序　言

去年由省数学会和《中学生数理化》编辑部编写的《初中数学奥林匹克读本》出版时，我就希望有更多总结数学普及工作实践的好读本能陆续问世，现在摆在读者面前的这本《数学奥林匹克初级读本》就是相继问世的又一好读本。

近年来，全国各地对小学生的智力开发都比较重视，相继成立了不少的小学数学业余奥林匹克学校。我省更是后起直追，广大的小学数学普及工作者，在教育行政部门的支持下，利用课余时间为学有余力的小学数学爱好者开创了新的求知园地，学校的数学兴趣小组、各级的小学数学业余奥校也相继成立很多。他们在国际、国内的小学数学竞赛中已初露锋芒。在中国数学会普委会举办的全国小学数学竞赛中，在国际性的美国长岛邀请赛中都获得好成绩。本书正是在小学数学业余奥校第一线工作的教师们的经验总结。

这本书在编写上有其突出的特点。一方面，根据小学生的知识水平和思维能力，采取了起点较低、分层次循序渐进、螺旋上升逐步拓宽加深知识的办法；另一方面，针对小学生心理特征，从生动具体的例子出发，循循善诱地介绍了小学数学奥林匹克的基本内容，兴趣盎然。因此，小学四至六年级的学生，只要坚持不懈地读下去，就可以掌握其大部份内容。如果有教师、家长的指导掌握其全部内容也是不难的。该读本不失为中高年级小学生较好的数学课外读物，同

时也可作为小学数学教师开展第二课堂的数学参考资料。

最后，我应该感谢河南教育社《中学生数理化》（初中版）及《小学生学习报》编辑部对数学普及工作的支持及对本书出版的有力合作，感谢四川大学出版社对我省数学普及工作及本书出版的大力支持与合作。

国家教委科技委数学组成员
四川省数学学会理事长 刘应明

一九九〇年十月七日于四川大学

前　言

为了实现我国二十一世纪成为“数学大国”，为了培养杰出的中国数学家、科学家和四化建设人才，提高全民族的文化素质，从小抓起，搞好数学启蒙教育是必要的。为给学有余力的小学数学爱好者提供更适合的学习资料，我们根据小学数学教学大纲、教材以及国内外开展小学数学竞赛的识知要求编写了这一套书。

编写的基本原则是：上册内容从四年级下期起，基础知识基本上与课内教材同步，适当增加该年级课外可接受的竞赛基础知识，下册在上册基础上，以专题为主，适当加深、拓宽，逐步达到小学数学竞赛较高知识要求的水平。

为了实现上述原则，在具体编写过程中，考虑到知识的系统性，上册我们采取了四大“知识块”（实为三大块），即四大章的安排法：数、应用题、图形和分数小数。初次使用时，请小学生读者按四年级（下）、五年级、六年级分选出各年级同步内容来学习，而不要依次读下去。

我们建议，上册：

四年级（下）读一、二、三章的一、二讲；

五年级读一章的三、四、五讲，二章的三、四讲，三章的三、四、五讲（个别处略有提前，完全自学者也可放在六年级学）；

六年级读第四章

下册：

五年级可选读一些章（如五、六章等），更多的是六年级学生的学习材料。

本书的作者，除少数几位河南教育社《小学生学习报》的编辑外，都是我省各地市的小学数学奥校教练员、小学数学教师和教研员。这套书是他们多年从事数学课外活动和奥校教学的经验总结。我们相信她对小学数学教师指导课外活动、对小学数学奥校教学、对家长辅导子女都会起到较好的参考作用。其实，对未接受小学奥校系统培训的初一学生，也不失为一本较好的课外读物。但由于水平有限，经验不足，时间仓促，不妥甚至错误之处一定不少，恳请读者提出宝贵意见，更欢迎小读者的意见和建议，以利于今后的修改。

衷心感谢四川大学出版社的领导和编辑，由于他们的热心支持，这套书才得以早日与读者见面。

魏有德

一九九〇年十二月于四川大学

目　录

附：上册目录

第五章　数字谜（二）

这一章，我们将进一步学习乘、除式的数字谜问题，使同学们在前面学习的基础上，不断提高解数字谜问题的分析判断能力和逻辑推理能力。

一、乘　　法

例 1　在下面右边算式的□内，填上一个合适的数字，使算式成立。

分析　为叙述方便，不妨设：

$A=\square1\square$，

$B=3\square2$，

$C=\square3\square$，

$D=3\square2\square$，

$E=\square2\square5$，

$F=1\square8\square30$。

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & & & \square & 1 & \square & \longleftarrow & A \\
 & & \times & 3 & \square & 2 & \longleftarrow & B \\
\hline
 & & & \square & 3 & \square & \longleftarrow & C \\
 & & 3 & \square & 2 & \square & \longleftarrow & D \\
 & \square & 2 & \square & 5 & & \longleftarrow & E \\
\hline
1 & \square & 8 & \square & 3 & 0 & \longleftarrow & F
\end{array}$$

由F的末位数是 0 和C的十位数字是 3，可知A的末位数是 5，C的末位数为 0。

由F的十位数字是 3，可知D的末位数字是 0。

由F的首位数是 1，可知E的首位数是 1。

由E是$3\times A$的积，可知E的十位数字是 4，A的首位数是 4。

于是，可知C的首位数是8，F的百位数字是5；D的百位数字是3；F的万位数字是5。

最后，由$\boxed{4}\,1\,\boxed{5}\times\square=3\,\boxed{3}\,2\,\boxed{0}$，确定$B$的十位数字只能是8。

根据以上分析，每个□内应填的数字就都知道了。

例2 已知两个三位数相乘$\overline{abc}\times\overline{bac}$的竖式，求$a$、$b$、$c$（$a$，$b$，$c$表示不同的数字）。

$$\begin{array}{r}
a\ b\ c\\
\times\ b\ a\ c\\
\hline
*\ *\ *\ *\\
*\ *\ a\ \ \ \\
*\ *\ *\ b\ \ \ \ \ \ \\
\hline
*\ *\ *\ *\ *\ *
\end{array}$$

分析与解 由$\overline{abc}\times c=****$是四位数，可知$c\neq1$。

$\overline{abc}\times a=**a$是三位数，所以$a$最多取3，而$c\times a$的末位数是$a$，因此$a=2$，$c=6$。

由$\overline{abc}\times b=\overline{2b6}\times b=***b$，$c$、$b$表示不同数字，$b\neq6$，要使$6\times b$的末位数为$b$，且$\overline{abc}\times b$得四位数，因此$b=8$。经验证$a=2$，$b=8$，$c=6$符合要求。

例3 根据下面乘法算式，你能很快地填写出被乘数和乘数吗？

$$\begin{array}{r}
\square\square\square\\
\times\quad\square\square\\
\hline
2\ 3\ 6\ 7\\
1\ 5\ 7\ 8\ \ \ \\
\hline
1\ 8\ 1\ 4\ 7
\end{array}$$

分析与解 怎样很快地写出被乘数和乘数？我们看到被乘数□□□是1578和2367的公约数，因此用求公约数的方法，就可以迅速地找出被乘数和乘数。

用短除的方法，得右边的式子，于是被乘数是$263\times3=789$，乘数是23，或者被乘数263，乘数是69，即789×23或263×69。

$$\begin{array}{r|rr}
3 & 1578 & 2367\\
\hline
263 & 526 & 789\\
\hline
 & 2 & 3
\end{array}$$

注： 也可把积分解因式 $18147=3\times23\times263$所以，263×69或789×23。

例 4 下面给出的算式是$\overline{ABCD}\times\overline{ABCD}$的乘法算式，其中$A$、$B$、$C$、$D$的每一个字母代表一个数字，根据这个算式，请你确定出$\overline{ABCD}$所表示的四位数吗？

$$
\begin{array}{r}
A\ B\ C\ D \\
\times A\ B\ C\ D \\
\hline
\ast\ \ast\ \ast\ \ast\ \ast \\
\ast\ \ast\ \ast\ \ast\ \ast\quad \\
\ast\ \ast\ \ast\ \ast\ \ast\qquad \\
\ast\ \ast\ \ast\ \ast\ \ast\qquad\quad \\
\hline
\ast\ \ast\ \ast\ \ast\ A\ B\ C\ D
\end{array}
$$

分析 因为$\overline{ABCD}\times D$的积的个位数字是D，故D只能是1、5、6三个数。但$\overline{ABCD}\times D=\ast\ast\ast\ast\ast$是五位数，因而$D\neq1$。

如果$D=5$，由于末位数是5的数的平方，其末两位数是25，于是C只能是2，而末两位数是25的数的平方，其末三位数是625，所以$B=6$。又末三位数是625的数的平方，其末四位数是0625，这样$A=0$，但$A=0$不合题意，所以$D\neq5$。

如果$D=6$，则由下面左边的算式，可知

$6C+3+6C=C+10N$ （N为自然数）

故$11C+3=10N$，因而$C=7$。

$$
\begin{array}{r}
C\ 6 \\
C\ 6 \\
\hline
\ast\ 6 \\
\ast\quad \\
\hline
C\ 6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
B\ 7\ 6 \\
B\ 7\ 6 \\
\hline
\ast\ 5\ 6 \\
3\ 2\quad \\
\ast\qquad \\
\hline
B\ 7\ 6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
A\ 3\ 7\ 6 \\
A\ 3\ 7\ 6 \\
\hline
\ast\ 2\ 5\ 6 \\
6\ 3\ 2\quad \\
2\ 8\qquad \\
\ast\qquad\quad \\
\hline
A\ 3\ 7\ 6
\end{array}
$$

B表示的数字是几？可由上面中间算式

$6B+4+3+6B=B+10N$ （N为自然数）

求得，即$11B+7=10N$，故$B=3$。

同样，A表示的数字，可由上页右边算式

$6A+2+6+2+6A+1=A+10N$ （N为自然数）

求得，即$11A+11=10N$，$A=9$。

于是，$\overline{ABCD}=9376$

例 5 下面算式中的偶字代表 0、2、4、6、8 中的一个数，奇字代表 1、3、5、7、9 中的一个数。不同位置的奇和偶可能是相同的数，也可能是不相同的数，试求左边算式中每个奇、偶是什么数时，算式成立。

$$\begin{array}{r} \text{偶偶奇} \\ \times\quad \text{奇奇} \\ \hline \text{偶奇偶奇} \\ \text{偶奇奇}\phantom{\text{奇}} \\ \hline \text{奇奇奇奇奇} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2\ a\ b \\ \times\quad 3\ c \\ \hline \text{偶奇偶奇} \\ \text{偶奇奇}\phantom{\text{奇}} \\ \hline \text{奇奇奇奇奇} \end{array}$$

分析 因为被乘数是$\overline{\text{偶偶奇}}$，它和算式中的第二个积$\overline{\text{偶奇奇}}$排列不同，所以乘数的十位数字奇不能是 1 。又因为第二个积$\overline{\text{偶奇奇}}$是三位数，所以被乘数百位上的偶只能是 2 ，乘数十位上的奇只能是 3 。

为叙述方便，我们用 a、b 分别表示被乘数中十位上的偶、个位上的奇，用 c 表示乘数中个位上的奇，如上面右边算式所示。

$$\begin{array}{r} 2\ a\ 5 \\ \times\quad 3\ c \\ \hline \text{偶奇偶奇} \\ \text{偶奇}\ 5\phantom{\text{奇}} \\ \hline \text{奇奇奇奇奇} \end{array}$$

由于$a\times3$的积的个位数应是偶数，而算式中却是奇数，这意味着$b\times3$的积有进位，而且进位数必须是奇数，因此 b 只能是 5 。这时算式变为右边上式。

$$\begin{array}{r} 2\ 8\ 5 \\ \times\quad 3\ 9 \\ \hline 2\ 5\ 6\ 5 \\ 8\ 5\ 5 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1\ 5 \end{array}$$

因为$\overline{2a5}\times c$的积应为四位数$\overline{偶奇偶奇}$，故$c=9$。

又因为a是2、4、6时，都不合题意，故$a=8$。

解 由以上分析，可知被乘数偶偶奇应为285，乘数奇奇应为39，其所求算式如上页右边下式所示。

二、除　法

例 6 已知四位数$A=\overline{6**8}$能被236整除，则A除以236的商是______。

分析与解 此题可以看成是一道除法数字谜问题。容易判定$\overline{6**8}\div236$的商一定是二位数。这是因为$236\times9=2124\neq\overline{6**8}$。因此，如果用除法竖式表示$\overline{6**8}\div236$，就是右边那种形式。

$$\begin{array}{r}
**\\
236\overline{)\,6**8}\\
***\\
\hline
***8\\
***8\\
\hline
0
\end{array}$$

由$236\times3=708$，易知商的首位数只能是2。因为$***8$是末位数为8的四位数，所以商的个位数字只能是8。

于是，$6**8$除以236的商是28。

例 7 在右边除法算式的各□内，各填上一个合适的数，使算式成立。

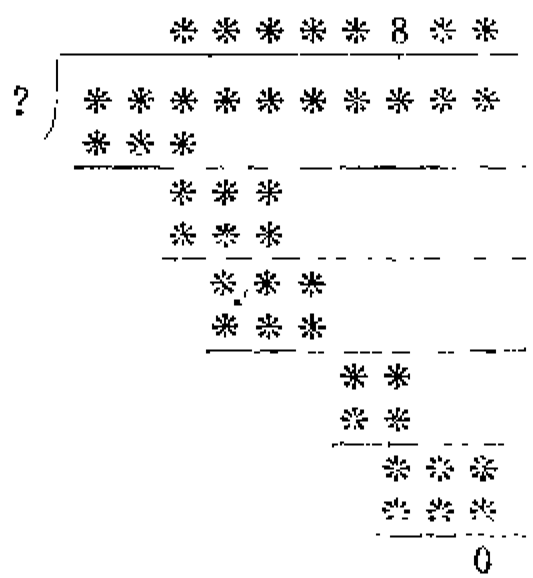
$$\begin{array}{r}
\square7\square\\
\square\square\overline{)\,\square\square\square\square\square}\\
\square77\\
\hline
\square7\square\\
\square7\square\\
\hline
\square\square\\
\square\square\\
\hline
0
\end{array}$$

分析 因为$\square\square\times\square=\square77$，所以商的百位数字可能是3或9。若商的百位数字是3，则除数的个位数字是9，十位数字是5，但

59×7＝413不符合□□×7＝□7□，因此商的百位数字应是9，除数的个位数字是3，十位数字是5。

由53×□＝□□，可以确定商的个位数字只能是1。除数和商都知道了，其余□内的数字便可一一填出来了。

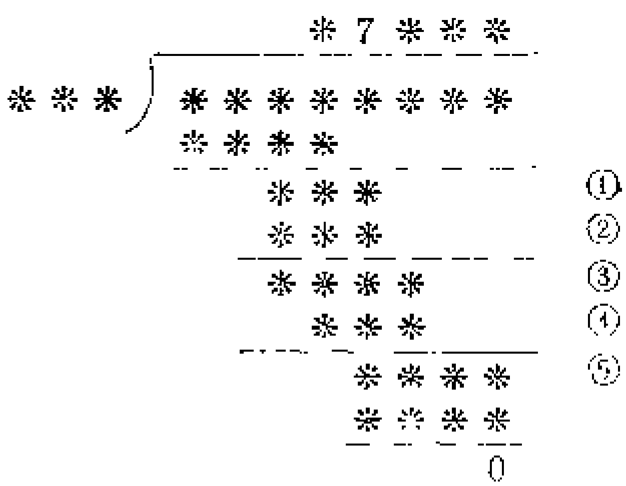
例8 下列除法算式里，只知道商中的一个数字8，并且连除数是几位数都不知道，请你把被除数、除数和商都求出来。



分析与解 观察算式可以看出，商的十位、千位、百万位数字都是0。（为什么？）

本题的“突破口”是从？×8＝※※是二位数，可以确定除数的最大值是12。与此同时还可以判定：商中凡与除数的乘积是三位数的数字只能是9，因此除数一定是12，商是90990809。

至此，除数和商都知道了，被除数就是1091889708。



例9 在上列右边除法算式的每个※处，填上一个合适的数字，使算式成立。

分析　算式中只知道一个数 7，怎样填补其余的数字呢？我们的思路是从算式中每一层的位数，确定商的各个数位上的数字，商确定后再估算除数。

从算式最后一层的位数知：商的十位数字是 0。

为叙述方便，我们用①②③④表示算式中间两层的各行表示的数。

因为①－②＝$\overline{***}$，③－④＝$\overline{**}$，且③>①，所以④的三位数大于②的三位数。因此，商的百位数字应大于 7。

又除数与商的首位和末位数字之积都是四位数，于是可确定商的首位和末位数字一定都大于商的百位数字。这表明商的百位数字是 8，商的首位和末位数字都是 9，至此商是 97809。

因为除数 $\overline{***}\times 8$ 不能大于 999，所以除数不能大于 124。由于⑤的前两位数不能大于11，并且③大于 1000，因此④大于988，而$123\times 8=984$，所以除数一定大于 123，于是除数只能是 124。

解　由上述分析，知被除数$=97809\times 124=12128316$。有了被除数、除数和商，在各个＊处填上一个合适的数就是容易的事了。

通过分析和解答以上各题，我们可以得到这样的启示：解除法算式的数字谜问题，关键是确定商和除数，一般的思路方法是先确定商和除数的首位数字，然后根据算式各层的差决定除数。

有时，我们也要根据题目的各自特点，采用另外一些方法。请看下例。

例10 下面除法算式中，画“□”的表示被擦掉的数字，请你把被擦掉的数字再补出来，使算式成立并使商最大。

分析 我们把除数$\overline{\square\square\square}$看成一个整体。设除数$\overline{\square\square\square}=x$，由算式$8\times\overline{\square\square\square}=\overline{\square\square\square}$，知$8x<900$，故$x<112.5$。同理，知商的个位数字是9、百位数字是8※。这样商为889。因为$9x>999$，所以$x>111$。由于x是三位整数，综合两个估算$x<112.5$和$x>111$，知$x=112$。

$$
\begin{array}{r}
\square\,8\,\square \\
\square\square\square\,\overline{)\,\square\square\square\square\square} \\
\underline{\square\square\square} \\
\square\square\square \\
\underline{\square\square\square} \\
\square\square\square\square \\
\underline{\square\square\square\square} \\
0
\end{array}
$$

解 由上面分析知，被除数$=889\times112=99568$，由此便可把被擦掉的数字一一补出来。

※商的百位数可是1,2,3,4,5,6,7,8，由于题目要求“商最大”，则取8。

练习5

1．在下列各题中的每一个□内，填上一个合适的数字，使算式成立。

（1）
$$
\begin{array}{r}
\square\square\square 7 \\
\times\ \ \square\square\square \\
\hline
\square\square\square\square 6 \\
\square\square 2\,0\,3 \\
\square 3\,7\square\square \\
\hline
\square\square\square\square\square\square\square
\end{array}
$$

（2）
$$
\begin{array}{r}
\square\square\square \\
\square 6\square\,\overline{)\,\square\square\square\square 6} \\
\underline{\square\square\square} \\
\square\square\square \\
\underline{6\square 6} \\
\square\square\square\square \\
\underline{\square\square\square\square} \\
0
\end{array}
$$

2．下列各题中的每一个字母都代表一个数字，不同的字母代表不同的数字，试求它们各代表什么数字时，算式成立。

（1）

$$
\begin{array}{r}
A\ B\ C \\
\times\ A\ C\ D \\
\hline
E\ A\ D \\
C\ E\ F\ \ \ \\
A\ B\ C\ \ \ \ \ \ \\
\hline
A\ E\ E\ G\ D
\end{array}
$$

（2）

$$
\begin{array}{r}
G\ A\ D \\
FG\,\overline{)\,A\ B\ C\ D\ E} \\
A\ C\ G\ \ \ \ \ \ \\
\hline
H\ H\ D\ \ \ \\
I\ A\ \ \ \\
\hline
A\ J\ E \\
A\ J\ E \\
\hline
0
\end{array}
$$

3．下面算式中的每一个□内，只许填质数 2 、 3 、 5 、 7 中的一个数字，试问怎样填才能使算式成立。

$$
\begin{array}{r}
\square\square\square \\
\times\ \ \square\square \\
\hline
\square\square\square\square \\
\square\square\square\square\ \ \\
\hline
\square\square\square\square\square
\end{array}
$$

4．在下列各竖式中的□内填上一个合适的数字，使竖式成立。

（1）

$$
\begin{array}{r}
2\square\square \\
\times\ \ \square\square \\
\hline
\square\square6\square \\
2\square\square\ \ \\
\hline
\square\square\square7
\end{array}
$$

（2）

$$
\begin{array}{r}
\square2\square\square \\
\times\ \ \square6 \\
\hline
\square\square04 \\
\square\square70\ \ \\
\hline
\square\square\square04
\end{array}
$$

（3）

$$
\begin{array}{r}
6\square \\
\times\square\square\square \\
\hline
\square\square \\
\square\square\ \ \\
\square\square\ \ \ \ \\
\hline
\square\square\square6
\end{array}
$$

（4）

$$
\begin{array}{r}
6\square\square \\
\times\ \square\square\square \\
\hline
\square\square\square \\
\square\square\square\square\ \ \\
\square5\square5\ \ \ \ \\
\hline
\square\square5\square4\square
\end{array}
$$

5. 下面是两个五位数相乘的竖式，其中“从小爱数学”的每一个字代表一个数，请根据这个竖式确定出“从小爱数学”所表的五位数。

$$
\begin{array}{r}
\text{从小爱数学} \\
\times)\ \text{从小爱数学} \\
\hline
\times\times\times\times\times\times \\
\times\times\times\times\times\times \\
\times\times\times\times\times\times \\
\times\times\times\times\times\times \\
\hline
\times\times\times\times\times\text{从小爱数学}
\end{array}
$$

6. 下列竖式中不同汉字代表不同的数字，它们各表什么数？

（1）
$$
\begin{array}{r}
\text{来参加数学竞赛}9 \\
\times\qquad\qquad 9 \\
\hline
\text{来来来来来来来来来}
\end{array}
$$

（2）
$$
\begin{array}{r}
\text{华中兴振} \\
\times\qquad \text{振} \\
\hline
\text{振兴中华}
\end{array}
$$

7. 一个四位数被一个一位数除得（1）式，而被另一个一位数除得（2）式。求这个四位数。

（1）
$$
\begin{array}{r}
\times\times\times \\
\times\,\big)\overline{\times\times\times\times} \\
\times \\
\hline
\times\times \\
\times \\
\hline
\times\times \\
\times\times \\
\hline
0
\end{array}
$$

（2）
$$
\begin{array}{r}
\times\times\times \\
\times\,\big)\overline{\times\times\times\times} \\
\times\times \\
\hline
\times\times \\
\times\times \\
\hline
0
\end{array}
$$

8. 填□使下列竖式成立：

（1）
$$
\begin{array}{r}
13 \\
\square\square\,\big)\overline{949} \\
\square\square \\
\hline
\square\square 9 \\
\square\square 9 \\
\hline
0
\end{array}
$$

（2）
$$
\begin{array}{r}
\square\square \\
\square 7\,\big)\overline{14\square\square} \\
\square\square 5 \\
\hline
\square\square \\
\square 1 \\
\hline
0
\end{array}
$$

```
              1□
（3） □□ ) 1□2
            1□
           ———
             3□
            □□
           ———
              0

               □8□7
（4） □□ ) □□□□□□
            □□□
            ——————
              □□
              □□
              ———
                □□
                □□
                ——
                 0
```

第六章 包含与排除

请同学们先听一个民间故事：有两对两父子要分 3 个桃，每人分整数个而无剩余，办得到吗？大概有同学说，办不到。因为两对两父子共有$2\times2=4$个人，3 不能被 4 整除。也许不少同学说，办得到。因为父亲是爷爷的儿子，又是孙子的父亲，他重复算了两次，所以，两对两父子只有$2\times2-1=3$人，他们分 3 个桃，每人恰好分 1 个。

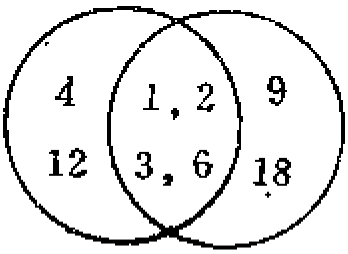


图6—1

再看一例：求12、18的不同约数个数一共是多少？容易求得它们的约数分别都有 6 个，那么，它们的约数个数是否就是$6+6=12$个呢？看图 6-1 可知12和18的公约数有 4 个，应只算一次，所以12、18的不同约数个数共有：

$$6+6-4=8\text{（个）}$$

从这两例，你大概领会了一点包含与排除是什么意思了吧？比如，上例中的“1，2，3，6”是12和18的公约数，自然就排除了只是12或18的约数。

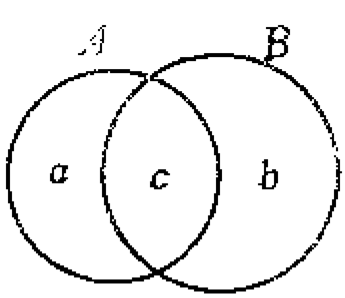


图6—2

在计算一些有重复部分的计数问题或有重叠部分的面积问题时，一般的计算规律是什么呢？为方便，用A、B两个圆片重叠一部份盖在桌面上（图6-2）。用a表示只是A盖住的

面积，b表示只是B盖住的面积，c 表示 A、B 共同盖住的面积，那么根据图显然有如下关系：

A或B盖住的面积

$=A$圆面积$+B$圆面积$-A$、B共同盖住面积

$=(a+c)+(b+c)-c=a+b+c$

A、B共同盖住的面积

$=A$圆面积$+B$圆面积$-A$或B盖住的面积

$=(a+c)+(b+c)-(a+b+c)=c$

只是A圆盖住的面积

$=A$圆面积$-A$、B共同盖住面积

$=(a+c)-c=a$

注：（1）这里把求面积改为有关计数问题，仍然适用；

（2）如果是两个以上的圆有重叠地盖在桌面上，可仿上类推。

以上所述的就是包含与排除方法，这种方法多用于取出元素或计数问题，或有关求面积问题。正确使用包含与排除的运算方法，能把较复杂的逻辑关系问题变得简单些，能把某些较复杂的计数问题纳入到有规律的运算程序中。

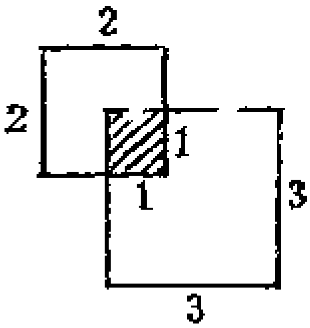


图6—3

例 1　将边长分别为 2 厘米和 3 厘米的正方形纸片，如图 6-3 所示重叠一部分盖在桌面上，求两块正方形纸片盖住桌面的面积。

解　根据包含与排除的一般计算方法，两块正方形纸片盖住的桌面面积为

$2^2+3^2-1^2=12$（平方厘米）

例2 求前20个自然数中能被2或3整除的自然数有多少个?

分析 如图6-4，将20以内能被2整除的自然数放入A圆内，能被3整除的自然数放入B圆内，可以看出，有3个数（6，12，18）既在A圆、又在B圆内，因而放入A、B两圆的公共部分内。

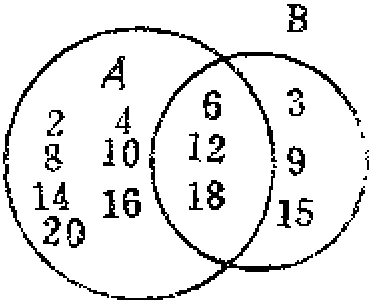


图6—4

解 如图6-4所示，20以内能被2整除的自然数有10个，能被3整除的自然数有6个，既能被2整除，又能被3整除的自然数有3个。所以，20以内能被2或3整除的自然数有

$(10+6)-3=13$（个）

例3 前50个自然数中不能被5，也不能被7整除的数有多少个?

分析 我们在前50个自然数中排除能被5或能被7整除的数的个数即为所求。用一个长方形表示放入前50个自然数，其中能被5整除、能被7整除的自然数分别放入A、B两个相交的圆内。因35既能被5整除又能被7整除，显然应放入两个圆的公共部分中去。如图6-5，现需要求出图中在长方形之内且在两个圆之外的自然数的个数。

解 前50个自然数能被5或7整除的数的个数共有：

$(10+7)-1=16$（个）

那么前50个自然数中不能被5，也不能被7整除的自然数的个数是

$50-16=34$（个）

应当指出，图 6-5 中可以不必把被 5 、被 7 整除的数一一列举出来，只需填入被 5，被 7 整除的数的个数和既被 5 又被 7 整除的数的个数就可以了。

50个自然数

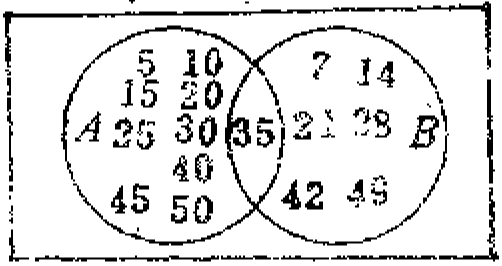


图6—5

例 4 某班共有 45 名学生，期中考试语文得 100 分的有15人，数学得100分的有18人，两门功课都没有得到100分的有20人。问两门功课都得 100 分的有多少人？

分析 我们画一个长方形，用它代表全班学生总人数45人。在长方形内画两个相交圆 A、B，用它们分别表示语文和数学考试得 100 分的学生人数。显然两门功课都没有得到100分的20人就用长方形之内两个圆之外的阴影部分来表示。

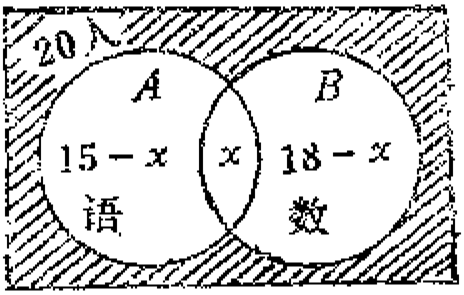


图6—6

解 由图 6-6 所示，设两门功课都得 100 分的人数为 x 人，那么圆A中仅语文考试得100分的人数应是（$15-x$）人，圆B中仅数学考试得 100 分的人数应是（$18-x$）人。

由图示可知：全班的总人数等于四大块表示的人数的总和，列出方程

$$(15-x)+x+(18-x)+20=45$$

解此方程得 $x=8$（人）

答：语文、数学两门功课都得100分的有 8 人。

下面，我们研究再复杂一点的面积计算或计数问题。

例 5　在桌面上放置三个两两重叠、大小相同的圆形纸片，它们的面积都是20平方厘米，盖住桌面的总面积是32平方厘米，三张纸片共同盖住的面积是 8 平方厘米。如图6-7所示。求只被两个圆盖住的面积的和（图中阴影部分）是多少？

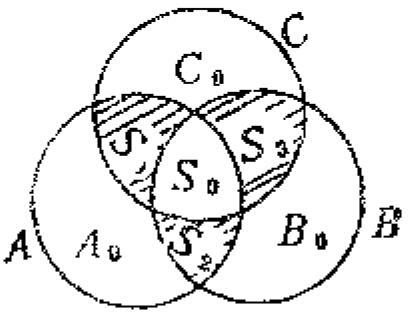


图6—7

解　图6-7中，用A、B、C分别表示三个圆的面积；三个圆中没有重叠部分的面积分别用A_0、B_0、C_0表示；只被两个圆盖住的面积分别用S_1、S_2、S_3表示；用S_0表示被三张纸片同时盖住的面积。根据题意，有以下等式：

$$A_0+S_1+S_2+S_0=A=20 \qquad (1)$$

$$B_0+S_2+S_3+S_0=B=20 \qquad (2)$$

$$C_0+S_3+S_1+S_0=C=20 \qquad (3)$$

$$A_0+B_0+C_0+S_1+S_2+S_3+S_0=32 \qquad (4)$$

$$S_0=8 \qquad (5)$$

我们要求的量是$S_1+S_2+S_3$。为此，先把（1）、（2）、（3）三式左右两边分别相加得：

$$A_0+B_0+C_0+S_1+S_2+S_2+S_3+S_3+S_1$$
$$+S_0+S_0+S_0$$
$$=20+20+20$$

即$(A_0+B_0+C_0+S_1+S_2+S_3+S_0)$
$+(S_1+S_2+S_3)+S_0+S_0$
$=60$

把（4）式与（5）式中的结果代入上式，有

$$32+(S_1+S_2+S_3)+8+8=60$$

因此，$S_1+S_2+S_3=12$（平方厘米）。

观察图6-7可以看出，在把三个圆的面积相加时（上面式（1）、（2）、（3）两边相加），每两个圆重叠部分（A、B重叠部分为S_2+S_0；B、C重叠部分为S_3+S_0；C、A重叠部分为S_1+S_0）被重复计算了。

因此，有下面的公式：

三个圆盖住桌面的总面积＝三个圆面积的和－每两个圆重叠的面积＋三个圆共同重叠部分的面积。

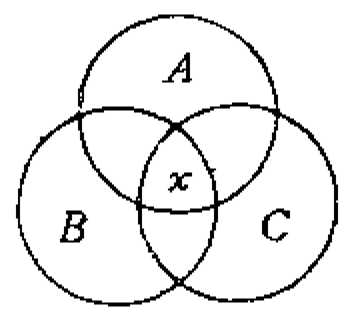


图6—8

例6 如图6-8所示，A、B、C三个圆的面积分别为9、10、11平方厘米，A与B、B与C、C与A包含的公共部分面积分别是3、4、5平方厘米。A、B、C三个圆盖住桌面的总面积是20平方厘米。求：A、B、C三个圆都包含的这块公共部分的面积是多少？

解 设A、B、C三个圆公共部分的面积为x平方厘米，由上面总结的公式可列出方程：

$$(9+10+11)-(3+4+5)+x=20$$

解得 $x=2$

答：A、B、C三个圆公共部分的面积是2平方厘米。

例7 某班学生去游乐场春游，每人至少参加电子游戏、电动小汽车、小火车三项中的一项游艺活动。据统计这班学生中有29人玩了电子游戏，有30人乘坐了电动小汽车，有31人乘坐了小火车。其中，有8人既玩了电子游戏又乘坐了电动小汽车；有9人既乘坐了电动小汽车又乘坐了小火

车；有10人既乘坐了小火车又玩了电子游戏；有11人三项活动都参加了。问这个班学生共有多少人？

分析 根据包含与排除原理设计画出 A、B、C 三个两两相交的圆分别表示参加三项活动的人数。三个圆彼此分割成了七部分，其中不重叠的部分代表参加单项活动的人数，重叠了两次的部分代表参加了两项活动的人数，重叠了三次的部分代表参加了三项活动的人数。填入各部分表示的人数，然后把七个部分表示的人数加起来即为所求。

解 分三个步骤在示意图中填入人数：

（1）首先在三个圆的公共包含的部分填入三项活动都参加的11人。见图6-9（1）

（2）然后在每两个圆的公共包含的部分，分别填入只参加了两项活动的8、9、10人。见图6-9（2）

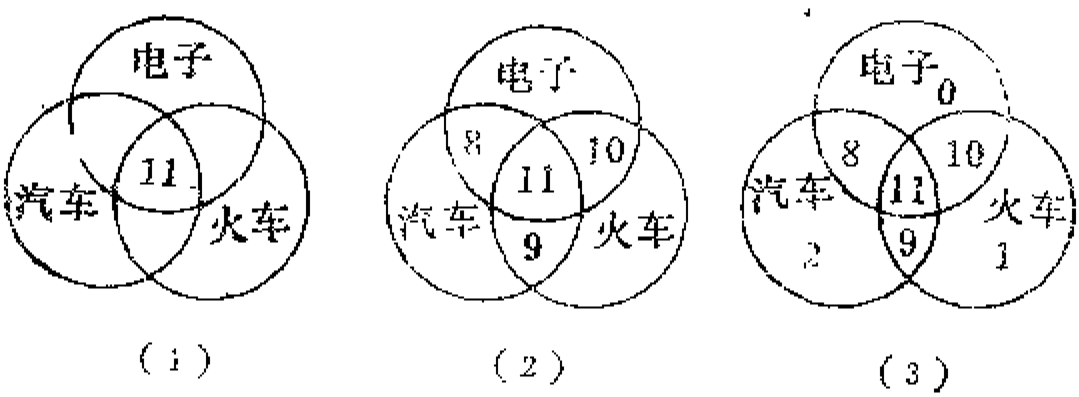


图6－9

（3）完成（2）后可见每个圆被分割成的四部分都已填上了三个部分代表的人数，剩下的一部分即是表示参加单项活动的人数，应为整个圆代表的人数减去其它已填好的三个部分表示的人数。即

$$29-(11+8+10)=0（人）$$

$30-(11+8+9)=2$（人）

$31-(11+9+10)=1$（人）

最后在三个圆没有重叠的部分分别填入0、2、1人。见图6-9（3）

将图中所有七个部分代表的人数加起来即求得这个班的学生人数

$0+2+1+8+9+10+11=41$（人）

练习 6

1. 一张圆纸片面积是10平方厘米，一个正方形纸片面积是16平方厘米。两张纸片重叠一部分放在桌面上，覆盖的面积为18平方厘米。问：两张纸片重合部分的面积是多少？
2. 计算不超过100的自然数中是4的倍数或7的倍数的数的个数。
3. 某校举行棋类比赛共有50名学生参加。其中参加中国象棋赛的有18名，参加围棋赛的有15名，既参加中国象棋又参加围棋赛的有6名。问不参加中国象棋和围棋而参加其它棋类比赛的学生有多少人？
4. 前300个自然数中，不能被2，也不能被3，又不能被5整除的数有多少个？
5. 某校先后举行语文、数学、自然三科竞赛。学生中至少参加一科的：语文420人，数学370人，自然320人；至少参加两科的：语文、数学170人，数学、自然150人，自然、语文200人；三科都参加的有60人。试计算参加竞赛的学生总人数是多少？
6. 某校一次运动会设有60米跑、跳远、乒乓球赛三个项目。参加这次运动会的总人数是180人。至少参加一个项目的：60米跑150人，跳远100人，乒乓球赛50人；至少参加两个项目的：60米跑与跳远70人，跳远与乒乓球赛30人，乒乓球赛与60米跑40人。问三个项目都参加的学生多少人？

7. 某班26个男同学中，13人喜欢打篮球，12 人喜欢打排球，9 人喜欢踢足球，有 2 人既喜欢打篮球又喜欢踢足球，有 2 人既喜欢踢足球又喜欢打排球。但没有一个男同学是三种球都喜欢。有一个男同学三种球都不喜欢。问有多少男同学既喜欢打篮球又喜欢打排球？

第七章　整除（二）

一、整除的应用

同学们已经掌握了一些整除的知识（请复习第一章中的整除（一）），在此基础上，再进一步运用整除的知识解答一些问题。

例1　一个分数除以$\frac{54}{175}$，或乘以$\frac{55}{36}$时都为自然数，这个分数的最小值是多少？

分析与解　设这个分数为$\frac{m}{n}$，根据分数的乘除法和题意知，$\frac{m}{n}\div\frac{54}{175}=\frac{m}{n}\times\frac{175}{54}$，$\frac{m}{n}\times\frac{55}{36}$都是自然数，又要使$\frac{m}{n}$最小，那么只能使分子尽量小，分母尽量大。所以，$m$应为54和36的最小公倍数，$n$是55和175的最大公约数。不难求得54和36的最小公倍数为108，55和175的最大公约数为5，这样才能使得约分后相乘得自然数。所以，$m=108$，$n=5$，即这个分数的最小值为$\frac{108}{5}=21\frac{3}{5}$。

例2　某书店原有《世界童话选》若干套，共476本。卖的时候成套卖出，第一天卖出322本，第二天卖出105本，书店还剩多少套没卖？

分析与解　剩下多少本书容易求得，若知道一套有多少

本，问题就解决了。显然一套书不会只有一本，而又是成套卖出，所以，每套书的本数一定是476，322，105的公约数。但这三数只有（非1的）公约数7，所以剩下

$$(476-322-105)\div 7=7（套）$$

答：书店还剩7套。

例3 将1,2,3,…30从左往右依次排成一个51位数，这个数被11除的余数是几？

解 这个数奇数位上的数为：1,3,5,7,9,0,1,2,3,…9,0,1,2,3,…9,0。所以奇数位上数之和为：$1+3+5+7+9+(1+2+3+\cdots+9)\times 2=115$，偶数位上数字之和为：$2+4+6+8+1\times 10+2\times 10+3=53$。$(115-53)\div 11=5$（余7）。所以这个数除以11的余数是7。

注：一个自然数的奇数位与偶数位上各数之和的差（大减小），如果能被11整除，那么这个数就能被11整除；如果所得的差不能被11整除，那么这个数就不能被11整除。此时，用奇数位上各数之和减去偶数位上各数之和所得的差除11得到的余数，就是这个数除以11的余数。当奇数位上各数之和小于偶数位上各数之和时，则加上11的若干倍后相减，再除以11。比如，9192939495的奇数位上各数之和为：$1+2+3+4+5=15$，偶数位上各数之和为：$9\times 5=45$，$15<45$，$(15+11\times 3-45)\div 11=0$（余3），所以，9192939495除以11余3。

例4 六位数$\overline{x1989y}$能被33整除，写出所有这样的六位数。

解 因为$33=3\times 11$，3与11互质。所以，六位数能被3和11整除。当$x+y$为3的倍数时，六位数则能被3整除

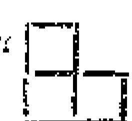
（想想：为什么？）；当 $(x+9+9)-(1+8+y)=9+x-y$ 为11的倍数时，六位数则能被11整除。因 $x\neq0$，所以 $9+x-y>1$；又 y 最小取0，x 最大取9，所以 $9+x-y$ 不会超过18。那么 $9+x-y=11$，即 $x-y=2$，$x=y+2$。根据 $x+y$ 是3的倍数，那么 $y+2+y=2(y+1)$ 是3的倍数，所以 $y=2$ 或5，$x=4$ 或7。所求的六位数为419892或719895。

例5 如果三位数 $\overline{abc}$ 能被37整除，那么 $\overline{cab}$ 也能被37整除。请说明理由。

解 可把三位数记为 $\overline{abc}=100\times a+10\times b+c$，$\overline{cab}=100\times c+10\times a+b$。那么：

$$\begin{aligned}\overline{cab}\times10&=1000\times c+100\times a+10\times b\\&=(100\times a+10\times b+c)+999\times c\\&=\overline{abc}+999\times c\end{aligned}$$

因 $\overline{abc}$ 能被37整除，$999\div37=27$，那么，$999\times c$ 能被37整除，所以 $\overline{abc}+999\times c$ 能被37整除，即 $\overline{cab}\times10$ 能被37整除。而10与37互质，因此，$\overline{cab}$ 能被37整除。

例6 把三个边长为1的正方形组成“”形的角片。把大小为 1990×1991 的长方形能不能截成若干块这样的角片而无剩余？

解 用两块角片可组成一个 3×2 的长方形，而1990和1991都不是3的倍数，所以不能截成若干块角片而无剩余。

二、同余初步

在日常生活中，有时我们需要注意的是某些整数间除以

一个自然数所得的余数，而所得的商是多少无关紧要。比如，你们随便翻开日历的那一个月，总有某几天同是星期几。你们看1990年12月份中的5号、12号、19号、26号都是星期三。因为一个星期有7天，5、12、19、26分别除以7，所得的余数是相同的，都为5。象这样，我们就说5、12、19、26对于7是同余的。

一般地，整数a、b被自然数n除所得的余数如果相等，我们就说a、b对于n同余。

同余具有一些很明显的性质，同学们可举出具体例子来验证。

（1）如果a、b对于n同余，那么a与b的差能被n整除；反之，如果a与b的差能被n整除，那么a、b对于n同余。

如12、26对7同余，$26-12=14$能被7整除。

（2）如果a、b对n同余，b、c对n同余，那么，a、c对n同余。这可叫做同余的传递性。

（3）如果a、b对n同余，c、d对n同余，那么，$(a+c)$与$(b+d)$、$(a-c)$与$(b-d)$、(ac)与(bd)分别对n同余。

注 上面求差时不妨假设$a\geqslant c$，$b\geqslant d$。

比如，44、30对7同余；10、17对7同余，那么：

$(44+10)$与$(30+17)$，即54与47对7同余；

$(44-10)$与$(30-17)$，即34与13对7同余；

(44×10)与(30×17)，即440与510对7同余。

性质（3）说明两个数的和、差、积除以某个自然数所得的余数，等于这两个数分别除以某个数所得余数的和、差、积的余数。

例 7　71427×19除以 7 的余数是几？

分析　先求出积再除以 7，当然可以求得余数。但利用同余性质（3）来解，要简单一些。因71427÷7余 6，19÷7余 5，即是，71427与 6 对 7 同余，19与 5 对 7 同余。所以，71427×19与6×5对 7 同余，这样 6×5 除以 7 的余数即为所求。

解　因71427÷7余 6，19÷7余 5，而 6×5＝30 除以 7 的余数为 2。所以，71427×19除以 7 的余数为 2。

注：当被减数除以某数的余数比减数的余数较小时，即“不够减”，该怎么办？这在前讲例 3 中曾遇到过。

例 8　求71423－19除以 7 的余数。

分析与解　71423÷7 的余数为 2，19÷7 的余数为 5，2＜5。因为（2＋7）与 2 对 7 同余，所以，把 2 加上 7 后减去 5，再求除以 7 的余数，即2＋7－5＝4，4÷7的余数为4。因此，71423－19除以 7 的余数为4。

例 9　有一个自然数，用它去除63，91，129，得到的三个余数的和为25，求这个自然数。

解　从题中条件可知，(63＋91＋129)－25＝258能被这个自然数整除。

$$258=2\times3\times43$$

因为三个余数的和为25，8×3＝24＜25，所以，余数中至少有一个大于 8，那么，这个自然数一定大于 8。又因为这个自然数是 63，91，129 的除数，所以它不会超过最小的63。因此，这个自然数在 8 与63之间，2×3×43的因数中只有43适合，所以这个自然数为43。

例10　两个代表团从甲地乘车往乙地，每车可乘35人，

两代表团各坐满若干辆车后，第一代表团剩下的15人与第二代表团剩下的成员正好又坐满一辆车。

会后，第一个代表团的每个成员与第二代表团的每个成员都拍一张照片留念。如果每个胶卷可拍35张照片，那么拍完最后一张照片后，机中的胶卷还可以拍几张照片？

分析 第一代表团剩下的15人，则第二代表团剩下的是 $35-15=20$（人）。第一代表团的每个成员与第二代表团的每个成员都拍一张照片留念，那么所拍照片的张数等于两代表团人数的积。

把这一题"数学化"就是：甲数被35除的余数是15，乙数被35除的余数是20，那么甲数与乙数的积被35除的余数是几？

应用同余性质可知，所求余数显然等于第一代表团人数被35除所得余数乘以第二代表团人数被35除所得余数的积再除以35所得的余数。所以解这道题我们可以不需要知道两个代表团的具体人数。

解 $15\times20=300$　　$300\div35=8\cdots\cdots20$

答：机中胶卷还可以拍20张照片。

例11 将1--1001的整数按照下表的方式排列。用一个正方形框出九个数，要使这九个数的和等于（1）1986；（2）2529；（3）1989.是否能办到？如果办不到，简单说明理由；如果办得到，写出正方框里的最大数和最小数。

分析 从表中看到从1到1001的所有自然数的排列规律是每7个连续自然数排成一行，下一行的各数都比上一行相应位置上的各数大7，如8比1大7，15比8大7……。且每一列的各数除以7有相同的余数，如第一列中的1、8、

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
……	……	……	……	……	……	……
995	996	997	998	999	1000	1001

15、22……995除以7都余1，第二列中的各数除以7都余2，第三列中的各数除以7都余3，……，第七列中的各数除以7都余0（整除）。表中用正方形框住的9个数，正好排成三行三列，这9个数的排列仍然符合上述规律，即每一行是3个连续自然数，下一行的各数都比上一行相应位置的各数大7，按这个规律框住的9个数，显然左上角的数最小，右下角的数最大。

设正方形框内正中心的数为x，则根据规律，这9个数排列如右框。

$x-8$	$x-7$	$x-6$
$x-1$	x	$x+1$
$x+6$	$x+7$	$x+8$

求出这九个数的和，分别进行判断就可以了。

解 设框内正中心的数为x，则最小的为$x-8$，最大的为$x+8$。根据分析，这九个数的和显然为$9x$。

（1）如果$9x=1986$，那么，9应整除1986。但9不能整除1986，所以，这九个数的和不可能等于1986。

（2）如果$9x=2529$，则$x=2529\div9=281$，但$281\div7=40$（余1），即x在第一列，这不可能，所以，这九个数的和等于2529也不可能。

（3）如果$9x=1989$，则$x=1989\div9=221$，$221\div7=31$（余4），即x不在第一、第七列。所以，这九个数的和

可以等于1989，其中最小的是221 - 8 = 213，最大的是221 + 8 = 229。

例12　求40^{15}除以13所得的余数。

解　因40^{15}表示15个40连乘，而40除以13得余数1，所以，40^{15}除以13所得的余数等于$1^{15}=1$除以13的余数1。

练习 7

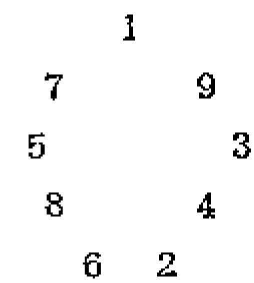
1. 五位数$\overline{2A89B}$能同时被4和9整除，求这样的五位数。
2. 六位数$\overline{x1989y}$能被56整除，求这样的六位数。
3. 六位数$\overline{A1989B}$能被44整除。求这样的六位数。
4. 六位数$\overline{A1989B}$能被26整除，求这样的六位数。
5. 七位数$\overline{A6A3A2A}$能被6整除，求这样的七位数。
6. 某奥校买了72本《小学数学竞赛专题训练》书，开的发票上首尾两个数字看不清楚，总价是□52.7□元，你知道每本多少元钱吗？
7. 在522后面写上三个彼此不同的数得到一个六位数，如果这个六位数同时被7、8、9整除，那么后面写上的三个数码组成的三位数是多少？
8. 把任何一个两位数顺次写三遍，如$\overline{ababab}$所得的六位数一定能被3、7、13或37整除，为什么？
9. 王勇暑假读一本小说，如果每天读80页，需要4天多才能读完；如果每天读90页，需要3天多才能读完。王勇想每天读的页数与读完这本小说所需的天数相等，他每天应读多少页（每天不只读1页）？
10. 六名学生参加校办厂木工组劳动，他们分成三个小组，每组2人，组长名是小明、小光、小亮（不含姓）。小明与小欢锯2米长的圆木，小光与小乐锯1.5米长的圆木，小亮与小喜锯1米长的圆木．他们都把圆木锯成0.5米长一节。又知组长赵××与组员

周××锯出26节；组长钱××与组员吴××锯出27节；组长孙××与组员郑××锯出28节.请填出上面六人的名。

11．三个数443，347，123分别除以一个数所得余数相同，求这个数的最大值和余数。

12．从0、1、2、3、4、5、6、7、8、9这十个数字中选出五个不同的数字组成一个五位数，使它能被3、5、7、13整除，这个数最大是多少？

13．把1至9九个数字按右图所示次序排成一个圆圈。请你在某两个数字之间剪开，分别按顺时针和逆时针次序形成两个九位数。如，在1和7之间剪开得两个数193426857和758624391。如果要求剪开后所得到的两个九位数的差能被396整除，那么剪开处左右两个数的乘积是多少？



14．被2、3、4、5、6除余1而又能被7整除的最小自然数是多少？

15．甲数除以乙数商103余14，而甲、乙两数、商、余数的和为5643，求乙数。

16．某自然数m在除13511、13903及14589时余数相同，那么m的最大值是多少？

17．把由1开始的自然数依次写下来，直写到第201位为止：

$$\underbrace{123456789101112\cdots\cdots}_{201位}$$

问这个数除以3的余数是几？

18．数列1，6，7，12，13，18，19，…中第133项被7除余几？

19．69、90、125被某个数m除的余数都相同，那么81被这个数m除的余数是多少？

20．将分母为15的所有最简假分数由小到大依次排列。问第999个假分数的分子是多少？

第八章 筛选与枚举

在这一章里，我们将在前面学习的基础上，向你介绍两种朴素而又实用的思想方法——筛选与枚举，以及它们在解题中的应用。帮助你提高分析问题和解决问题的能力。

一、枚举及其应用

春游时，同学们采集了不少植物标本。小华细心地将这些标本一件一件地摆放好，边摆边数，标本摆完了，共有多少件也就知道了。她这样数标本的方法用的就是枚举法，实质上就是将自然数 1， 2， 3， 4，…… 一一列举了出来。很显然，这种方法必须遵循两个原则：一是不重复，二是不遗漏。否则就会出错。

枚举法虽然简单、平常，却非常实用，在我们的数学学习中经常用到。比如，要你很快说出100以内3的倍数，你会很自然地说有：0，3， 6， 9， 12，…，99。但你如果不这样有次序有规律地列举，就很难做到不重、不漏。

一般说来，枚举法就是把要讨论的事物不重、不漏地一一列举出来的方法。枚举也叫列举或穷举。

在解答实际问题时，怎样才能保证枚举的准确性呢？一句话：有次序、有规律地进行分类列举。请看下面几个具体例子。

例1 图8-1中共有多少个正三角形？

分析 这道题可不是随意就能数出答案的。为确保不重不漏正确枚举，应该注意到，图中的正三角形只有四种不同的构成情况，逐一枚举，便会求得正确解答。

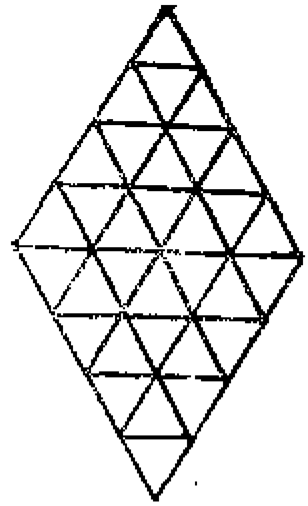


图8—1

解 根据不同情况，枚举如下：

由一个小正三角形构成的有32个（即16×2）

由四个小正三角形构成的有18个（即9×2）

由九个小正三角形构成的有8个（即4×2）

由十六个小正三角形构成的有2个

因此，图中共有 $32+18+8+2=60$个正三角形。

例2 已知两个不相等的自然数的最小公倍数是105，且两数都不为1。求出所有适合条件的两个数。

解 由题意可知，105应含有这两个数的全部质因数。将105分解质因数$105=3\times5\times7$，针对两数的不同关系，枚举如下：

当两数互质时，有：

3和35，5和21，7和15；

当两数是倍数关系时，有：

3和105，5和105，7和105，

15和105，21和105，35和105；

当两数既不互质，又不成倍数关系时有：

15和21，21和35，15和35。

因此，本题的解答有以上十二组。

例3 小强在暑假中要做语文、数学和外语三科作业，他今天做这科，明天做另一科。如果第一天小强做数学，到第五天他仍做数学，那么他共有多少种不同的做题方式？

解 根据做题的可能情况，枚举如下：

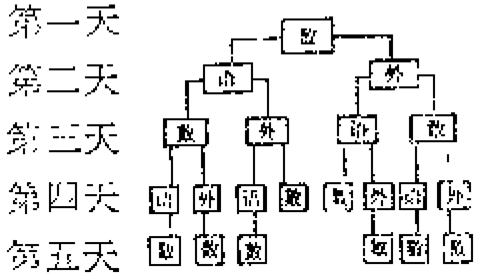


图8—2

由图可知，共有六种不同的做题方式。

上例，我们采用了分枝图（也称树形图）来进行枚举，既形象直观，又简单方便，并且有条有理，不易重复、遗漏。

通过前面几个例题的学习，同学们对枚举法已经有了大致的了解。知道了在用这种方法解题时一定要注意不出现重复和遗漏。现在，请你思考一下这样一个题目：

小敏采蘑菇，四天共采了17朵，并且一天比一天采得多。已知小敏第四天采的朵数少于前三天采的朵数的和，如果把这四天采的朵数相乘，正好等于第二天采的朵数的40倍。那么，小敏这四天各采了多少朵？

经过思考，你会发现，本题的解答需要枚举的可能性较多，一一列举分析很费时，而且不易找到正确的解答。怎样才能在这样较大的范围内尽快地求得解答呢？这就要用到一种不断缩小枚举范围的方法——筛选法。

下面我们就来谈谈筛选法和它在解题中应遵循的原则。

二、筛选及其原则

什么是筛选法？了解下面的典故后，对你一定有所启

发。

大约在公元250年，古希腊数学家幼拉脱斯芬为了寻求出在一定范围内的质数，他第一个制出了一个数目不太大的质数表。造表的原理是这样的：

把一定范围内的自然数写出，（以1—300为例）第一个数是1，1不是质数，将它划去；然后是2，2是质数把它留下，然后将2的倍数（这些都是合数）全部划去；2后面是3，3是质数把它留下，然后将3的倍数9，15，21…297全部划去（其中有些是2的倍数已经划掉了）。依此类推，剩下的数就是300以内的全部质数。

据说，幼拉脱斯芬在造质数表时，将写上自然数的纸绷在一个框子上，然后将上面的合数与1用上述原理逐一挖去，结果得到了一个象筛子一样的东西，所有的合数与1都好象穿过了“筛眼”被筛掉了，而质数都留了下来。所以，后人将这种造表的方法叫做“古典筛法”又称“逐步淘汰原则”。

有了这种筛选思想，枚举法便更加完善和可行，它确定并缩小了枚举的范围，在解答可能性较多的题目中可以尽快“筛”出正确的答案，起到事半功倍的效果。

运用淘汰原则，我们回过头去分析一下“小敏采蘑菇”这个题目

假定用字母a、b、c、d分别表示小敏四天各采的朵数，根据题意有：

（1）$a<b<c<d$，（2）$a+b+c+d=17$，

（3）$a+b+c>d$，

（4）$a\times b\times c\times d=40\times b$即$a\times c\times d=40$

由于（4）是乘积式，则从（4）入手：

$a\times c\times d=2\times2\times2\times5=1\times2\times2\times2\times5$

从（1）、（2）可知a不可能取3和大于3的数，根据上面乘法等式枚举分析：

当$a=1$，$c=2$，$d=20$，不合（1）；

当$a=1$，$c=4$，$d=10$，则$b=2$，不合（3）；

当$a=1$，$c=5$，$d=8$，则$b=3$，合条件；

当$a=2$，$c=4$，$d=5$，则$b=6$，不合（1）。

所以，小敏四天采蘑菇分别为1朵，3朵，5朵，8朵。

由上例我们看到，筛选与枚举往往是并用的，关键在于找好筛选的标准，确定枚举的范围。本题若从（2）出发，则分类情况多些，所以，要注意灵活、合理地使用筛选与枚举法。

例4 1990年，有人在介绍自已的家庭时说：我有一儿一女，他们不是双胞胎，儿子年龄的立方，加上女儿年龄的平方，正好是我的出生年，我正当中年，儿女都不满20岁，我比我妻子大1岁。请你求出我家每个人的年龄。

分析 本题的关键在于先确定儿子的年龄。

解 由于$13^3=2197$，所以儿子年龄一定小于13岁；又由于$11^3=1331$，即使加上$20^2=400$也只有$1331+400=1731$，所以儿子年龄大于11岁。故儿子只能12岁。

设女儿年龄为x，则由于父亲是中年人，最多不超过55岁，那么，父亲生于1935年以后，所以

$$12^3+x^2>1935$$

$$x^2>207$$

因$14^2=196$，$15^2=225$，所以女儿年龄大于14岁，可能是15，16，17，18，19。如果$x=16$，那么父亲出生年数是

$$12^3+16^2=1728+256=1984$$

显然不合理。同样地，女儿年龄更不能大于16岁，只能是15岁。

$$12^3+15^2=1953$$

这时，父亲1990年是37岁，母亲36岁。

从本题的解答过程可以看出，运用筛选法解题时，关键在确定筛选的范围，范围越小，筛选的工作量就越小。

例5 有分别写有1，2，3，…，13的卡片各两张，任意抽出两张，计算这两张卡片上的数的积，这样会得到许多不相等的积。试问：这些积中最多有多少个能被6整除？

分析 这是一道较容易算错的题。由于抽出的两张卡片的不同情况很多，因此卡片上两个数的积的不同情况也很多，分析起来较为费时。我们换一个角度考虑，分析可能得到的6的倍数，这样便大大缩小了解题的范围。

解 根据题中条件，抽出的两张卡片上的数的积能被6整除的最小可能是6，最大可能是$12\times13=26\times6$，计有26种不同的可能情况。注意到卡片上两个数的乘积，不可能出现6的17倍，19倍，21倍，23倍和25倍。（其它可能为什么都会出现，请同学们思考）

所以，最多可能有$26-5=21$个不相等的积能被6整除。

当然，也可直接筛选：写出这13个数

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13.

依次用前面的数乘以后面数，凡为6的倍数的则取（相同的不取），如：1×6，1×12，2×12，，3×6，3×12，…，但较繁。

三、竞赛题选讲

数学问题的解答，是一个综合应用所学知识，有层次、有条理分析、概括的过程。如何抓住问题的实质，抓住问题中提供的解题方向，是解决较难数学问题的关键。

例 6　分子小于 6 而分母小于60的不可约真分数有多少个？

分析　“不可约真分数”就是“最简真分数”。由于分子的取值范围明显小于分母的取值范围，因此，只需对分子逐一考虑就行了。

解　分子为 1 时，分母可从 2 到59，共有58个适合条件的分数；

分子为 2 时，有57个真分数，但分母为 2 的倍数的有28个，它们不是最简分数。故适合条件的分数有29个；

同理，分子为 3 时，适合条件的分数有38个；分子为 5 时，适合条件的分数有44个；

分子为 4 时，有55个真分数，但分母为偶数的有27个，它们不是最简分数。适合条件的分数有28个。

所以，分子小于 6 而分母小于60的不可约真分数共有：

$58+29+38+44+28=197$（个）

例7　**在三位数中找出所有的数 N，使该数与它的三个数码之和的比为最大。**

分析与解 全体三位数可分为两类：个位十位为0的；个位十位不全为0的。分类考察：

（1）如$N=\overline{a00}$（$a=1、2、\cdots 9$），则问题中说的比是$\frac{N}{a}=100$；

（2）如$N=\overline{abc}$（$a\neq0$，b、c不全为0），则

$$N=a\times100+b\times10+c\leqslant a\times100+9\times10+9$$
$$<a\times100+100$$

即 $N<(a+1)\times100$

又因 b、c不全为0，则$a+b+c\geqslant a+1$

故比值 $\frac{N}{a+b+c}<\frac{(a+1)\times100}{a+1}=100$

综上（1）、（2）知，所求的"最大比值"应为100，这样的三位数N只有九个：100、200、300、400、500、600、700、800、900。

例8 在任意五个整数中，一定可以选取三个整数，使这三个整数的和是3的倍数。

分析 由于每个整数被3除，其余数只能是0、1、2之一，因此全体整数按余数可分为三类。五个整数分属于这三类只有两种情形：①有一类至少包含这五个整数中的三个；②每一类至多包含这五个整数中的两个。分①、②两种情形枚举讨论就可得出解法。

解 ①若有一类至少包含这五个整数中的三个。

此时，这五个整数至少有三个数除3后的余数相同，它们的余数和显然能被3除尽，因而这三个数的和一定是3的倍数。

②若每一类至多包含这五个整数中的两个。

此时，这五个数除 3 后的余数只有三种可能：

0、0、1、1、2；0、0、1、2、2；

0、1、1、2、2。

这时，只需在每一种可能中选取余数分别为 0、1、2 的三个整数，其和必是 3 的倍数。

综上①②知，结论获证。

例9 一本书有500页，编印页码 1、2、3，…。问数字 1 在页码中出现了多少次？

解 把1～500分成六组：1～99，100～199，200～299、300～399、400～499和500。

①在1～99中，又可分成 1～9，10～19，20～29，…，90～99十小段，除10～19中1出现11次外，其余各段中1仅只出现 1 次，故在1～99中 1 共出现20次。

②在100～199中，它的百位数上都是 1，显然比①多出现100次 1，故 1 在这一组出现了120次。

③200～299，300～399，400～499三组中出现 1 的次数与1～99组相同。

④500中没有出现 1。

综上知，这本书页码中，数字 1 共出现了

$$20\times4+120=200（次）$$

它的反面问题是下面一个例子。

例10 一本书的页码由3197个数字组成，问这本书共有多少页？

解 1～9页（共9页），有 9 个数字；

10～99页（共90页），有$2\times90=180$（个数字）；

100～999页（共900页），有3×900＝2700（个数字）；

这样，在1～999页（共999页），有9＋180＋2700＝2889个数字。而3197－2889＝308，即还余308个数字，它们可组成1000以上的页码（四位数）：

308÷4＝77（页）

故这本书共有999＋77＝1076（页）

例11 兰兰向妈妈要六分钱买一根冰棒。妈妈叫兰兰从袋子里取硬币。袋子里1分、2分、5分硬币各6枚。兰兰要拿六分钱，可以有几种配搭法？

解 只拿一种硬币的配搭法有两种：①取6个一分钱，②取3个二分钱；

拿两种硬币的配搭法有三种：①取4个1分钱和1个二分钱；②2个一分钱和2个二分钱；③1个一分钱和1个五分钱。

答：共有五种配搭法。

例12 王叔叔、李大伯、周叔叔、林阿姨、张阿姨一起参加会议，开会前他们相互握手问好。王叔叔和4个人都握了手，李大伯和3人握了手，周叔叔和2人握了手，林阿姨和1人握了手。问张阿姨和哪几个人握了手？

解 根据已知条件，已握过手的情形为：

王叔叔——李大伯、周叔叔、林阿姨、张阿姨

李大伯——王叔叔、周叔叔、张阿姨

周叔叔——王叔叔、李大伯

林阿姨——王叔叔

由此可知，张阿姨已和王叔叔、李大伯两人握了手。

练习 8

1. 在1989—9891的整数中，末两位数字相同（如□□44就是一类）的数共有多少个？
2. 把20分成几个自然数的和，再求出这些数的积，要使这个乘积尽可能大，那么，这个乘积是几？
3. 在所有的三位数中，各位数字之和等于10的数共有多少个？
4. 小强和小明比赛乒乓球，规定谁先赢四盘谁获胜，现在已比赛三盘，小强两胜一负，那么到两人最后决出胜负为止，共有多少种不同的比赛情形？其中小明获胜的情形有几种？
5. 在一根长木棍上，有三种不同的刻度线。第一种刻度线将木棍分成了十等份；第二种刻度线将木棍分成十二等份；第三种刻度线将木棍分成十五等份。如果沿每条刻度线将木棍锯断，木棍总共被锯成多少段？
6. 求不大于400的只有15个约数的所有自然数。
7. 王江家栽有三棵桃树，已知第一棵结了303个桃子，第二棵结的桃子数是全部桃子数的五分之一，第三棵结的桃子数占全部桃子数的七分之几。根据上述条件，请你算算：王江家的三棵桃树共结了多少个桃子？
8. 图8—3中每个小正方形的边长均为2厘米。求图中所有正方形面积的总和。
9. 甲、乙、丙三人的年龄恰好为三个不小于30的连续两位数，他们的年龄和也是两位数，且能被11整除。求这三人的年龄。

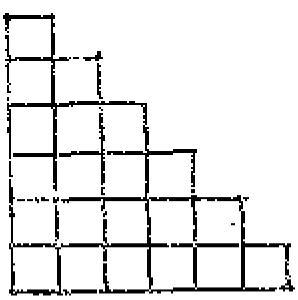


图8—3

10. 若整数n不是5的倍数，则n^2也不是5的倍数。
11. 任意两个整数的和、差、积中，至少有一个能被3整除。

12. 六个不超过6的自然数（可以有相同的）的和等于12，则其中一定有若干个数的和等于6。

13. 一个自然数的真因子是指除1和它本身以外的约数。一个比1大的自然数，如果等于它的所有不同真因子的积，则称这个自然数是“好的”。求最初十个“好的”自然数的和。

14. 甲、乙、丙、丁四个人比赛乒乓球，每两个人都要比赛一场。结果甲胜了丁，并且甲、乙、丙三人胜的场数相等。问丁胜了几场？

第九章　你会制作“数学抽屉”吗？

五年级二班教数学的朱老师平时常爱出一些思考题，然后在每月一次的数学奥林匹克活动课上引导同学们解答。这个月的思考题特别奇怪又特别有趣，全是针对班上50名同学提的，像是数学题又不像数学题。比如，

1．班上至少有5位小朋友在同一个月过生日。是吗？

2．班上一定有两个人，其余同学分别与这两人打过乒乓球的人数相等。你说对吗？

3．班上任何6位小朋友中，要吗有3人互相握过手，要吗有3人互相没握过手。这是什么道理？

4．全班同学围成圆圈，则一定有5个相邻同学的学号数相加之和大于127．请说明理由。

近一月来，小朋友们冥思苦想，兴味十足，盼望着在活动课上抒发高见，一显身手。然而，这一次朱老师为了培养大家的自学能力，给每个同学发了一份阅读资料。

一、抽屉原理之一

人们通常认为解决一些复杂的数学问题，搞数学研究，必须要用高深的数学原理和公式。其实，某些时候只要勤于思考，善于运用，小常识也能派上大用场。今天，我们就从

连八、九岁小孩也能明白的小常识讲起。

小常识：往两只抽屉里放完三本书，总有一只抽屉至少要放两本书。

为什么有这样的结论呢？道理十分浅显。要不是这样，两只抽屉都放不上两本书，那就是每只抽屉只放一本或不放，于是，两只抽屉总共就放不完三本书，不符合题目条件。

同样的道理，要是往两只抽屉里放完3本以上的书，也就是总有一只抽屉里至少要放两本书。因此，“小常识”可以合起来叙述为：往两只抽屉里放完多于两本的书，则总有一只抽屉至少要放两本书。

以此类推，往3只抽屉里放完多于3本的书，总有一只抽屉里至少要放两本书；往4只抽屉里放完多于4本的书，总有一只抽屉里至少要放两本书；……（你能正确解释“至少放两本书”的含义吗？）

把以上小常识归纳为一般情况，并抽象成数学语言就是抽屉原理之一：

m个抽屉里放完多于m件的物品，则总有一只抽屉里至少要放两件物品。

这里所说的“抽屉”，并不真的是家俱抽屉，而是“数学抽屉”，实际上是“恰当的分类”。运用抽屉原理解决问题的重要关键就是看会不会恰当分类，即是看是否善于制作“数学抽屉”。

世界著名数学家、物理学家英国人牛顿说过，“在数学中，例子比法则更重要”。下面就举例领会“数学抽屉”的制作和“原理一”的运用。

例1 有15名小朋友同是1979年出生，那么其中至少有两人的生日在同一个月。

解 把1979年的十二个月制成12只“抽屉”，15名小朋友按出生月份放进12只“抽屉”，则总有一只“抽屉”里至少要放两名小朋友，也就是至少有两人的生日在同一个月。（注：15名改成13名小朋友，结论仍成立。）

例2 六年级一班举行运动会，项目有50米跑、跳远、跳高、掷手榴弹四项，每人必须报两项。第4小组8名小朋友商量，为了取得好成绩，组内不要有人所报项目完全相同。这个方案如果能行，请你替他们设计；如果不行，请你说服他们！

解 首先要考虑两个项目搭配只有多少种可能方式。这就是：

（跑，远）、（跑，高）、（跑，掷）；

（远，高）、（远，掷）；

（高，掷）。

按这6种搭配方式制成了6只“抽屉”，要装8名小朋友的话，总有一只“抽屉”至少要装2位小朋友，即总有人所报项目完全相同。第4小组的方案是无法实现的。

例3 在笔直的公路一旁，从起点开始，每隔1米种一棵树。如果把三块“爱护树木”的小牌分别挂在3棵树上，那么不管怎样挂，至少有两棵挂牌的树，它们之间的距离（以米为单位）是偶数。这是为什么？

分析 为了使问题更加数学化，可把树木从起点开始编号。于是，任何两树间的距离就是这两数的号码差。我们又知道，当两数同奇或同偶时其差为偶数。所以我们只要说

明，有两块小牌必然挂在号码同奇或同偶的树上就成。

解 给树木编号如图9—1。

图9—1

按号码的奇偶性把树木分成两类，这两类就是两只抽屉。3块小牌放入两只抽屉，则至少有2块小牌要放入同一“抽屉”，即挂在同一类的树上。无论是奇类还是偶类，此两树的号码差必为偶数，号码差即是两树的距离，所以挂小牌的两树间的距离至少有一个为偶数。

例4 任意给定7个不同的自然数，则其中必有两个，其和或其差是10的倍数。

解 因为个位相同的两数之差是10的倍数；个位之和是10的两数之和是10的倍数，所以，可以按个位分类制作6只“抽屉”：

（0）、（5）、（1，9）、（2，8）、（3，7）、（4，6）

这样，总会有一只“抽屉”至少装入两个数。这两个数要吗个位相同，要吗个位之和是10，因此，这两数之差或和定是10的倍数。

熟能生巧。建议小朋友先试着运用抽屉原理一解答本章练习前4题，再接着学习抽屉原理二。

二、抽屉原理之二

我们仍然从具体的例子着手来发现数学原理。

往两只抽屉里放完15本书，按“原理一”，总有一只抽

屉至少要放 2 本书。但是，这个答案我们会嫌它不精确、不大胆，或者说，还没有说够份量。也许有小朋友已经领悟，可以断言，总有一只抽屉至少要放 8 本书。为什么呢？

一方面，如果两只抽屉都放不上 8 本书，总共就放不完15本书。

另一方面，不能把“8”再改大为“9”。因为无需用哪只抽屉放 9 本就可放完15本。

这个恰到好处的数字“8”能不能用什么规律来帮助寻求呢？能。注意到$15=7\times2+1$，其中，2 是制作“抽屉”的数目，用15除以 2 商 7 余 1 。比商数 7 大1的 8 就是恰到好处的数。

同样的道理，把20束鲜花插入 3 只花瓶，因为$20=6\times3+2$，所以，总有一花瓶至少要插 7 束鲜花。52名学生任意分成 6 组，因$52=8\times6+4$，所以，总有一组至少有 9 人。

由此可以总结出抽屉原理二：

把$a\times b+c$件物品（$0<c<b$）放入b只抽屉，总有一只抽屉至少要放$a+1$件物品。

抽屉原理本身不难理解，但运用时常会遇到两点麻烦。一是如何把现实问题数学化，二是如何去制作“抽屉”。

例5　如果我们班有50名同学，那么至少有 5 名在同一个月过生日。

解　这里，月份就是“抽屉”，12个月就是 12 只“抽屉”。因为$50=4\times12+2$，所以，至少有 5 人要放入同一只“抽屉”，也就是至少有 5 人在同一个月过生日。

例6　学校今年招收的一年级新生180名全是1983年出生的。其中至少有几人的生日在同一星期内。

解　一年最多跨53周，制成53只"抽屉"。因为$180=3\times53+21$，所以至少有4人要放入同一只"抽屉"，即至少有4人的生日在同一周内。

作为基本练习，建议小朋友做本章练习的5～8题。如果你觉得用抽屉原理解答问题确实其乐无穷，那就继续认真阅读后面的"较难问题举例"。

三、较难问题举例

例7　有规格尺寸相同的6种颜色的袜子各20只混装在箱内，黑暗中从箱内至少取出多少只就能保证有3双袜子？

或许个别小朋友会说，如果恰好取出的6只袜子就配成3双，答案不就是6吗！

小朋友，解题首先要认真读懂题。题目要求我们找出一个数，只要取出的袜子数等于或大于这个数，就能保证其中有3双袜子。试想，如果你取出的6只都不同色，又哪能保证有3双袜子呢？即使你再取出第7只，也只能保证出现一双袜子。不过，由此已使我们想到可以逐次完成题目要求。

解　6种颜色就是6只"抽屉"。按"抽屉原理一"，只要取出7只袜子就总有一"抽屉"装2只，这2只就可配出一双。拿走这一双尚剩5只，如果再补进2只又成7只，根据"原理一"，又可配成一双拿走。如果，再补进2只便可完成第3双。所以，至少要取出$7+2+2=11$只袜子就一定会配成3双。

例8　把上例的要求改为3双不同色袜子，至少应取出多少只？

解　最不利的情况是取出20只全同色。这时，已可得到一双袜子。剩下的问题转化为至少应再取几只就能保证出现另一种色的第2双袜子。同样，最为不利的情况是又取出了20只同色袜子。这时可得到第2双袜子。剩下还有4种颜色，就看作4只“抽屉”，只要再取出5只，按“抽屉原理一”，必配成第3双袜子。

所以，至少要取45只才能保证有不同色的3双袜子。

例9　再把例7的要求改为3双同色袜子，情况又将如何？

解　6种颜色就是6只“抽屉”。如果有某一只“抽屉”内至少装有6只袜子就能配成同色袜子3双。按“抽屉原理二”之计算式，就有

$$5\times6+1=31$$

即只要取出31只就必能达到要求。

说明：（1）比较此三个例题，虽仅仅是对颜色的要求不同，而解法却大相径庭。

（2）例9的求解特点是逆向运用抽屉原理，即是从某一“抽屉”至少装的物品件数推得总物件数。逆向运用原理也是有效的数学方法之一。

例10　五年级二班的50个人当中一定有两个人，其余同学分别与这两人打过乒乓球的人数相等。为什么？

解　第一种情况是，每一个人都打过乒乓球。这时，对每一个同学而言，与他打过球的人数是从1到49这49个数中的一个确定的数。由于共有50人，而只有49个数——“抽屉”，因此，至少有两人被装进同一“抽屉”，也就是分别与这两人打过乒乓球的人数相等。

第二种情况是，至少有一个人未打过乒乓球。这时，其他任何人都不可能与49人都对过阵，即最多与48人比赛过，也就是说，对50名同学中的每一人而言，与他打过乒乓球的人数是从0到48这49个数中的一个确定的数。由于共有50人，而只有49个数——"抽屉"，与第一种情况同理可得结果。

说明：（1）由求解过程可以看出，"全班50人"另外换成别的什么，如"全校1990人"、"全省1亿人"、"全世界n个人"等等都可同样求解。

（2）"打乒乓球"另外换成"握手"、"互相认识"、"下棋"等都成。

由此二点可知，一些题目的叙述方式尽管不同，但数学实质是一样的。解题如果说有诀窍的话，那就是要善于抓住实质，善于转化成数学问题。

例11 全班50名同学任意围成一个圆圈，则一定有5个相邻同学的学号数之和大于127。是这样吗？

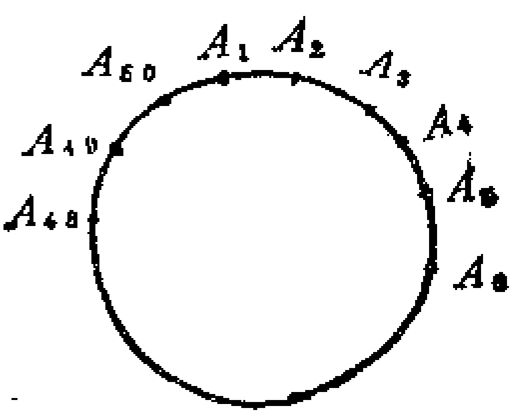


图9—2

解 当任意围成圆圈后，从任何一人开始依次给每个同学的学号数记为A_1，A_2，A_3，…A_{50}，如图9—2。因此，从A_1到A_{50}各是1至50中的某一个数。于是，从A_1加到A_{50}应等于从1加到50（可用等差数列求和方法计算）为1275。又根据加法结合律可以写成

$$(A_1+A_2+A_3+A_4+A_5)+(A_6+A_7+A_8+A_9+A_{10})+\cdots+(A_{46}+A_{47}+A_{48}+A_{49}+A_{50})=1275=127\times10+5$$

据“抽屉原理二”，10个括号中至少有一个括号中的5个数之和大于127。

例12 班上任何6位小朋友中，要吗有3人互相握过手；要吗有3人互相没握过手。

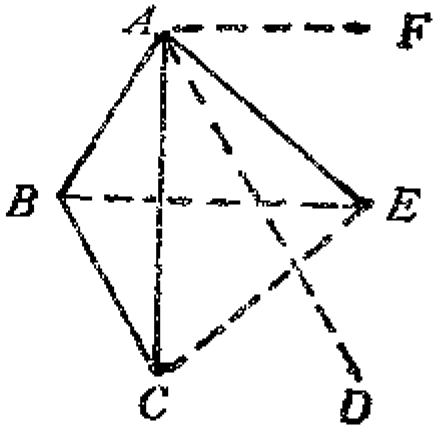
解 画示意图帮助分析也是数学解题的方法之一。

画6个点代表任意6个人，分别用字母A、B、C、D、E、F来称呼。如果两人之间握过手，就在代表此两人的两点间连实线；如果未握过手，就连虚线。

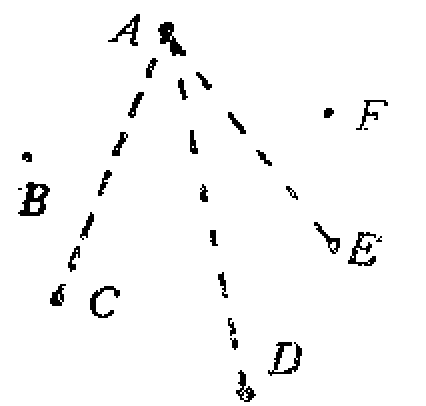
我们从某一点，比如A开始，由A向另5点共可连5条线。以实线、虚线各制成“抽屉”，两个‘抽屉”装5条线，总有一个至少装3条线。不妨认为是装3条实线，如图9—3(1)。〔注〕

再看B、C、E三点，只要其间有一条是实线相连，比如BC是实线，就出现实线三角形ABC，表示彼此都握过手。若其间无一条是实线，即全是虚线，则出现虚线三角形BCE，表示彼此都没握过手。

这就得到结论，要吗有3人互相握过手，要吗有3人互



(1)



(2)

图9—3

相没握过手。

注　要是装3条虚线，如图9—3（2），用同样的推理方法可得结果。所以，这种情况下常常用"不妨……"。这是数学中简化叙述的常用方式。

读到这里再做剩下的练习，或许你就能初步掌握制作"数学抽屉"的要领了。

练习 9

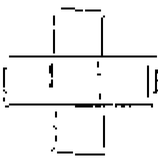
1. 在长100米的笔直的小路的一旁植树101棵，不管怎样植，总会有两棵树间的距离不超过1米。为什么？
2. 暑假中，有一个月王聪去少年宫35趟，那么总有一天他去过两趟或两趟以上。是吗？
3. 我国至少有两人出生的时间相差不超过4秒钟。你能推出这个结论吗？
4. 全市12所小学举行校际间足球比赛，采用单循环方式进行。每场均决出胜负，胜方记1分，负方记0分。比赛全部结束后无一所学校全胜。这样，一定就有积分相等的情况。请说明理由。
5. 正方体各面涂上红色或蓝色（每面只涂一色），则至少有几个面颜色相同？
6. 10只盒子装43个乒乓球，则总会有一个盒子里至少装多少个乒乓球？
7. 130件玩具分给40名小朋友，总会有人至少得几件玩具？
8. 据科学统计，任何人的头发不会超过20万根。四川省1亿人口中至少有多少人头发根数一样？
9. 全班52个学生人人都订阅《少年文艺》、《儿童时代》、《红领巾》三种杂志中的一、二或三种。其中至少有几人订的杂志相同？为什么？
10. 有27名男女学生站成三行九列的队形。不管男、女人数如何，也

不论怎样编队，至少有两列男生与女生的站立顺序一样，试说明理由。

11．在书箱中混乱放着许多书籍，有语文、数学、历史、地理四类。黑暗中要取出多少本，才能保证其中至少有10本是同类书？

12．把1到36的自然数摆成一圆圈，则一定存在三个相邻的数之和大于56．说明理由。

13．黑色、白色、黄色筷子各有8根混杂放在一起。黑暗中从中取出颜色不同的两双，至少要取多少根才能达到要求？简述理由。

14．在23×23方格纸中，将1～9这九个数字填入每个小方格，并对所有形如的“十字”图形中的五个数字求和。对于小方格中的数字的任意一种填法，其中和数相等的“十字”图形至少有多少个？

第十章　有趣的逻辑推理和二人对策

同学们前面学习和解答的许多问题大都是从数或数字的分析、计算和图形的推敲、论证得出正确的答案或结论。但在各级智力竞赛和数学竞赛中还有许多问题，当条件和结论中均不出现一般解题所需的数字、式子或图形时，若我们使用前面学过的方法去求解是很难奏效的。这类问题需要我们认真分析题意。动脑筋、想办法，找出问题的关键所在，进行正确的推理来解决。这就是下面要与同学们谈的逻辑推理问题。本章最后将介绍二人对策中的数学问题。

一、从简单推理入手

人们常说：数学是锻炼思维的体操。下面将通过一些具体例题学习处理逻辑推理问题的方法。

有位老师给出这样一个问题让他的学生解答。

一个乒乓球装在A、B、C三个盒子中的某一个盒子内，盒盖上分别标有一句话：A盒上标出：乒乓球在此盒内，B盒上标出：乒乓球不在此盒内，C盒上标出：乒乓球不在A盒内，这三张标签只有一张是正确的。问乒乓球装在哪个盒子内？

上面老师提出的问题中有一句话："三张标签只有一张

是正确的。”是解决问题的关键，由于A、C盒上两句话互相矛盾，所以其中必有一句话是正确的。也就是说，若A正确，那么C就不正确，反之若A不正确，那么C就正确。这样，可以判断B盒上的话一定不正确，所以乒乓球装在B盒内。

这里解题所用的分析方法，就是简单的逻辑推理。（它是由一个或几个判断推出另一个判断的思维形式。）

例1 甲、乙、丙、丁四位同学参加速算比赛，赛前老师请甲、乙、丙三位同学预测得分顺序，他们分别预测是：甲说：“丙第一，乙第二。”乙说：“丙第二，丁第三。”丙说：“丁第四，甲第二。”赛后得分情况证实三位同学都只预测准一个名次，那么四位同学的得分顺序是怎样排列的？

分析 抓住“每位同学都只预测准一个名次”这句话，可假设甲说的某一名次正确往下推。

解 由于每位同学只预测正确一个名次，我们不妨假设甲的第一个预测名次是正确的，即丙第一，那么顺下去可推出乙的第一个预测是错误的，因而乙的第二个预测是正确的，即丁第三。接下来可推出丙的第二个预测才是正确的，即甲第二。那么乙的名次就只能是第四了。

同学们不禁要问，为什么不假定甲的第二个预测名次是正确的呢？完全可以。我们不妨试试。

假定甲的第二个预测名次是正确的，即乙第二。那么乙的第一个预测就是错误的。（为什么？）这样乙的第二个预测是正确的，即丁第三。接下来便推出丙的第二个预测是正确的，即甲第二。这与前面假定甲第二个预测正确（即乙第

二）发生矛盾，所以假定"甲的第二个预测名次是正确的"是不能成立的。

所以四位同学的名次是丙第一，甲第二，丁第三，乙第四。

此题是根据已知先作一个假设，然后利用已知条件一步一步往下推，直到推出结论为止。若从这个假设出发推出自相矛盾的结论，这就说明所作的假设不成立，而假设的反面是成立的。

例2 小王把三支红铅笔和三支兰铅笔分别按两支红铅笔，两支兰铅笔，一支红铅笔和一支兰铅笔装入三个文具盒中。都装好后小王分别在盒盖上标出每个文具盒中的装法，结果全都标错了。你能从其中一个文具盒中摸出一支铅笔后（要求不能看余下的那支铅笔的颜色）把三个文具盒的正确装法说出吗？

分析 由于三个盒子盖上都标错了，我们可以从标有"一支红铅笔和一支兰铅笔"的盒中任摸出一支入手进行分析。

解 从标有"一支红铅笔和一支兰铅笔"的盒中任意摸一支，因为这个盒子中的铅笔一定是同色的。（为什么？）若摸出的是一支红铅笔，那么这个盒子中一定是两支红铅笔。则可以知道标有两支兰铅笔的盒中装的是异色的两支铅笔。（因为此盒中不可能是同色的两支铅笔）那么标有两支红铅笔的盒子中装的是两支兰铅笔。

若摸出的是一支兰铅笔呢？（请同学们自己回答）

例3 在1990个人中至少有1人要说假话，而这1990人中的任意两人中总有1人不说假话。那么你能判断不说假话

的有多少人？要说假话的又有多少人？

分析 从已知条件中“至少有1人说假话”和“任意两人中总有1人不说假话”入手，考虑一下：若有两个或两个以上的人要说假话将会如何？

解（略）

例4 数学夏令营决定组织参观华西计算中心的几个机房，联系参观的老师说：“有五个机房可以参观，但有下列约束条件。①若去甲机房，也必去乙机房。②丁机房和戊机房至少去一处。③乙机房和丙机房只能去一处。④丙机房和丁机房都不去或都去。⑤若去戊机房，那么甲机房和丁机房两处也必须去。”

他们参观了哪几个机房？请说明理由。

分析 在5个约束条件中，③乙和丙只能去一处，不妨从这点入手，假设去乙（或丙）后往下推。

解 由③可假设去乙，则不去丙；又由④知也不去丁；再由②推出应该去戊；接下来由⑤推出必须去甲、丁两处。（这个结论与前面条件④矛盾）

因而一定是去丙，不去乙；由④知去丁；接下来由①知甲、乙都不去；这样可由⑤知戊也不去。

综合上述结论参观地点是丙机房和丁机房两处。

二、逻辑推理与图表法解题

上一讲我们分析、讲解了几个简单的逻辑推理问题。这类问题的特点是无一定的格局，解法也无固定的套路和模式，题目中不给或很少给出数量关系，因而也无需进行大量

的计算。但要求严密的逻辑推理来判断结果，推出结论。这就需要我们深入地理解题设条件和结论，认真思考、分析，找出问题关键所在，根据条件进行正确的推理及论证，从而找到问题的答案。

许多逻辑推理问题，借助图表等辅助手段来讨论，可以把与问题有关的各个条件加以有次序的排列和比较，便于我们找出已知条件相互间的联系和发现隐含条件，使我们的分析思维过程更加条理化和程序化。解题过程简明直观。

例 5 甲、乙、丙、丁、戊五人参加竞赛，赛前五人对比赛名次预测如下：

甲说："乙第五，丙第二。" 乙说："我第三，丁第一。" 丙说："甲第一，戊第四。" 丁说："丙第三，我第四。" 戊说：乙第二，我第五。"

结果他们的预测都只对了一个名次，你能排出他们的名次吗？

分析 我们把题目中给出的已知条件列成表格。

	甲	乙	丙	丁	戊
甲说		五	二		
乙说		三		一	
丙说	一				四
丁说			三	四	
戊说		二			五

从表中看出甲的名次只有丙预测，因而得出甲是第一。这样可知丁的名次是第四。接下来可知戊是第五，当然甲预测的乙第五是错误的，所以丙是第二，乙是第三。

解 （略）

综合上面的分析，可以看出，只要我们采取较恰当的方法，认真分析，找出突破口，迅速、正确的求解就并非难事。

例 6　甲、乙、丙、丁兄弟四人玩耍时某人不小心打碎了花瓶，爸爸知道后生气的问是谁打坏的。甲说：“是乙打坏的。”乙说：“是丁打坏的。”丙说：“不是我打坏的。”丁说：“乙在说谎。”而他们兄弟四人在爸爸严厉的追问下，只有一个人说了实话，那么是谁打坏花瓶的呢？

分析　根据兄弟四人的说法，我们列表如下，“←”所指表示花瓶是他打坏的。

打坏花瓶人	甲说	乙说	丙说	丁说
甲			←	←
乙	←		←	←
丙				←
丁		←	←	

观察表中←所指，打坏花瓶的是丙，否则就会有两个人（或叁人）说了实话。

解　（略）

例 7　甲、乙、丙、丁四位同学参加体育比赛，成绩第一名的同学可以获奖，赛前四位同学对获奖情况各说一句话，甲说：“我会获奖。”乙说：“甲、丙都不会获奖。”丙说：“甲或乙获奖。”丁说：“乙会获奖。”结果有两位同学说对了，那么获奖者是谁？

解　我们还是借助表格来帮助分析，表中“√”表示获奖，“×”表示未获奖。

	甲	乙	丙	丁
甲说	√	×	×	×
乙说	×	√	×	√
丙说	√	√	×	×
丁说	×	√	×	×

把四位同学所预测的结论填入表后可看出，只有甲所在列是由两位同学说的，其它均不是，所以甲获奖。

在解逻辑推理问题时，用图示的方法也可帮助我们找出正确的解答。

例 8　A、B、C、D、E五位同学单循环比赛象棋。已

知A、B、C、D已赛过的盘数分别是4、3、2、1盘。问：此时E同学赛了几盘？

分析与解 我们用五点分别表示五位同学，若两人进行了比赛，则用线连结表示。根据题设，A应与B、C、D、E点相连；由于D只赛过一盘，则B只能再与C、E点相连。此时，C已与A、B两点相连了，就不能再与D、E相连。如图10—1所示。从图上E点的连线条数知，E同学已赛过两盘。

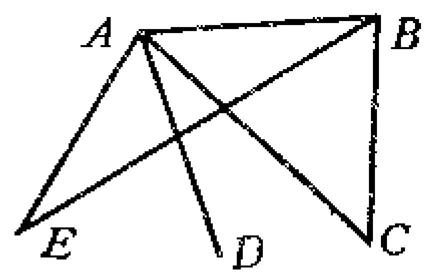


图10—1

你能用枚举法来解此例吗？（参考39页例12）

以上用列表法或图示法求解逻辑问题，初步显示了这种方法的优越性，但在制表或作图之前，一定要先对问题深入细致的分析、理解，对已知条件认真进行归纳整理，图表作好后，要逐步代入已知条件进行验证，采用图表法解逻辑问题需要我们对不同的问题，采取不同的分析方法和解法格式。

三、简单对策问题

我国古代有一个《齐王与田忌赛马》的斗智故事。讲的是：有一天，齐王要田忌和他赛马，规定各自从自己的上等马、中等马和下等马中选一匹来比赛，并说定每胜一匹马就得一千金，每输一匹马就付出一千金。当时同等级的马相比，齐王的马比田忌的马强，看上去田忌要输三千金了。但是田忌的谋士们认真分析研究后出了一个主意，叫田忌用下等马与齐王的上等马比赛，上等马与齐王的中等马比赛，中

等马与齐王的下等马比赛。结果，田忌的下等马输了，而上等马和中等马都赢了。田忌不仅没输三千金，反而赢了一千金。这个故事告诉我们：在进行竞赛、斗争时，要认真地分析研究，制订并应用尽可能好的对策，才能取得尽可能大的胜利。

现在我们就来研究几类问题的取胜的对策。

1．“抢数”的对策

“抢数”是一种数学游戏，它有一个确定的要“抢”的数，还有一个确定的规则。我们在制订取胜的对策时，要按照规定进行思考，找出规律，从而制订尽可能好的对策。

例 1 两人轮流报数，每人每次只报 1 个或 2 个数，而且必须报 1 个或 2 个数。如果甲报 1 、2 ，乙就接着报 3 ，或者报 3 、4 。这样连续报下去，谁报出18，谁就输。请回答：取胜的对策是什么？

分析 （倒推思考法）由于“谁报出18谁就输”，所以我方应抢报出17，使对方报18，我方才能取胜。怎样才能报到17呢？容易想到，我方只能让对方报15或报15、16，于是我方应抢报出14。依此类推，不难得出我方要抢报的要点数是17、14、11、8 、5 、2 。我们还可以看出，我方要设法先报，一次报出 1 、2 ，并始终抢报出各个要点数，这样我方就能取胜了。

解 取胜的对策是：（ 1 ）争取先报，并依次抢报出 2 、5 、8 、11、14、17等要点数。（ 2 ）对方先报，但对方不知取胜对策时，我方要利用机会，尽早抢占要点，从而反败为胜。

注　观察例9分析解答中的“要点数”：2，5，8，11，14，17，不难发现它们都是除3余2的数，所以先报者只要第一次报数1、2两个数，以后每次报的个数与后者报的个数之和为3，就一定获胜。这是余数知识在“抢数”中的应用。运用这一知识我们不难解决下面“抢数”中的对策。

例10　两人轮流报数，每次只能报1个或2个或3个数，谁最后报出100谁胜，问取胜的对策是什么？

解　根据例9的注，因为100÷(3+1)=25余0，所以后报者必有获胜的对策：每次报的个数与先报者报的个数之和为4，即抢报要点数4，8，12，…，100。如果后报者未掌握此对策，先报者可利用他的一次失误，抢报这些要点数，就可获胜。

例11　1111是个“坏数”，谁数到它谁输。二人从1开始交替接着数数，每次只能报数一个或二个数。问是先数者赢还是后数者赢？为什么？

解　问题可变为谁先数到1110谁就赢。

因1110÷3=370余0，所以，后数者只要每次根据先数者的个数1个（或2个）而数2个（或1个）数，就一定能赢。这种获胜的数法为“每次数3的倍数”。

例12　两人轮流报数，规定报出的是不超过8的整数，也不能为0。把两人报的数累加起来，谁先得到88（或88以上的数）谁就获胜，让你先报，你第一次报____就一定会获胜，为什么？

解　你第一次应报到7就一定能获胜。因为二人一轮报数的和可以做到不少于9，而88÷9=9余7。当你第一次报7后，以后你可以根据另一人每次报的数，报“凑够9”的

数，这样你就一定可以达到获胜的目的。

2. “拿火柴”的对策

“拿火柴”也是一种数学对策问题。参加的双方轮流从若干堆火柴中的任意一堆里任意拿走1根或几根或一堆火柴，但每次只能在某一堆里拿火柴（后同），谁拿到最后一堆中的最后1根或几根，谁就获胜（或败）。

怎样才能获胜呢？对策是什么呢？请看下面的例子。

例13 有两堆火柴，一堆10根，一堆7根。谁拿到最后一堆的最后1根或几根谁胜，取胜的对策是什么？

分析 （倒推分析法）如果两堆都只有1根，记为(1，1)。这时让对方先拿，我方获胜。如果在（1，1）之前的形势是（1，2），那么我方应从有2根的一堆中拿走1根，形成（1，1）的形势让对方拿。如果形势是(2，2)，那么要让对方先拿，（1）对方从一堆中拿1根，我方就在另一堆里拿1根；（2）对方把一堆（2根）都拿走，我方就把另一堆全部拿走而获胜。如果形势是（2，3），那么我方先拿，形成（2，2）让对方拿。……由此可以看出，要设法形成两堆的根数同样多的形势（1，1）、（2，2）、（3，3）等等，让对方拿，我方才能获胜。这样我们就找出了取胜的对策。因此，取胜的对策是：（1）设法由我方先拿。一次就从10根的一堆里拿走3根，形成（7，7）的形势让对方拿。以后对方从一堆里拿几根，我方就在另一堆里拿相同的根数，直到拿到最后一堆的最后一根或最后几根获胜为止。（2）如果对方要先拿，但没掌握对策，那么我方要利用机会，尽早给对方留下两堆的根数同样多的形势，

才可能反败取胜。

例14 有三堆火柴，第一堆有1根，第二堆有2根，第三堆有3根。如果谁拿到最后一堆的最后1根或几根谁胜，那么取胜的对策是什么？

分析与解 由例13我们容易想到，如果我方在某一次拿后，正好留下两堆根数相等的火柴给对方拿，那么我方就能取胜。但是，怎样才能达到上述目的呢？我们这样想：假如我方先拿，（1）不能拿第一堆里的1根，否则对方从第三堆里拿1根，给我方留下（0，2，2）即（2，2）的不利形势。（2）不能从第二堆里拿1根，否则对方把第三堆全拿走，给我方留下（1，1，0）的不利形势、（3）不能把第二堆全拿走，否则对方从第三堆里拿走2根，给我方留下（1，0，1）的不利形势。（4）在第三堆里拿1根或2根或全部，对我方都不利。由（1）——（4）看出，我方要设法后拿，再根据对方拿的情况确定我方的拿法，并给对方留下根数相同的两堆。因此取胜的对策是：（1）让对方先拿。我方拿后给对方留下根数相同的两堆。再照“两堆火柴”的拿法进行，我方就一定获胜。（2）对方不愿先拿，但不知对策，那么我方应利用机会，尽早给对方留下根数相等的两堆。

3．杂例

例15 一个有九格的棋盘（如图），两人各把三颗棋子轮流放到格子里，待一个一个地放完后，再依次轮流把棋子移到相邻的格子里，但不能斜着移动。谁先把自己的棋

①	②	③
④	⑤	⑥
⑦	⑧	⑨

子摆在一条直线上谁胜，取胜的对策是什么？

分析 从右图中不难看出，谁占领了正中的那格，谁就掌握了主动权，这是因为要使三颗棋排成一条线，就必须占领正中那格。因此，要争取先放第一颗棋。

解 我们给九个格子编上号。我方争取先放，并占领⑤号格。以后，（1）如果对方接着占①号格，我方就占⑧号格，迫使对方占②号格，我方接着占③号格，迫使对方占⑦号格，然后我方把⑤号、⑧号格上的棋子依次移到⑥号、⑨号格而获胜。（2）如果对方接着占②号格，我方就占⑨号格，对方只能占①号格，我方再占③号格，对方只能占⑥号格，然后我方把⑨号格上的棋子移到⑧号，待对方移子后，再把⑧号格上的棋子移到⑦号而获胜。

如果我方后放棋，要争取乘机占领⑤号格，再设法获胜。

例16 在黑板上写下数2，3，4，…，1990，甲先擦去其中一个数，然后乙再擦去一个数。如此轮流下去。若最后剩下两个互质数时，甲胜；若最后剩下两个数不互质时，乙胜。你愿当甲，还是当乙？

解 甲有必胜的策略，愿当甲。

因为2，3，4，…，1990中有995个偶数，994个奇数。甲先擦一个偶数2，然后每次这样擦：乙擦某一个奇数时，甲就擦其相邻后面的那个偶数；乙擦某一个偶数时，甲就擦其相邻前面的那个奇数。两个这样相应的擦（此时甲擦在乙的后面了）993次后，就只剩下相邻的一奇数一偶数，它们必互质，所以甲胜。

例17 有一个3×3的棋盘方格和9张大小如一个小方

格的卡片，在每一张卡片上写着 1～9 中的一个数。甲、乙两人做游戏，轮流选取一张卡片放到 9 格中的一格，对甲计算上、下两行六个数字的和，对乙计算左、右两列（竖行）六个数字的和，和数大者为胜。试说明若甲先选卡片放，则必有获胜的策略。

解 如图，四角上放的四张卡片上的数 a、b、c、d，两人都要计数，求和时可以不予考虑，而中间一格都不计算，所以只需比较 x_1+x_2 与 y_1+y_2 的大小。当甲先选取数 9 的卡片放在 x_1（或 x_2）上后，乙只可能选取最大数 8 的卡片放在 y_1（或 y_2）上，之后甲取数 7 的卡片放在 x_2（或 x_1）上，这时不论乙选数几的卡片放在 y_2（或 y_1）上，都有 $y_1+y_2<x_1+x_2=16$，所以乙不可能获胜，故甲先取卡片有必胜的策略。

a	x_1	b
y_1		y_2
c	x_2	d

从上面诸例中可以看出，二人对策中的有些问题要用一些数学知识才能寻求出必胜的策略。不用数学知识而一味的试验很难找到必胜的策略，同学们不妨在做后面的练习题中试试。

练习10

1. 有 A、B、C 三个足球队进行比赛，两队比赛一次，共赛完三场球，请你根据表内提供数据填出空格内数据。

	胜	负	平	进球	失球
A	2			6	
B	1	1		4	4
C				2	6

（1 题）

2. 甲、乙、丙三位老师在 A、B、C 三所学校教数学，语文，外语。(1) 甲不在 A 校；(2) 乙不在 B 校；(3)

在A校的不教语文；（4）在B校的教数学；（5）乙不教外语。这三位老师分别在哪所学校？教什么课？

3. A、B、C三人中有两种人：一种人只会说真话，另一种人只会说假话。A说B、C都是说假话的；B坚决否认；C说B是第二种人。问A、B、C中有几人说真话。

4. A、B、C三人参加学校数学竞赛，赛前A估计得分最高是B，而B、C都估计自己得分不会最高。结果三人的估计有一人是正确的，那么谁的得分最高？

5. 赵、钱、孙、李分别教数学、语文、自然、体育。赵只能教语文、自然，钱只能教数学、体育，孙只能教数学、语文、自然，李只能教自然，为使他们都胜任工作，只能派谁教数学。

6. 甲、乙、丙三人对某一矿石进行分析：甲判断：不是铁，也不是铜。乙判断：不是铁，而是锡。丙判断：不是锡，而是铁。经化验证明三人中的老工人判断完全正确。实习生判断错误，普通队员判断一对一错。试问，这矿石是什么矿？三人中谁是老工人，实习生和普通队员？

7. 两人轮流报数，每人每次只能报1个或2个或3个或4个数，谁报39谁输，问怎样才能获胜？

8. 甲、乙二人都会制定抢数取胜对策，他们进行了一次快报数比赛：每人每次只能报最少 1 个数，最多5 个数，谁报出1991谁就胜，问先报者应第一次报几个数才有必胜的对策。

9. 有两堆火柴，第一堆6根，第二堆9根。二人轮流从两堆中的任意一堆里任拿1根或几根或全拿去，谁拿到最后一堆的最后1根或几根谁胜，问取胜的对策是什么？

10. 有三堆火柴，第一堆1根，第二堆4根，第三堆 6 根，二人轮流从三堆中任意一堆里任拿 1 根或几根（包括全部），谁拿到最后一堆最后的1根或几根谁胜，问谁有必胜的对策？

11. 有 9 颗棋子，一颗一颗地紧挨着排成一排，两人轮流取棋子，注

论谁先取，第一次只能取1颗或挨着的2颗或 3 颗，以后每次可以取挨着的棋子中的1颗或几颗，或者取单独的 1 颗，谁取最后1颗或挨着的几颗谁胜，问获胜的对策是什么？

12．1990个空格排成一排，第一格中放入一枚棋子，每步可前移1、2、3或 4 格，两人交替走，以先到最后一格为胜，问是先走者必胜，还是后走者必胜，如何走？

13．两人轮流报数，但报出的数字不得超过10，也不为0，把两人报的数一一累加起来，谁先得到100,谁就获胜。如何报数，才有把握先得到100？

14．甲、乙二人轮流在黑板上写下不超过10的自然数，规定禁止在黑板上写已写过的数的约数，最后不能写的为失败者。如果甲第一个写数，试问谁一定获胜？

15．在黑板上写下 2，3，4，…，1991，甲先擦去其中一个数。然后乙再擦去一个数。如此轮流下去。规则规定最后剩下两个互质数时，甲胜；最后剩下两个数不互质时，乙胜。你愿当甲，还是当乙？

16．在9×9象棋盘的右上角的那个格子里放一枚棋子，每一步只能向左或向下或向左下对角线走一格，二人交替走，最后以先到左下角那一格为胜者。问谁有必胜的策略？其策略如何？

第十一章　排列与组合

在日常生活和工作中，我们常常会遇到这样的问题：6个小朋友在一起做游戏，要分成两个组，每组3人，问有多少种不同的分法？4个小朋友去公园照像，他们站成一排，有多少种不同的站法？要想简捷而准确地回答这类问题，就得学一点排列组合的知识。

一、加法原理和乘法原理

例1　从A地可以乘火车，也可以乘汽车直达B地，一天中火车有2班，汽车有4班，那么一天中乘坐这些交通工具从A地到B地，共有多少种不同的走法？

分析与解　我们把乘坐不同班次的车，称为不同的走法。一天中从A地到B地乘火车有2种不同走法，乘汽车有4种不同走法，每种走法都可以从A地到达B地，所以共有

$$2+4=6$$

种不同走法。

答：共有6种不同走法。

以上例子虽然很简单，却包含着如下的数学原理：

加法原理　如果完成某项工作，有2类（或3类、4类，……）方法，那么，完成这项工作的方法的总数等于各类中完成这项工作的方法数的和。

在例1中，“工作”是指“从A地到B地”，完成“工作”的方法有2类。第一类是乘火车，有2种方法；第二类是乘汽车，有4种方法。

例2 从A地到B地必须经过C地，从A到C有2条公路，从C到B有3条公路（图11—1）。一人从A乘坐汽车去B，问可以选择多少种不同路线的走法？

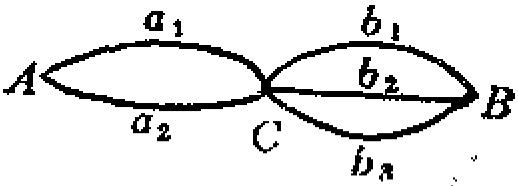


图11—1

分析与解 要从A到达B，必须先到C，然后到B。汽车从A出发沿公路a_1到C，从C可分别沿公路b_1，b_2，b_3到达B，可见有3种不同的路线选择。汽车从A出发沿公路a_2到C，从C到B也有3种不同的路线选择，因此共可选择2个3种不同路线，即

$$3\times 2=6$$

种不同走法。

答：可以选择6种不同路线的走法。

从以上的分析我们看到，要完成“从A到B”这项“工作”是分成两步来完成的。第一步从A到C有2种不同选择，第二步从C到B有3种不同选择。于是我们归纳出如下数学原理：

乘法原理 如果某项工作要分成几步才能完成，那么，完成这项工作的方法的总数等于完成各步的方法数的积。

同学们要仔细领会，上面两个原理中说到的“类”和“步”的不同之处，这是正确运用加法原理和乘法原理的一个关键。

例3 10名围棋选手举行单循环赛（每两名选手都要比

赛一次），一共要安排多少场比赛。

分析与解　一名选手与另一名选手比赛一次，比赛的“工作”就完成了，我们把比赛分成如下九类来完成。

第一类　1号选手与另九名选手各赛一场后退出比赛，有9场比赛；

第二类　2号选手与除自己和1号选手外的八名选手各比赛一场后退出比赛，有8场比赛；

第三类　3号选手与除自己和1，2号选手外的七名选手各比赛一场后退出比赛，有7场比赛；

……

第九类　最后只剩9号与10号选手，只有一场比赛。

根据加法原理，共有比赛场数是

$$9+8+7+\cdots\cdots+2+1=45$$

答：共要安排45场比赛。

这个题还可以用乘法原理来解。

我们把比赛的“工作”分成两步来完成，第一步，在10名选手中任选出一名来，有10种选法；第二步，在剩下的9名任选出另一名来与前一名比赛，有9种选法。由乘法原理，我们知道，有

$$10\times9=90$$

场比赛。为什么与前面的结果不一样呢？问题出在：如果第一步选中2号，第二步选中3号，此场比赛为“2号与3号选手比赛”；如果第一步选中3号，第二步选中2号，这场比赛为“3号与2号选手比赛”，实际上是同一场比赛。按上面的方法计算，每场比赛都计算了两次，因此，实际比赛场数应为

$$(10\times 9)\div 2=45\text{（场）}.$$

例 4　如图11—2，从A地到B地有3条路，从B地到C地有2条路，从A地到C地有4条路，一人从A步行到C共有多少种不同走法？

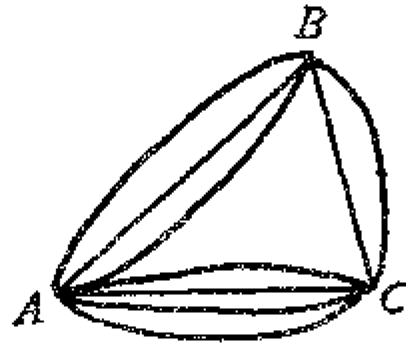


图11—2

分析与解　从A地到C地可按两类方法去完成，第一类方法是从A地直接到C地，有4种走法；第二类方法是从A地先经过B地然后到C地，分两步完成，第一步从A地到B地有3种走法；第二步由B地到C地有2种走法，根据乘法原理这类方法有$3\times 2=6$种走法。再由加法原理得到从A地到C地的不同走法的总数是

$$4+3\times 2=10$$

答：从A地到C地共有10种不同的走法。

二、排列与组合

先看一个例子。

例 5　波音747宽体客机飞行于成都、上海、广州三个城市之间。

（1）民航站要准备多少种不同的机票？

（2）飞机票有多少种不同的票价？

分析与解　问题（1）是从成都、上海、广州三个民航站中，每次取出两个站，按起点、终点顺序排序，有如下不同排法：

成都	↗ 上海	成都 $\xrightarrow{至}$ 上海
	↘ 广州	成都 $\xrightarrow{至}$ 广州
上海	↗ 成都	上海 $\xrightarrow{至}$ 成都
	↘ 广州	上海 $\xrightarrow{至}$ 广州
广州	↗ 成都	广州 $\xrightarrow{至}$ 成都
	↘ 上海	广州 $\xrightarrow{至}$ 上海

上面的排法无一遗漏和重复，可见民航站要准备6种不同的机票。

问题（2）的结果与问题（1）的结果相同吗？如果你的回答是也有6种不同的票价，那就错了。常识告诉我们，从成都到上海和上海到成都的票价是相同的。数一数就会知道只有3种不同的飞机票价。

在问题（1）中飞机票的种数与起点和终点有关，也就是说与排序的顺序有关；在问题（2）中飞机票价只与起点站和终点站有关，而与机场排序无关。前者称为排列问题，后者称为组合问题。

例6　用数字1、2、3、4可以组成多少个没有重复数字（每个数字在一个数中只用一次）的三位数。

分析 这个问题是要求从四个数字中，每次取出三个来，按照百位、十位、个位的顺序排起来，求一共有多少种不同的排法。

解法一 将这些不同的三位数写出来，即要做到不重复又不遗漏，就要讲究一定的方法。我们可借鉴字典的排法和查法，按从左到右的顺序写出三个数字。在百位上数字的写法有 4 种；每次把百位的数字写好之后，十位上的数字的写法就只有 3 种。例如，百位上写上数字 1，那么十位上就只能写数字 2、3、4 三种情况，即12，13，14。百位和十位上的数字写好之后，个位上数字的写法只有 2 种。把上面这个过程列出表来，可以比较清楚地看出写的方法。

$$1\begin{cases}12\text{——}\begin{cases}123\\124\end{cases}\\13\text{——}\begin{cases}132\\134\end{cases}\\14\text{——}\begin{cases}142\\143\end{cases}\end{cases}\qquad 2\begin{cases}21\text{——}\begin{cases}213\\214\end{cases}\\23\text{——}\begin{cases}231\\234\end{cases}\\24\text{——}\begin{cases}241\\243\end{cases}\end{cases}$$

$$3\begin{cases}31\text{——}\begin{cases}312\\314\end{cases}\\32\text{——}\begin{cases}321\\324\end{cases}\\34\text{——}\begin{cases}341\\342\end{cases}\end{cases}\qquad 4\begin{cases}41\text{——}\begin{cases}412\\413\end{cases}\\42\text{——}\begin{cases}421\\423\end{cases}\\43\text{——}\begin{cases}431\\432\end{cases}\end{cases}$$

数一数就会知道有24个没有重复数字的三位数。

解法二 我们要回答的问题是“有多少个”而不是“有哪些”没有重复数字的三位数。上面解法一把它们都写出来，然后一个个地数，这是一种方法，但不是最好的方法，用计算的方法可使之来得更为简捷。

从四个数字中取出三个排成没有重复数字的三位数的工作，可分以下三步来完成。

第一步，从四个数字中任选一个放在百位上，有4种方法；

第二步，从剩下的三个数字中任选一个放在十位上，有3种方法；

第三步，再从剩下的二个数字中任选一个放在个位上，有2种方法。

根据乘法原理，组成没有重复数字的三位数的个数为

$$4\times3\times2=24$$

解法二不仅具有优越性，还具有一般性。为了叙述方便，我们把在研究的问题中所涉及的对象称为元素（如成都，上海，广州；数字1，2，3，4都叫元素）。例5的问题（1）就是从3个不同的元素中任取2个的排列；例6是从4个不同的元素中任取3个的排列。

仿照例6的解法二，例5的问题（2）也可通过计算$3\times2=6$来得出答案。

从例5和例6，我们看到：

（1）从某些元素中取出一部分来按一定顺序排列，排列个数为几个连续自然数的乘积；

（2）最大的那个自然数是研究问题中所有元素的个数，乘积因子的个数是取出来排列的元素个数。

例7 从A地到B地的铁路沿线有12个车站，需要准备多少种不同的车票？

解 由例5我们知道这是一个排列问题，是求从12个不同的元素中取出2个的排列个数，由前面的总结知道，它是两个自然数的乘积，最大的一个自然数是12，显然是

$$12\times 11=132$$

答：需要准备132种不同的车票。

例 8　3 个同学站成一排照像，有多少种不同的站法？

解　这是从 3 个不同的元素中取出 3 个来的排列，称之为全排列。其排列总数为

$$3\times 2\times 1=6$$

答：有 6 种不同的站法。

例 9　有 6 个同学参加围棋决赛，取前三名，有多少种不同的取法？如果在取出的前三名中，排出第一名、第二名、第三名的同学名单，共有多少种不同的取法？

分析与解　我们首先来解决第二个问题，因为第二问的实质是求从 6 个元素中取出 3 个来的排列数：

$$6\times 5\times 4=120$$

第一问是从6个同学中，取前三名来组成一组，即不分名次，设这样的不同分组数为x。我们用下面的间接方法来求x。

把"从 6 个同学中取出三名来排名次"的工作，分成两步来完成：

第一步，从 6 名同学中取出前三名来，不同的取法有 x 种（前面已设）；

第二步，将其取出的三名同学排名次，即从三个元素中取出 3 个来的排列，其不同的方法有 $3\times 2\times 1=6$ 种。

由乘法原理

$$6\times x=120$$

解方程，得　$x=20$

答：（略）

在前面第一、三章中所涉及的某些几何图形的计数问

题，也可以用排列组合的方法来解决。

如图11—3，直线 l 上有 n 个点（不重合），（第三章的第五节已归纳出）共有线段：

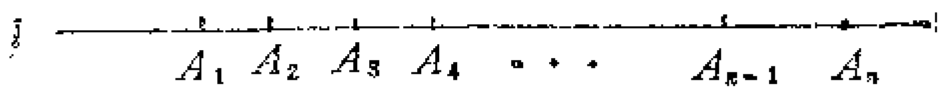


图11—3

$1+2+3+4+\cdots\cdots+(n-1)=n(n-1)\div 2$ （条）

实际上该问题就是从直线 l 上的 n 个不同的点中，每次取出两个来连成一条线段，可以得到多少条不同的线段，也就是求从 n 个元素中取出两个来的组合数。

又如图11—4中的角，共有

$1+2+3+4+\cdots\cdots+(n-1)=n(n-1)\div 2$（个）

再如图11—5中的三角形，共有

$1+2+3+4+\cdots+(n-1)=n(n-1)\div 2$ （个）

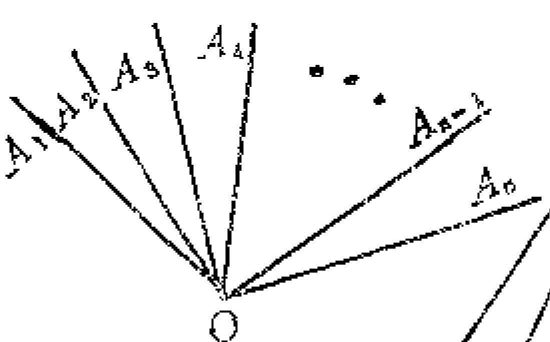


图11—4

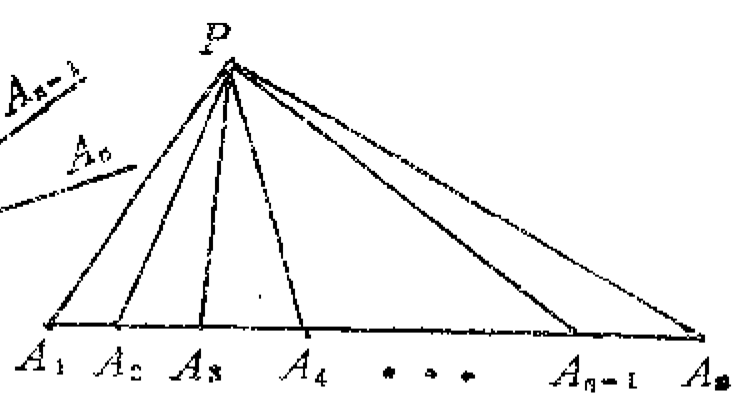


图11—5

从以上几例看到，它们计数的对象虽然各不相同，计数结果却是相同的。究其原因在于，它们都是从 n 个元素中取

出两个来的组合数。

我们将等式

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+(n-1)=n(n-1)\div 2$$

的左端颠倒一下次序

$$(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+4+3+2+1=n(n-1)\div 2$$

上式的左端可由加法原理解释，右端可用组合数的计算法说明。

如图11—4（图11—3、图11—5也同理），射线OA_1与其余$n-1$条射线构成$n-1$个角；除去射线OA_1，由射线OA_2与其余$n-2$条射线构成$n-2$个角；如此等等。由加法原理，从一点O引出的n条射线（不重合），共有角

$$(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+4+3+2+1（个）$$

从排列组合的角度看，这是一个求从n个元素中取出两个元素的组合数，由例9我们得知：组合数等于排列数除以取出元素个数的全排列数。因此，从一点O引出的n条射线（不重合）。共有角$n(n-1)\div 2$（个）。从这一结果还可看到：它与前$n-1$个自然数求和所得结果不谋而合。

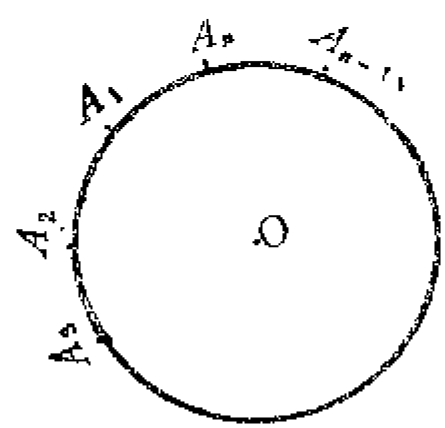


图11—6

例10 如图11—6，A_1，A_2，A_3，$\cdots\cdots$，A_{n-1}，A_n是圆周上的点，且弧长$\overset{\frown}{A_1A_2}$，$\overset{\frown}{A_2A_3}$，$\cdots\cdots\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$，$\overset{\frown}{A_nA_1}$两两不等。以这些点为顶点，可以构成多少个不同的三角形？

解 如图可知，A_1，A_2，A_3，$\cdots\cdots$，A_{n-1}，A_n中任意三点都不在一条直线上。因此，可以构成

$n(n-1)(n-2)\div(3\times2\times1)$个不同的三角形。

练习11

1. 某校五年级的两个班进行乒乓球单打比赛，双方各出5名男同学，一方的一名队员要和另一方的所有队员各进行一场比赛，一共要赛多少场？
2. 如图11—7，从A地到B地有2条路可通；从B地到D地有3条路可通，从A地到C地有4条路可通，从C地到D地有一条路可通，从A地到D地共有多少种不同走法？

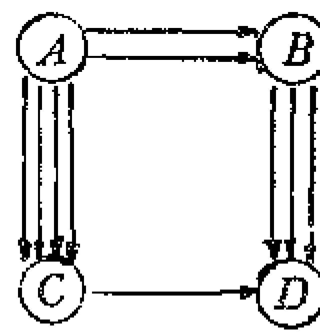


图11—7

3. 在123456789的各数字之间任添两个"+"号就得到三个整数相加的加法式（例如12+345+6789）那么，这两个加号的分配方式共有多少种？
4. 由数字1，3，5，7，9，可以组成多少个没有重复数字的三位数？
5. 5人站成一排照像，其中有一人必须站在中间，有多少种不同的站法？
6. 把一根立杆漆成上、中、下三节不同的颜色，现在有五种不同颜色的油漆，共有多少种不同的颜色搭配方法？
7. 从分别写有2，4，6，8的4张卡片中每次取出2张，计算它们的乘积，共有几种不同的结果？
8. 5个小朋友中的任意三人合影一张。此时，小照像机中还有11张未用的胶卷，是否够用？
9. 直线a与b平行，a上有5个点，b上有3个点，以这些点为顶点：

（1）一共可以组成多少个不同的三角形？（2）一共可以组成多少个不同的四边形？

第十二章　浅谈统筹规划的应用

这一章将介绍，怎样用最少的时间做完一件事；用最少的人力去完成一件工作；以最少的费用运输一批货物；……这些生活与生产实际中经常出现的问题。我们把这些问题叫做“统筹规划”问题。

一、统筹安排　节约时间

拿起床后的时间安排来说吧：如果完成洗脸刷牙等内务要8分钟，做一套操要用6分钟，为了冲奶粉，烧开水用了15分钟，洗杯子、拿奶粉又得花2分钟。这样一件件依次作，还没喝上牛奶就用去了30分钟。如果按照图12—1所示方法：在烧开水的同时去整理内务、早操、洗杯子、拿奶粉，这样用 $8+6+2=16$ 分钟就可冲奶粉了。

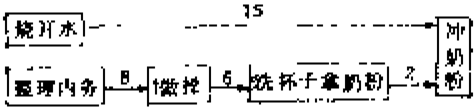


图12—1

图12—1是把各项工作程序用箭头表示出来，并注上时间，在同一时间内能同时做的任务重叠画出。这种用方框图示解决问题的方法叫统筹图解法。用它能比较快而准的计算出“最少时间”。

例1　妈妈把鱼剖好后，小丽帮助妈妈烧鱼。她有条有理地洗鱼、切鱼、切姜片、洗锅、将锅烧热、把油烧热、煎

烧，分别用了2分钟、2分钟、1分钟、2分钟、2分钟、3分钟、5分钟，共用了17分钟，问小丽能用更少时间把鱼烧好吗？最少需多少分钟？

解 小丽能用更少时间把鱼煎烧好，因为在“将锅烧热”“把油烧热”的同时，小丽可以做“洗鱼”“切鱼”“切姜片”。如图12—2知，小丽可用最少时间2＋2＋2＋1＋5＝12分钟把鱼煎烧好。

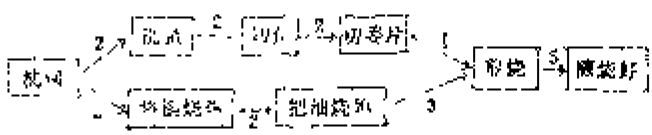


图12—2

二、逐步调整 用人最少

先从一个简单的实际问题谈起。

某公司车场每天派出2辆汽车，从仓库A_1运货到商店B_1，再到仓库A_2运货到工厂B_2，各个地点各需装卸工人数为A_1(6人)，B_1(4人)，A_2(4人)，B_2(3人)。如果每个地点都按需要派出固定工人，共要17人。但实际上，可以考虑派人跟车，只需10人就够了。这是因为，假设如图12—3所示，按各点所需人数固定在每一站，我们可从每一站抽出一名工人（共抽4人），每辆车上安排一名（共2名），这样就可减少2人。照这样

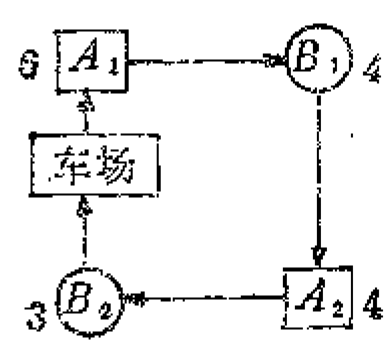


图12—3

抽3次之后，各点人数为：A_1(3人)，B_1(1人)，A_2(1人)，B_2(0人)，此时人数不为0的点还有3个，即A_1，B_1；A_2，多于车辆数2，可以再从这3个点各抽1人，只派2人跟车，又可减少1人。这时，除A_1处固定2人外，其余各点都不派人了，两辆车各派4人跟车走，故共需装卸工$4\times2+2=10$名就够了。

这种方法叫"逐步调整法"或"编号计算法"。这个解法可以总结出一个"口诀"：

车比点数多，人往点上挪；（这是显然的）

车比点数少，编号方法好：

按点需要人多少，从大依次排到小。

车数是几数到几，几个人来跟车跑。

上例中有2辆车、4个点，车比点数少，按人数多少排次序：A_1，B_1，A_2，B_2，再依车数数到第二个是B_1，它的人数是4，因此每车跟4人。

例2 各站点需装卸工人数如图12—4，车辆数为四辆，求最少的装卸工人数。

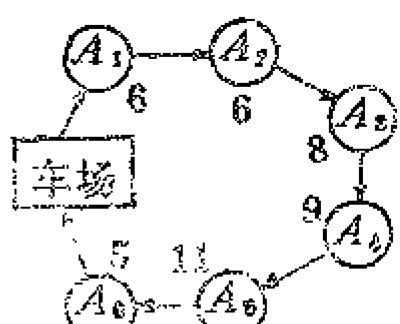


图12—4

解 因点比车数多，按各点所需人数从大排到小：

$A_5(11)$，$A_4(9)$，$A_3(8)$，$A_1(6)$，$A_2(6)$，$A_6(5)$，从左数到右，第四个(车辆数)是$A_1(6)$，它需要6人，因此每车用6人跟车，A_3、A_4、A_5分别派2、3、5人，此时共需

$$6\times4+2+3+5=34(\text{人})。$$

三、合理设站　行程最短

这里讲几个只涉及路程多少，而不考虑人数多少、物资多少的调运问题，要求其行程最短。

1. 多点而道路一线的行程调运问题

例 4　沿一条公路旁有n个工厂A_1，A_2，……，A_n。准备投资兴建一座车站，要使这n个工厂的人到车站行程总和越小越好，车站应该建于何处？（每个工厂均以一个人来计算）

分析与解　(1)当$n=2$时，如图12—5。显然建于A_1和A_2之间的任何点都可以(包括A_1、A_2点)。因为由A_1、A_2处出发的人，走过的路程总长度都等于定长A_1A_2。

(2)当$n=3$时，车站应建于A_2点处。因为若车站建于P点(如图12—3)，则从三个工厂到车站要走的总路程为

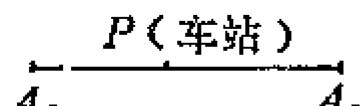


图12—5

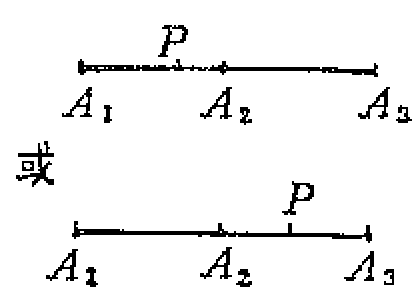


图12—6

$$S=A_1P+A_2P+A_3P$$
$$=(A_1P+A_3P)+A_2P$$
$$=A_1A_3+A_2P$$

由于A_1A_3为定长，要使S最小，只要$A_2P=0$，即P与A_2点重合，所以车站应建于A_2处。

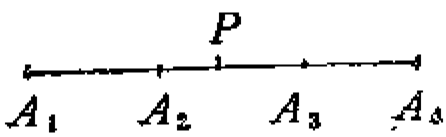


图12—7

(3)当$n=4$时，如图12—7。由于车站无论建在A_1，A_4之间的何处，对A_1，A_4两个工厂的人来说，走的路程之和都为A_1A_4(定长)。所以，问题化为对A_2，A_3两个工厂的情况，由(1)知，车站可建于A_2，A_3之间的任何一点处(包括A_2，A_3点)。

(4)当$n=5$时，由于车站无论建在A_1、A_5之间的任何一点处，对A_1、A_5两工厂的人来说，其总路程都为定长A_1A_5。因此，问题转化为A_2，A_3，A_4三个工厂的行程最短问题。由(2)知，车站应建在A_3处。

依此类推，得出了一个一般结论：

若有$n=2k$(偶数)个工厂时，车站应建在中间一段A_kA_{k+1}上的任何一点(包括A_k，A_{k+1})。

若有$n=2k+1$(奇数)个工厂时，车站应建在正中间点A_{k+1}处。

2．多点而道路不成一直线的行程问题

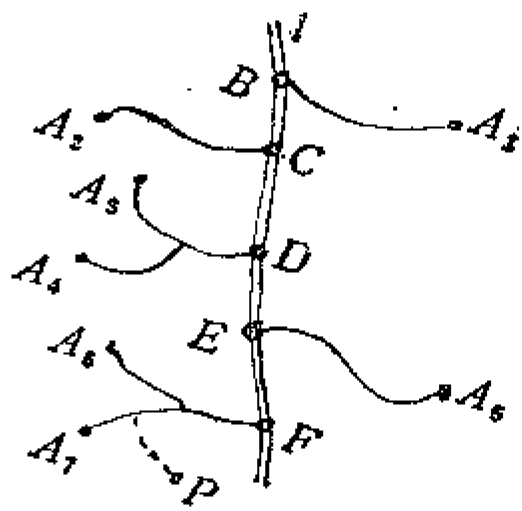


图12—8

例5 图12—8是一个工厂区的地图，一条公路(双线)通过这个地区，七个工厂A_1，A_2，……A_7分布在公路两侧，由一些小路(细线)与公路连接。现要在公路上建一个长途汽车站，车站到各工厂(沿公

路、小路走）的距离总和越小越好。

（1）这个车站建在什么地方最好？

（2）如果在P点的地方再建立一座工厂，并且沿图中虚线修一条小路，那么这时车站修在什么地方好？

解 (1)由于由A_1、A_2、……A_7到公路l上的小路的路程是个定值，因此，问题可简化为：设一个车站，使各路口B、C、D、E、F到汽车站距离之总和最小。但要注意一点，对A_2和A_3、A_6和A_7要分别设想为两个路口D和D'、F和F'。因而有7个路口，由例4($n=2k+1$情形)可知，车站应建在D点处。

（2）当增加一个新工厂P后，应看成8个路口，属于例4的$n=2k$的情形，故车站可建在D、E之间(包括D、E)的任何地方。

四、物资调运问题的图上作业法

1. 两地调运问题

例7　A、B两地各产甘蔗3万吨、5万吨，准备建设一个糖厂，利用A、B两地甘蔗榨糖，建于何处运费最节省呢？(吨公里运费相同)

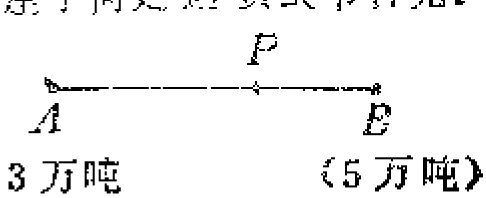


图12—9

解　设每万吨甘蔗运一公里的费用为a，糖厂建于P处，(如图12—9)。则总运费为：

$$Q=3\times a\times AP+5\times a\times BP$$

$=3a\times AP+3a\times BP+2a\times BP$

$=3a\times(AP+BP)+2a\times BP$

$=3a\times AB+2a\times BP$

上式表明，由于$3a\times AB$为一定数，只有$2a\times BP$为0时Q才最小。而$2a\times BP=0$即是P与B点重合($BP=0$)。故糖厂建在B地时运费最省。

由例 7 的分析可知：

（ 1 ）若A、B两地的物资数相等，则加工地设于A、B或它们之间的任何地方，总运费都一样。

（ 2 ）若A、B两地物资数不相等，则加工地应建于物资数较多的一地——这一原则称为“小往大靠”。

2. 多地，道路成一线的物资调运问题

例 8 在货物运价(吨公里)相同的情形下，一条公路上有$n=3$或4个物资产地，产量如图 12—10 所示，现需建一个集中加工厂，问加工厂建于何处运费最省？

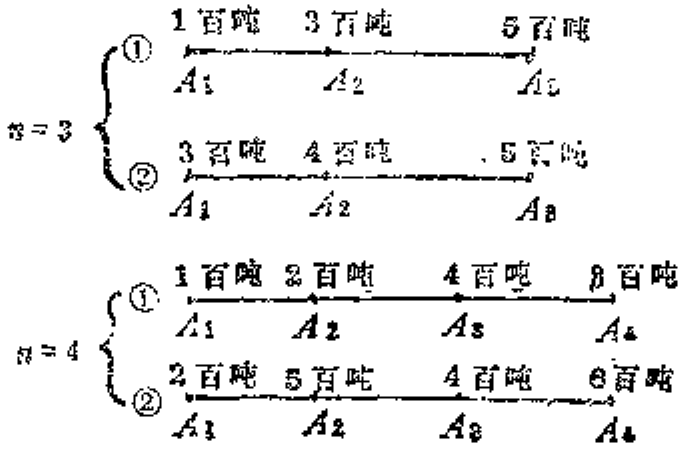


图12—10

解　$n=3$情形：①由于A_3处产量$5>\frac{1+3+5}{2}$，可根据例7的两地情形（先把A_1物资集中到A_2）得出：加工厂应建于A_3处。即建于超过总物资量一半的产地。

②由于3、4、5都小于$\frac{3+4+5}{2}=6$，此时集中加工地应建于中间A_2处。此时总运标为：$3A_1A_2+5A_2A_3$吨公里。是最省运费的方案。因为根据"两地情形"A_1往A_2靠（为7百吨），再A_3往A_2靠。

$n=4$情形：①因$8>\frac{1+2+4+8}{2}$，故应建于A_4处，因为可先把A_1、A_2集中到A_3（为7百吨），再与A_4构成"两地情形"，"小往大靠"。

②由于各地物资数均小于总物资量的一半，此时，可根据"小往大靠"的原则，作图12—11：故应建于A_3处。

注　可总结出如下解法"口诀"：道路成一线，比较各端点，小半进一站，大半就设点。

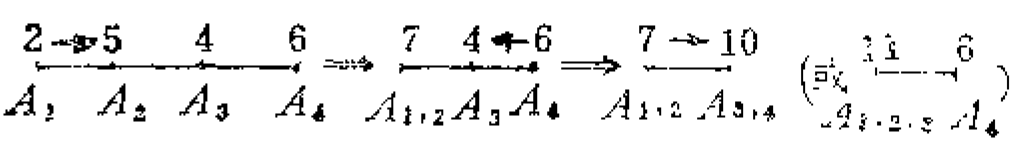


图12—11

总的原则是"小往大靠"。上述方法适合于更多的产地集中加工设点问题。这种解法可用图示，称为图上作业法，又由于有"小往大靠"的移动，所以又称移动比较法。

3. 多地、道路不成一线(不成圈)的调运情形

这类问题的解决基本上类似于上面"2"的解法，由于道路不成一线，必须先采取一个辅助步骤：支(线)往干(线)靠。一般都用简明的图上作业表示其解的过程。

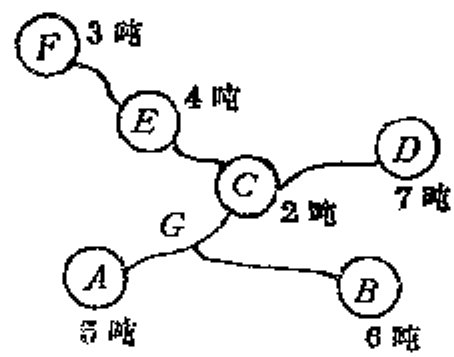


图12—12

例9 某乡共有六块麦地，每块麦地的产量如图12—12所示，试问麦场设在何处最好？（运输总量的吨公里数越小越好）

解 按"口诀"，先算总重量为5＋6＋2＋7＋4＋3＝27(吨)"比较各端点"，都没有超过总重量一半(13.5吨)，因此，可图上作业(图12—13)：故麦场应设在C处。

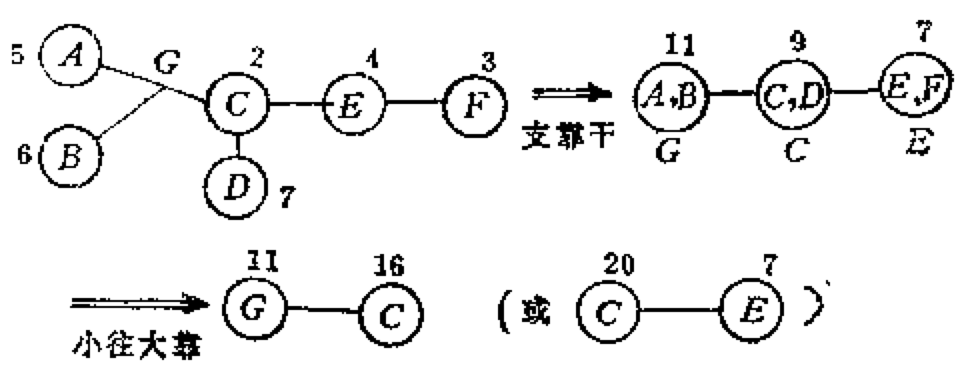


图12—13

4. 再谈"运输调配"问题

例10 如图12—14是一张公路运输图。图中两条相交直线表示公路线，"□"和"○"分别表示运出货物与运进货

物的地点，数字表示运量，（如$\boxed{20}$表示运出20吨）试作出最佳运输方案。

解 制定最佳方案的原则是：在不产生对流（即往返运输）的前提下就近运送货物。

如图12—15，将$\boxed{80}$中的70吨运往⑦，剩余的10吨运往㉚，如图，箭头表示运送方向，箭头上的数字表示运送货物的数量。将$\boxed{50}$中的20吨运㉚，将$\boxed{20}$中的10吨运到⑩，剩下的10吨运到⑮，$\boxed{50}$中剩余的30吨送5吨到⑮，其余运到㉕，如此运送可使吨公里数最小，即为最佳方案。

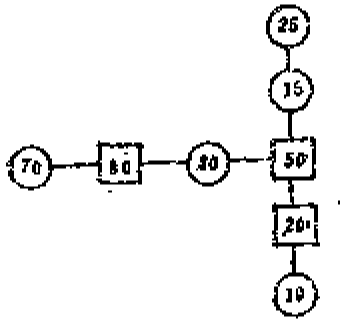


图12—14

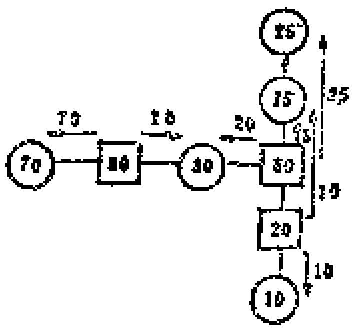


图12—15

五、非常规的统筹安排举例

前面介绍了几个统筹法中较常规的问题。这都是一些最简单最基本的情形。从这些问题中已可看出正确使用数学方法能产生很好的经济效益。下面再讲几个非常规的统筹安排中的例子。

例11 小刚、小明和小娟分别拿2个、3个、1个暖水瓶一起去打水，热水笼头只有一个。试问怎样安排他们打水的次序，才使他们打完水所花的总时间（包括等候的时间）最

分析 若让拿瓶多的人先接水，其他人就等候的时间多。由此可得如下解法。

解 打水的顺序应这样安排：小娟、小刚、小明。用时共10分钟，最少。这可从如下列表知道。

	小娟打水	小刚打水	小明打水
小娟等候时间	1分钟		
小刚等候时间	1分钟	2分钟	
小明等候时间	1分钟	2分钟	3分钟

例12 小王骑牛赶牛过河。共有甲、乙、丙、丁四头牛，甲牛过河需1分钟，乙牛过河需2分钟，丙牛过河需5分钟，丁牛过河需6分钟。每次只能赶两头牛过河。问：要把这四头牛都赶到对岸去，最少要多少分钟？

分析 欲使用时最少必须：①过河用时多的牛要一起赶；②返回时要骑过河用时少的牛。抓住了这两个关键，经过一些思考就可得到如下的解法。

解 小王赶牛过河的顺序如下安排用时最少：

第一次 赶甲、乙牛过河，骑甲牛返回，用时3分钟；

第二次 赶丙、丁牛过河，骑乙牛返回，用时8分钟；

第三次 赶甲、乙牛过河，用时2分钟。

故最少要用13分钟。

例13 用一只平底锅煎饼，每次只能放2只饼。煎一只饼需要2分钟（假定正、反面各需1分钟）。问：

（1） 煎3只饼至少需要几分钟？

（2）如果煎$n(n>1)$只饼，至少需要几分钟？

分析 可能有小朋友马上回答：煎3只饼要分两次煎，

当然要用4分钟。其实不然！用4分钟煎好3只饼显然是后一次只煎了一个饼，而浪费了还可煎一个饼的地方和时间。如果动动脑筋想一想：3只饼共6面，每分钟可煎好2面，$6\div2=3$，如何才不浪费时间？

解 (1)先将2只饼同时放入锅一起煎，1分钟后取出一个饼来，再放入第三个未煎过的饼（同时把已煎好一面的饼翻面），过1分钟把已煎好两面的饼取出，再把另一只煎好一面的饼放入煎另一面（同时把第三个饼翻面），过1分钟后取出二饼。这样，三只饼都煎好（两面）共只花了3分钟。

(2)煎n只饼需要n分钟。因为，当n为偶数时，每煎好2只饼需要2分钟；当n为奇数时，只需在煎最后3只饼时采用(1)中方法就行了。

练习12

1. 小林为家里做饭，她择菜要8分钟，洗菜要5分钟，淘米2分钟，煮饭15分钟，切菜要4分钟，炒菜6分钟。她家里只有单火眼煤气灶，怎样安排才合理？
2. 某大型企业的十个车间分布在一条环形铁路旁。四列货车在铁道上转圈。货车到了某一车间，所需装卸工人数已在图12—16中标出，装卸工可以固定在车间，也可以随车流动，问怎样安排装卸工才能使总人数最少？

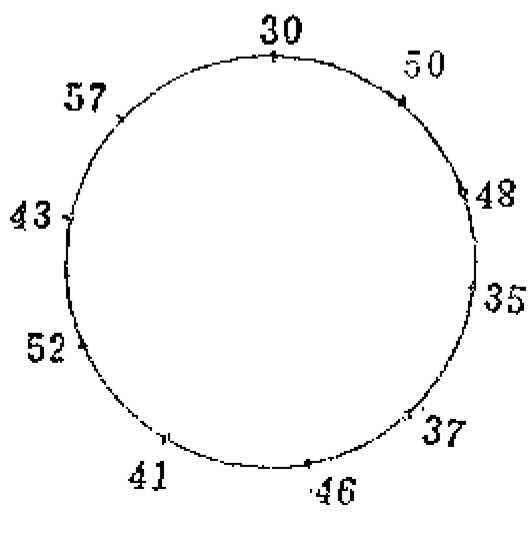


图12—16

3. 如图12—17，AB、CD表示两条海岸线，甲、乙是两个小岛，若小船从甲岛出发先到AB岸，再到CD岸，最后到乙岛，问小船走什么路线最短？

4. 麦地产量和运麦路线如图12—18。问麦场设于何处才能使运输总量的吨公里数最少？

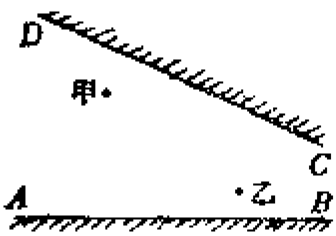


图12—17

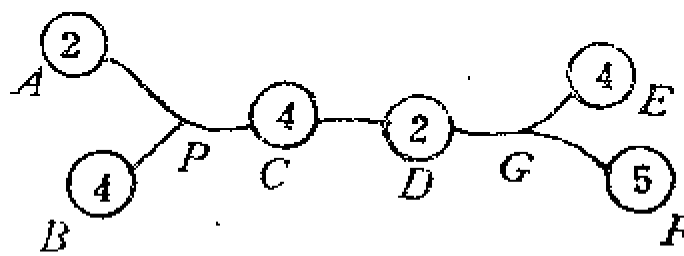


图12—18

5. 某产品的产地A_1、A_2、A_3和销地B_1、B_2、B_3、B_4都在一条铁路线上，图12—19中“□”表示产地，“○”表示销地，数字表示产品的数量，试求出吨公里数最小的调运方案。

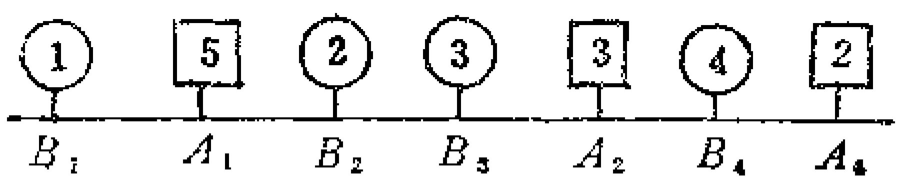


图12—19

6. 甲城有157吨货物要运到乙城，大卡车载重量5吨，耗油10公升，小卡车载重2吨，耗油5公升，用多少辆大卡车及小卡车来运货可使耗油量最少？

7. 妈妈让小明给客人烧水沏茶。洗开水壶要1分钟，烧开水要15分钟，洗茶壶用1分钟，洗茶杯要用1分钟，拿茶叶要用2分钟，小明估算了一下，完成这些工作要花20分钟。为了使客人早点喝上茶，按你认为最合理的安排，多少分钟就能沏茶了？

8. 赵乡长下村召集甲、乙、丙、丁四个村的村干部会议。这四个村

子每相邻两个村子都是相距5公里(如图12—20)，参加会议的人数甲村8人，乙村5人，丙村3人，丁村7人。请你想一想，赵乡长应在哪个村子召集会议最为合理？（使所有参加会议的人所走路程的总和最小）

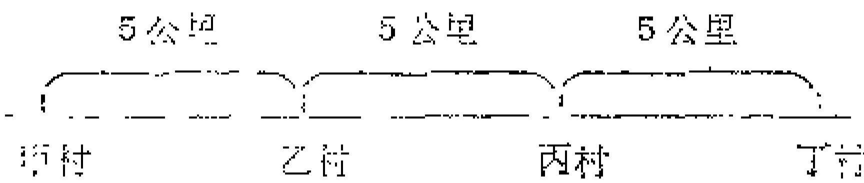


图12—20

9. 小赵、小孙、小李三位同学同时到校卫生室治病。小孙打针需5分钟，小李包纱布需3分钟，小赵点眼药水只需1分钟。卫生室只有张医生一人。问张医生如何安排这三位同学治病的先后次序，才能使他们留在卫生室的时间总和最少？请你算出这个时间。

10. 在一条公路上每隔一百公里有一个仓库（如图12—21），共有五个仓库，一号仓库存有10吨货物，二号仓库存有20吨货物，五号仓库存有40吨货物，其余两个仓库是空的。现在想把所有的货物集中存放在一个仓库里。如果每吨货物运输一公里需要0.5元的运费，那么最少要花多少运费才行？

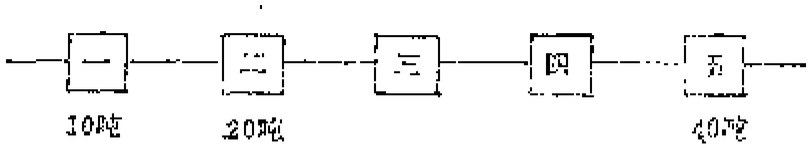


图12—21

11. 有十个村，座落在县城出发的公路边（如图12—22。距离单位是公里），要安装水管从县城送自来水供给各村，可以用粗细两种水管，粗管足够供应所有各村用水，细管只能供一个村用水，粗管每公里要用8000元。细管每公里要用2000元。把粗管和细管适当搭配、互相连接，可以降低工程的总费用，按你认为最节约的办

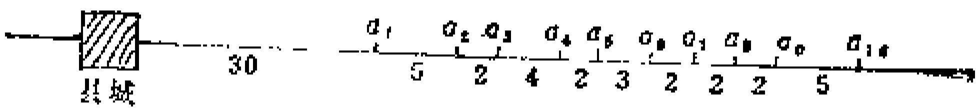


图12—22

法，费用应是多少？

12. 仓库里有一批8米长的钢筋。现在要截出3米长的钢筋 40根， 2米长的钢筋80根，那么最少要用多少根8米长的钢筋？

第十三章　计数制

在人类社会发展的漫长历史中，由于生产和科学的需要，产生了各式各样的计数制。如十进位制、十二进位制、六十进位制、二进位制等。

进位制问题，是指与各种记数方法有关的数学问题。在第一章我们已介绍过十进位制的基本知识和相关的一些问题。我们知道，任意一个$n+1$位的十进制自然数N，均可表示为：

$$N=\overline{a_na_{n-1}\cdots\cdots a_2a_1a_0}$$
$$=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots\cdots$$
$$+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$

式中的a_n，a_{n-1}，……，a_2，a_1，a_0依次是N从高位到低位的各个数位上的数字，它说明N中含有a_n个10^n，a_{n-1}个10^{n-1}，……，a_2个10^2，a_1个10，a_0个1。

本章，我们将再补充几个十进位制问题的例子以加深和巩固前面已学过的知识，并在此基础上重点学习二进位制的有关知识及其有趣的应用。

一、几个十位进制的例子

例1　一个两位数，十位数是个位数的三分之二。交换它们的位置后，新数比原数大18，求原数。

解 设原数为$\overline{ab}$，交换位置后的新数为$\overline{ba}$，则有

$$\overline{ba}-\overline{ab}=10b+a-(10a+b)=18$$

所以$9(b-a)=18$ $b-a=2$

又 $a=\frac{2}{3}b$，则$b-\frac{2}{3}b=2$，$\frac{b}{3}=2$

故 $b=6$，从而$a=\frac{2}{3}\times 6=4$

所以原数为$4\times10+6=46$。

例2 有一个三位数，各数字的和是15，个位上的数与百位上的数之差是5；如果颠倒各数位上数字的顺序，则所成的新数比原数的3倍少39。求这个三位数。

解 设百位上数为x，则个位上的数为$(x+5)$，十位上的数为$15-(x+x+5)$，即$10-2x$。

根据题意，得：

$$100(x+5)+10(10-2x)+x$$
$$=3[100x+10(10-2x)+x+5]-39$$
$$81x+600=243x+276$$
$$162x=324$$
$$x=2$$

因此原数为：$100x+10(10-2x)+x+5$

$$=100\times2+10(10-2\times2)+2+5$$
$$=267$$

例3 设有六位数$\overline{1abcde}$，乘以3后变为$\overline{abcde1}$，求这个六位数。

解 设 $x=\overline{abcde}$

则有：$3(100000+x)=10x+1$

$$x=42857$$

所以原六位数为142857。

例 4 有三个十以下的不同自然数，用它们组成的所有三位数的和是2886，其中最大与最小的三位数之差为495。求这三个数。

解 设这三个数为x、y、z，其中x最大，z最小。它们组成的三位数共有六个：

$\overline{xyz}$，$\overline{xzy}$，$\overline{yxz}$，$\overline{yzx}$，$\overline{zxy}$，$\overline{zyx}$

x、y、z各出现六次：二次在百位上，二次在十位上，二次在个位上。

所以 $x+y+z=2886\div222=13$ （1）

由$(100x+10y+z)-(100z+10y+x)=495$

得 $x=5+z$ （2）

（2）代入（1）：$y=8-2z$

显然z只能是1、2、3。但$z=1$时$x=y=6$是不可能的。$z=3$时，$y=2$，$y<z$与题设矛盾。所以$z=2$，$y=4$，$x=7$。

二、二进制简介

在计算机上，现在通用的是二进位制，这是因为计算机的计算和记忆元件只有两个不同状态，如“开”和“关”。在二进制中，使用的是0与1两个符号，加法的运算规则是“满二进一”，非常适合计算机的设备系统。

我们已经讲过任意一个自然数N都可以表示为：

$N_{(10)}=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\times10+a_0$，其中

$N_{(10)}$表示十进制中的N。

任意一个自然数N也都可以表示为二进制中的$N_{(2)}$

$$N = a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots\cdots a_1 \times 2^1 + a_0$$

其中a_n，a_{n-1}，……，a_0为0或1，这个自然数可用二进制表示为$N_{(2)} = a_n a_{n-1} \cdots\cdots a_1 a_0$。

如$10_{(10)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0 = 1010_{(2)}$

1．十进制化二进制

例 5　把十进位制数125化为二进位制的数。

解　将$125_{(10)}$不断除以2，直到商的结果是0为止，得出的各余数就是二进制的数符。

$125 \div 2 = 62$余 1

$62 \div 2 = 31$余 0

$31 \div 2 = 15$余 1

$15 \div 2 = 7$　余 1

$7 \div 2 = 3$　余 1

$3 \div 2 = 1$　余 1

$1 \div 2 = 0$　余 1

1 1 1 1 1 0 1

所以$125_{(10)} = 1111101_{(2)}$

2．二进制化十进制

例 6　把二进制数$10011101_{(2)}$化为十进制数。

解　$10011101_{(2)}$

$$= 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$

$= 128 + 16 + 8 + 4 + 1 = 157_{(10)}$

3. 二进制的应用举例

例 7 现有1克、2克、4克、8克、16克的砝码各一枚，问在天平上能称多少种不同的重量？

解 因为砝码的克数恰好是1、2、4、8、16，而二进位制从右往左数各位数字1，分别表示1、2、2^2、2^3、2^4。在砝码盘上放1克砝码认为是二进位制数第一位（从右数）是1，放2克砝码认为是二进位制第二位是1，……放16克砝码认为是二进位制数第五位是1，不放某个砝码就认为相应数位是0，这样所表示的数中最小的是1，最大的是$11111_{(2)} = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 = 31_{(10)}$。这就是说1至31的每个整数(克)均能称出，所以共可称出31种重量不同的物体。（能用第十一章的组合解此例吗？）

例 8 某商场要求把每1000件货品包装成10箱，为便于顾客在购买1—1000之间的任何数目的货物时都不用拆开包装箱，便可拿到所购数目的货物。问每只箱子内应放入多少件货物？

解 要解决这个问题，要运用进位制的知识。因为要装成10箱，可认为各箱分别是进位制的各位数，按实际不能包装成空箱，因此，只能根据二进位制的知识进行。又因为

$$\begin{aligned}1111111111_{(2)} &= 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 \\ &\quad + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ &= 512 + 256 + 128 + 64 \\ &\quad + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 \\ &= 1023_{(10)}\end{aligned}$$

这样可将第十箱内不放512件，而放入512－（1023－1000）＝489（件），其它九箱分别放入256、128、64、32、16、8、4、2、1件货物，即可保证不打开包装箱就能拿到1—1000之间的任何数目的货物。

练习13

1. 如果用 $\overline{ac}$ 表示由数字a、c组成的两位数，$\overline{ccc}$表示由数字c组成的三位数。根据$a\times c\times\overline{ac}=\overline{ccc}$，求$a$、$c$各是多少？
2. 求出所有能被45整除的形如$\overline{x1982y}$的六位数，其中x与y是0到9中的数。
3. 有一个四位数，它的个位数与千位数之和为10，且个位数既是偶数，又是质数。去掉个位数与千位数得到的一个二位数是质数。又知道这个四位数能被72整除，求这个四位数。
4. 有一个一百位的自然数，共有九十九位上的数是5，它能不能是平方数。
5. 把下面的二进制数、十进制数互化。

   $111_{(2)}$； $111_{(10)}$； $1010011101_{(2)}$； $99_{(10)}$； $110110_{(2)}$
6. 计算下列各题：

   $$101_{(2)}+11101_{(2)}-1111_{(2)}$$

   $$1100011_{(2)}-1000_{(2)}-110_{(2)}$$
7. 在学雷锋活动中，某商店将30件易损商品分成5袋事先包装好，当顾客购买时，不管买几件都不用打开包装袋，就可满足顾客要求。请说出这5袋商品每袋各几件？

第十四章　奇偶性分析

在第一章第四讲整除（一）中已介绍了整数奇偶性的一些性质和应用，本章在此基础上，进一步运用奇偶性分析解答一些有趣的问题。

一、利用奇偶数运算性质解题

例1　当n满足什么条件时，从1开始n个连续自然数的和是偶数？

解　n个连续自然数的和为：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

n与$n+1$是一奇一偶，这样要使$\frac{1}{2}n(n+1)$是偶数，必须使$\frac{1}{2}n$或$\frac{1}{2}(n+1)$是偶数。要使$\frac{1}{2}n$是偶数，n必须是4的倍数；要使$\frac{1}{2}(n+1)$是偶数，$(n+1)$必是4的倍数。

因此，当n或$n+1$是4的倍数时，从1开始n个连续自然数的和是偶数。

例2　（1）99个连续自然数相加，其和是偶数还是奇数？

（2）99个连续奇数相加，其和是偶数还是奇数？

（3）99个连续的偶数相加，其和是偶数还是奇数？

解 （1）设第1个自然数为a。则99个连续自然数的和是：$99(49+a)$

如果a是奇数，因奇数+奇数=偶数，奇数×偶数=偶数，则和为偶数。

如果a是偶数，因奇数+偶数=奇数，奇数×奇数=奇数。则和为奇数。

（2）设第1个奇数为a，则99个连续奇数的和是：$99(98+a)$。因a是奇数，$98+a$也是奇数，所以其和是奇数。

（3）设第1个偶数为a，则99个连续偶数的和是：$99(98+a)$。因a是偶数，$98+a$也是偶数，所以其和是偶数。

例3 三个相邻偶数的乘积是一个六位数8••••2，求这三个偶数。

解 由于乘积是一个六位数，所以这三个相邻的偶数必须是两位数。而这三个相邻的偶数的个位数字只能是0，2，4，6，8中相邻的三个，但要使它们的乘积的个位数字为2，这三个相邻偶数的个位数字只能是4，6，8。由于三个100相乘等于一个最小的七位数1000000，所以可估算出这三个相邻的偶数为94，96，98。经计算知，要使乘积的第一位数字为8，这三个相邻的偶数只能是94，96，98。

还可以设十位数字为x，则这三个连续的偶数为$\overline{x4}$，$\overline{x6}$，$\overline{x8}$。依题意可知，

$$(10x+4)(10x+6)(10x+8)=8\cdots\cdots2.$$

因等号右边的六位数的最高位数是8，而$80\times80\times80=512000$，$90\times90\times90=729000$。所以估计$x=9$，再经计算

可知$x=9$适合条件，即这三个连续的偶数为94，96，98。

例 4 某次竞赛，共30道题。评分标准是：基础分15分（即每人都得分），答对一题加5分，不答一题加1分，答错一题减1分。如果121人参赛，问参赛同学得分总和是奇数还是偶数？

解 对每个参赛同学来说，每题都答对，可得165分，是奇数。如答错一题，就要从165分中减去$5+1=6$分。不管错几道题，6的倍数都是偶数，165减去偶数是奇数。如有一题不答，就要减去4分，不管有几道题没答，4的倍数是偶数，165减去偶数是奇数。总之，每位同学的得分都是奇数，有121人参赛，故其总和是奇数。

例 5 有6只杯子全部口朝下置于桌上，每次翻动其中的5只杯子，你能否经过若干次翻动，将杯口全部翻成口朝上？如果能，需要几次？

解 不难发现，杯子翻奇数次，杯口与原来的状态相反；而翻动偶数次，与原来的状态相同。就是说，翻动杯子奇数次后，杯子由口朝下变为口朝上；而翻动偶数次，还保持口朝下。我们把杯子从1到6编上号。第一次翻动时，不动1号杯；第二次翻动时，不动2号杯；第三次翻动时不动3号杯；……第六次翻动时不动6号杯。这样一共翻了6次，而对每只杯子来说，只翻动了5次，5是奇数。所以总共翻动了6次之后，每只杯子都是口朝上了。

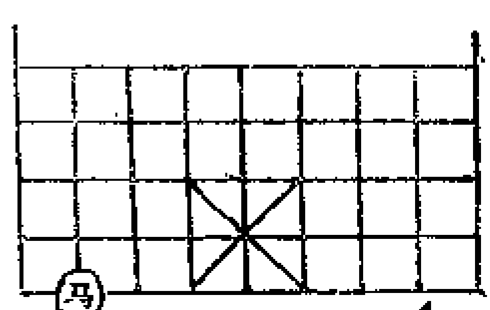


图14—1

例 6 中国象棋的马走日字。如图14—1，试求：

（1）马要以最少的步数走到这半张棋盘的任何一个位置上，问哪几个位置的步数最多？是多少步？

（2）马能以5步走到A处吗？如果能，划出路线来；如果不能，说明理由。

解 我们可写出马走一步、两步等所有可能到达的位置（如图14—2），于是可知：

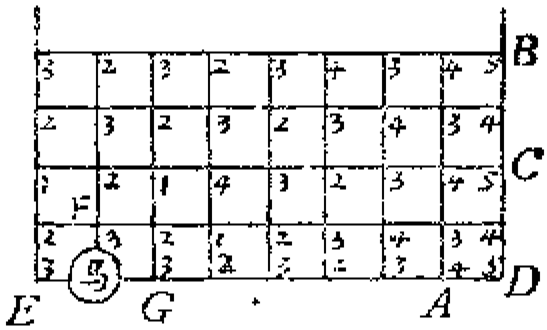


图14—2

（1）马走到B、C、D这三个位置所需步数最多，都是5步。

（2）马不可能用5步走到A处。从图上可看出，马走到任何位置所需的步数，与这个位置到马的起点位置的距离奇偶性有关。如马到相邻位置E、F、G，都需要奇数步，马走到与E、F、G相邻的位置，就需要偶数步等等。而A在偶数步位置上，因此马不可能用5步走到A处，甚至也不能是7、9、11等步，但可以用4、6、8等步走到A处。

例7 一个工人将99颗弹子装进两种盒子中，每个大盒子装12颗，小盒子装5颗，恰好装完，已知盒子数大于10，问这两种盒子各有多少？

解 因为每个大盒子装12颗弹子，故不论大盒子的个数是奇数还是偶数，其和总是偶数。一共有99个弹子，99是个奇数，因奇数减偶数的差还是奇数，故小盒子装的弹子总数是奇数。

因每个小盒子装5个弹子，其个数又是奇数，故小盒子个数为奇数，装弹子总数的个位数字一定是5，大盒子装的弹子总数的个位数字就一定是4。又因为每个大盒子装12颗

弹子，故大盒子的个数只能是7或2。假设用了2个大盒子，那么$99-12\times2=75$，$75\div5=15$，即用了2个大盒子，15个小盒子；假设用了7个大盒子，那么$99-12\times7=15$，$15\div5=3$。即用了3个小盒子，7个大盒子。当注意到盒子数要大于10时，则知，工人用了2个大盒子、15个小盒子来装这些弹子。

二、利用奇数≠偶数解题

例8 一个圆圈上有1987个点，分两次给每个点分别涂上红色或兰色，涂色结果共有1987个点涂上红色，1987个点涂上兰色。请你说明：至少有一个点，第一次与第二次涂的颜色不同。

解 假设每一个点第一次与第二次涂的颜色相同，那么第一次若有m（$m<1987$）个点涂红色，第二次也只能将这m个点涂红色。这样共有$2m$个红色点，不可能等于1987（偶数≠奇数）。所以假设是错误的，即至少有一个点第一次与第二次涂的颜色不同。

例9 任意改变某一个三位数的各位数字的顺序得到一个新数。试证新数与原数之和不可能等于999。

证明 设原数为$\overline{abc}$，各位数字改变顺序后的新数为$\overline{xyz}$。

若原数与新数的和等于999，即：

$$\overline{abc}+\overline{xyz}=999$$

那么应有：

$$a+x=9,\ b+y=9,\ c+z=9$$

由题意知，$a+b+c=x+y+z$

则有　$(a+x)+(b+y)+(c+z)=9+9+9$

即　　$2(a+b+c)=3\times9$

但等式左边是偶数，右边是奇数，这是不可能的。因此前面假设原数与新数之和可以等于999是错误的，所以原数与新数之和不可能等于999。

三、利用对偶关系解题

例10　某学生每天进出教室的次数之和必为偶数。为什么？

解　这个学生每进一次教室就必然要出一次教室，也就是说，他进、出教室的次数成对出现，所以这个学生每天进出教室的次数之和必为偶数。

例11　任何一个非平方数，它的全体自然数约数的个数一定是偶数；任何一个平方数，它的全体自然数约数的个数一定是奇数。

证、设a是任意一个非平方数（即不存在这样的自然数m，使得$m^2=a$），又设b是它的一个自然数约数，则b就能整除a。若令$c=a\div b$，则c也是一个整数，且由$a=b\times c$知，c是a的一个（自然数）约数。又因a不是平方数，所以$b\neq c$，即b、c是a的两个不同的（自然数）约数。

由上述论证知，对a的一个（自然数）约数b，必然导出一个(自然数)约数c，这样，a的自然数约数是“成双成对”的，所以任何非平方数的全体自然数约数的个数必是偶数。

如果A是任意一个平方数（即存在自然数B，使得$B^2=A$），这时A除了可配对的(不同的自然数)约数（其总个数必是偶数）之外，还有一对是相等的约数B，在计算A的约数个数时，B只能算一个，因而A的全体自然数约数的个数是：（一个偶数）+1，必为奇数。

用此例的结论，你能回答下面的问题吗？

"一百盏电灯排成一行，从左至右编上号码1，2，3，4，…，99，100。每一盏电灯都有一根拉线开关。最初这些灯全是灭的。另外有100个小孩，第1个小孩走过来，把凡是号码为1的倍数的灯的开关拉一下，接着第2个小孩走过来把凡是号码等于2的倍数的灯的开关拉一下，第3个小孩走过来把凡是号码为3的倍数的灯的开关拉一下，这样继续下去，直至第100个小孩走过来把号码为100的倍数的灯（即最末一盏灯）的开关拉一下。这样做之后，问哪些灯是亮着的？"

（答：号码为平方数1，4，9，16，25，36，49，64，81，100的灯亮着）

四、简单的两色问题中的奇偶性分析

用涂两色方法，可以帮助我们进行较直观的奇偶性分析，解答的叙述也十分简捷方便。先看一个简单例子。

例12　某展览馆是由5×5个小方房组成的25间展室，相邻的两展室之间有一门相通且只有一间展室为进出口房间。一小朋友打算从进口间开始，不重复地依次看完每一展室，然后出来。试问，这位小朋友的希望能实现吗？

分析 如果我们一条一条的把所有可能的走法都来试验，显然是不明智的。因为走法太多，且容易发生遗漏。即使你猜对了"不能实现"，也不好说出令人信服的理由，如果你不用下面的两色解法（即奇偶性分析法）来说明的话。不信你试试。

解 把25个展室用黑白相间的涂色，如图14—3。根据小朋友的希望，他必须依次由白室走入黑室，经过25道门，最后再到白室。然而，无论他选择什么路线，按其要求走的结果必然是：

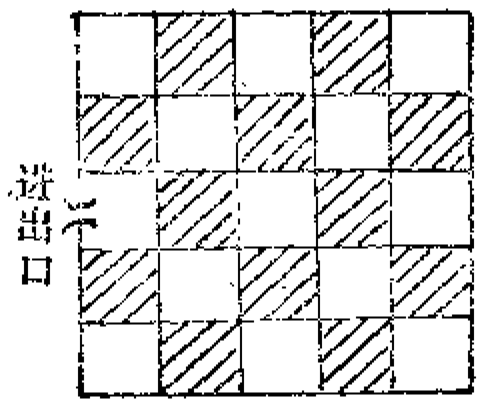


图14—3

$$白\xrightarrow{1}黑\xrightarrow{2}白\xrightarrow{3}黑\xrightarrow{4}白\xrightarrow{5}\cdots\xrightarrow{24}白\xrightarrow{25}黑$$

即，经过25道门后，所到的展室一定是黑室而不是白室，所以，这位小朋友的希望不能实现。

问题：把例12中的5×5改为4×4，小朋友的希望能实现吗？若行，至少要给出一种走法。你能从例12和这个问题当中得出一个一般情形的结论吗？（考虑$2n\times2n$和$(2n+1)\times(2n+1)$情形）

例15 中国象棋盘的任意位置上有一只马，它跳若干步后正好回到原来的位置，问马所跳的步数是偶数还是奇数？为什么？

分析 最简单情形（跳若干步后再按原路退回到原位）可知，步数是偶数。由此我们可以猜想一般情形的步数也是

偶数。但要证明这个结论，也只有用如下的涂色法才易说明。

解 把棋盘上各交叉点按黑白相间涂色，使得相邻点具有不同色。如图14—4（×—表黑，○—表白）。

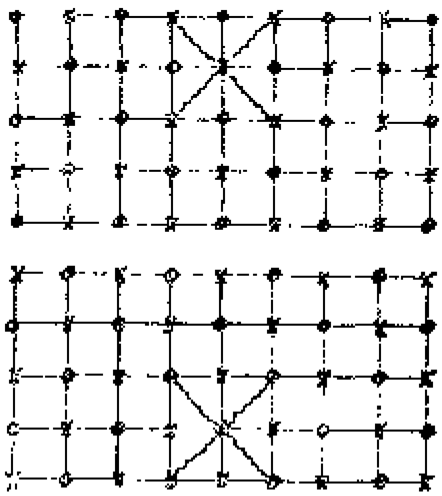


图14—4

如马从黑（白）点出发，按"走斜日"规则跳一步，只能跳至白（黑）点，下一步又从白（黑）点起跳到黑（白）点，如此下去。这样马的跳步经过的点只能是：

$$黑(起点)\xrightarrow{1}白\xrightarrow{2}黑\xrightarrow{3}白\xrightarrow{4}黑\cdots\cdots$$

或 $$白(起点)\xrightarrow{1}黑\xrightarrow{2}白\xrightarrow{3}黑\xrightarrow{4}白\cdots\cdots$$

要想回到原位，中间经过的黑白点必须"成对"才行，即经过偶数步才能返回到原位。

例14 线段AB的两个端点，一个标以红色，一个标以兰色，在线段中任意插入1991个分点，每个分点随意涂上红色或兰色，这样分得1992条不重叠的小线段。如果把两端涂色不同的线段叫做标准线段。问标准线段的条数是奇数还是偶数？为什么？

解 在线段AB中插入一个分点时，无论这点是涂上红色还是兰色，标准线段仍是1条，即标准线段的条数增加了"0"条（即不增加）。以后插入的点可分两种情形：①如插入标准线段中，则标准线段不增加；②如插入非标准线段中，则插入点与端点同色时，不增加标准线段的条数；当插入点与

端点不同色时，增加两条标准线段。由此可知，每新插入一个点(无论此点涂什么颜色)，标准线段的条数或不增加或增加二条。因此，如果假设标准线段增加二条的点有m个 $(0\leqslant m<1991)$，那么，总的标准线段条数等于

$$1+2m+(1991-m)\cdot 0=2m+1$$

是奇数。

练习14

1. 把数字1～9填入3×3的方阵，每一数字填入一格，填好以后要满足两个条件：(1)若把每一行看成一个三位数，则第一行的三位数加第二行的三位数必须等于第三行的三位数；(2)两个相邻的数字所填的格子也必须相邻(可以在上面、下面、左边或右边)。
2. 有奇数个杯口向上的杯子，每次同时翻动偶数个杯子，能不能使全部杯子的杯口都朝下。为什么？
3. 将1至9这九个数字填入下列算式的圆圈中，使三个算式同时成立？

$$\bigcirc+\bigcirc=\bigcirc$$
$$\bigcirc-\bigcirc=\bigcirc$$
$$\bigcirc\times\bigcirc=\bigcirc$$

4. 1987个球无论多少人采用什么样分法，最终每人都分得奇数个球的总人数不能是偶数。为什么？
5. 64不可能是几个连续自然数的和，为什么？
6. 出席一次会议的代表彼此握手，两人每握一次手都记握手一次。问握手次数是奇数的人的总人数是奇数还是偶数。
7. 设a、b、c是三个任意整数，则$\frac{a+b}{2}$、$\frac{b+c}{2}$、$\frac{c+a}{2}$中至少有

一个是整数。

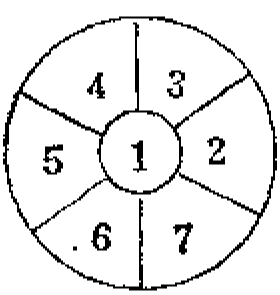
8. 设n为一奇数，a_1，a_2，…，a_n是1，2，3，…，n的任一排列。求证：乘积$(a_1+1)(a_2+2)\cdots(a_n+n)$一定是一个偶数。

9. 某电影院共有1991个座位，上、下午各演出一场。甲、乙两校各有1991个学生看电影，每个学生上午或下午各只看一场。试证：电影院一定有这样的座位，上、下午在这座位上坐的是不同学校的学生。

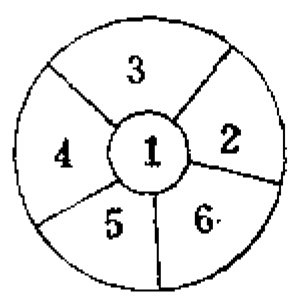
10. 甲、乙两个小孩玩“捉乌龟”游戏。先将54张扑克(27对)藏起一张，于是剩下的牌中有一张没法配对，称它为“乌龟”。再将牌任意分成两堆，每人任拿一堆，然后将手中成对的牌全部扔掉，这时，你能否根据两人手中的（余下）牌的张数来判断“乌龟”牌在谁手中？请说明理由。

11. 某班49个同学，坐成7行7列，每一个座位的前、后、左、右的座位都叫做它的邻座，要让这49个同学中的每一个都离开自己的座位，而坐到他（她）的邻座上去，能行吗？为什么？

12. 对图14—5（1）（2）进行如下染色：必须使相邻的区域染不同颜色。问最少使用几种颜色才行？



(1)



(2)

图14—5

13. 圆周上有1至40顺序编号的40个点。按如下染色：任意选一个序号a（a在1～40之间），从这个序号开始往下数a个点（不包括a号点）染红色，这红点下面接着的点染兰色。结果发现，不管怎

样选定序号a，总有固定的20个点染红色，另外20个点染兰色。为什么？

14．将8×8黑白相间的方格棋盘的左下角及右上角的小格剪去（此二小格一定同色）。试证明：用31张1×2的小长方形纸片不能完全盖住残缺棋盘。

15．图14—6是由14个大小相等的正方形组成。证明：无论用什么方式沿图中直线剪裁，一定不能剪出七块由相邻二个正方形组成的长方形。

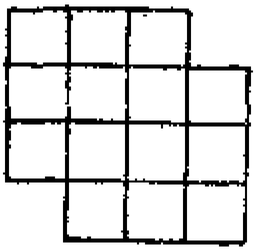


图14—6

第十五章 智解难题诸法

解题，特别是解难题，在数学的学习和研究中有着极为重要的作用。第一，通过解题可以帮助我们更好地掌握和应用数学知识；第二，通过解题可以发现新的数学方法，开辟新的研究领域（如库默尔为解决费尔马大定理开创了理想数论）；第三，通过解题能培养我们百折不挠、顽强拼博的意志品质。总之，通过解题能使我们成为更聪明、更能干、更有创造精神的时代的强者！

要能顺当地解好题，掌握解题方法及其获得这些方法的思维过程是十分重要的。从著名的数学大师到普通的数学爱好者，都十分喜好对各种解题方法的探索和研究。以勾股定理为例，从古代的毕达哥拉斯、欧几里德、赵爽、刘徽到近代的数学家、总统和平民百姓，都曾为获得它的不同证法而着迷，使它的证明方法达到了四百余种，成为数学中证法最多的一个定理。

数学问题千变万化，解题方法层出不穷。在本章中，我们将集中学习一些十分基本、十分重要、应用十分广泛的方法。通过本章的学习，一方面对前面各章所提到的方法作一个总结，同时进一步拓展思路，提高我们解竞赛题的本领，使我们在各类竞赛中，具有更强的实力。

一、图表分析法

认真分析题意，将题中的已知条件和要求的问题，用图

形、表格、符号等简略、形象、充分地表示出来，从而显示出条件与条件之间、条件与问题之间的直观联系，使我们从中获得解题的线索和方法。这种方法叫图表分析法。它能把抽象的变得具体，复杂的变得简洁，隐蔽的变得明朗，是我们解不少类数学问题都爱运用的行之有效的好方法。

例 1 （托尔斯泰问题）一组割草人要把两片草地的草割完。大的一片是小片的两倍。上半天人们都在大的一片上割草。午后人们对半分开：一半人仍留在大草地上，到傍晚时恰好把草割完；另一半人到小草地上去割，到傍晚时还剩下一小块，这一小块由一人用一整天刚能割完。问这组割草人有多少？

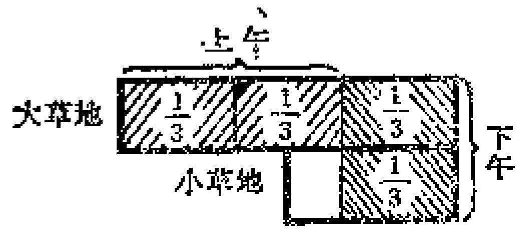


图15—1

解 由题意可得图 15—1。若设大片地的面积为 1，则半组人半天能割的面积为$\frac{1}{3}$。这样，小块地的面积为$\frac{1}{2}$，而剩下的一小块的面积为$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，这就是一人一天能割的草的面积。这组人一天共割大片草地面积的$\frac{4}{3}$。所以全组人数是

$$\frac{4}{3}\div\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=8（人）$$

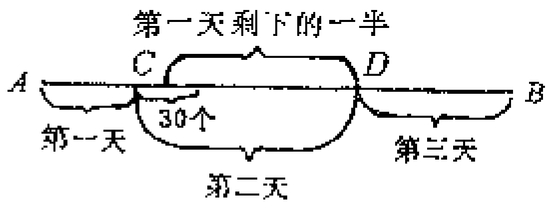
答：这个割草组有 8 人。

例 2 一个车间计划用三天完成加工一批零件的任务。第一天加工了这批零件的三分之一少30个；第二天加工了剩下的二分之一多 15 个；第三天加工了最后的120个。问这批

零件有多少个？

解　用线段AB表示这批零件的个数，C、D是其三分之一分点；按题意得分析图15—2：由此可知，这批零件共有

$120\times3=360$（个）



答：这批零件共有360个。

图15—2

该题若用常规算术或代数解法，其繁难程度均是较大的。这里巧用图形，得出了极其简洁的解答。

例3　一个工厂计划生产一批电扇，若每天生产50台，则按期完成；若每天生产60台，则提前5天完成。问计划生产电扇多少台？

解　如图15—3，用矩形的一边表示生产的时间，另一边表示每天生产的台数，则该矩形的面积就是生产的总台数。

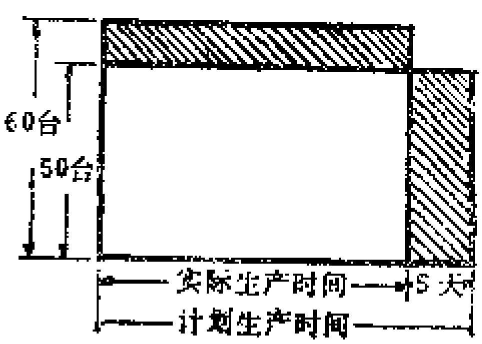


图15—3

由于生产任务不变，故两个带阴影的矩形面积相等。由此可得

$(60-50)\times$实际生产天数$=50\times5$

实际生产天数$=50\times5\div10=25$（天）

计划生产电扇台数是$60\times25=1500$（台）

答：计划生产电扇1500台。

例4　小明与小亮同住在一幢楼，他们同时出发骑车去郊外看王老师，又同时到达王老师家。但途中小明休息的时间是小亮骑车时间的$\frac{1}{3}$，而小亮休息的时间是小明骑车时间

的$\frac{1}{4}$，小明和小亮骑车速度的比是多少？

分析与解 根据小明和小亮骑车和休息时间的关系，设小明休息时间为 x，小亮休息时间为 y，画出线段图。

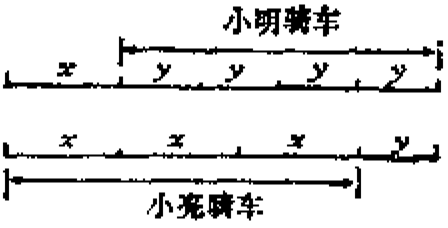


图15—4

从图中可知 $2x=3y$，即$\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$。

$$\frac{\text{小明速度}}{\text{小亮速度}}=\frac{\text{小亮骑车时间}}{\text{小明骑车时间}}=\frac{3x}{4y}=\frac{3}{4}\times\frac{x}{y}=\frac{9}{8}$$

答：小明与小亮骑车速度之比为$\frac{9}{8}$。

图表分析法在解逻辑推理问题时也有广泛的应用，我们在第十章中已举过多例，这里就不再举例了。请同学们参考那里的论述。

二、归纳递推法

某些与自然数有关的问题的解答，常要依据自然数由小到大的顺序，列出问题的几个特殊情况进行试探，并逐一观察、分析、比较，找出其间关系（特别是其间的递推关系），由此归纳出一般性的规律，然后，再根据发现的规律求出问题的解答。我们把这种解题方法称为归纳递推法。

例 1 若干同样的盒子排一排，小明把五十多个同样的棋子分装在盒中，其中只有一个盒子没有装棋子，然后他外出了。小光从每个有棋子的盒子里各拿一个棋子放在空盒

内，再把盒子重新排一下。小明回来仔细查看一番，没有发现有人动过这些盒子和棋子。问共有多少个盒子？

分析与解 由题意，原有一只盒子（设为A_1）没有装棋子，由小光操作后，仍应有一只盒子（设为A_2）没有棋子。从操作方法知盒子A_2原有棋子数是1枚。按题意，操作后应有一只盒子（设为A_3）装1枚子，而此盒在操作前应有2枚棋子，……依此递推，可知：小明原来在各盒子里装的棋子数从少到多依次应是

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

经试算：$0+1+2+3+\cdots+9=45$

$$0+1+2+3+\cdots+9+10=55$$

$$0+1+2+3+\cdots+9+10+11=66$$

可知：第二种情况为本题之解，即盒子数应为11个。

例2 如图15—5，在直线上两个相距1寸的点A和B上各有一只青蛙。A点的青蛙沿直线跳往关于B点的对称点A_1，而B点的青蛙跳往关于A点的对称点B_1，然后A_1点的青蛙跳往关于B_1点的对称点A_2，B_1点的青蛙跳往关于A_1点的对称点B_2，如此跳下去。两只青蛙各跳7次后，原来在A点的青蛙跳到的位置距离B点有____寸。

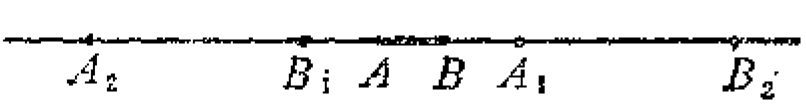


图15—5

解 由题意知：

$$A_1B_1=3AB=3（寸）$$

$$A_2B_2=3A_1B_1=3\times3=3^2（寸）$$

依此类推，各跳七次后有：

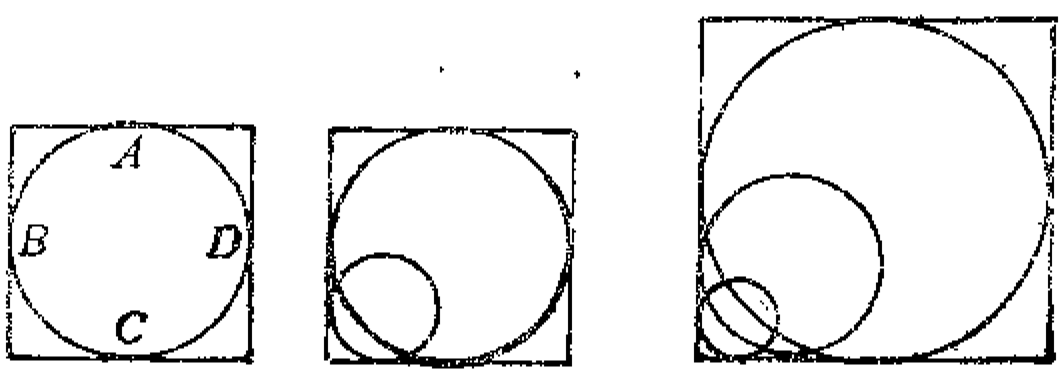
$$A_7B_7 = 3\times A_6B_6 = 3^7\text{（寸）}$$

又易见，A_1、A_3、A_5、A_7各点应在B的右边，且从对称性知

$$A_7B = (A_7B_7 - AB)\div 2 = (3^7-1)\div 2 = 1093\text{（寸）}$$

答：各跳7次后，原来在A点的青蛙跳到的位置距离B点有1093寸。

例3 在一张正方形纸片上画一个圆，这个圆最多可将纸片分成5块〔如图15—6(1)〕；画两个圆最多可将纸片分成9块〔如图15—6(2)〕；画三个圆最多可将纸片分成多少块？画七个圆最多可将纸片分成多少块？画n个圆最多可将纸片分成多少块？



(1)　(2)　(3)

图15—6

分析与解 先探讨前几种情况。对圆的位置与被分割成的块数之间的关系进行细致的分析，可以发现：

图（1）中的圆与正方形有四个公共点A、B、C、D。这四点将圆周分成四段弧，若一段一段地画，即可看出每画一段弧就将原来的一块分割成两块。即每画一段弧后都使原图

的块数增加1。故此时的5块可理解为1＋4块。正方形内如（1）画的圆最多与正方形有四个公共点，所以，最多只能将正方形分割成1＋4块。

当画第二个圆时〔图15—6(2)〕，若新画的圆与第一个圆相交又与正方形边界再产生两个公共点，则新圆与原图产生的公共点最多，达到4个。与前面同理，这时能使纸片分割成的块数最多，达到5＋4＝9（块）。

当画第三个圆时，若所画的圆与前两个圆及正方形各产生两个公共点（共6个），则能使正方形分割成的块数最多，达到9＋6＝15块。

依此规律，归纳递推可知：画四个圆时，最多可在前图上再增加8块；画五个圆时，可再增加10块；画六个圆时，可再增加12块；画七个圆时，纸片被分割成的最多块数是：

$$5+4+6+8+10+12+14=59;$$

画n个圆，纸片被分割成的最多块数是：

$$\begin{aligned}&5+4+6+8+\cdots+2n\\=&3+2+4+6+8+\cdots+2n\\=&3+\frac{(2+2n)n}{2}\\=&n^2+n+3\end{aligned}$$

答：（略）。

三、枚举法

有的数学问题，由于条件与问题之间的联系不是单一的，在不同的情况下可能有不同的解。这时，为了解题的方便，常按照某种分类标准，把条件分解为若干种可能的情

况，并逐一就各种情况进行讨论，得出解答，以达到最终解决整个问题的目的。这种解题方法叫做枚举法（又称列举法）。我们在第八章重点讲述过，这里再举几例说明。

例1 把全体自然数1、2、3、…任意地分成两组，一定有一组中存在两个数，它们的和是完全平方数，为什么？

分析 由于分组的随意性，要把所有分组方法都列举出来再分析研究，这显然是办不到的。这时，常使用反证法，假设题目的结论是错的，并在此假设下进行分组，逐步列出各组中的一些局部进行观察，直至得出与假设相矛盾的结果为止，从而说明题目的结论是正确的。

解 假设题目的结论不对，即无论怎样分组，任何一组里都不存在两数之和是完全平方数。

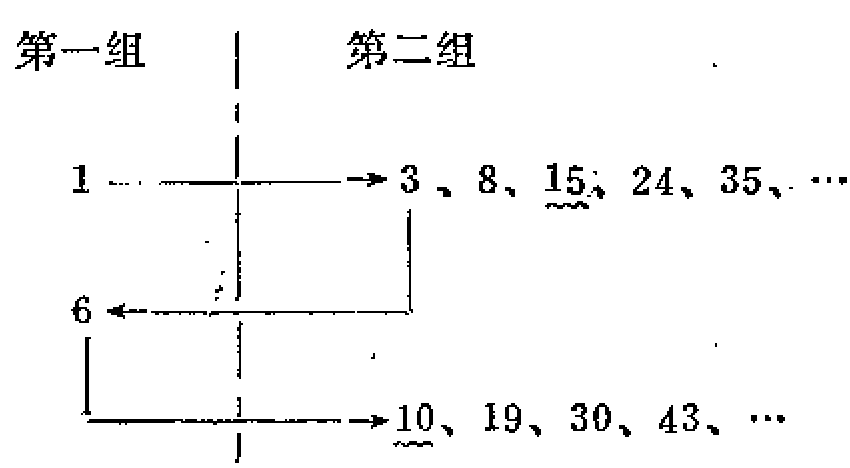
不妨设1在第一组，则由假设知 3、8、15、24、……在第二组；

由 3 在第二组知 6 只能在第一组；

由 6 在第一组知3、10、19、……在第二组；

…………

以上列举过程可简记如下：



这样，10与15必同在第二组，且$10+15=25=5^2$，与假设矛盾。所以，题目的结论是正确的。

例2 在一个4×4的方格棋盘上任放六个棋子（每格最多放一个）在六个方格中，试证：总可以划去两行和两列，使所有的棋子全部去掉。

分析 使用枚举法的关键在于如何分"枚举的类"，可分几类来考查讨论。分类法要求：不重不漏，且易于分析讨论。这个题分类方法很多，我们这里介绍一种。读者可另举分类方法来证明。

解 以第一、二行放棋子数总和为标准来分类，显然只有这样三类：和不小于4；和等于3；和不大于2。这种分类法显然不重不漏（对"总和"而言）。现分类考查：

（1）和不小于4时，这时可划去第一、二行后，至少去掉了4个，余下的棋子数最多只有两个，再划去它们所在的列（最多两列）就可以把余下的（最多）两个棋子划掉。即对这种情形证明了题目结论。

（2）和等于3时，由抽屉原则知，第一、二行中有一行放有的棋子数不少于两个，不妨设为第一行。同样道理，对第三、四行也有一行放的棋子数不少于两个，不妨设为第三行。这时，我们划去第一、三行就至少划掉了4个，余下最多两个，划去它们所在的列（最多两列），就可以全部划掉棋子。因此，这种情形，结论也成立。

（3）和不大于2时，这时第三、四行放的棋子总数不少于4个，同（1），划去第三、四行及余下棋子的列（最多两列），就可把棋子全部去掉，因此，这种情形结论也成立。

综上（1）、（2）、（3）知，总可以划去两行两列，使所有的棋子全部去掉。

四、假设推测法

有的应用题中数量关系比较复杂，有的推理题中事物间的联系纵横交错，按一般的解题思路不易寻得其解。这时，我们常使用“假设”改变题目的某些条件使复杂关系化简，或使用“假设”将某些未知设为已知，以增加推理的已知因素，在此基础上，对因“假设”而造成的差异进行分析推断以获得问题的解答。这样一种转化思考的解题方法叫做假设推测法，该法能化迷朦为明朗、化复杂为单一、化繁难为简易，不失为解数学难题的一种妙法。

例1 有三片牧场，场上的草是一样密的，而且长得一样快，它们的面积是$3\frac{1}{3}$公顷、10公顷和24公顷。第一片牧场饲养12头牛，用4周把草吃尽；第二片牧场饲养21头牛，用9周把草吃尽。问第三片牧场上饲养多少头牛恰好用18周把草吃尽？

解 假设每头牛每星期吃掉的草量为1，那么有：

把第一片牧场的面积扩大3倍，变为10公顷，则4周能提供的总草量是$48\times3=144$。与第二片牧场比较可知：

10公顷牧场在$9-4=5$周中可长新草$189-144=45$。每周可长新草$45\div5=9$。

10公顷牧场原有草$189-9\times9=108$；

牧　场	面　积	牛　数	把草吃尽时间(周)	草　量
第一片	$3\frac{1}{3}$公顷	12	4	$12\times4=48$
	$3\times3\frac{1}{3}$公顷	$3\times12=36$	4	$3\times48=144$
第二片	10公顷	21	9	$9\times21=189$
第三片	24公顷	?	18	

从而可知：24公顷牧场18周能提供的总草量是：

$108\times2.4+9\times2.4\times18$

而一头牛18周吃的草量是18，所以，在第三片牧场上吃草的牛的头数是$(108\times2.4+9\times2.4\times18)\div18=36$(头)。

例2　甲、乙、丙、丁四人在一起议论数学、语文、自然常识和乒乓球四项比赛的第一名是谁。

甲说：丁是乒乓球第一名；

乙说：丙是语文第一名；

丙说：甲不是数学第一名；

丁说：乙是自然常识第一名。

成绩公布后，四个人都分别是某项的第一名，而且取得数学第一名和乒乓第一名的两人讲对了，其他两人讲错了。试问这四位同学各是哪一项比赛的第一名？

解　四人中恰只有两人讲对了，因此就讲对了的两人来说，可提出6种假设，分别进行推理如下：

(1)假设甲、乙两人讲对了，则有丁是乒乓第一名。由题意，获乒乓第一名的人是讲对了的，所以丁也就讲对

了。这样总共就有甲、乙、丁三人讲对了，与题意矛盾。所以假设“甲、乙两人讲对了”不对。

（2）假设甲、丙讲对了。与（1）一样，产生矛盾，则“假设甲、丙讲对了”不对。

（3）假设甲、丁讲对了，则乙、丙讲错了。即有：丁是乒乓第一名，乙是自然第一名，甲与丙均是数学第一名。与题设矛盾，则“假设甲、丁讲对了”不对。

（4）假设乙、丙讲对了，则知丙是语文第一名且讲对了。这与题说“取得数学第一名和乒乓第一名的两人讲对了，其它两人讲错了”相矛盾，则“假设乙、丙讲对了”不对。

（5）假设乙、丁讲对了，结果得乙是自然第一名且讲对了。也与题设矛盾，则“假设乙、丁讲对丁”不对。

（6）假设丙、丁讲对丁，那么按题设丙、丁应是数学和乒乓的第一名，且由讲错了知：丁是数学第一名，丙是乒乓第一名。再由丁讲对了知：乙是自然第一名。从而甲只能是语文第一名。所以，问题的答案是：甲是语文第一名，乙是自然第一名，丙是乒乓第一名，丁是数学第一名。

五、转换法

我们常说，学到的知识要能举一反三，善于灵活运用，当你遇到较复杂的，或者是你从未见到过的一些题目，一定别害怕，仔细分析，往往能转换成你所熟知的问题，这种方法叫做转换法，又叫变换法。转换的方法很多，如条件转换、问题转换、图形转换、关系转换等。

例1　比较、分析下面5个问题：

（1）求3、5、7的最小公倍数；

（2）一个三位数减去3能被3整除，减去5能被5整除，减去7能被7整除。求满足这些条件的最小三位整数；

（3）某校五年级学生排队，若每排3人、5人或7人，最后一排都只有2人，这个年级至少有多少人？

（4）把100多粒围棋子，每3粒一堆，余2粒；每5粒一堆，余4粒；每7粒一堆，余6粒。共有多少粒棋子？

（5）一个数分别除以3、5、7都余2，这个数最小是多少？

比较、分析、解 只要仔细理解了这五个题的题意，不难发现，它们本质是同一类型的问题，或者说，（2）（3）（4）（5）都是（1）“求3、5、7的最小公倍数”这一基本问题演变而来的。所以（1）是这组题的“基本题”（它的答案是很好求的，为$3\times5\times7=105$）。要解（2）（3）（4）（5），只需“还其本来面目”就行了。也就是要把它们转化为（1）来解。

（2）是（1）的换一种出题形式。答案为105。

（3）先转化为求：3的倍数多2，5的倍数多2，7的倍数多2的数。再根据“至少”条件转化为求：3、5、7的最小公倍数多2。答案为107（个）。

（4）转化为：这些围棋子若多1粒则是3、5、7的最小公倍数，求这些围棋子数。（注意：“100多粒”条件的应用）。答案显然为$3\times5\times7-1=104$（粒）。

（5）转化为：求3、5、7的公倍数加2的那个最小的数（注意：这里未提最小公倍数了，你能理解其原因吗？）。由于它不是应用题（如（3）），而且是求满足条件

的"最小"的那一个，所以答案应是 2，而不是107了。

例 2 甲、乙两车分别从 A、B 两站同时相向开出（图15-7）。已知甲、乙两车的速度之比为 3∶2，它们到达C站的时刻分别为 5 点和15点。两车几点相遇？

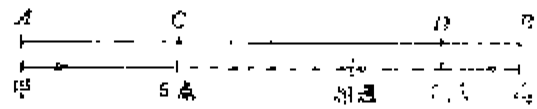


图15—7

分析与解 甲、乙两车什么时候出发的并不知道，但甲车在 5 点到C站时，乙车并没到C站（假设是D处）。因乙车于15点到C站，就是说乙车行完路程CD需10小时，那么只要能求出甲、乙两车同时分别从C、D相向开出几小时相遇就可以了。这样，原题可转化为：

甲、乙两车分别从C、D两站同时相向开出，两车的速度比为 3∶2，乙车行完全程需 10 小时，求开出几小时后两车相遇。

请同学们自己写出解答。（答：9 点相遇）

例 3 小勇家养了若干只鸡，一天，他爸爸卖出一些鸡，剩下鸡的只数是卖出鸡的$\frac{7}{8}$还多$\frac{7}{8}$只；如果，把剩下的鸡再卖出一半，那么两次共卖出的鸡在25只到65只之间。小勇家原来共养了多少只鸡？

分析与解 题中的"多$\frac{7}{8}$只"有点令人费解，那有$\frac{7}{8}$只活鸡呢？设第一次卖出x只鸡，那么，剩下的鸡为$\frac{7}{8}x+\frac{7}{8}=\frac{7}{8}(x+1)$只，这就是说，如果小勇家另外还多 1 只鸡也卖

出的话，那么剩下的鸡就恰好是卖出的$\frac{7}{8}$。根据题意作示意图15-8。

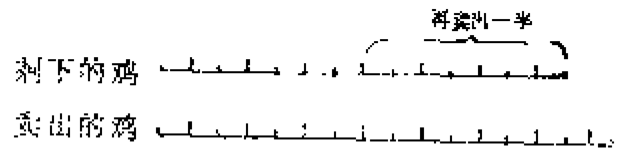


图15—8

由图可知，两次卖出的鸡占总数的$\frac{23}{30}$，那么卖出的鸡应是23的倍数。而在25到65之间，23的倍数只有46，$46\div\frac{23}{30}=60$只，所以小勇家原养有鸡$60-1=59$只。

在以上解法中先补进1只，转化了条件，使问题简化易解。此例还可从另一个角度来转化，用枚举法解之。根据剩下鸡的只数是卖出鸡的$\frac{7}{8}$还多$\frac{7}{8}$只，可知卖出鸡的只数除以8余7。那么剩下鸡的只数则能被7整除。请同学们自己试一试。

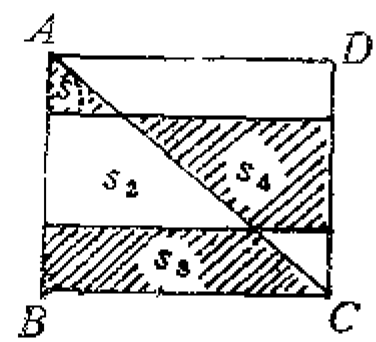


图15—9

例4　图15-9所示的长方形$ABCD$是由上、中、下三个长方形拼成的。已知中间长方形的宽等于上、下两个长方形宽的和。问：对角线AC下边两部份阴影面积和与上边阴影部份面积间的大小关系如何？

分析与解　为方便，用S_1、S_2、S_3、S_4分别表示相应部份的面积。根据中间长方形的宽等于上、下两个长方形宽的和，而它们的长相等以及对角线AC分长方形$ABCD$为相等的两部份，易得

$$S_1+S_2+S_3=ABCD\text{的面积的一半}$$
$$=S_2+S_4$$

则 $$S_1+S_3=S_4$$

这说明对角线AB上、下两边阴影部份的面积相等。

这里利用了“$ABCD$的面积的一半”把$S_1+S_2+S_3$转换为S_2+S_4，从而易得$S_1+S_3=S_4$。在求平面图形面积诸问题中，这种转换方法用得很多。

六、逆推法

有的题目，按题中叙述的顺序解答较难，而按相反的顺序分析，比较容易解答，这种解题方法，我们叫做逆推法或倒推法。

例1 甲、乙、丙三个杯子里各装有水若干毫升。现将甲中的水倒一些入乙中，使乙中的水加倍；然后把乙中的水倒一些入丙中，使丙中的水加倍；又把丙中的水倒一些入甲中，使甲中的水加倍。如果把上述过程进行两遍，甲、乙、丙中各有水640毫升。问：三个杯子里原来各有多少水？

分析与解 把题中所述条件倒过来，即是：

$$\underbrace{\text{甲}\xrightarrow{(\div 2)}\text{丙}\xrightarrow{(\div 2)}\text{乙}\xrightarrow{(\div 2)}}_{\text{第二遍}}\underbrace{\text{甲}\xrightarrow{(\div 2)}\text{丙}\xrightarrow{(\div 2)}\text{乙}\xrightarrow{(\div 2)}\text{甲}}_{\text{第一遍}}$$

把倒推过程列表计算如下（见下页）：

所以，甲、乙、丙三杯中原来分别有水950毫升、510毫升、460毫升。

甲←——————乙←——————丙←

		甲	乙	丙
（最后）		640	640	640
第二遍	甲→丙	$640 \div 2 = 320$	640	$640 + 320 = 960$
	丙→乙	320	$640 + 480 = 1120$	$960 \div 2 = 480$
	乙→甲	$320 + 560 = 880$	$1120 \div 2 = 560$	480
第一遍	甲→丙	$880 \div 2 = 440$	560	$480 \div 440 = 920$
	丙→乙	440	$560 + 460 = 1020$	$920 \div 2 = 460$
	乙→甲	$440 + 510 = 950$	$1020 \div 2 = 510$	460
（原来）		950	510	460

例 2　桌上放有四堆小棒，分别是17根、7根、6根和2根。现在请你从某一堆中拿几根到另一堆去，使另一堆的小棒增加1倍。这样挪动四次后，使这四堆的小棒数相等，应如何移法？

分析与解　四堆小棒共有32根，挪动四次后每堆有8根，下面给出倒推的一种情况：

顺四次（最后）	一堆（8）	二堆（8）	三堆（8）	四堆（8）
顺三倒一次	8	8	12	4
顺二倒二次	8	14	6	4
顺一倒三次	15	7	6	4
（原来）倒四次	17	7	6	2

由下往上看则可得到一种挪动方法，请你说出是怎样挪动的？

例 3　老师在黑板上写了13个自然数，让小明计算其平均数（保留两位小数），小明计算出的答数是12.43。老师说最后一位数字错了，其他的数字都对。正确答案应该是什么？

分析和解 由于n个数a_1、a_2、…、a_n的平均数=(总和$a_1+a_2+\cdots+a_n$)÷(个数n)，所以，总和$(a_1+a_2+\cdots+a_n)$=平均数×(个数n)。此题$n=13$。由于老师在黑板上写的13个自然数不知道，因而无法直接用上述公式来求得正确答案。但我们可以从$12.43\times13=161.59$结果入手来考虑（逆推）。由于小明的平均数答数12.43只错了最后一个数字，而$12.40\times13=161.20$，$0.00\times13=0.00$，$0.09\times13=1.17$，所以这13个自然数的总和介于$161.20+0.00=161.20$与$161.20+1.17=162.37$之间。又因总和为整数，故总和只能是162，实际验算$162\div13=12.46$也知，正确的答案应是162。

同学们还可用逆推法来解决下面这个有趣的问题：欢欢从一个箱子里拿茶杯。他每次总从箱子里拿出箱中现有茶杯数的一半，再放回一个。他一共拿了1991次后，箱里还剩两个茶杯。问原来箱里有多少个茶杯？（答案是2个茶杯，为什么？）

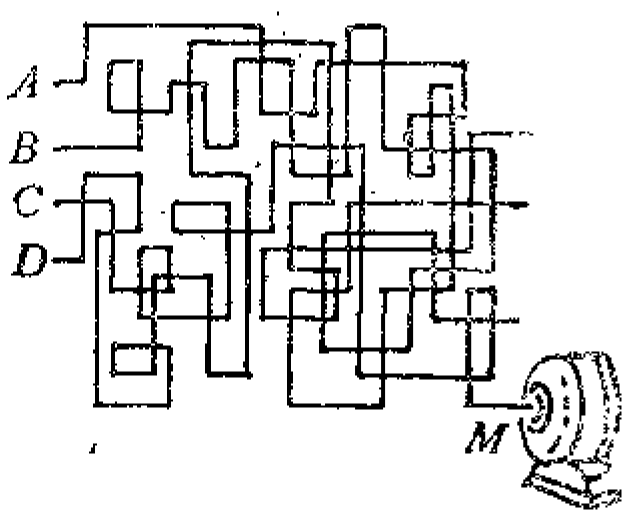


图15—10

逆推法最直观的应用是"由终点找起点"问题：在图15—10中，A、B、C、D是四个开关，哪个能启动马达M？要求最快找出。（答案为C）

七、归谬法

对有些问题，不直接去证明它的结论是正确的，而去证

明它的反面是不正确的，从而证明了这个结论是正确的。这种方法我们叫做归谬法。

例 1　从整数 1 至10这10个数中任意选出 6 个数来，那么这 6 个数中必有一个是另一数的倍数。

分析与解　如果直接从这10个数中任选 6 个数出来，共有 210 种不同的选法，再一一进行验证，实在是费时费神。因此，假设任意选出的 6 个数中，任何一个数都不是另一个数的倍数。显然这 6 个数中未选 1 。在剩下的 9 个数中分情况讨论：

（ 1 ）如果这 6 个数中选了 2 ，那么根据假设 4 、 6 、8 、10都不能选，剩下只有 3 、 5 、7 、9 ，凑不够六个数，因此这 6 个数未选 2 ；

（ 2 ）同理，如果选了 3 ，那么 6 、 9 不能选，剩下的 2 、 4 、 5 、 7 、 8 、10这 6 个数中任选 5 个数，总至少有一个数是另一个数的倍数，因此这 6 个数中也未选 3 ；

（ 3 ）如果选了 4 ， 那么 2 、 8 不能选，剩下的 3 、5 、 6 、 7 、 9 、10这 6 个数中任选 5 个数，总至少有一个数是另一个数的倍数，因此这 6 个数中未选 4 。

这样剩下的 5 、6 、7 、8、9、10这 6 个数中5、10不能同时选，就凑不够 6 个可选数了，所以前面的假设是错的，因而从 1 到10中任选 6 个数中，必有一个数是另一个数的倍数。

例 2　如果四个数中，每三个数的和都相等，那么，这四个数必都相等。

分析与解　设这四个数为a、b、c、d。如果其中有两个数不相等（不妨设 $c\neq d$），那么，$a+b+c\neq a+b+d$，这与“每三个数的和都相等”不符，所以，不可能有两个数不相

等，即这四个数必都相等。

注： 由于四个数中任取三个数，只有四种不同的取法，请同学们直接验证一下。

八、特征分析法

我们在求解一个问题的时候，总是要根据条件和问题，运用有关知识进行分析，这当中尤其重要的是，首先要抓住主要特征，找到突破口，寻求解题途径，这就是所说的特征分析法，这种方法在解数字谜问题时已多次应用过，现再举例说明。

例 1 两只同样大小的量杯，甲杯装有半杯纯酒精，乙杯装有半杯水。从甲杯倒一些酒精到乙杯内，混合均匀后，再从乙杯倒还同样体积的混合液到甲杯中。问：这时甲杯中含的水和乙杯中含的酒精体积的大小关系如何？

分析与解 题中没有具体的数据，似乎不好入手。这里要特别注意分析：从甲杯中倒了多大体积的酒精入乙杯中，则从乙杯中倒回同样体积的混合液入甲杯，仍然各为半杯。这就是说，甲杯中的酒精少了，它被乙杯中同样体积的水到甲杯后"挤"到乙杯中去了，所以甲杯中的水和乙杯中的酒精体积是相等的。你看，这多么简明！其实这个问题与是否混合均匀以及倒的次数都无关。

例 2 在黑板上任意写一个自然数，在不是它的约数中，找出最小的自然数，擦去原数，写上找到的这个最小自然数。例如，写的数是12，不是12的约数中，最小的自然数是 5，擦去12，写上 5。这样继续做下去，直到黑板上出现 2 为止。

对于任意的一个自然数，最多擦几次，黑板上就可出现2？

分析与解　以"黑板上出现2为止"作突破口。由于2不是任何奇数的约数，2是任何偶数的约数，所以分奇数、偶数来分析。显然如果写出的是奇数，那么只需擦一次，黑板上就出现2。若黑板上写出的是偶数：（1）如果不是3的倍数，那么擦去后写出3，再擦去3即出现2，即只需擦2次；（2）如果是3的倍数，当然也是6的倍数。在不是它的约数中，最小的：①若是4，那么擦3次即出现2；②若是5，擦2次即出现2。综上所述最多擦3次，黑板上即出现2。

例5　在一个正方体的顶点标上1～9这9个数字中的8个，使得每个面上四个顶点上所标数字之和彼此相等，并且这个和不能被那个未标的数整除。试求：未标出的这个数字是几？并给出一种填数方法。

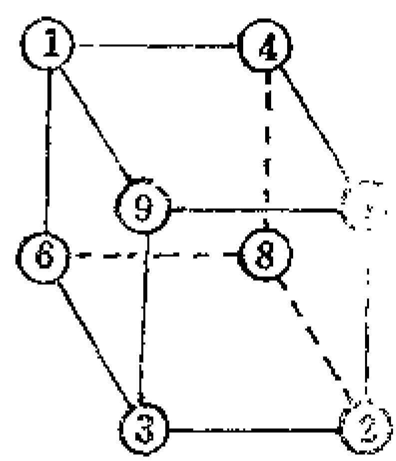


图15—11

分析与解　特别注意一点：即所填的8个数在相对的两个面上都完全出现。设未填的数字为a，每个面上四个数之和为s那么：

$$2s=1+2+3+4+5+6+7+8+9-a$$

即　$2s=45-a$

因$2s$为偶数，45是奇数，所以a必为奇数。又s不能被a整除，2与a互质，所以$2s$不能被a整除，45也不能被a整除。而1，3，5，7，9中不能整除45的只有7。所以，$a=7$，$s=(45-7)\div 2=19$。于是不难得到一种填数方法，如图15—11。

九、特殊值法

同学们在解“工程问题”中，当工作总量没有告诉时，往往把工作总量设为“1”，那么工作效率$=\frac{1}{\text{工作时间}}$，这只与比值有关。其实，不设为“1”，而设为其它任何一个数仍然可以。象这样设出一个值来解题的方法，称之为特殊值法。这种方法对于探求解题途径，虽然也是一种方法，但需慎用，不可滥用，生搬硬套。

例1　水结成冰时，体积增加了原来的$\frac{1}{11}$，那么，冰再化成水时，体积会减少几分之几？

分析与解　前面已经解过此题，只是设法不同，这里我们设水的体积为11升，那么，结成冰时，冰为12升；当12升冰成水时，只有11升，减少1升，所以体积减少$\frac{1}{12}$。

例2　任取一个四位数乘以3456，用A表示其积的各位数字之和，用B表示A的各位数字之和，用C表示B的各位数字之和，那么，C为多少？

分析与解　试取1000与3456相乘，$1000\times3456=3456000$，有$A=18$，$B=9$，$C=9$。

当然，这样作并不严密，但结论的确是对的。其实，这里提供了一种解题途径：两个四位数相乘，其积为7位数或8位数，它的各位数字之和A最多为一个两位数；又因3456能被9整除，其积必被9整除，所以A能被9整除，从而B也被9整除，且B最多为一个两位数的和，为十几，且被9整

除，所以C为一位数，故C只能为9。

例3　图15—12中的正方形$ABCD$和$EFGH$的边长相等，A点在正方形$EFGH$的中心。可以证明：不论正方形$ABCD$绕A点怎样旋转，它们重叠部份的面积总是不变的。求这个面积是正方形$EFGH$面积的几分之几？

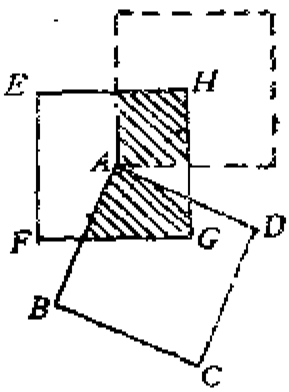


图15—12

分析与解　因为题中已经告诉重叠部份的面积总是不变的。那么可以将正方形$ABCD$旋转到特殊位置。(图中虚线所示)，

显然，重叠部份面积是正方形$EFGH$面积的$\frac{1}{4}$。

例4　五年级三个班的人数相等，一班的男生人数和二班的女生人数相等，三班的男生人数是全部男生人数的$\frac{2}{5}$，求全部女生人数占全年级人数的几分之几。

分析与解　这里与各班的总人数到底是多少没有关系，只求比值。不妨取其特殊值：

一班	男1人	男1人	男1人
二班	女1人	女1人	女1人
三班	男1人	男1人	女1人

由此可知，女生人数占全年级人数的$\frac{4}{9}$。

下面再用图解法来解（图15—13）：因一班的男生人数与二班的女生人数相等，那么一班的男生与二班的男生人数恰好为一个班的人数，不妨集中在一个班（图中乙）。

显然女生人数占全年级人数的$\frac{4}{9}$。

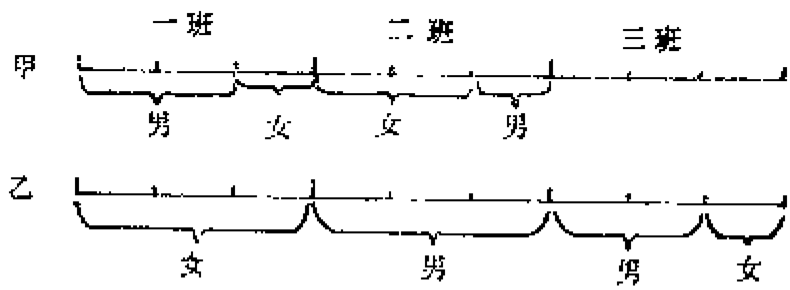


图15—13

十、拆并化易法

同学们在计算组合图形面积的时候，往往通过平移、旋转、割补等方法，使计算更为简便。类似地，在一些数式计算中，直接计算较难或较繁，但通过适当地拆、并等变形，会使问题简化、明朗。这种解题方法就是拆并化易法。

例 1 将 1～1989 按从头开始，依次每四个数为一组，第一组各数间添"+"号，第二组各数前添"-"号，以后各组"+"、"-"相间，列成一个算式：

$1+2+3+4-5-6-7-8+9+10+11+12-13-\cdots\cdots$

（1）最后一个数前添什么号？

（2）这个算式的结果是多少？

分析 如果按运算顺序依次计算，将会遇到差不存在的情形，比如$1+2+3+4-5-6=10-11$，而以后的数前有"+"有"-"、所以想到应适当分组，从整体来分析、求解。

解 （1）因每四个数一组，$1989\div4=497$（余 1），而"+"、"-"号排列规律是奇数组为"+"，偶数组为"-"所以第497组为"+"，最后一个数前为"-"。

（2）观察、试算可知：从第三个数3起，每8个数的和为0：

$3+4-5-6-7-8+9+10=0$，

$11+12-13-14-15-16+17+18=0$，……

而$(1989-2)\div 8=1987\div 8=248$余3，所以

原式$=1+2+1987+1988-1989=1989$。

例2 数列$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{35}$，$\frac{1}{63}$，……求：（1）第10个数；（2）前10个数的和。

解 （1）这个数列可改写成：

$\frac{1}{1\times 3}$，$\frac{1}{3\times 5}$，$\frac{1}{5\times 7}$，$\frac{1}{7\times 9}$，…，所以第10个数为$\frac{1}{19\times 21}$

（2） $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{7\times 9}+\cdots+\frac{1}{19\times 21}$

$$=(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21})\times\frac{1}{2}$$

$$=(1-\frac{1}{21})\times\frac{1}{2}=\frac{10}{21}$$

十一、图形覆盖问题

在研究几何图形中还常常遇到一类问题：用若干个平面图形能不能盖住另一个平面图形，这类问题称之为图形覆盖问题。

例1　有一个边长为10厘米的等边三角形ABC，要用边长为9.9厘米的等边三角形完全盖住它，至少需要几个？

分析与解　有的同学可能会想到两个等边三角形的边长仅相差0.1厘米，那么用2个就完全盖住三角形ABC了，其实至少需要3个。如图15—14所示，用一个边长为9.9厘米的等边三角形ADE虽盖住了$\triangle ABC$的绝大部分，但剩下的四边形$DBCE$至少需要2个三角形才能盖住，所以至少需要3个三角形才能完全盖住三角形ABC。

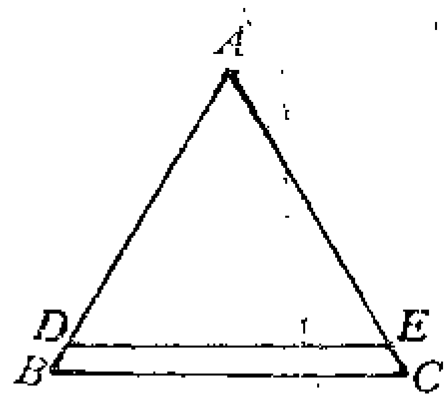


图15—14

例2　用三个1×1的正方形组成“L”形角片。（1）用若干个角片能不能不重叠地完全盖住大小为1987×1988的长方形？（2）用15个角片能不能不重叠地完全盖住大小为5×9的长方形？

分析与解　（1）两个角片可拼成$3\times2=6$的长方形。如果用若干个角片能盖住1987×1988的长方形的话，那么1987×1988应是6的倍数，但它不是。所以不能用若干个角片无重叠地盖住大小为1987×1988的长方形。

（2）能盖住，图15—15所示就是一种盖法。

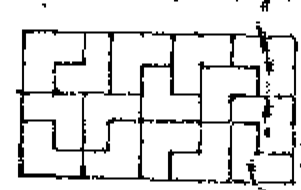


图15—15

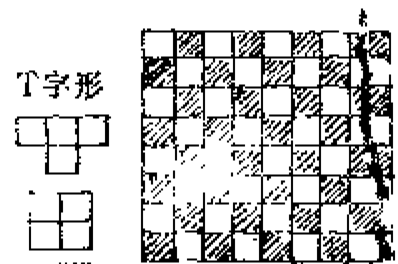


图15—16

例3　图15—16有一个8

×8的黑白相间的棋盘，用1小"田"字形纸片和15个"T"字形纸片能不能不重叠地盖住这个棋盘？

分析与解 黑白相间的棋盘有32个白格和32个黑格。如果用1个"田"字形纸片和15个"T"字形纸片能不重叠地盖住棋盘的话，它们应盖住32个白格和32个黑格。1个"田"字形纸片可盖住2个白格，1个"T"字形纸片能盖住1个或3个白格，因此1个"田"字形纸片和15个"T"字形纸片只能盖住奇数个白格而不是偶数个(32个)，所以用1个"田"字形纸片和15个"T"字形纸片不能无重叠地盖住8×8棋盘。

十二、涂色问题

上一节，在解答关于图形覆盖的问题中，为了说明的方便，已经使用了涂色的方法。这节所说的涂色问题，是就其问题中涉及到涂色。涂色问题和图形覆盖问题，有的只是提法上不同，其本质上是一致的，解答这些问题，往往是诸如奇偶性、整除性、抽屉原理等多种知识的综合应用。涂色问题在第十四章也有论述，这里再举几例说明。

例1 把一个正方体的各面都涂成红、黄、蓝色中的一种，有些顶点是三种颜色都不同的面的交点。现在要求使这样的顶点尽可能多，再把每一个这样的顶点都装上红、黄、蓝三色灯泡之一，问：至少有几个灯泡的颜色是相同的？

分析与解 正方体有8个顶点，每个顶点的3个面都是由上或下、前或后、左或右的3个面组成的，所以，只要把正方体的三对相对的两个面分别涂成红色、黄色或蓝色，那

么每个顶点的三个面就互不相同了。就是说这 8 个顶点都符合要求。

根据抽屉原理，因为 $8=2\times3+2$，所以至少有 $2+1=3$ 个灯泡的颜色是相同的。

例 2 把图15—17中每个小方格都涂上红色或蓝色，那么，一定有两（竖）列的涂色方式相同。请你说明理由。

红	兰	红	兰	兰	红	红	兰	
红	兰	兰	红	兰	红	兰	红	
红	兰	兰	兰	红	兰	红	红	

图15—17

分析与解 图15-17是 9×3 的长方形方格，每一列有三个方格，共有 9 列。把两种颜色涂在各小方格内时要注意顺序，经分析共有 8 种不同的涂色方法，如图 15-17。但一共有 9 列，把第 9 列涂上颜色，总是前 8 种之一，所以涂满后，至少有两列的涂法相同，即一定有两列的涂色方式相同。

例 3 平面上有六个点，如图 15-18。把连结这六点中的任何两点的连线都涂上红色或蓝色，那么，至少有一个三角形的三条边的颜色相同，请你说明理由。

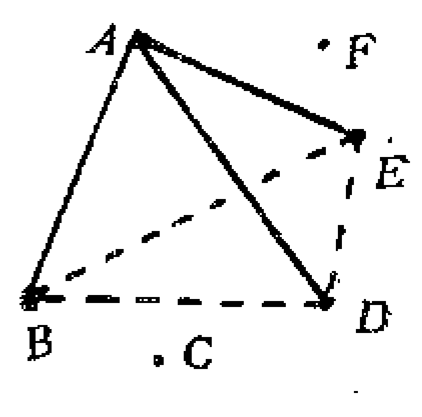


图15—18

分析与解 如果把任意两点的连线先作出来，再分别涂色后去一一验证，情况很多，不是可取的方法。那么，该如何办呢？

先分析从一点出发，分别与其余 5 点连成 5 条线段。用

实线表示涂的红色，用虚线表示涂的蓝色。从A点出发连结5条线段AB、AC、AD、AE、AF，分别涂红色或蓝色这两种颜色。因为$5=2\times2+1$，根据抽屉原理，某一颜色的线段不少于3条，不妨假设AB、AD、AE为红色。再连结BD、BE、DF三条线段。如果这三条线段中至少有一条是红色，设BD为红色，则三角形ABD的三边都为红色（图15-18）；如果这三条线段都是蓝色，则三角形BDE的三边都为蓝色。从其它点开始，其结果显然相同。这就说明了至少有一个三角形的三边的颜色相同。

例4　在一根长100厘米的木棍上，自左至右每隔6厘米染一个红点，同时自右至左每隔5厘米也染一个红点，然后沿红点处将木棍逐段锯开。那么，长度为4厘米的短木棍有多少根？

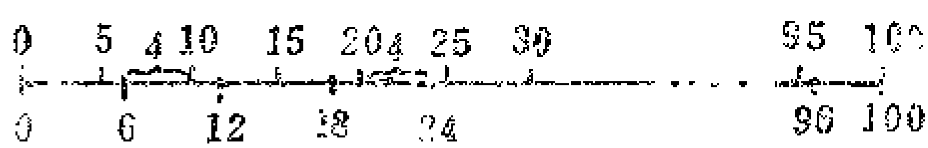


图15—19

分析与解　为便于分析，如图15-19画出两端的若干段进行分析，寻求规律。

自右向左每隔5厘米染一个红点，恰好把木棍平均分成20段。因为$6\times5=5\times6=30$，所以30厘米内恰有6段5厘米和5段6厘米的小段，而且不难知道有2段4厘米的小段，以后又重复出现。

因为$20\div6=3$（余2），$100\div6$余4

所以，4厘米长的短木棍共有

$2\times3+1=7$（根）。

注： 也可从尾数来分析。因$6+4=10$，所以6厘米长段数乘6的尾数为6的后一段必为4厘米；因$4+1=5$，所以6厘米长段数乘6的尾数为4的前一段必为4厘米，而6乘段数1，2，3，4，5的尾数为6，2，8，4，0。$100\div6=16$（余4），$16\div5=3$（余1）。所以4厘米长的短木棍共有$2\times3+1=7$（根）。由于这里6厘米长的小段只有16根余4厘米，直接乘6即很快得出结果。若木棍较长，如1000厘米，再用直接数的办法就笨了。

十三、周期性问题

日常生活中我们常见到"周而复始"的现象，如：日出日落，钟表指针的转动，星期几的出现，我国农历用天干甲、乙、丙……和动物12属性来代表年份，……。这些周而复始现象，数学上就叫做周期现象。称有周期现象的事件具有周期性（质），称周而复始出现的那一部份为一个周期。在第四章第一讲的例11（$\frac{1}{7}$化为小数后，小数点后面的第100位上的数字是几？）中，我们就是利用$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$循环小数的一个循环节上的数字142857周而复始的出现而求解的。利用周期性求解是竞赛中常见的一类题型。下面我们举几个竞赛题来进一步说明。

例1 有同样大小的红、白、黑三种珠子共180个，按先5个红的，再4个白的，再3个黑的，再5红、4白、3黑……排列着。问（1）黑珠共有几个？（2）第158个珠子是什么颜色？

解 这一排珠子是按红5、白4、黑3周期的排着。它的一个周期有珠子$5+4+3=12$个，这一排共有$180\div12=15$个周期，而每个周期内含3个黑珠，所以，这一排珠子中含有$15\times3=45$个黑珠。

由于$158\div12=13$余2，它说明第158个珠是第13个周期后的第2个。所以，第158个珠是红色。

从上面的解法中可以看出，利用周期性和周期述语来解这类题是多么的简捷明快！

例 2 如下表所示，每列上、下两个字（字母）组成一组，例如第1组是（我，A），第2组是（们，B）。

我	们	爱	科	学	我	们	爱	科	学	我	……
A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	……

（1）写出第62组是什么？

（2）如果（科，E）代表1983年，那么（学，F）代表1984年，……问2000年对应怎样的一组？

解 （1）表格中上行是5个字"我们爱科学"为一周期的汉字排列，因$62\div5=12$余2，所以第62组的第一个字应为"们"。表格中下行是7个字母"$ABCDEFG$"为一周期的字母排列，因$62\div7=8$余6，即第62组的第二个字母应为F。故第62组是（们，F）。

（2）由于$2000-1984=16$，而$16\div5=3$余1。又已知（学，F）代表1984年，所以2000年对应的那一组的第一个字是经过3个周期后的第一个字，即"我"。同理，由于$16\div7=2$余2，F后面的第二个字母是A，所以2000年对应的那一组的第二个字母是A。故2000年对应的那一组是

（我，A）。

例3 按某规律排列的数列：1，2，3，4，3，4，5，6，5，6，7，8，7，……。

（1）要调查第100个数（即第100项上的数），先将数4个4个地分组：

第1组：1，2，3，4　　第2组：3，4，5，6

第3组：5，6，7，8　　第4组：7，8，9，10

……　　……

问：第100个数在第几组？这个数是几？

（2）73是在第几组？第几个？

（3）到200个数为止，奇数的和为a，偶数的和为b，则$b-a$等于几？

解 （1）由于是按"4个4个地分组"，所以，我们可以视数列为"4个数"为一周期的分组数列。由于$100\div4=25$，所以第100个数是在第25组。要求它的数值，我们必须观察出每一组中第一个数的值，从1，3，5，7，……不难看出它们是$2n-1$，其中n表组数。由于$100\div4=25$知，数列的第100个数是在第25组：$2\times25-1=49$，50，51，52，且为最末一个数。故所求的第100个数是52。

（2）上知第n组的第一个数为$2n-1$（第$n-1$组的第3个数也是$2n-1$）。由于$73\div2=36$余1，所以73只能在第36组或37组中。若在37组中则为它的第一个数，即为数列的第$4\times36+1=145$个数，若在36组中则为它的第三个数，即为数列的第$4\times36-1=143$个数。

（3）由分组规则知，每组中两个偶数的和都比两个奇数的和多2，而200个数共有$200\div4=50$（组），所以$b-$

$a=2\times50=100$。

这例如果题目不给你分组方法的规定，而叫你直接求（1）数列的第100个数为几？（2）73为数列的第几个数？（3）问不变，则需要叫你自己去找出数列的规律。我们也可以不象题目上给定的方法来分组，例如，采用这样的分组法：（1，2），（3，4，3，4），（5，6，5，6），（7，8，7，8），……，也可较易解出来。

由上几例知，利用周期性解题的关键首先是观察出问题本身具有的周而复始的现象（并不是仅仅指值相同现象）并由此找出周期。这两者是紧密相联的。

练习15

1．某校选出男教师的$\frac{1}{11}$和女教师12人参加广播操比赛，剩下的男教师人数是剩下的女教师人数的2倍，已知这个学校共有教师156名，求这个学校男、女教师各有多少名？

2．幼儿园有三个班，甲班比乙班多4人，乙班比丙班多4人．老师给每个小孩分枣子，甲班每个小孩比乙班每个小孩少分3个枣子，乙班每个小孩比丙班每个小孩少分5个枣子．结果甲班比乙班总共多分3个枣子，乙班比丙班总共多分5个枣子．问三个班总共分了多少枣子？

3．三种动物赛跑，已知狐狸的速度是兔子的三分之二，兔子的速度是松鼠的2倍，一分钟松鼠比狐狸少跑14米，那么半分钟兔子比狐狸多跑___米．

4．有大、中、小三种箱子共50个．每个大箱子装有70个乒乓球，中箱子装有30个乒乓球，小箱子装有20个乒乓球，一共装了乒乓球1800个．又知中箱的数量是小箱的3倍．问三种箱子各有多少

个？

5．如图15—20．一个边长是1米的正方形，取各边的中点连成第二个正方形；再取第二个正方形各边的中点连成第三个正方形．如此继续下去，可以得到第四个、第五个……正方形，求第十个正方形的面积是多少平方米？

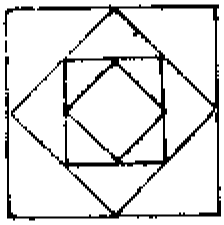


图15—20

6．试由2×3、3×5、4×8方格纸上正方形的个数归纳出$m\times n$（m、n为自然数，且设$m\leqslant n$）方格纸上正方形的个数计算公式．

7．有一路公共汽车，包括起点和终点共有15个车站．如果一辆汽车，除终点外，每一站上车的乘客中，恰好各有一位乘客从这一站到以后的每一站．为了使每位乘客都有座位，问这辆公共汽车最少要有多少个座位？

8．由同一数码组成的自然数中，完全平方数有多少个？把它们都求出来．

9．形如$1!+2!+3!+\cdots+n!$这样的数中，有多少个完全平方数？把它们都求出来．

10．蜘蛛有8条腿，蜻蜓有6条腿和两对翅膀，蝉有6条腿和一对翅膀．现有这三种小虫18只，共有118条腿和20对翅膀．问每种小虫各几只？

11．全校数学竞赛，A、B、C、D、E五位同学取得了前五名，老师对他们说：“祝贺你们的胜利，现在请猜一猜你们的名次是怎样排的？”

A说：“B是第三，C是第五。”

B说：“D是第二，E是第四。”

C说：“A是第一，E是第四。”

D说：“C是第一，B是第二。”

E说：“D是第二，A是第三。”

老师说：“你们每人恰好都猜对了一半。”

这样一说，五位同学就把名次弄明白了。

请你把他们的名次排出来。

12．平面上有10条直线，其中每两条直线都相交，且任意三条直线都不相交于同一点，那么这些直线把平面分成多少部份？

13．玲玲和蓉蓉在静水里游泳的速度相同．一天她们到河里游泳，在同一个地方下水，玲玲逆游而上，蓉蓉顺游而下．但开始游时，玲玲不小心，把带的木珠项圈掉入河中顺水漂去．她们游了一会儿才发现项圈掉了，同时返游回来．她们谁先拿到项圈？

14．甲乙两人都从A城到B城，甲骑自行车，乙骑摩托车，甲比乙早2小时15分出发．乙走了2小时，还在甲后面11公里；乙再走3小时，超过甲13公里．结果乙比甲早1小时45分到达B城，乙到B城后立即返回，在途中与甲相遇．此时，甲一共行了多少公里？

15．某农场收割水稻．头三天，在农校师生的支援下，平均每天收全部稻田的$\frac{1}{4}$，以后，农校师生支援劳力少的村民去了，第四天收割了剩下稻田的$\frac{1}{3}$，第五天又收割了剩下的$\frac{4}{5}$，第六天收割4亩就全部完成任务．农场原有稻田多少亩？

16．$14^6 =$ ____．

下面的答案中，只有一个是正确的，不直接计算14^6，指出是哪一个？

(A) 7529344　　　(B) 7529536

(C) 7529582　　　(D) 8529536

17．刘松练习5000米长跑，成绩大有提高，时间比原来缩短了$\frac{1}{10}$，速度提高了几分之几？

18．数列$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{24}$，$\frac{1}{48}$，$\frac{1}{80}$，……．

求（1）第20个数，（2）前20个数的和。

19. 数 $\underbrace{19901990\cdots1990}_{20\text{个}1990}$ 除以9的余数是几?

20. 用1×4的长方形纸片能不能不重叠地把一个10×10的方格棋盘覆盖完?

21. 证明：用一个“田”字形纸片和15个1×4长方形纸片不能覆盖8×8的方格纸.

22. 有两条1×10的相同塑料方格带上，将各带上的方格分别涂上黑白两种颜色之一，(允许相连几个方格涂同色)，两带上的黑格数的奇偶性相同，然后，将两带重叠在一起. 证明：必有偶数对不同色的方格重叠在一起.

23. 将6×6的正方形方格纸的部份1×1小方格涂成红色. 如果随意划掉3行3列，都要使剩下的小方格中一定有一个是红色的，那么至少要涂多少个小方格?

24. 把一个正方形分成四个大小一样的小正方形. 用两种不同的颜色涂色，每个小正方形涂一种颜色. 问：有多少种不同的涂色方法?（经过旋转后可以使所有同色正方形重合的算同一种涂色方法）

25. 如图15—21所示，是一个3×n（$n>1$的整数）的长方形. 用红兰两种颜色涂每一个1×1小正方形（每个小正方形涂同种颜色，允许相邻小正方形涂同一颜色）. 如果要使每一个至少由4个小正方形组成的长方形（如图中虚线所示就是一个）的四个角上的小正方形涂的颜色不全相同. 那么n的最大值是多少?

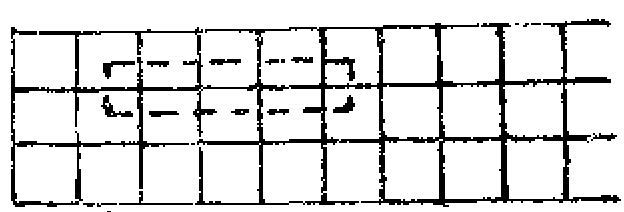


图15—21

26. 用13个1×1×2的长方块能不能堆成一个空心的3×3×3正方体?

27. 图15—22中的9×9正方形纸片去掉了一条对角线正中间和两顶角

处的小正方形（即3个阴影小正方形）．把这张纸片可以切成多少块1×3的长方形小纸片（不能拼接）？

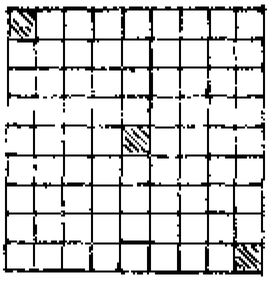


图15—22

28．甲、乙二人对一根3米长的木棍涂色，首先，甲从木棍端点开始涂黑5厘米，间隔5厘米不涂色，接着再涂黑5厘米，这样交替做到底．然后，乙从木棍同一端点开始留出6厘米不涂色，接着涂黑6厘米，再间隔6厘米不涂色，交替做到底．最后，木棍上没有被涂黑部分的总和为多少厘米？

29．用图示法分析解答：

（1）编号为1，2，3，4，5，6的六个运动员举行乒乓球单循环赛．到某天为止，编号为1，2，3，4，5的运动员已参加比赛的场数正好分别等于他们的号数．问：到这时为止，编号为6的运动员参加了几场比赛？

（2）对运动员人数为2，3，4，5，7，8，9分别研究同样问题，

（3）对运动员人数为$2n$或$2n+1$（n为自然数）分别研究同样问题．

30．把$\frac{1}{7}$化为小数，求：

（1）小数点后第100个数字是什么？

（2）小数点后的前100个数字的和是多少？

31．有一排小朋友按1，2，3，4，…报数，小勇说：“把我们报的数的和减去我报的数恰好等于200”．你知道这一排小朋友有多少人，小勇报的数是多少吗？

32．把$\frac{1}{81}$化成小数后，小数点后面1001位各位上的数字之和是多少？

33．$\underbrace{7\times7\times\cdots\times7}_{1987个7}$的尾数是几？

34. 1990年2月4日是星期日，再经过 $\underbrace{19851985\cdots1985}_{1986\text{个}1985}$ 天是星期几？

35. 阳历1978年1月1日是星期日，阳历2000年的1月1日是星期几？

36. 有10名学生编成1到10号，他们依次围成一个圆圈，现在从1号开始，每数到第3个人发一本书（只发一次），那么最后一个拿到书的应该是几号？

37. 一个一千位的数，所有的数字都是1，问这个数被7除余几？

38. 有一本故事书，每2页文字之间有3页插图，也就是说3页插图前后各有一页文字。

（1）假如这本书有96页，而第一页是插图，这本书共有插图多少页？

（2）假如这本书有99页，而第一页是插图，这本书共插图多少页？请说明理由。

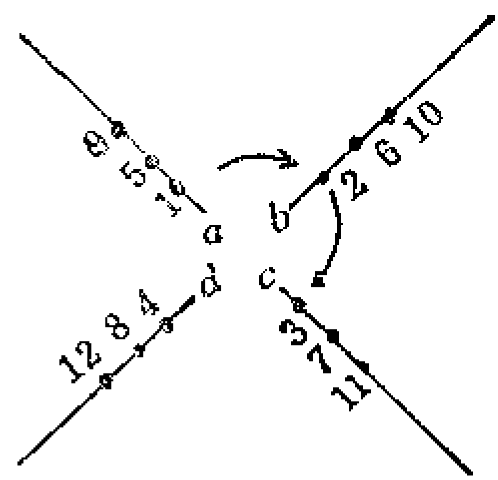


图15—23

39. 有a、b、c、d四条直线(如图15—23)，从直线a上开始按箭头方向从1开始依次在a、b、c、d上写上整数1，2，3，4，5……。

（1）整数303在a、b、c、d中哪一条直线上？

（2）直线a上第99个整数是几？

40. 43位同学，他们身上带的钱从8分到5角，钱数都各不相同。每个同学都把身上带的所有的钱各自买了画片，画片只有两种，3分一张和5分一张，每人都尽量多买5分一张的画片。问他们所买的3分画片的总数是多少张？

练习题答案、提示与略解

练习 5

1．（1）5467×898＝4909366

（2）57236÷164＝349

2．（1）123×135＝16605

（2）28750÷46＝625

3．775×33＝25575

4．（1）263×19＝4997

（2）1234×56＝69104

（3）66×111＝7326

（4）625×721＝450625

5．90625．

6．（1）12345679×9＝111111111

（2）1089×9＝9801

7．1014或1035（为1014时，除数为3，2，为1035时，除数为5，9或3）

8．(1)949÷73＝13　　(2)1431÷27＝53

(3)192÷16＝12　　(4)117684÷12＝9807

练习 6

1．8平方厘米． 2．36个． 3．23人． 4．80个． 5．650人．

6．20人　7．5人．

练习 7

1．26892，22896． 2．119896，819896． 3．419892，819896

4. 619892　　5. 4643424　　6. 3.51元

7. 六位数能被$7\times8\times9=504$整除，$\overline{522xyz}$用504试商，得商为1036或1037，当商为1036时$\overline{xyz}=144$，不合题意舍去，当商为1037时$\overline{xyz}=648$合题意为本题的解。

8. 因为$\overline{ababab}=\overline{ab}$（两位数）$\times10101=\overline{ab}$（两位数）$\times3\times7\times13\times37$

9. 这本书的页数在320至360页之间，$18^2=324$，所以每天读18页，18天读完。

10. 孙小明、郑小欢；钱小光、吴小乐；赵小亮、周小喜。

11. 这个数最大为32，余数为27.

12. $3\times5\times7\times13=1365$，五位数中1365的最大倍数是$1365\times73=99645$，再经试算可得$1365\times69=94185$即为所求.

13. $396=11\times9\times4$.两个九位数的差应能被11、9、4整除。容易知道这个差能被9、11整除，再用枚举法分析能被4整除的情形得：$1\times9=9$，$9\times3=27$，$4\times2=8$，$2\times6=12$，$6\times8=48$，$5\times7=35$共六种.

14. 301

15. 53

16. $13903-13511=392=7^2\times2^3$，$14589-13903=686=7^3\times2$，m的最大值是$7^2\times2=98$.

17. 由1开始的自然数依次写下的201位数是由1开始的103个连续自然数组成的，每连续3个自然数的各位上数字的和都能被3整除，$103\div3$4余1，所以这个数除以3的余数是1.

18. 观察此数列的规律知：除第一项数1外，其他的偶数项的数是项数的3倍；奇数项的数是它前一项数多1，因此第133项上的数是$132\times3+1=397$，$397\div7=56$余5，故所求数为5.

19. 因$90-69=21$，$125-90=35$，$125-69=56$，而21，35，56的最大公约数是7，且再没有别的公因子，所以$m=7$，而$81\div7=11$，于是81被$m=7$除余数是4.

20. 因16～1900中能被3整除的个数＝(1900÷3)－5＝628，能被5整除的个数＝(1900÷5)－3＝377．能被15整除的个数是126－1＝125．所以在16～1900中不能作分子的数的个数＝628＋377－125＝880．(1900－15)－880＝1005．从1900倒数6个不能被3、5整除的数是1889．第999个假分数的分子是1889．

练习 3

1．因为连续的100个自然数中，个位与十位数字相同的有10个。因此，分段枚举可得，符合条件的数共有 1＋700＋80＋9＝790个．

2．通过枚举试验，可以看出，为了使乘积尽可能大，分成的数最好是2和3，且2的个数不多于二个，其余都是3。所以，应把20分成一个2和六个3。

其乘积最大为 $2\times3^6=1458$

本题的结论，可以推广到任意的自然数。

3．根据百位数字分别为1，2……9，枚举可符合条件的数共有：

10＋9＋8＋……＋2＝54(个)

4．容易得出，小强再胜两盘、小明再胜三盘便能最后决出胜负，两人至多比赛七盘。若用a表示小强胜，b表示小明胜，作分枝图如图1，(图中四、五、六、七分别代表第四盘、第五盘、第六盘、第七盘)从图中可以看出，共有10种不同的比赛情况。其中小明获胜的可能有4种。

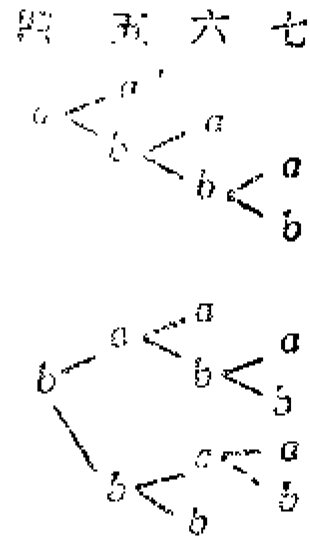


图1

5．28段．

6．符合条件的数有144，321和400．

7．设三棵桃树共结了x个桃子，第三棵结的桃子数是总桃子数的$\frac{2}{7}$(

为整数）。

根据题意有：

$$303+\frac{1}{5}x+\frac{k}{7}x=x$$

于是有 $x=\frac{35\times303}{28-5k}$

显然，k不能大于5，即k只能取1至5的整数。但当k为偶数时，$28-5k$不能整除35×303，因此k只能取1，3，5，经验证，k只能是5。此时，x等于3535。所以，三棵桃树共结了3535个桃子。

8．352平方厘米．

9．三人年龄分别为32、33和34岁。

10．分$n=5k+1$、$5k+2$、$5k+3$、$5k+4$四种情形讨论n^2都不是5的倍数。例如$n^2=(5k+1)^2=5(5k^2+2k)+1$，可知不是5的倍数。

11．对三个整数除3的余数分三类讨论：①有一个余数为0，则积能被3整除；②一个余数为1，一个余数为2，则这两数的和能被3整除；③有两个余数相同，则这两数的差能被3整除．

12．满足题目条件的情形只有如下的10种：

$1+1+1+1+2+6=12$　　$1+1+1+1+3+5=12$

$1+1+1+1+4+4=12$　　$1+1+1+2+2+5=12$

$1+1+1+2+3+4=12$　　$1+1+1+3+3+3=12$

$1+1+2+2+2+4=12$　　$1+1+2+2+3+3=12$

$1+2+2+2+2+3=12$　　$2+2+2+2+2+2=12$

显然每个等式中有若干个数的和等于6．

13．前十个“好的”自然数是：

$6=2\times3$　$8=2\times4$　$10=2\times5$　$14=2\times7$　$15=3\times5$

$21=3\times7$　$22=2\times11$　$26=2\times13$　$27=3\times9$　$33=3\times11$

则它们的和$=6+8+\cdots+27+33=182$．

14．一共赛6场．因丁败给了甲，所以丁不能胜3场，同时丁也不能胜2场或1场，因为这样，甲、乙、丙共胜4场或5场，他们胜的场数就不可能相同，所以丁只能胜0场。

练习 9

3. 不妨假设人的寿命不超过4万天(约110岁)，把每4秒钟当成一个"抽屉"，则"抽屉"数为(3600×24×4万)÷4=8.64亿。我国人口以11亿计，据原理Ⅰ，即知结论成立。

4. 因无一所学校全胜，得分最多为10分，故各校得分只能是0、1、2、……、10这11个数中的某一个，而学校所数为12，由原理Ⅰ可得结论。

5. 3面。　　6. 5只(因43=4×10+3)　　7. 4件。　　8. 500人。

9. 三种杂志的搭配方式只有7种，把搭配方式当作"抽屉"，因52=7×7+3，所以至少有8人订的杂志相同。

10. 8人站成一列，按男、女站立顺序的不同共有8种可能性：

男　男　男　女　男　女　女　女

男　男　女　男　女　男　女　女

男　女　男　男　女　女　男　女

这8只"抽屉"装9列，结论自明。

11. 9×4+1=37(本)

12. 仿例11可得。

13. 最不利情况是拿出同色筷8根。剩下两色作为两只"抽屉"，只要再拿3根即可。故至少要拿11根。

14. "十字"图形共有(23－2)×(23－2)=441个。"十字"图形的5个数的和至少是1×5=5，最多是9×5=45，共有41个不同的和，作45只"抽屉"，因441=10×41+31，所以至少有11个"十字"图形的5个数的和相等。

练习 10

1. 根据胜与负的场数，进球与失球的个数分别相等填写。

2. 甲在B校教数学，乙在C校教语文，丙在A校教外语。

3. 将可能出现的八种答案列成表，表中分"可能的答案"，"说真

话者”，“说假话者”。得B说真话（或C说真话）

4. 如果是A，则B、C都对。如果是B，则A，C都对，所以是C。

5. 孙教数学。

6. 铁矿。丙为老工人，乙为实习生，甲为普通队员。

7. 因$(39-1)\div(4+1)=7$余3，所以先报者有必胜的策略：第一次报1、2、3，以后每次报的个数与后报者报的个数之和等于5个。

8. 因$1991\div(5+1)=331$余5，则先报者应第一次报5个数才有必胜的对策。

9. 争取先拿第二堆里的3根，使给后拿者留下两个根数相同的堆，并始终如此。

10. 先拿者有必胜的对策：第一次拿第三堆中的1根，使三堆总数等于偶数，即(1，4，5)。且以后始终如此。

11. 先拿者有必胜的对策：先拿去正中的1颗或3颗，以后对方拿多少颗就跟着拿多少颗。如果先拿者不知上述必胜对策，后拿者可利用对方失误，设法给对方留下颗数相等的（有间隔的）两排，后拿者也可获胜。

12. 因共有1989格要走，而$1989\div5=397$余4，先走者第一次走4格，就有必胜的策略，以后轮走的格数与后者走的格数“凑够5”。

13. 因$100\div11=9$余1，所以只要先报数者第1次报数1，就有必获胜的策略（“凑11法”）。

14. 甲一定可获胜，甲先写10。

15. 应当乙。因为只有偶数个数要擦去，乙就有必胜的策略：乙尽量多擦奇数，直到最后剩下四个数之前无奇数可擦。①若最后剩下四个数中的偶数不少于3个，若有一个奇数，乙只需再擦去这一个奇数（此时甲不会擦此奇数的，因为甲擦了它，显然乙胜）；②若最后剩下的四个数中是二奇二偶，只要乙在前面擦奇数时注意保留两个不互质的奇数，就必获胜，由于乙在前面尽量擦奇数，就不可能最后剩四或三个奇数。

16. 后走者有必胜的策略："跟着前者走"，即前者走左格，后者也走左格，前者走下格，后者也走下格。前者走左下对角线格，后者也走左下对角线格（注。若改为10×10，这种策略就不能获胜，此时谁有必获胜的策略？）

练习11

1. 5×5=25
2. 4×1+2×3=10
3. (8×7)÷2=28
4. 5×4×3×2=120
5. 4×3×2×1×2=48
6. 5×4×3=60
7. 6
8. 够用
9. (1)45，(2)30

练习12

图 2

最少要用　2+8+5+4+6=25（分钟）

2. 最少要用　50×4+2+4−10+11=207（人）

3. 如图3从甲到E，再到F，最后到乙。（这里两次用到"对称"。

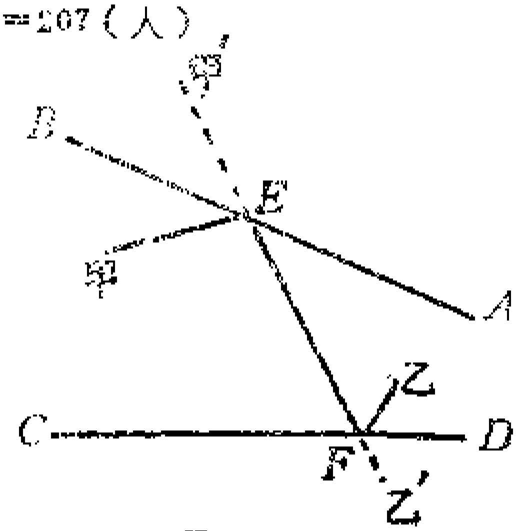


图 3

4. 麦场设于D最好。

5.

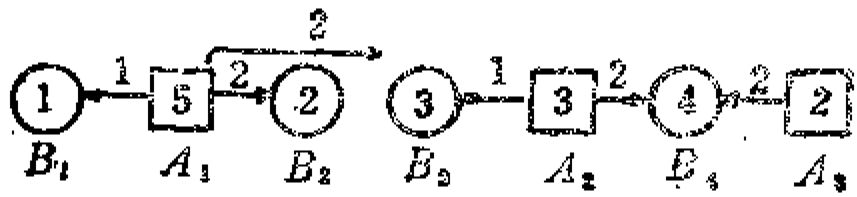


图 4

6. 大卡车运货耗油量2公斤/吨，小卡车运货耗油量2.5公斤/吨。故要使耗油量最少必须尽可能安排用大卡车运。

157＝5×31＋2，所以用31辆大卡车，1辆小卡车运货，耗油量最小。

7. 先洗开水壶，接着烧开水，在等水开的过程中同时洗茶壶、洗茶杯、拿茶叶，水开了就沏茶，这样只用16分钟。

8. 赵乡长应在乙村召集会议最合理，因为这时所有参加会议的人所走路程的总和是：

$$5\times8+5\times3+10\times7=125（公里）$$

在其他村开会，路程总和都比125公里多（具体计算可知）。

9. 张医生应该给治疗时间短的先治病，治疗时间长的最后治病。因此次序为：小赵、小李、小孙。

总留时间$=1+(1+3)+(1+3+5)=14$（分钟）。

10. 因五号仓库存40吨，超过了总数70吨的一半，所以要把一、二号仓库的货物都集中到五号仓库，这时要花的运费是：

$$0.5\times(10\times400+20\times300)=5000（元）$$

11. 因粗管公里价是细管公里价的4倍，且细管只能供一村用水，所以从县城到a_7只能一根粗管，然后才用三条细管分别接a_8、a_9、a_{10}三个村，其费用才最节约。如此，工程的总费用为：

$$8000\times(30+5+2+4+2+3+2)+2000\times2+2000\times(2+2)$$
$$+2000\times(2+2+5)=414000（元）$$

12. 共需35根8米长的钢筋，因为20根8米长的钢筋可截3米长的钢筋

40根，2米长的钢筋 20根，15根8米长的钢筋可截2米长的钢筋 60根。

练习13

1. 提示：可将$a\times c\times \overline{ac}=\overline{ccc}$转变成$a\times\overline{ac}=\overline{ccc}\div c=111$，则$a=3$，$c=7$。
2. 719820；219825
3. 8712
4. 提示：如果这个数是平方数，这个不是5的数字所在的位置有两种可能，最后一位数是5和不是5。

   如果是5，则那个待定数字必是2，而且在十位上，即原数98个为：$\overbrace{55\cdots\cdots}^{98个5}525$，而百位数字是5不是偶数，不可能是平方数。

   如果个位不是5，十位数字必然是5，依完全平方数末二位数字的规律知个位数字只能是6，即$\overbrace{55\cdots\cdots5}^{99个5}6$。可见这个数的各位数字和为$99\times5+6$能被3整除，但不是9的倍数，此数不是平方数。
5. 7，$1101111_{(2)}$，$667_{(10)}$，$1100011_{(2)}$，$54_{(10)}$
6. $10011_{(2)}$，$1010101_{(2)}$
7. 这五袋的件数分别是1件，2件，4件，8件，14件（最后一袋不是16件）。

练习14

1. 一行1、2、9；二行4、3、8；三行5、6、7。
2. 奇数个杯口向上的杯子要能全部杯口向下，必须总共移动奇数个杯子奇数次方能完成。问题要求每次翻动偶数个杯子，无论怎样翻动，其翻动总次数总是偶数，因此不可能实现全部杯子杯口向

下的状况。

3. $1+7=8$　　　　　　$4+5=9$

$9-5=4$　　　或　　$8-1=7$

$2\times3=6$　　　　　　$2\times3=6$

4. 提示：解决这个问题的关键是把全体自然数分为奇数与偶数两类，然后逐步讨论解决。

5. 假设64是$n+1$个连续自然数的和，那么

$$64=a+(a+1)+\cdots+(a+n)=(n+1)(2a+n)\div2$$

由此有$(n+1)(2a+n)=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$（其中$a$，$n$都是自然数。）

由上式知，$n+1$和$2a+n$都必须是偶数，它们都含有（除去1以外）若干个2组成的约数。

由于$n+1$是偶数，则n必是奇数。$2a$是偶数，n是奇数，则$2a+n$是奇数。这与上面导出的“$(2a+n)$是偶数”的结论矛盾。

因此64不可能是n个连续自然数的和。

6. 提示：两人每握一次手，总次数都增加2次，因此握手的总次数是偶数。则有：

握手为偶数次的总次数+握手为奇数次的总次数=全体互相握手的总次数。

最后的结论是：握手次数是奇数的人的总人数是偶数。

7. 提示：由抽屉原理知a、b、c中至少有两个相同的奇偶。

8. (法1)提示：1，2，3，…，n，a_1，a_2，…，a_n中有$n+1$个奇数，“抽屉”(a_1+1)、(a_2+2)、…、(a_n+n)只有n个。

(法2)提示：奇数个a_1+1，a_2+2，…，a_n+n之和为偶数$2(1+2+\cdots+n)$，则它们不可能全为奇数。

9. 提示：若没有一个座位是上、下午由不同学校的学生坐，则一校学生上午坐某K个座位，下午还必须坐这K个座位，这样该校看电影的学生人数就是偶数$2K$个，$2K$不可能等于奇数1991。

10. 乌龟牌必在余牌多的人手中。

11. 提示：用例12的黑白涂色法知“黑位”数不等于“白位”数。所以不可能实现那种交换。

12. (1)最少需三种；(2)最少需四种。

13. 提示：a当小于21时，序号为$2a$（偶数）的点染红色，下一个奇序号点染兰色；当a大于21时，仍是偶序号点$2a-40$点染红色，下一个奇序号点染兰色。

14. 提示：因残缺棋盘上黑白小格总数相差2个，而一张1×2的长方形纸片必盖一黑一白格。

15. 提示：用黑白相间染色后，黑白小正方形的个数不等。

练习15

1. 男90人，女57人。

2. 673个。

3. 14米。

4. 大、中、小各是10个、30个、40个。

5. $\frac{1}{2^9}=\frac{1}{512}$（平方米）。

6. $m\times n+(m-1)(n-1)+(m-2)(n-2)+\cdots+2\times(n-m+2)+1\times(n-m+1)$。

7. 56个。

8. 利用平方数的个位数与十位数特征可以证明，由同一数字组成的两位以上（包括两位）的自然数中，没有平方数。故所求的平方数仅有1、4、9这三个。

9. 有两个，即：$1!=1$，$1!+2!+3!=9$.

10. 蜘蛛5只，7只蜻蜓，蝉6只。

11. D第一，B第二，A第三，E第四，C第五。

12. 用递推方法求得56部分。

13. 先转化为静水中游，而在河里，她们和项圈都被水推下同一段路

程，所以她们同时拿到。

14. $106\frac{7}{8}$公里。

15. 120亩。

16. (B)是正确的。

17. $\frac{1}{9}$

18. (1)$\frac{1}{40\times 42}$，(2)$\frac{5}{21}$

19. 2.

20. 不能。用四种不同的颜色涂在10×10棋盘的各方格内，可知各种颜色的方格数不相等，而一个1×4纸片所盖四种颜色的方格各一个，所以不能。

21. 把8×8方格纸的方格按两白两黑涂色，得32个白格，32个黑格。而一个1×4纸片盖住2个白格，一个田字方格纸片盖住1个或3个白格，由此得出矛盾。

22. 分黑格数为奇数个和偶数个两种情况，运用奇偶性证明。

23. 10个。如图5就是一种涂法。

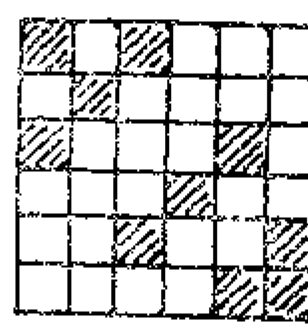


图5

24. 共6种不同的涂色方法。如图6.

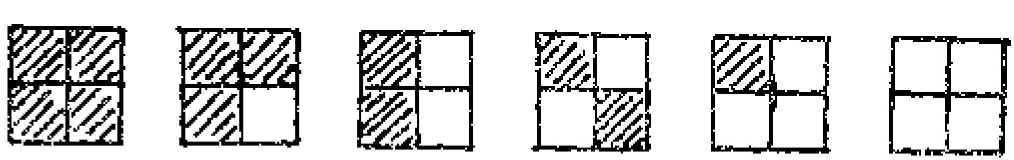


图6

25. $n=6$，不取全红和全兰的列（仿图15—17）。

26. 不能堆成。可将由26个1×1×1的小正方块堆成的空心3×3×3个正方体，黑白相间地涂色，根据黑白小方块块数不同来说明。

27. 24块。

28. 75厘米。分析60厘米内没涂黑部分的和为$1+3+5+4+2=15$厘米。

29. (1)3场。

(2)1场，1场，2场，2场，3场，4场，4场。

(3)n场，n场。

30. (1)8；(2)447。

31. 20人，10。

32. 化为小数$0.\dot{0}1234567\dot{9}$，周期为9个数，其和$1+2+\cdots+7+9=37$，而$1001\div9=111$余2，故所求和$=1+37\times111=4108$。

33. 观察数列7^1，7^2，7^3，7^4，7^5，…的尾数是7，9，3，1，7，9，3，1，…，是以4为周期的出现（7，9，3，1这几个数）。$1987\div4=496$余3，故所求数为3。

34. 因198519851985能被7整除，而$1986\div3=663$，所以为星期日。

35. 从1978年至1999年共17个平年，5个闰年，有$365\times17+366\times5=8035$（天），$8035\div7=1147$余6，所以阳历2000年的1月1日是星期六。

36. 因从1开始每数到第3个人发一本书，直到最后一个拿到书共数了$3\times10=30$(次)，而$30\div10=3$，所以最后一个拿到书的人是10号。

37. 先用7去试除头几位数字，可发现$111111\div7=15873$，头六位数可以被除尽，因此，从首位开始，每六位可视为一个周期，都能被7除尽。由$1000\div6=166$余4，说明在166个周期的111111后面，还有一个四位数1111，而$1111\div7=158$余5，则所求数为5。

38. (1)故事书的页是按：…文字，插图，插图，插图，文字，插图，插图，插图，文字，…排列。我们把"一文三图"视为一个周期，每个周期内有三页插图，所以这本书共有插图$3\times(96\div4)=72$（页）。

(2)$99-96=3$(页)，这余下的3页只可能是以下情况中的一种：

图、图、文；图、文、图；图、图、图，即：余下3页中可能有2页插图，也可能有3页插图，因此这本书可能有74页或75页插图。

39．(1)4个数字为一周期，303÷4＝75余3，所以整数303在c直线上。

(2)直线a上第99个整数是$(99-1)\times 4+1=393$．

40．从8分到50分（5角）有43个数，43个同学所带的钱就分别是8，9，10，11，12，13，14，15，16，…，50（分）．由于尽可能的多买5分一张（且买完钱）的画片，他们买的画片情况为：

钱数	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19…
5分张数	1	0	2	1	0	2	1	3	2	1	3	2…
3分张数	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3…

观察买3分画张数的规律是五个数为一个周期，由此可推算出43÷5＝8余3。共买了$1+3+(1+3+2+4)\times 8=84$（张）。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学奥林匹克初级读本　（下册）
作者＝四川省数学学会等编　魏有德主编
页数＝１６３
ＳＳ号＝１１３００７２２
出版日期＝１９９０年１２月第１版

前言

目录

目　　　　录