b-a^2b^2+ab+a^2b^2-ab^3+b^2+a^2$

$-ab+1$

$=ab(a^2-ab+1)+b^2(a^2-ab+1)+(a^2-ab+1)$

$=(a^2-ab+1)(b^2+ab+1)$。

12. 解：原式$=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)$

$=(b-c)a^3-(b-c)(b^2+bc+c^2)a$

$+bc(b-c)(b+c)$

$$=(b-c)(a^3-b^2a-abc-ac^2+b^2c+bc^2)$$
$$=(b-c)[(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c-a)(c+a)]$$
$$=(b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$$
$$=(b-c)(c-a)[(b-a)c+(b^2-a^2)]$$
$$=-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

13. 解一：$a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3$
$$=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$$
$$=(a-b)(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4).$$

解二：$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$
$$=(a^3-b^3)(a^3+b^3)$$
$$=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$$

14. 提示：可看成关于a^2的二次三项式，也可把$-2a^2b^2$拆成$2a^2b^2-4a^2b^2$。

15. 提示：可看成关于 y^2 的二次三项式。

16. $m=-2$。

17. $p=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$q=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 或 $p=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，$q=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$。

18. (1) 提示：把 $6x^2$ 拆成 x^2+5x^2；(2) 配方；(3)提示：插入$-a^2+a^2$；(4)$(x^2+2x+2)(x^2+x+2)$。

八　分　　式

(一)基本原理

1. 基本概念

(1) 分式； (2) 有理式； (3) 约分； (4) 通分；(5) 最简分式； (6) 最简公分母； (7) 繁分式。

2. 分式的基本性质及变号法则

分式的基本性质：分式的分子和分母都乘以（或除以）同一个不等于零的代数式，分式的值不变。

分式的变号法则：一个分式三处有符号（分子、分母、分式本身），任意改变两处性质符号，分式的值不变。

3. 分式的运算

分式的加减法、分式的乘法、分式的乘方、分式的除法，它们的运算法则请读者自述。

4. 繁分式的化简

(1) 利用除法法则：$\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$.

(2) 利用分式的基本性质：$\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}=\dfrac{\dfrac{a}{b}\cdot bd}{\dfrac{c}{d}\cdot bd}=\dfrac{ad}{bc}$.

5. 分式方程及应用

解分式方程的思路是：把分式方程的两边同乘以各分母的最简公分母，化分式方程为整式方程，再解这个整式方程。

解分式方程组一般地把方程化为整式方程，得到整式方程组，再解这个整式方程组，最后要验根。

解分式方程组有时用换元法把原分式方程组化为整式方程组。其思路是：恰当地把含有未知数的式子$\left(如\dfrac{1}{x}、\dfrac{1}{y}\right)$换成新的未知数$m$、$n$。这样求出$m$、$n$之后，再求出$x$、$y$。

解分式方程必须验根。

（二）范例与方法

1. 分式的化简问题

例 1 设$a<-b<1$，化简$\left|\dfrac{a+b}{b+1}\right|-\left|\dfrac{a+b}{b+1}\right|\div\left|\dfrac{a+b}{b+1}\right|$。

思路 对带有绝对值符号的式子的化简，要正确地运用绝对值的概念化去绝对值符号，然后再按分式运算法则进行。

解： ∵ $a<-b<1$，即 $a<-b$，$a+b<0$；$-b<1$，$b+1>0$。

$$\therefore\quad 原式=\frac{-(a+b)}{b+1}-\frac{-(a+b)}{b+1}\div\frac{a+b}{b+1}$$

$$=-\frac{a+b}{b+1}+\frac{a+b}{b+1}\cdot\frac{b+1}{a+b}=-\frac{a+b}{b+1}+1$$

$$= \frac{-a-b+b+1}{1+b} = \frac{1-a}{1+b}.$$

例 2 化简$\frac{2a-b-c}{a^2-ab-ac+bc}+\frac{2b-c-a}{b^2-ab-ca+ac}$

$+\frac{2a-b-c}{a^2-ac-bc+ab}$ (a、b、c全不相等).

思路 如按正常思路将分母因式分解，然后通分再进行运算，过程很繁。此题可利用分式加减法则的逆运算去拆项化简。

解： 原式 $=\frac{(a-b)+(a-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-c)+(b-a)}{(b-a)(b-c)}$

$$+\frac{(c-a)+(c-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\left(\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}\right)+\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{c-b}+\frac{1}{c-a}\right)$$

$$=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}$$

$$-\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a-c}=0.$$

例 3 化简 $\frac{x-c}{(x-a)(x-b)}+\frac{b-c}{(a-b)(x-b)}$

$$+\frac{b-c}{(b-a)(x-a)}.$$

思路 观察原式的结构可发现把后两个加式结合起来能

提取公因式，从而可使运算展开，

解：原式$=\dfrac{x-c}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{b-c}{a-b}\left(\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-a}\right)$

$$=\frac{x-c}{(x-a)(x-b)}+\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{b-a}{(x-b)(x-a)}$$

$$=\frac{x-c}{(x-a)(x-b)}-\frac{b-c}{(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{1}{x-a}.$$

说明 在分式运算中注意运用将某几个加式结合并提取公因式，使运算简化。

例 4 化简$\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x-5}{x-4}$。

思路 观察本例特点，可先把每个分式化简，再根据各分式的特点进行巧妙地结合。

解：原式$=\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(1-\dfrac{1}{x-3}\right)$

$$+\left(1-\frac{1}{x-4}\right)$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$$

$$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{10-10x}{(x+1)(x+2)(x+3)(x-4)}.$$

2. 分式的计算问题

例 1 计算 $\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}-\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}$

$$+\frac{8x^7}{x^8-a^8}.$$

思路 观察此题分母的特点，前两个分式的分母适合公式，便于通分，然后逐一利用公式进行通分。

解法： 原式 $=\frac{2x}{a^2-x^2}-\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}$

$$+\frac{8x^7}{x^8-a^8}$$

$$=\frac{4x^3}{a^4-x^4}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}+\frac{8x^7}{x^8-a^8}$$

$$=\frac{8x^7}{a^8-x^8}-\frac{8x^7}{a^8-x^8}=0.$$

例 2 计算 $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}$

$$+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

思路 可利用分组通分法先求出前两加式之和与后两式之和。

解： 原式 $=\left(\frac{a-b}{c+b}+\frac{b-c}{b+c}\right)$

$$+\left[\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]$$

$$=\frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)}+(c-a)\frac{2b(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)}-\frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)}=0.$$

例 3 计算$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x-\frac{1}{x}}\right)^2$

$$\div\frac{x^2+\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x}+3}{x^2+\frac{1}{x^2}-2x-\frac{2}{x}+3}$$

思路 观察此题的特点可利用换元法去解。

解： 设$a=\frac{1}{x}+x$，则原式可化为

$$a^2-\left(a-\frac{1}{1-a}\right)^2\div\frac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}$$

$$=a^2-\left(\frac{a-a^2-1}{1-a}\right)^2\cdot\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}$$

$$=a^2-(a^2-a+1)=a-1$$

$\therefore$ 原式$=\frac{1}{x}+x-1$。

3. 分式的求值问题

例 1 已知$2x-3y+z=0$，$3x-2y-6z=0$，$xyz\neq0$，求$\frac{x^2+2y^2+2z^2}{2x^2+y^2-z^2}$的值。

思路 把所求代数式中的三个变数，通过已知条件换成一个变数再求值。

解： $2x-3y+z=0$ (1)

$3x-2y-6z=0$ (2)

由 (1)×6+(2)，得 $3x-4y=0$，∴ $x=\frac{4}{3}y$。

由 (2)×2−(1)×3，得 $y-3z=0$，∴ $z=\frac{1}{3}y$。

将 $x=\frac{4}{3}y$，$z=\frac{1}{3}y$，代入分式，则

$$原式=\frac{\left(\frac{4}{3}y\right)^2+2y^2+z\left(\frac{1}{3}y\right)^2}{z\left(\frac{4}{3}y\right)^2+y^2-\left(\frac{1}{3}y\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{16}{9}+2+\frac{2}{9}\right)y^2}{\left(\frac{32}{9}+1-\frac{1}{9}\right)y^2}$$

$$=\frac{16+18+2}{32+9-1}=\frac{9}{10}.$$

例 2 已知 $x^2-x-1=0$，求$x^8+\frac{1}{x^8}$的值。

思路 通过对已知条件 $x^2-x-1=0$ 变换得出 $x-\frac{1}{x}$的值，再应用乘法公式进行计算。

解：由已知得 $x^2-1=x$，即 $\frac{x^2-1}{x}=1$，

$$\therefore \quad x-\frac{1}{x}=1.$$

而 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=1$，即 $x^2-2+\frac{1}{x^2}=1$，

$\therefore\quad x^2+\frac{1}{x^2}=3$。

又 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$，即 $x^4+2+\frac{1}{x^4}=9$，

$\therefore\quad x^4+\frac{1}{x^4}=7$。

而 $\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2=49$，即 $x^8+2+\frac{1}{x^8}=49$，

$\therefore\quad x^8+\frac{1}{x^8}=47$。

例 8 已知$x^2+x+1=0$，求 $x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$的值。

思路 由条件中的 x^2+x+1 联想起$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$，$\because\ x^2+x+1=0$，$\therefore\ x^3-1=0$，即$x^3=1$因而，若能从$x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$中提出这个因数，则问题即可解决。

解： $\because\ x^2+x+1=0$，$\therefore\ x^3-1=0$，即 $x^3=1$。而

$$x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=(x^3)^4\cdot x^2+\frac{1}{(x^3)^4\cdot x^2}$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\qquad(1)$$

又 $\because\ x^2+x+1=0$，$\therefore\ x+1+\frac{1}{x}=0$，

即 $x+\frac{1}{x}=-1$，代入(1) 式，得

$x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=-1$。

说明 用本例题的方法，当 $x^2+x+1=0$时，可求得 $x^{3n+2}+\dfrac{1}{x^{3n+2}}=-1$（$n$为自然数），如$x^5+\dfrac{1}{x^5}$，$x^8+\dfrac{1}{x^8}$，$x^{11}+\dfrac{1}{x^{11}}$，…的值皆为$-1$。

例 4 已知(1) $\dfrac{3a-b}{2b-a}=7$，(2)$\dfrac{2x+2y}{2y-x}=10$，求 $\dfrac{3ax-by}{ax+2by}$ 的值。

思路 欲求 $\dfrac{3ax-by}{ax+2by}$的值，只需求出ax与by的关系，由题设易知 $b\neq 0$，$y\neq 0$，即可求出$\dfrac{ax}{by}$的值，就可使ax与by相互转换，即可求得其值。

解： 由（1）得 $3a-b=7(2b-a)$， 即 $10a=15b$，

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{3}{2} \tag{3}$$

由（2）得 $2x+2y=10(2y-x)$，即 $6x=9y$，

$$\therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{3}{2} \tag{4}$$

由（3）、（4）得$\dfrac{ax}{by}=\dfrac{9}{4}$，$\therefore \quad ax=\dfrac{9}{4}by$，代入求值式，

$$\frac{3ax-by}{ax+2by}=\frac{3\left(\frac{9}{4}by\right)-by}{\frac{9}{4}by+2by}=\frac{23}{17}.$$

例 5 已知$a+b+c=0$，

求 $\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$的值。

思路 通过对已知条件$a+b+c=0$变换出所求式分母的式子，再将分母进行代换。

解： $\because\ a+b+c=0$，$\therefore\ a+b=-c,(a+b)^2=c^2$。

$\therefore\ a^2+b^2-c^2=-2ab$

同理可得 $b^2+c^2-a^2=-2bc$，$c^2+a^2-b^2=-2ac$。

$$\therefore\ 原式=\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ca}+\frac{1}{-2ab}$$

$$=\frac{a+b+c}{2abc}$$

$$=0。$$

4．分式的证明题

例 1 已知 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}(a\neq b\neq c)$，

求证 $x+y+z=0$。

思路 由已知条件联想到设比值的方法。

证： 设$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k$，

$\therefore\ x=(a-b)k$，$y=(b-c)k$，$z=(c-a)k$。

$$\therefore\ x+y+z=(a-b)k+(b-c)k+(c-a)k$$
$$=ak-bk+bk-ck+ck-ak=0$$

例 2 设 $abc=1$，

求证 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$。

思路 利用$abc=1$进行适当的代换，将原分母变换成同

分母。

证： 左端 $=\dfrac{a}{ab+a+abc}+\dfrac{b}{bc+b+abc}$

$$+\frac{c}{ca+c+abc}$$

$$=\frac{1}{b+1+bc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{1+bc+b}$$

$$=\frac{1+b+bc}{b+1+bc}=1=\text{右端。}$$

例 3 设 x、y、z 为三个互不相等的实数，

且 $x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}$，求证 $x^2y^2z^2=1$。

思路 此题可先求出 xy、yz、zx 再证。

证： 由 $x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}$，得 $x-y=\dfrac{z-x}{yz}$，

$\therefore\quad yz=\dfrac{z-y}{x-y}$。

同理可得 $\quad xy=\dfrac{x-y}{z-x}$、$zx=\dfrac{z-x}{z-y}$。

三式相乘得 $\quad x^2y^2z^2=\dfrac{z-y}{x-y}\cdot\dfrac{x-y}{z-x}\cdot\dfrac{z-x}{z-y}=1$。

例 4 已知 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，$\quad\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$，

求证 $\quad\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$。

思路 要证$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，显然要把

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$两边平方，然后再应用等二个条件。

证： $\because\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$\therefore\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1$，

$$\therefore\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}+\frac{xy}{ab}\right)=1,$$

即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{ayz+bzx+cxy}{abc}\right)=1$。

$$\therefore\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-2\left(\frac{ayz+bzx+cxy}{abc}\right)$$

由已知 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，$\therefore\ \frac{ayz+bzx+cxy}{xyz}=0$，

$\therefore\ ayz+bzx+cxy=0$，

$\therefore\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。

例 5 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$。

求证 $\frac{1}{a^{1989}}+\frac{1}{b^{1989}}+\frac{1}{c^{1989}}$

$$=\frac{1}{a^{1989}+b^{1989}+c^{1989}}=\frac{1}{(a+b+c)^{1989}}.$$

思路 从变换已知等式入手。

证： 由已知条件，得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}\right)=0,$$

即 $\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{a+b+c}=0$，

即 $\frac{c(a+b)^2+c^2(a+b)+ab(a+b)}{abc(a+b+c)}=0$。

由已知条件可知，$a+b+c\neq 0$，$abc\neq 0$。

$\therefore$ $c(a+b)^2+c^2(a+b)+ab(a+b)=0$，

即 $(a+b)[c^2+c(a+b)+ab]=0$，

即 $(a+b)(a+c)(c+b)=0$。

从而 $a=-b$或$b=-c$或$c=-a$。

由此可知 $\frac{1}{a^{1989}}+\frac{1}{b^{1989}}+\frac{1}{c^{1989}}$

$$=\frac{1}{a^{1989}+b^{1989}+c^{1989}}=\frac{1}{(a+b+c)^{1989}}.$$

另证，由已知得 $\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1}{abc}$，

即 $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0$，

$[a+(b+c)][bc+a(b+c)]-abc=0$

$(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)=0$

因而 $(b+c)(c+a)(a+b)=0$

以下证明同上。

(三)练习题

1. 若 $x+\frac{1}{x}=m$，求 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 的值。

2. 若 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$ 时，求$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值。

3. 已知 $x=\frac{a}{b+c}$， $y=\frac{b}{c+a}$， $z=\frac{c}{a+b}$，

且 $a+b+c\neq 0$，求 $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}$ 的值。

4. 已知 $a+3b+5c=0$，$2a+4b+7c=0$，$abc\neq 0$，

求 $\frac{a^2+5b^2-2c^2}{3a^2-2b^2+5c^2}$ 的值。

5. 化简 $\frac{x^3-x^2-x+1}{1-2|x|+x^2}$。

6. 化简
$$\frac{\frac{1}{(a-b)^2}-\frac{2}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}}{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{2}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}}+\frac{\frac{1}{(a^2-b^2)^2}-\frac{2}{a^4-b^4}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}}{\frac{1}{(a^2-b^2)^2}+\frac{2}{a^4-b^4}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}}.$$

7. 计算 $\left[\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}-1\right]\left[\frac{(x+y+z)(x-y-z)}{(x-y+z)(x+y-z)}-1\right]$。

8. 设 $a+b+c=0$，求证
$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$

9. 已知 $a+\frac{1}{b}=1$，$b+\frac{1}{c}=1$，求证 $c+\frac{1}{a}=1$。

10. 已知 $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$，

求证 $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$。

11. 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$,

求证 a、b、c 三数中一定有两个互为相反数。

12. 已知 $\frac{x}{(b-c)yz}=\frac{y}{(c-a)zx}=\frac{z}{(a-b)xy}$,

求证 $x^2+y^2+z^2=0$。

(四)答案与提示

1. $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]^2-2$

$$=(m^2-2)^2-2=m^4-4m^2+2.$$

2. $\because$ $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$, $y-x=3xy$,

$$\therefore\quad \frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{-2(y-x)+3xy}{-(y-x)-2xy}$$

$$=\frac{-3xy}{-5xy}=\frac{3}{5}.$$

3. $\because$ $x=\frac{a}{b+c}$, 又 $a+b+c\neq 0$,

$$\therefore\quad \frac{x}{1+x}=\frac{a}{a+b+c}.$$

同理可得 $\frac{y}{1+y}=\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{z}{1+z}=\frac{c}{a+b+c}$,

$$\therefore\quad \frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=1.$$

4．由$\begin{cases} a+3b+5c=0, \\ 2a+4b+7c=0, \end{cases}$ 解得$a=-\dfrac{1}{2}c$，$b=-\dfrac{3}{2}c$

即 $\dfrac{a}{-1}=\dfrac{b}{-3}=\dfrac{c}{2}$，设$a=-k$，$b=-3k$，$c=2k$，

$$\therefore \quad \frac{a^2+5b^2-2c^2}{3a^2-2b^2+5c^2}=\frac{k^2+45k^2-3k^2}{3k^2-18k^2+20k^2}=\frac{38}{5}.$$

5．当$x\geqslant 0$时，原式$=x+1$；

当$x<0$时，原式$=\dfrac{x^2-2x+1}{1+x}$。

6．原式$=\dfrac{\left(\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}\right)^2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{a^2-b^2}-\dfrac{1}{a^2+b^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2}\right)^2}$

$$=\left(\frac{2b}{2a}\right)^2+\left(\frac{2b^2}{2a^2}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}.$$

7．2。

8．$a+b+c=0$，则 $a+b=-c$，

有$a^2+b^2-c^2=-2ab$，

同理有 $b^2+c^2-a^2=-2bc$，$c^2+a^2-b^2=-2ac$，

$$\therefore \quad \frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

$$=-\frac{a+b+c}{2abc}=0.$$

9．提示：由第一式求出$\dfrac{1}{a}$，由第二式求出c。

10．设$\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}=k$，

则 $x=(b+c-a)k$，$y=(c+a-b)k$，$z=(a+b-c)k$，将上列三式代入求证等式左边得

$$\begin{aligned}\text{左边}&=(b-c)(b+c-a)k+(c-a)(c+a-b)k\\&\quad+(a-b)(a+b-c)k=0.\end{aligned}$$

11. 参考例5的证明。

12. 设 $\dfrac{x}{(b-c)yz}=\dfrac{y}{(c-a)zx}=\dfrac{z}{(a-b)xy}=k$，

$\therefore\quad x^2=(b-c)xyzk$，$y^2=(c-a)xyzk$，$z^2=(a-b)xyzk$，三式相加即可得证。

九　数学趣味

在数学许多的问题中，常有一些既有知识、又有趣味的数学命题。

解决这些问题，关键在于学会思考。对事物要有观察、联想、对比，由简单到一般地分析、解决问题。从观察事物的内在联系中，捕捉解决问题的信息，从中寻找解题的最佳途径。

解决数学趣味问题，要有一定的基础知识和扎实的解题的能力，才能创造出独特的解题方法。

（一）基本原理

仅介绍抽屉原则

先看这样一个事实：现在有3个苹果往两个抽屉里放，则有一个抽屉里一定会有两个或三个苹果。这是显然的。这个事实称做抽屉原则（又称鸽巢原则）。

严格地说，将多于n个元素按任意方式分成n个抽屉，则其中至少有一个抽屉含有两个或两个以上的元素。

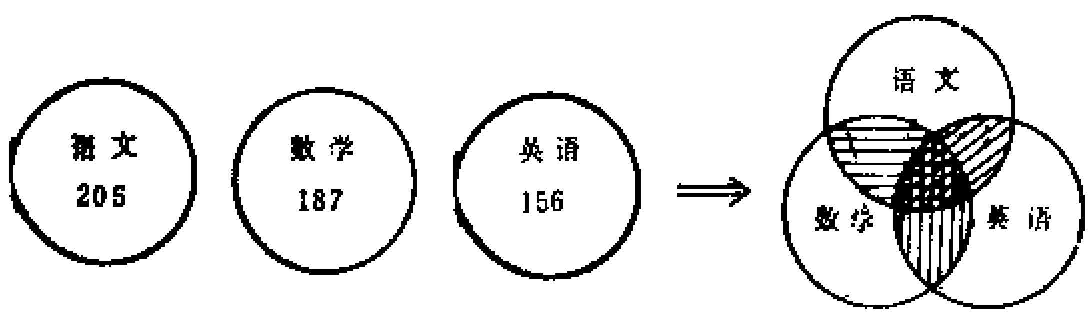
（二）范例与方法

例 1　某校举行初中二年级语文、数学、英语三科竞赛，学生中至少参加一科者：语文205人，数学187人，英语156人。

参加两科者：数学、英语126人，数学、语文112人，语文、英语89人。三科都参加者86人。试求参加竞赛的学生总人数是多少？

思路 解决数学问题，应当学会观察和联想。由已知条件知道，学生中都至少参加一科。参加语文的205人中，包括参加其它两科的人，不易求出单独参加语文的人数。同样也很难求出单独参加数学、英语的人数。

如果用三个圆分别表示参加数学、语文、英语的人数，由于三科的人数互相包含，那么这三个圆就不是孤立的，而是互相相交。通过三个圆两两相交的图形，将很容易地求出总人数。如图



解：$总人数 = 205 + 187 + 156 - 126 - 112 - 89 + 86$

$= 307$（人）

说明 两圆相交的公共部分，表示两科都参加。公共部分相当两圆重叠，因此在计算总人数时应当去掉重复的人数。

例 2 两人彼此约定在一圆形桌上放硬币。一个人往桌上放一枚硬币，接着另一人也往桌上放一枚同样的硬币，如此交替下去，规定在桌上的硬币平放不重叠。谁在桌上放最

后一枚，谁就是获胜者。问怎样放才能获胜。

思路 从简单问题入手来发现一般规律。如果圆形桌子仅能放下一枚硬币。显然谁先放上，谁就是相当最后放下一枚硬币的人，从而获胜。由此启发了我们：当把硬币放下后，桌子开始扩大。这时硬币就置在桌子中心，另一人只能把硬币放在圆形桌上其它位置上。第一人再把硬币放在与第二枚硬币关于圆心对称的位置上，如此交替下去。由于桌子是一个中心对称图形，当硬币布满桌子而留下最后一个空，显然是第一人找到的第二人放在最后一枚硬币关于圆心对称位置。

解：根据圆的中心对称性质，圆上任意一点以圆心为对称中心，都可找到它的对称点。当把硬币放在圆心位置上时（称第一人），其中另一人只能把硬币放在圆桌上其它位置上。第一人只要把第三枚硬币放在第二枚硬币的对称位置上。因为圆上的点都是关于圆心成对的出现。只要这样交替的下去，第一人总是落下第二个点，所以第一人获胜。

例 3 将正奇数1，3，5，7，……，排列成五列。按下表的格式排列下去，1991所在那列？（从左数起）

	1	3	5	7
15	13	11	9	
	17	19	21	23
31	29	27	25	
	33	35	37	39

……………………………

思路 解决数学问题，要善于发现规律。如果按照表排下去，寻找1991所在的列，将很繁。表所排的都是奇数，奇

数可表示为$4k+1$型或$4k+3$型（k是整数），1991是$4k+3$型。不妨用4的倍数来考察一下每列数的余数。用12去除这五列数，发现只有第五列数被12除所得的余数与1991被12除的余数相同。故1991在第五列中。

解法（略）

说明 这属于数的特征问题。用余数判断数的问题这是常用的方法。

例 4 军训活动进行列方队，初中三年级参加了两个班，如果把学生排成4列纵队，还剩3人；排成6列纵队，还剩5人；排成8列纵队，还剩7人；排成10列纵队，还剩9人。求这方队最少人数是多少。

思路 根据已知条件，如果把学生排成4列纵队，还剩3人。那么加上一人，则恰好又能排4人一列。分析整个已知条件，易知这方队的人数是4、6、8、10的倍数少1人。

解： 根据已知条件，求这方队最少人数。因此，人数应当是4、6、8、10的最小公倍数少1人。4、6、8、10的最小公倍数是120。

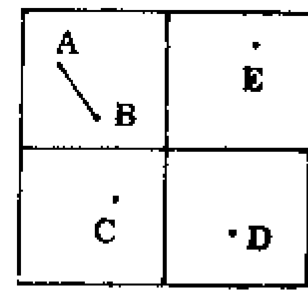
所以 初三两个班同学组成的方队最少是119人。

例 5 在边长为1的正方形内有任意五个点。试说明：其中必有两个点，它们之间的距离小于或等于正方形的对角线长度一半。

思路 在正方形内（不包括边上）有任意五点，只要依题意画出图来，事实的确象结论所说的那样。在画图中，我们可以想象到正方形相当一个“抽屉”，如果把这“抽屉”再分四个小“抽屉”，那么有一个小“抽屉”里一定有两个

点，这个小“抽屉”里最长的线段小于正方形的对角线，而这两点的距离也当然小于正方形的对角线。问题关键在于如何“制造”一些“抽屉”。

解：连结正方形两对对边的中点，则对边中点连线，可以把正方形分成四个大小相等且边长都是$\frac{1}{2}$的小正方形（如图）



这样，在大正方形内的五个点，相当于任意放在这四个“抽屉”（小正方形）里。

根据抽屉原则，一定有一个小正方形内含有两个或两个以上的点。这其中两点的距离不会超过小正方形的对角线的长度，即小于或等于小正方形对角线长度一半。

说明　本题运用了抽屉原则。其方法简单、明确。运用抽屉原则解决这样类似的问题，关键是如何制造“抽屉”。对于上题来说，在正方形内“制造”的“抽屉”，即分割图形，有很多分割方法。有时抽屉制造好了，但说明不了问题。这并不意味着抽屉原则不好用，是说明没有制造出最佳的抽屉。

例 6　某校有从150厘米至160厘米，身高都是整数的学生。则至少从任意多少个这样的学生中确保能找到4人的身高相同。

思路　身高从150厘米至160厘米都是整数，共有11个不同档次。把每个不同档次设为一个抽屉，共有11个不同抽屉。

欲找到4人的身高相同，这样11个抽屉，每个抽屉里事先应有3个相同的身高数码。只要随意再找一人（身高为150厘米至160厘米，身高为整数），那么这个学生的身高数码一定落在与它相同数码的抽屉里。从而保证能找到4个人的身高相同。这样至少需要34人。

解法（略）。

例 7 水池装有编号为①，②，③，④，⑤的5条水管，其中有些是进水管，有些是出水管，如果同时开放两条水管，注满水池的时间如下表：

开放水管号	① ②	② ③	③ ④	④ ⑤	⑤ ①
注满水池时间（小　时）	2	15	6	3	10

那么单独开一水管，最快注满水池的水管编号是哪一个。

思路 因为有进水管和出水管，不妨规定进水的流量为正，出水的流量为负，用Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5分别表示五个水管水的流量。根据表格，①②注满水池的时间为2（小时），②③注满水池的时间为15（小时），比较这两组中①②③水管流量：

当②表示水管出水时，①③表示水管进水。显然$Q_1>Q_3$。

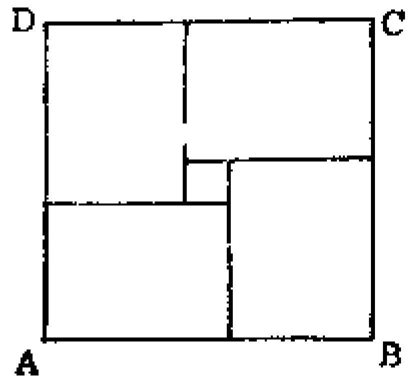
当②表示水管进水时，①③表示水管出水，比较①③的流量，因为是出水。所以$Q_1>Q_3$。

依此比较下去，$Q_2<Q_4$，$Q_3<Q_5$，$Q_4>Q_1$，$Q_5<Q_2$。即$Q_4>Q_2>Q_5>Q_3$，$Q_4>Q_1>Q_3$、可见Q_4最大且为正数。

单独开放④号水管，注满水池的时间最短。

解法（略）。

例 8 你能把一个正方形按照如图的方式，分成 5 个小正方形吗？



思路 假设能按照如图的方式分成 5 个小正方形。那么一定能计算出每个小正方形的边长。

解：如图，设中间一个小正方形的边长为 x，左下角的正方形边长为 y。则左上角、右上角、右下角的三个小正方形的边长分别为：$y-x$、$y-2x$、$y-3x$。则

$$AB=y+(y-3x),\quad AD=y+(y-x)$$

$\because\quad AB=AD$，

$\therefore\quad y+(y-3x)=y+(y-x)$。

解得 $x=0$。

这说明中间的小正方形是不存在的。因此按照如图的方式，不能分成 5 个小正方形。

说明 这是一个很有趣味的问题。如果不按照本题所指的那样在正方形里分五个小正方形，而是别的分法来分五个小正方形，是否可行。答案是不可能分成五个小正方形。

（三）练 习 题

1. 某研究所有研究人员 91 人，每人至少懂英、俄、日三种语言之一，其中懂英语的47人，懂日语的50人，懂俄语50 人；懂英、日两种语言的 22 人，懂英、俄两种语言的 21 人，懂日、俄两种语言的 23 人。问三种语言都懂的人有多

少？

2．有一个大圆，以它的一条直径上的无数个点为圆心，画无数个每相邻的两个都外切的圆（靠近直径两端的小圆与大圆相内切），问大圆的周长与大圆内部这些无数个圆周长之和相比较，哪个更长？

3．20个空格排成一行，预先在右边第一格放入一枚棋子，然后甲、乙两人交替走，先甲后乙，每步可向右移1格、2格或3格，规定谁先到最后一格为胜，甲为保证获胜他第一步必须把棋子向右移12个格。

4．现在有1991个球，甲、乙两人按下法做游戏：两人轮流取球，每人一次可随意拿一个或两个球，但不允许不拿，谁取得最后一个球谁败。如果先甲后乙，甲怎样拿才能获胜？

5．有一篮子鸡蛋两个两个数，三个三个数，四个四个数，五个五个数，六个六个数，结果都余下一个。若七个七个数恰好数完，这篮子里有多少个鸡蛋？

6．某校有1484人去市体育馆参加元旦联欢会，有若干辆客车运送，四次正好送完，每次送的学生人数相同，并且每辆客车每次乘坐的学生人数也都相同，已知客车不少于一辆，而且每辆客车每次送的学生人数比客车的辆数多，问共有多少辆客车？每辆客车每次乘坐多少名学生？

7．在新年晚会上，一些同学相互赠送礼物．规定每个人只要接到对方的礼物就一定回赠礼物．试说明赠了奇数个礼物的学生是偶数个人．

8．在同年龄的25个同学中，至少有几人有相同月份的

生日。

9. 某学校初一年级有13个课外活动小组，各组人数如下

组别	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
人数	2	3	5	7	9	10	11	14	13	17	21	22	24

一天下午，学校同时举办语文、数学两个讲座，已知有12个小组去听讲座。其中听语文讲座人数是听数学讲座人数的6倍。还剩下1个小组在教室讨论问题，这一组是第几小组。

10. 任给五个整数，试证明从中必能选出三个，它们的和能被3整除。

11. 有一块矩形铁板长63厘米，宽42厘米，现要分割成长8厘米，宽5厘米的小矩形铁板。如何下料才能使小矩形铁板的块数最多？画出草图。

（四） 答案与提示

1. 提示：本题解法与例1相同。三种语言都懂的有10人。

2. 提示：大圆周长＝直径×π。各个小圆的周长＝各个小圆的直径×π。比较结果，相等。

3. 甲第一步向右移3个格。

4. 提示：因为甲先拿球乙后拿球，因此先分析一下甲获胜的可能性。当甲最后一次取球时，如果剩2个或3个球，只要甲取走1个或2个，最后一个球是乙取，甲就获

胜。再往前递推：

甲最后一次取球时剩2个或3个球，

乙在甲之前取球时应剩4个球。

甲倒数第二次取球时应剩5个或6个球，

乙在甲之前取球时应剩6个或7个球。

…………………………………。

不难发现，甲取球时，球的数目只要是 $3k$ 个或（$3k+2$）个（k 是整数），采取在乙取两个球，甲就取一个球，乙取1个球甲就取2个球的方法。现在有1991个球，1991是 $3k+2$ 型的数。采取上面的方法，总可以使得乙取球时，球数是 $3k+1$ 个。最终使乙取走最后一个球。因此甲先取一个球。

5. 篮子里有301个鸡蛋。

6. 共有7辆客车，每辆客车每次乘53名学生；

7. 设有 m 个学生赠送奇数个礼物。如

a_1，a_2，……，a_m（均是奇数）

再设 n 个学生赠送偶数个礼物。如 b_1，b_2，……，b_n（均是偶数）

因为赠送是相互的，所以礼物总是偶数。

即 $(a_1+a_2+\cdots+a_m)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=$ 偶数。

可知 $a_1+a_2+\cdots+a_m$ 是偶数，则 m 一定是偶数。

所以 赠送奇数个礼物的人是偶数。

8. 提示：利用抽屉原则。每个月份为一抽屉。至少有3个同学是相同月份生日。

9. 提示：设去听数学讲座的人数为 x，则去听语文讲座的人数为 $6x$。听两个讲座的人数是 $7x$。而13个小组的总

人数是 158 人。

只有　$158-11=147=7\times 21$ 是 7 的倍数。是第 7 小组在教室。

10. 提示：利用整除性和抽屉原则。

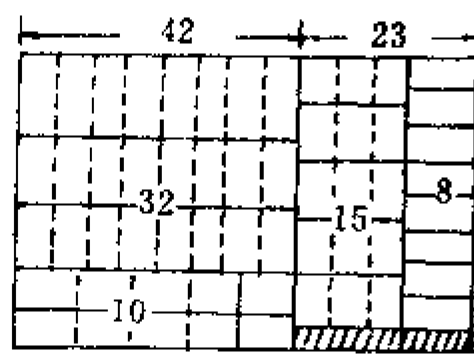
11. 解：用小矩形的宽 5 厘米去度量大矩形的宽 42 厘米，结果 $42\div 5\neq$ 整数。说明不能以 5 厘米长横向分割铁板，因为有余料或料不够。同样也不能以 8 厘米长横向分割铁板。

那么只能以 5 厘米长和 8 厘米长，交差度量宽为42厘米铁板边长。

设　$5x+8y=42$（x, y 表示 5 和 8 的个数）。

解得　$x=2$，$y=4$。

因为　5、8的最小公倍数为 40，在 40×42 的铁板上无浪费地可分割 $32+10=42$ 块小矩形。



这样还剩下宽为 23、长为 42 的铁板。

再设　$5z+8u=23$（z、u 表示 5和 8 的个数）。

解得　$z=3$，$u=1$。不难得出在余下的 23×42 的铁板上可分割成 $15+8=23$ 块小矩形。

最后余下 2×23 的铁板。共可分割 65 块。

十 杂题选讲

在我们遇到的很多数学问题中，有一些很难归结为哪一类型题，其解法就更难说是什么方法，我们称这些问题为“杂题”。请看例题。

数字游戏和数迷

例1 数18倒过来看就是81。现在有一个五位数，数字各不相同，颠倒过来看就成了另一个五位数，且后者比前者大61353，求这个五位数。

解：一个数码，倒过来看仍是数码的只有0，1，6，8，9（印刷体），并且6倒过来变成9，9倒过来变为6。现在把此题写成算式：

$$\begin{array}{r} \square\square\square\square\square \\ -\ \square\square\square\square\square \\ \hline 6\ 1\ 3\ 5\ 3 \end{array}$$

先从末位分析，相减得3的只有9－6和11－8两种情况。如果末位是9－6，那么原数的首数就应是6，于是新数就该是六位数，所以不合题意，故末位只能是1和8，算式成为如下形式：

$$\begin{array}{r} 8\ 0\ 9\ 6\ 1 \\ 1\ 9\ 6\ 0\ 8 \\ \hline 6\ 1\ 3\ 5\ 3 \end{array}$$

再看倒数第二位，只能是6－0，第三位就只能是9－6，于是原数是19608。

例2 有这样一个算式，字母位置是几不知道，请把它们填写出来。

$$
\begin{array}{r}
6\,AB \\
\times\quad CDE \\
\hline
FGH
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
I\,J\;KL \\
M5N\,5\quad \\
\hline
PQ\,5\,R4S
\end{array}
$$

解：∵ 第三行是三位数，∴ $E=1$，于是 $H=S=B$，$F=6$，$G=A$。

由于第五行末是5，即 $C\times B$ 必是一奇数乘以5，但 $C=5$，故即使 $AB=99$，第五行的第二位数也不可能是5，∴ 只有 $B=5$。

如果 $A=9$，∵ C 为奇数，无论 C 取几，695乘以 C 都得不出 $M5N5$ 的形式，∴ $A=G\neq 9$。

L 是 D 与 B 乘积的尾数，L 只能取0和5，如果 $L=5$，G 只能取9，这不可能。∴ $L=0$，于是可得 $G=4$，$A=4$。

回头看 C，只有 $7\times 645=4515$ 符合 $M5N5$ 的形式，∴ $C=7$。

现在只要找到 D 即可了，由于 D 只取偶数2，4，6，8，经试验，可知 $D=2$。于是即得 $A=4$，$B=5$，$C=7$，$D=2$，$F=6$，$G=4$，$H=5$，$I=1$，$J=2$，$K=9$，$L=0$，$M=4$，$N=1$，$P=4$，$Q=6$，$R=0$，$S=5$。

例3 我们通常用的是十进制，而下面的算式是四进制的算式，即算式中的 A、B、C、D 只表示0、1、2、3中的一个数字，即逢四进一。问算式中的 A、B、C、D 各代表什么数字。

解：在四进制中

$0+0=0$，$0+1=1$，$0+2=2$，$0+3=3$

$1+1=2$，$1+2=3$，$1+3=10$

$2+2=10$，$2+3=11$，$3+3=12$。

$$\begin{array}{r} ABCD \\ +)\ CBAB \\ \hline BBCBB \end{array}$$

现在先看 $A+C$，最大可能是 11，所以 BB 最大只能是 11，于是 $B=1$，将算式写成如下形式，于是立得 $D=0$。

$$\begin{array}{r} A1CD \\ +)\ C1A1 \\ \hline 11C11 \end{array}$$

由于 $C+A$ 要进位 1，所以第三行的 $C=3$，于是 $A=2$。

例 4 填上下面算式中的各个数字

$$\begin{array}{r} 7\times\times\times\times \\ \times\times\times\,)\overline{\times\times\times\times\times\times\times 8} \\ \times\times\times\quad\quad\ \ \ \\ \hline \times\times\times\times\quad\ \ \\ \times\times\times\quad\ \ \\ \hline \times\times\times\times \\ \times\times\times\times \\ \hline 0 \end{array}$$

解：为了方便，我们给每个位置以字母标出，即

$$\begin{array}{r} 7pqrs \\ \alpha\beta\gamma\,)\overline{abcdefg8} \\ hij\quad\quad\ \ \\ \hline hlmn\quad\ \\ tuv\quad\ \\ \hline wxyz \\ wxyz \\ \hline 0 \end{array}$$

显然 $z=8$，$c=m$，$g=y$，$p=0$，$r=0$。

注意到算式中有两处是四位数减去三位数而得到两位数，这样四位数中的头两位必然是 10．三位数的首位必是 9。

因而 $a=1$，$b=0$，$h=9$，$k=1$，$l=0$，$t=9$。

注意到$\overline{abcd}$减去$\overline{hij}$等于$\overline{kl}$，相当于$\overline{10cd}-\overline{9ij}=10$，则必有 $c=0$，$i=9$。于是 $990\leqslant\overline{hij}\leqslant 999$。

而$\overline{hij}$显然是 7 的倍数，于是只有 $j=4$。

$\because$ $994\div 7=142$，$\therefore$ $\overline{\alpha\beta\gamma}=142$，并得 $d=4$。

$\because$ $142\times s$ 的个位是 8，$\therefore$ s 只能是 4 或 9，但 $s=4$ 时，$142\times 4=568$ 不是四位数，故 $s=9$，这样算式可写为

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 70q09 \\
142 \big) & \overline{1004efg8} \\
 & \underline{994} \\
 & 10ef \\
 & \underline{9uv} \\
 & 1278 \\
 & \underline{1278} \\
 & 0
\end{array}
$$

显然 $g=7$，注意到 $142\times q=9uv$，必有 $q=7$，从而有 $9uv=994$。$u=9$，$v=4$。于是 $e=0$，$f=6$。

这样算式为：

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 70709 \\
142 \big) & \overline{10040678} \\
 & \underline{994} \\
 & 1006 \\
 & \underline{994} \\
 & 1278 \\
 & \underline{1278} \\
 & 0
\end{array}
$$

有不少数迷问题可以通过建立不定方程来求整数解的办法得到解决，

例 5 试求满足条件的六位数$\overline{abcdef}$：$\overline{abcdef}\times 3=$

$\overline{ef}\overline{abcd}$)

解：设$\overline{abcd}=x$，$\overline{ef}=y$。

∴ $(100x+y)\times 3=1000y+x$。

即 $23x=769y$。

令 $\dfrac{x}{769}=\dfrac{y}{23}=k$，则 $x=769k$，$y=23k$，其中 k 取自然数，注意 y 为二位数，x 为四位数，所以 k 只能取 2，3，4，依次由 $k=2$，$k=3$，$k=4$ 就可求得这个六位数是 153846，230769，307692。

例6 有一个数的个位数是 2，将 2 移到首位得到一个新数，这个新数是原数的 2 倍。求符合条件的最小正整数。

解：设原数为 $10x+2$，则新数为 $2\cdot 10^n+x$。

得 $2(10x+2)=2\cdot 10^n+x$，即 $2\cdot 10^n=19x+4$。

这是一个以 n 和 x 为未知数的不定方程。我们只要对形如 200…00 的数用 19 去除，当得到余数是 4 时，那么所得的商就是 x。

这样得到 $x=105263157894736842$。

于是所求的自然数是 105263157894736842

如果继续除下去，可以得到一系列符合条件的数，我们得到的只是其中最小的那个数。

例7 求出所有满足下列条件的三位数：

(1) 它的各个数字不同；

(2) 这个数等于所有由它的各位数字组成的两位数的和。

解：设此三位数为$\overline{xyz}$，x、y、z 是 0，1，…，9 中的一个

数，且 $x\neq 0$。依题意 $x\neq y=z$。

$$\overline{xyz}=\overline{xy}+\overline{yz}+\overline{xz}+\overline{zx}+\overline{yx}+\overline{zy},$$

$$100x+10y+z=11(x+y)+11(x+z)+11(y+z).$$

$$26x=4y+7z.$$

$\because$ $0\leqslant y\leqslant 9$，$0\leqslant z\leqslant 9$，$\therefore$ $0<26x\leqslant 99$。

$$0<x\leqslant\frac{99}{26},$$

则 x 只能为 1，2，3。

①当 $x=1$ 时，$4y+7z=26$，易得 $y=3$，$z=2$

即所求三位数为 132；

②当 $x=2$ 时，$4y+7z=52$，得 $y=6$，$z=4$。

所求三位数为 264；

③当 $x=3$ 时，求得此三位数为 396。

因此符合条件的三位数是 132，264，396。

例 8 求证：不存在这样的整数，它的首位移到末位之后，得到的数是原数的 2 倍。

证：假设这样的整数存在，设为 N，是个 n 位数，首位数字是 $a(1\leqslant a\leqslant 9)$，新得的就是

$(N-a\cdot 10^{n-1})\cdot 10+a$，即 $10N-a\cdot 10^n+a$。

依题意有 $10N-a\cdot 10^n+a=2N$，

$$\therefore\ 8N=a(10^n-1)=a\cdot\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{个}} \qquad (1)$$

$\because$ 8 与 $99\cdots 9$ 互质，$\therefore$ $a=8$，$N=99\cdots 9$。N 的首位是 9 与 $a=8$ 矛盾。所以原来的假设不成立。即不存在这样的整数。

此题是1985年加拿大的一道数学竞赛题。解决此题的关键是 8 与 99…9 互质，而 $8=10-2$，所以将原题中的 2 倍改为偶数倍依然成立。

那么改为奇数倍又如何呢？回到基本关系式(1) 中看一看。

$$(10-m)N=a(10^n-1)=a\cdot 99\cdots 9$$

当 $m=5$ 时， ∵ 5 与 99…9 互质，∴ 问题无解。

当 $m=7$ 时， $3N=a\cdot\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{个}}$。

∴ $N=a\cdot\underbrace{33\cdots 3}_{n\text{个}}$，无论 a 取 1，2，…，9 中的任何数，N 的首位都不能为 a，故问题无解。

同理 $m=9$ 问题也无解。

剩下 $m=3$ 的情况，此时(1) 式变为 $7N=a\cdot\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{个}}$。

当 $n\leqslant 5$ 时， ∵ 7 不能整除 99…9，∴ 在五位以下的自然数中无解，

当 $n=6$ 时，$999999\div 7=142857$。

∴ $N=a\times 142857$

当 $a=1$ 时，$N=142857$，

当 $a=2$ 时，$N=285714$。

进一步可知 $a\geqslant 3$ 时，求出的 N 首位与 a 不符，∴ 无解。

例9 试从数 12345678910111213141516 …… 96979899100中划掉100个数字，使得剩下的数最大。

解：我们知道，在给定的这个数中不论划去哪100个数字，所得的新数的位数都相同，而位数相同的两个数，首位数字大的，数一定大，于是，为了使剩下的数最大，必须使前面的数码有尽可能多的9。我们可以从前面开始划掉这样的数

1	2	3	4	5	6	7	8		
10	11	12	13	14	15	16	17	18	1
20	21	22	23	24	25	26	27	28	2
30	31	32	33	34	35	36	37	38	3
40	41	42	43	44	45	46	47	48	4

这样共划掉了 $8+19\times4=84$ 个数字。

下面还要划掉16个数字。

显然从50，51，52…划起，划掉16个数字不可能达到9，也不能达到8，只能达到7，这时划掉：50，51，52，53，54，55，56，5。

这样又划掉了15个数字，现在只要再划掉一个数字即可，显然划掉第二位上的5比划掉第一位上的7所剩下的数要大，这样所剩的数是99999，78，59，60，61，62……96，97，98，99，100。

上述这些问题的解决都是从易于入手的地方开始，依靠对数的特点的周密观察，进行分析和判断，有时还要进行分析试验，得出结果。

例10 有一种竞赛共含M项，有运动员A、B、C参加，在每一项目中。第一、二、三名分别得分为P_1、P_2、P_3，其中P_1、P_2、P_3为正整数，且$P_1>P_2>P_3$，最后A得22分，B与C均得9分，B在百米赛中得第一。求M值，并问跳

高第二名是谁？（加拿大1986年数学竞赛题）

解：考虑每人所得的总分数，有方程

$M(P_1+P_2+P_3)=22+9+9=40$，

∵ $P_1+P_2+P_3\geqslant 1+2+3=6$，

∴ $6M\leqslant 40$，从而 $M\leqslant 6$。

另外，由题设知至少有两个项目，∴ $M\geqslant 2$。

又∵ M 为 40 的因子，∴ M 只能取 2、4、5 三个值。

若 $M=2$，看 B 的总分可知 $9\geqslant P_1+P_3$，由此可知 $P_1\leqslant 8$，因此，若 A 拿两个第一，总分将小于或等于16与 A 的总分 22 分矛盾。所以 $M\neq 2$。

若 $M=4$，仍看 B 的总分可知 $9\geqslant P_1+3P_3$，∵ $P_3\geqslant 1$，∴ $P_1\leqslant 6$，如果 $P_1\leqslant 5$，那么四场至多得 20 分与 A 得 22 分矛盾，故 $P_1=6$。

另一方面，由于 $4(P_1+P_2+P_3)=40$，得

$P_2+P_3=4$，只能是 $P_2=3$，$P_3=1$。

又∵ A 不是百米第一，∴ A 最多得三个第一，A 的总分至多是 $3P_1+P_2=21<22$，又出现矛盾，因此只能是 $M=5$，这时

$$P_1+P_2+P_3=8$$

假如 $P_3\geqslant 2$，则 $P_1+P_2+P_3\geqslant 4+3+2=9>8$，这不可能，∴ $P_3=1$

又假如 $P_1\leqslant 4$，则五场最高得分20分<22分也不可能，因此，$P_1\geqslant 5$。如果 $P_1\geqslant 6$，那么 $P_2+P_3\leqslant 2$ 这是不可能的，故 $P_1<6$，有 $P_1=5$。

因此 $P_2+P_3=3$，$P_2=2$，$P_1=1$。

由此可知 A 得四个第一，一个第二，分数是 $4P_1+P_2=22$。而五个项目中，只有百米第一不是 A，其余全是 A 第一，故百米第二是 A。

B 的分数是：$P_1+x=9$，$P_1=5$，$x=4$，即 B 另外的四项共得 4 分，故 B 得了 4 个第三，即 $P_1+4P_3=9$

现在只剩下一个百米第三名和四个第二名由 C 得去，C 的分数是 $4P_2+P_3=9$。故跳高的第二名一定是 C。

关于数字的个位数问题

在关于数字的问题中，有很多是只与数字的个位数有关的。在研究数的个位数问题时，我们先明确几点：

1° 如果两个数的个位数相同，那么它们的差能被 10 整除，并且反过来也成立。

2° 两个数乘积的个位数等于这两个数的个位数的乘积的个位数。

3° 一个数的 n 次幂的个位数等于这个数的个位数的 n 次幂的个位数。

4° a^n 的个位数循环出现的周期是 4。

上面这些结论都可以证明。读者可以自己去证明一下。

例 1 求数 777^{777} 的个位数。

解：777^{777} 的个位数 $=7^{777}$ 的个位数

$=7^{194\times4+1}$ 的个位数

$=7^1$ 的个位数 $=7$。

例 2 求证：$3^{1988}+4^{1989}$ 能被 5 整除。

解：$\because$ $3^{1988}=3^{4\times497}=(3^4)^{497}=81^{497}$，

$\therefore$ 3^{1988} 的个位数是 1。

又 $\because$ $4^{1989}=4^{4\times 497+1}$，$\therefore$ 4^{1989}的个位数与$4^1=4$的个位数相同，即4^{1989}的个位数是4。

于是$3^{1988}+4^{1989}$的个位数是5，所以$3^{1988}+4^{1989}$能被5整除。

例3 试确定

$$\underbrace{47^{47^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{47}}}}}}_{47\text{个}}$$

的个位数。

解：为了便利，我们设 $L_n=\underbrace{47^{47^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{47}}}}}}_{n\text{个}}$，于是本题就是求$L_{47}$的个位数。

$\because$ $47^{L_{46}}$的个位数与$7^{L_{46}}$的个位数相等，$\therefore$ 只要看L_{46}被4除的余数即可求得。

由于$L_{46}=47^{L_{45}}$，而L_{45}是奇数，

设$L_{45}=2k+1$，则$L_{46}=47^{2k+1}$

$$L_{46}=(48-1)^{2k+1}=48^{2k+1}-a_1\cdot 48^{2k}+a_2\cdot 48^{2k-1}-\cdots-a_{2k-1}\cdot 48^2+a_{2k}\cdot 48-1.$$

在这个展开式中前$2k+1$项均能被4整除，而最后一项是-1，于是L_{46}被4除余数为3。

设$L_{46}=4t+3$，则$L_{47}=47^{4t+3}$

$\because$ L_{47}的个位数与7^3的个位数相同，$\therefore$ L_{47}的个位数是3。

例4 证明 当且仅当指数n不是4的整数倍时，$1^n+2^n+3^n+4^n$能被5整除。

证：设$n=4k+r$，$r=0,1,2,3$，则

$1^n+2^n+3^n+4^n=1^{4k+r}+2^{4k+r}+3^{4k+r}+4^{4k+r}$.

于是 $1^n+2^n+3^n+4^n$ 的个位数与 $1^r+2^r+3^r+4^r$ 的个位数相同。

当 n 被 4 整除时，$r=0$，$\because$ $1^0+2^0+3^0+4^0=4$ 不能被 5 整除，$\therefore$ $1^n+2^n+3^n+4^n$ 不能被 5 整除。

当 n 不被 4 整除时，$r=1$，2，3。

由于 $1^1+2^1+3^1+4^1=10$

$1^2+2^2+3^2+4^2=30$

$1^3+2^3+3^3+4^3=100$，

个位为 0，均能被 5 整除。

因此，当且仅当 n 不被 4 整除时，

$1^n+2^n+3^n+4^n$ 能被 5 整除。

在个位数问题中还有求数的末尾有多少个零的问题。

例 5 求$1\times2\times3\times4\cdots\times1988\times1989$ 中末尾含0的个数。

解： $\because$ $2\times5=10$，$\therefore$ 此数末尾含多少个相当于对 $1\times2\times3\times4\times\cdots\times1989$ 进行质因数分解式 2×5 的个数。

又 $\because$ $2<5$，$\therefore$ 含 2 的个数比含 5 的个数多，因此只要考查分解式中 5 的个数就行了。

在这1989个数中，每相邻的 5 个数就有一个数是 5 的倍数。我们记$\left[\frac{1989}{5}\right]$为$\frac{1989}{5}$的整数部分，于是在此数中有 $\left[\frac{1989}{5}\right]=397$ 个因数是 5 的倍数。

而每 25 个相邻因数中含有一个 5^2 的倍数，因此共有 $\left[\frac{1989}{5^2}\right]$ 个 5^2 的倍数，即 79 个。

同理，含有$\left[\dfrac{1989}{5^3}\right]=15$个$5^3$的倍数，有$\left[\dfrac{1989}{5^4}\right]=3$个$5^4$的倍数。

故共有$397+79+15+3=494$个质因数5，因此$1\times2\times3\times4\times\cdots\times1988\times1989$末尾共有494个0。

例6 两个三位数之差为242，它们的平方数的末三位数字相同，求这两个三位数。

解：设大数为x，小数为y，则有

$$\begin{cases} x-y=242 & (1)\\ x^2-y^2=1000k\ (k\text{取自然数}) & (2)\\ x+y=\dfrac{500k}{121}. & (3)\end{cases}$$

由(1)、(3)得$x=\dfrac{250k}{121}+121$，$y=\dfrac{250k}{121}-121$。

$\because$ 250与121互质，$\therefore$ k必是121的倍数，又x、y是三位数。

$$\therefore\quad 100\leqslant\frac{250k}{121}+121\leqslant999 \qquad (4)$$

$$100\leqslant\frac{250k}{121}-121\leqslant999 \qquad (5)$$

由(4)得$\dfrac{k}{121}<4$，

由(5)得$\dfrac{k}{121}\geqslant\dfrac{221}{250}>0$

$\therefore$ $1\leqslant\dfrac{k}{121}\leqslant3$。$\therefore$ $k=121, 242, 363$。

$\therefore \quad \begin{cases} x=371 \\ y=129, \end{cases} \quad \begin{cases} x=621 \\ y=379, \end{cases} \quad \begin{cases} x=871 \\ y=629. \end{cases}$

从此题可以看出，数字的末位数问题往往可以和其它问题结合在一起，解决这类问题既要考虑数字本身的特点，还要能灵活运用如方程、整数性质等有关知识。

例 7 一个完全平方数，末尾两位数均不为 0，去掉此两位数字后，剩下的数仍是一个完全平方数，求此数。

解：设此数为 a^2，末两位数是 b，去掉 b 后剩下 $100c^2$，这里 a、b、c 均为正整数。

于是 $a^2=100c^2+b$，$(a+10c)(a-10c)=b$。

再令 $a+10c=m$，$a-10c=n$。显然 m、n 均为正整数，且 $m>n$。于是有

$$a=\frac{m+n}{2},\ b=mn,\ c=\frac{m-n}{20}.$$

$\because$ b 是两位数，$\therefore$ $m\leqslant 99$，$n\geqslant 1$。

从而 $m-n\leqslant 98$，又 $m-n$ 是 20 的倍数，$\therefore$ $c=1$，2，3，4。

相应的 $m=20c+n$，代入 b 中得 $b=n(20c+n)$。

(1) 当 $c=1$ 时，$b=n(20c+n)\leqslant 99$。故 n 可取 1、2、3、4，于是 $b=21$，44，69，96。

相对应的 $m=21$，22，23，24，

把 m、n 代入 a 中得 $a=11$，12，13，14。

所求的数为 121，144，169，196。

(2) 当 $c=2$ 时，由 $b=n\ (20c+n)\leqslant 99$，可得 n 取 1、2、于是 $b=41$，84；$m=41$，42；$a=21$，22。

这时所求的数是441，484。

(3) 当 $c=3$ 时，n 只能取 1。于是 $b=61$，$m=61$，$a=31$。所求的数是 961。

(4) 当 $c=4$ 时，n 只能取 1。于是 $b=81$，$m=81$，$a=41$。所求的数是 1681。

与数字和有关的问题

我们知道，如果一个正整数的各位上的数字相加能被3整除，那么这个数就能被3整除；同样，如能被 9 整除，那么这个数就能被 9 整除。在这里，我们把一个数各位数字相加得到的和称之为这个数的数字和。如果对一个数的数字和再求数字和，这样依次做下去，一定可以得到一个是一位数的数字和，我们权且称之为最终数字和，这样一来，看一个数被 3 或被 9 除的余数是多少，只要看这个数的最终数字和就知道了。关于数的最终数字和有一些有趣的规律，对此，有兴趣的读者可以自己去寻找一下。下面，我们仅举几例说明数字和在解题中的应用。

例 1 设数 a 的数字和为 $S(a)$，证明：当 $S(a)=S(2a)$ 时，a 被 9 整除。

证： ∵ 一个数 a 被 9 除所得的余数与 $S(a)$ 被 9 除所得余数是相同的，由题知 $S(a)=S(2a)$，∴ a 除以 9 所得余数与 $2a$ 除以 9 所得余数相同，设为 r。

∴ $a=9p+r$,

$2a=9q+r$,

$2a-a=9(p-q)$，即 $a=9(p-q)$

∴ a 能被 9 整除。

如果把此题中的2a改为3a，5a，6a，8a，9a，就得到 $2a=9(q-p)$，$4a=9(q-p)$

$5a=9(q-p)$，$7a=9(q-p)$

$8a=9(q-p)$

同样也可得到 a 被 9 整除的结论。

例2 求自然数1，2，3，…，9999所有数码之和。（此题是1988年祖冲之杯数学邀请赛试题）

解：此题如果一个个地加，是不行的。但考虑到1+9998，2+9997…都不发生进位，因此，它们的数字和不发生变化，这样共得到5000个9999，而每个9999的数字和是36，因此，所有这些数的数字和是5000×36=180000。

例3 把一个1989位的正整数 $\overline{a_1a_2\cdots a_{1989}}$ 的各位数字重新排列，再把所得的数与原来的数相加，证明无论怎样的1989位数，并且无论怎样排列各位数字，它们的和都不可能是 $\underbrace{99\cdots9}_{1989个}$。

证：假设存在这样的1989位数

$$A=\overline{a_1a_2\cdots a_{1989}}$$

重新排列各位数字的顺序所得到的数为

$$A'=\overline{a'_1a'_2\cdots a'_{1989}}$$

它们的和为 $\underbrace{99\cdots9}_{1989个}$，则必然有

$$(a_1+a'_1)+(a_2+a_2')+\cdots+(a_{1989}+a'_{1989})$$
$$=1989\times9$$

于是 A 的数字和为 $\frac{1}{2}1989\times9$

$\because$ 1989×9是奇数，$\therefore$ $\frac{1}{2}\times1989\times9$不可能是整数，

然而A 的数字和应为整数，这样就出现了矛盾。因此不存在这样的 1989 位的自然数。

例 4 已知任意一个正整数，将其各位数字相加，其数字和可能为一位数或多位数；如不是一位数，继续求数字和最后定可以得一位的数字和，即最终数字和，求证，若一个数的最终数字和是2，3，5，6中的一个，则已知的整数决不可能是一个正整数的平方或立方。

证：设已知数为 A，按题意得到的一位的最终数字和实质上是A 除以 9 得到的余数，则此题等价于下面的命题：

一个正整数平方或立方被 9 除时所得的余数不可能是 2，3，5，6

由于 A 只能表示为 $9k$，$9k\pm1$，$9k\pm2$，$9k\pm3$，$9k\pm4$ 这九种形式，而逐个计算它们的平方和立方可知，皆不能表示为 $9k+2$，$9k+3$，$9k+5$，$9k+6$ 的形式。故本题得证。

例 5 已知 4444^{4444}的各位数字之和为 A，A 的各位数字之和为 B，B 的各位数字之和为 C，求 C 等于多少。

解：$\because$ $4444^{4444}<10^{4\times4444}$，$\therefore$ 4444^{4444} 的位数不会大于 $4\times4444+1$ 位，因此 $A<17777\times9=159993$。

即 A是一个不大于六位数的数，并且若是六位数，第一位数不大于 1，则 $B\leqslant1+5\times9=46$。

即 B 是一个不大于 46 的两位数。

这样 $C \leqslant 4+9=13$，即 C 是一个不大于 13 的数。

又∵ $4444^{4444}=(9\times 493+7)^{4444}$，

将等式右端乘开一定可以得到形如

$9\cdot M+7^{4444}$ 的数，将 7^{4444} 移到左端，

即 $4444^{4444}-7^{4444}=9\cdot M$，

∴ $4444^{4444}-7^{4444}$ 一定可以被 9 整除。

这样 4444^{4444} 与 7^{4444} 被 9 除的余数相同。

又∵ $7^{4444}=7^{3\times 1481}\cdot 7=343^{1481}\cdot 7$

$=(9\times 38+1)^{1481}\cdot 7$。

而括号展开后被 9 除余数是 1，故 7^{4444} 被 9 除余数是 7，即 4444^{4444} 被 9 除的余数是 7。于是 C 被 9 除的余数应为 7，又 $C \leqslant 13$，因此 $C=7$。

从此题可以看出求某数的最终数字和，实质就是求某数被 9 除的余数。关于数的最终数字和，我们给出以下几条结论，限于篇幅，不予证明，以 $S(a)$ 记为 a 的最终数字和，于是有：

1. $S(ab)=S[S(a)\cdot S(b)]$。

2. $S(a^n)=S\{S(a)\}^n$。

3. 当 $a\neq 3k$（k 为不是 3 的倍数的自然数），$S(a^n)=S(a^{n+6})$（n 为自然数）。

4. 当 $a=3k$，$n\geqslant 2$ 时（k 为自然数），$S(a^n)=9$。用这几条结论很容易求得 4444^{4444} 的最终数字和。

$$S(4444^{4444})=S(16^{6\times 740+4})$$

$$=S(16^4)$$

$$=S(7^4)=S(49^2)$$

$$=S(13^2)=S(4^2)=S(16)$$
$$=7。$$

关于这几条结论的证明，采取左右作差，证差被9整除即可。

下面再看两道与数字和有关的题。

例6 设一个小于2000的四位素数a，适合下列条件：

(1) a的十位数字比个位数字大1；

(2) $a+1$含有两个素因数2；

(3) $a+2$含有两个素因数3；

(4) $a+1$与$a+2$都不含因数5。

求此数。

解：∵ a为素数，∴ 个位数只可能是1，3，7，9。

若末位数为1，十位则为2，因此$a+1$只含一个素因数2，不适合条件(2)。

若末位数为3，知$a+2$末位数为5，不合条件(4)。

若末位数为9，知$a+1$末位数为0，不合条件(4)。

因此末位数为7，十位数为8。

设a的数字和为k，∵$a+2$不发生进位，∴ $a+2$的数字和为$k+2$。

∵ $a<2000$，∴ $1+8+7\leqslant k\leqslant 1+9+8+7$。

$18\leqslant k+2\leqslant 27$

∵ $a+2$含两个素因数3，

∴ $k+2$可被9整除，设$k+2=9t$（t为正整数），

∴ $18\leqslant 9t\leqslant 27$，故$t=2$，3。

当$t=2$时，$k+2=18$，可求得$a=1087$。

当 $t=3$ 时，$k+2=27$，可求得 $a=1987$。

例 7 试求三位数与它的数字和的比值的最大值。

解：容易看出，100，200，…，900的数字和分别为1，2，…，9，于是100，200，…，900与它们的数字和的比值是100。

下面证明100是这个最大值。

假设 $\overline{abc}$ 是不同于上述整百的自然数，显然 b、c 中至少有一个不为0，于是 $a+b+c\geqslant a+1$，

$$\overline{abc}<(a+1)\cdot 100,$$

故有 $$\frac{\overline{abc}}{a+b+c}=\frac{(a+1)\cdot 100}{a+b+c}<\frac{(a+1)\cdot 100}{a+1}=100$$

∴ 100是比值中的最大值。

其它问题

例 1 在形如 $\overline{aba}$ 的三位数中，如果 $(a+b)$ 是7的倍数，那么 $\overline{aba}$ 也是7的倍数，将这样的三位数写出来。

解：设，$a+b=7n$，n 为自然数，则 $b=7n-a$。

$$\begin{aligned}\overline{aba}&=100a+10b+a\\&=101a+10(7n-a)\\&=91a+70n=7(13a+10n)\end{aligned}$$

∴ $\overline{aba}$ 是7的倍数。

由 $b=7n-a$，依次令 a 取1，2，…，9，就可求出这样的三位数

$a=1$ 时，$n=1$，$b=6$，三位数是：161

$a=2$ 时，$n=1$，$b=5$，三位数是：252

$a=3$ 时，$n=1$，$b=4$，三位数是：343

$a=4$ 时，$n=1$，$b=3$，三位数是：434

$a=5$ 时，$n=1$，$b=2$，三位数是：525

$n=2$　$b=9$，三位数是：595

$a=6$ 时，$n=1$，$b=1$，三位数是：616

$n=2$，$b=8$，三位数是：686

$a=7$ 时，$n=1$，$b=0$，三位数是：707

$n=2$，$b=7$，三位数是：777

$a=8$ 时，$n=2$，$b=6$，三位数是：868

$a=9$ 时，$n=2$，$b=5$，三位数时：959

例 2　求这样的两位数，其数值正好是各位数字乘积的倍数。

解：设此数为$\overline{ab}$，则$10a+b=abN(1\leqslant a\leqslant 9,1\leqslant b\leqslant 9)$。

由此式可得　$10+\dfrac{b}{a}=bN$，

$$\frac{10a}{b}+1=aN,$$

可以看出$\dfrac{b}{a}$和$\dfrac{10a}{b}$都是整数，故 b 既是 a 的倍数，又是 $10a$的约数。

因此 $b=a$，$2a$，$5a$。

当 $b=a$ 时，$aN=11$，则 $a=b=1$。∴　此数为 11。

当 $b=2a$ 时，$a\leqslant 4$，又 $aN=6$，a 是 6 的约数，则 $a=1$，2，3；$b=2$，4，6。

这样的两位数为 12，24,36。

当 $b=5a$ 时，$aN=3$，则 $a=1$，$b=5$。所求的两位数为

15。

因此共有 5 个满足题设的两位数：

11，12，15，24，36。

（三）练习题

1．四个连续自然数的乘积是3024，求此四个数。

2．把右面算式中的平方厘米代表的数字求出来。

$$\begin{array}{rr} & 1\text{厘米} \\ \times) & 1\text{厘米} \\ \hline & 1\ \text{平方厘米} \end{array}$$

3．右边算式中的每一个 * 号位置都是质数，求出这个算式。

$$\begin{array}{rrrrrr} & & & * & * & * \\ \times) & & & & * & * \\ \hline & & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & \\ \hline & * & * & * & * & * \end{array}$$

4．求符合右边算式的四位数 $\overline{abcd}$。

$$\begin{array}{rrrrr} & a & b & c & d \\ \times) & & & & 9 \\ \hline & d & c & b & a \end{array}$$

5．已知 $\overline{xyz}$ 是一个三位数，且 $x>z$，满足右边算式(1)，其中 $a\geqslant1$，求证：a、b、c 满足算式(2)。

(1)
$$\begin{array}{rrrr} & x & y & z \\ -) & z & y & x \\ \hline & a & b & c \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrrr} & & a & b & c \\ +) & & c & b & a \\ \hline & 1 & 0 & 8 & 9 \end{array}$$

6．求满足右边算式的各个数字。

$$\begin{array}{rr} & \text{奇偶偶} \\ \times) & \text{偶偶} \\ \hline & \text{偶奇偶偶} \\ & \text{偶奇偶} \\ \hline & \text{奇奇偶偶} \end{array}$$

7．有一个六位数，当它分别乘以2，3，4，5，6 时所得的五个乘积仍然是六位数，而且每个六位数的全部数字是原来的六位数的数字，求原来的六位数。

8．正整数的首位是 6，去掉这个首位是 6 所得的整数是原数的 $\frac{1}{25}$，求所有这样的整数。

9. 求这样的两位数，它与对调其十位数字和个位数字顺序所得到的数的和是一个完全平方数。

10. 3^{33}的个位数字是几？

11. a是自然数，但不是5的倍数，求证：$a^{1989}-a$能被5整除。

12. 求$1989^{1988^{1987}}$的个位数。

13. 证明$53^{53}-33^{33}$是10的倍数。

14. 求$1\times2\times3\times\cdots\times100$积中末尾0的个数。

15. 一本书共222页，问所有页码中共有多少个数码2。

16. 求出所有能被45整除的形如$x1989y$的六位数，其中$x\neq0$，x，y是0，1，2，…，9中的数。

17. 求数列$1,2,3,4,\cdots,\underbrace{999\cdots9}_{1989}$的所有数字的总和。

18. 一个四位数恰好等于它的数字和的四次方，求此数。

19. 求一个三位数，使它等于n^2，且它的数字积等于$n-1$。

（四）答案与提示

1. $6\times7\times8\times9$。

2. $100\times100=10000$，$101\times101=10201$，$125\times125=15625$。

3. 775×33，其余位置自己填出。

4. 1089。

5. 由$x>z$，$\therefore$ $z-x$必须借位，此时

$b=10+(y-1)-y=9$，$a=x-1-z$，

而 $a+c=(x-1-z)+(10+z-x)$，$a+c=9$，于是

$$\begin{array}{r} abc \\ +)\ cba \\ \hline 1089 \end{array}.$$

6. 348×28，其余位置读者自己补出。

7. 142857。

8. 625，6250，62500，……

9. 29，8，47，56，65，74，83，92。

10. 33。

11. 考查 a^4 的末位数，当 a 是奇数时，a^4 的个位数字是1，当 a 是偶数时，a^4 个位数字是6，得 $a^{1988}-1$ 可被5整除。

12. 1988^{1987}是4的倍数，$1989^{1988^{1987}}$的个位数与9^4的个位数相同，是1。

13. 53^{53} 与 3^{33} 的个位数都是3。

14. 24个。

15. 69个。

16. 919890和419895。

17. $45\times 1989\times 10^{1988}$。

18. 2401。

19. 361。

[G e n e r a l   I n f o r m a t i o n]
书名＝数学奥林匹克教练丛书　　（初中一年级用）
作者＝魏超群主编
页数＝１７７
ＳＳ号＝１１３１７４２８
出版日期＝１９９１年０７月第１版

前言
目录
目录