前　言

国际数学奥林匹克竞赛是世界上影响最大、水平最高的中学数学竞赛，得到各国政府的广泛重视和支持。我国从1985年派队参加这一竞赛以来，成绩逐年提高，1989年（第三十届），我国六名选手参赛，荣获四枚金牌，两枚银牌，团体总分第一。要使我国数学达到世界先进水平，必须从基础抓起，从初中抓起。中国数学会决定从1985年起每年四月举办全国初中数学联赛，这对于提高中学数学教学质量，培养和选拔优秀人才，无疑将产生深远的影响。

为了给中学数学教师和中学生提供有关初中数学竞赛的信息和资料，我们收集了1986—1989年全国及各地举办的初中数学竞赛、联赛、邀请赛与通讯赛试题共50套，全部给出了解答，供读者参考。

本书有以下特点：

（1） 资料比较齐全，内容十分丰富。目前国内同类书中收集这样多的试题还不多见，因此是一份宝贵的资料。

（2） 知识覆盖面广，涉及面宽。既有初三试题，又有初一、初二试题，包括了初中代数、几何、三角及整数等多方面知识，可供初中各年级学生参考。

（3） 题型新颖多样，富有启发性。试题中既有是非

题，又有填空题；既有选择题，又有综合题；既有证明题，又有计算题；既有概念题，又有应用题。通过练习，有助于学生能力的提高。

（4）题目具有代表性，典型性强。试题都经过命题者精心组织，通过这些典型题的练习，可以起到举一反三的作用。

（5）题目由浅入深，难易适度。不仅中学数学教师和参加数学竞赛的学生可以参考，而且一般学生都可以参考。

（6）全部试题都有解答。本书除综合题有解答外，对是非题、填空题和选择题，不仅给出答案，而且给出了解题过程，这样，中等生和差生也可阅读本书。建议中学生在阅读本书时，自己先动手想一想、做一做，再对照解答，要相信自己的能力，不要对解答产生依赖心理，你也许会发现，你的解答可能比书上更巧妙。

书中几何部分的解答由邓御宠编写，其他部分由谢云荪编写，有些解答参考了有关书刊。限于水平，疏漏之处，敬请读者批评指正。

编 者

1989年7月于重庆

目　录

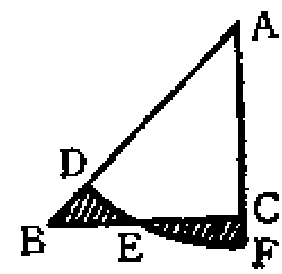
试 题

1986年全国初中数学联赛

一、填空题（本题满分 48 分）。请将正确的答案填在横线“____”上方，每填对一小题得 8 分。

1． 如果方程$x^2+px+q=0$的一根为另一根的 2 倍，那么p、q所满足的关系式是____．

2． 如图，在直角$\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\overset{\frown}{DEF}$的圆心为A，如果图中两个阴影部分的面积相等，那么$AD:DB=$____．



3． 将自然数N接写在每一个自然数的右面（例如，将2接写在35的右面得352），如果得到的新数都能被N整除，那么N称为魔术数。在小于 130 的自然数中，魔术数的个数为____．

4． 设a、b、c、d都是整数，且$m=a^2+b^2$，$n=c^2+d^2$，则mn也可以表示成两个整数的平方和，其形式是：$mn=$____．

5． 若$x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$，则分式

$$\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}=\_\_\_\_.$$

6. 已知抛物线$y=-x^2+2x+8$与x轴交于B、C两点，点D平分BC。若在x轴上侧的A点为抛物线上的动点，且$\angle BAC$为锐角，则AD的取值范围是____。

二、选择答案题（本题满分48分）。本题每个小题目都给出A、B、C、D四个答案，其中只有一个是正确的*，请把正确答案的代号选出，填在题末的圆括号内，每填对一小题得8分，填错得0分，不填得2分。

1. 已知$\log_x a=a$（a为大于1的正整数），则x的值为（　）

(A) $10^{a\lg a}$。 (B) $10^{(\lg a)/a^2}$。

(C) $10^{(\lg a)/a}$。 (D) $10^{a\lg\frac{1}{a}}$。

2. 如果$a<b$，那么$\sqrt{-(x+a)^3(x+b)}$等于（　）

(A) $(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$。

(B) $(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$。

(C) $-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$。

(D) $-(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$。

3. 若关于x的方程$||x-2|-1|=a$有三个整数解，则a的值是（　）

(A) 0。 (B) 1。 (C) 2。 (D) 3。

4. 记号$[x]$表示不超过x的最大整数（例如$[\sqrt{5}]=2$）。设n是自然数，且$I=(n+1)^2+n-[\sqrt{(n+1)^2+n+1}]^2$，那么（　）

(A) $I>0$。 (B) $I<0$。

(C) $I=0$。 (D) 当n取不同的值时，以上三种情

* 本题解选择题都是单项选择题，即只有一个答案正确，以后各题不再说明。

况都可能出现。

5. 四边形$ABCD$的边AB、BC、CD、DA之长分别是1、9、8、6，对以下命题：①四边形$ABCD$外切于圆；②四边形$ABCD$不内接于圆；③对角线不互相垂直；④$\angle ADC \geqslant 90^\circ$；⑤$\triangle BCD$是等腰三角形。正确的判断是（　）

(A) ①真；②假；④真。

(B) ③真；④假；⑤真。

(C) ③真；④假；⑤假。

(D) ②假；③假；④真。

6. 梯形$ABCD$的对角线相交于点O，设$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、$\triangle ODA$及梯形$ABCD$的面积分别为S_1、S_2、S_3、S。对于以下三结论：

①已知$S_1:S$，就可以求出$AD:BC$；

②已知$(S_1+S_2):S$，就可求出$AD:BC$；

③已知$S_2:S$，就可求出$AD:BC$。

正确的认识是（　）

(A) 只有①是正确的。

(B) 只有②是正确的。

(C) 只有①、②是正确的。

(D) ①、②、③都正确。

三、(本题满分12分)

设P、Q为线段BC上两定点，且$BP=CQ$，A为BC外一动点。当点A运动到使$\angle BAP=\angle CAQ$时，$\triangle ABC$是什么三角形？试证明你的结论。

四、（本题满分12分）设a、b、c是三个互不相等的正整数，求证：在a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3三个数中，至少有一个数能被10整除。

1987年全国初中数学联赛

第 一 试

一、选择题（满分30分）

本题共有6个小题。答对的每一小题得5分，不答者得1分，答错者得0分。

1．已知实数a、b、c满足$a+b+c=0$，$abc=8$，那么$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的值（　　）

(A) 是正数。(B) 是零。(C) 是负数。

(D) 正负不能确定。

2．在一条直线上已知四个不同的点依次是A、B、C、D。那么到A、B、C、D的距离之和最小的点（　　）

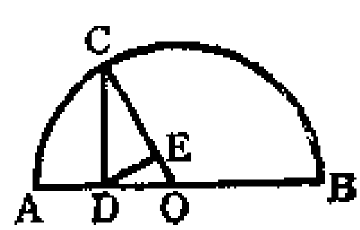
(A) 可以是直线AD外的某一点。

(B) 只是B点或C点。

(C) 只是线段AD的中点。

(D) 有无穷多个。

3．如图，AB是半圆的直径、O是圆心，$CD\perp AB$，$DE\perp OC$，如果AD、BD和CD的长都是有理数，那么命题：



甲、OE的长是有理数。

乙、DE的长是有理数。

丙、图中所有用字母表出的线段的长都是有理数。

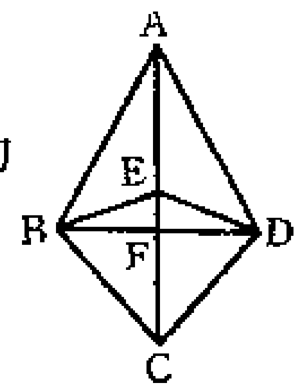
(A) 只有甲正确。(B) 只有乙正确。(C) 只有甲、乙正确。(D) 甲、乙、丙都正确。

答：(　　)

4．已知方程$|x|=ax+1$有一个负根而且没有正根，那么a的取值范围是（　　）

(A)　$a>-1$。(B)　$a=1$。(C) $a\geqslant 1$。(D)　非上述答案。

5．已知四边形$ABCD$内有一点E，连接AE、BE、CE、DE，将四边形$ABCD$分成四个面积相等的三角形，那么命题：



甲、$ABCD$是凸四边形；

乙、E是对角线AC的中点或对角线BD的中点；

丙、$ABCD$是平行四边形，

(A)　只有甲正确。

(B)　只有乙正确。

(C)　甲、乙、丙都正确。

(D)　甲、乙、丙都不正确。

答：(　　)

6．把由1开始的自然数依次写下去，直写到第198位为止：$\underbrace{1234567891011121314\cdots\cdots}_{198\text{位}}$。

那么这个数用9除的余数是（　　）

(A)　4。(B)　6。(C)　7。(D)　非上述答案。

二、填空题（满分 30 分）

本题共有 5 个小题，答对的每一小题得 6 分，不答者和答错者都得 0 分。

1． 在三边长是连续自然数，周长不超过 100 的三角形中，锐角三角形的个数是____。

2． 设a、b、c分别是$\triangle ABC$的三个角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对边的长，而且$\angle A=60^\circ$，那么$\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{b}{a+c}$的值是____。

3．$[a]$表示不大于数a的最大整数，例如$[\sqrt{2}]=1$，$[-\sqrt{2}]=-2$，那么，方程$[3x+1]=2x-\dfrac{1}{2}$的所有根的和是____。

4． 设自然数n有下面性质，从$1,2,\cdots,n$中任取50个不同的数，这 50个数中必有两个数之差等于 7．这样的n最大的一个是____。

5． 有一个五位正奇数x，将x中的所有 2 与5对换，其它数字不变，得到一个新的五位数，记作y。若x和y满足等式$y=2(x+1)$，那么x是____。

第 二 试（每一题满分20分）

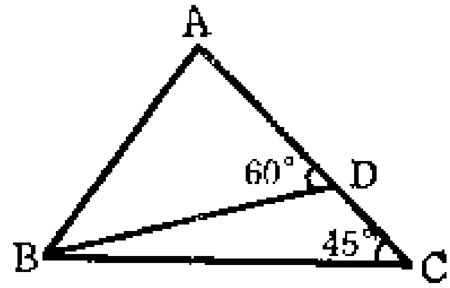
一、当a、b为何值时，方程

$$x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$$

有实根？

二、已知：D是$\triangle ABC$的边AC上的一点，

$AD:DC=2:1$，$\angle C=45°$，$\angle ADB=60°$。



求证：AB是$\triangle BCD$的外接圆的切线。

三、已知存在正整数n，能使数$\underbrace{11\cdots11}_{n个}$被1987整除。求证：

数 $p=\underbrace{11\cdots11}_{n个}\underbrace{99\cdots99}_{n个}\underbrace{88\cdots88}_{n个}\underbrace{77\cdots77}_{n个}$

和 $q=\underbrace{11\cdots11}_{n+1个}\underbrace{99\cdots99}_{n+1个}\underbrace{88\cdots88}_{n+1个}\underbrace{77\cdots77}_{n+1个}$

都能被1987整除。

1988年全国初中数学联赛

第一试

一、选择题（满分28分）

本题共有4个小题。每一个小题，答对者得7分，不答者得1分，答错者得0分。

1．下面四个数中最大的是（　　）

(A) $\mathrm{tg}48°+\mathrm{ctg}48°$。(B) $\sin48°+\cos48°$。

(C) $\mathrm{tg}48°+\cos48°$。(D) $\mathrm{ctg}48°+\sin48°$。

2．在实数范围内，设

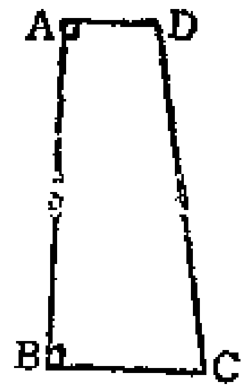
$$x=\left(\frac{\sqrt{(a-2)(|a|-1)}+\sqrt{(a-2)(1-|a|)}}{1+\frac{1}{1-a}}\right.$$

$$+\frac{5a+1}{1-a}\Big)^{1988},$$

则x的个位数字是（　　）

（A） 1.（B） 2.（C） 4.（D） 6.

3　如图，在直角梯形$ABCD$中，$AB=7$，$AD=2$，$BC=3$。如果边AB上的点P使得以P、A、D为顶点的三角形和以P、B、C为顶点的三角形相似，那么这样的点P有（　　）



（A） 1个.（B） 2个.（C） 3个.（D） 4个.

4　下面有四个命题：

（1） 一组对边相等且一组对角相等的四边形是平行四边形；

（2） 一组对边相等且一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形；

（3） 一组对角相等且这一组对角的顶点所连结的对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形；

（4） 一组对角相等且这一组对角的顶点所连结的对角线被另一条对角线平分的四边形是平行四边形。

其中，正确的命题的个数是（　　）

（A） 1.（B） 2.（C） 3.（D） 4.

二、填空题（满分32分）

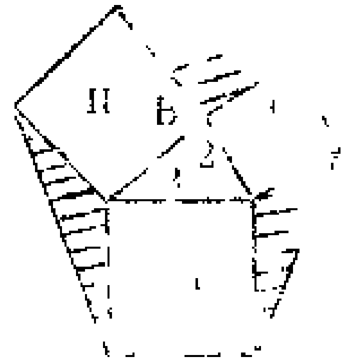
本题共有4个小题，每一小题，答对者得8分，不答者和答错者都得0分。

请注意：第1小题有两个答案，答对一个得4分。

1　如果质数p、q满足关系式$3p+5q=31$，那么

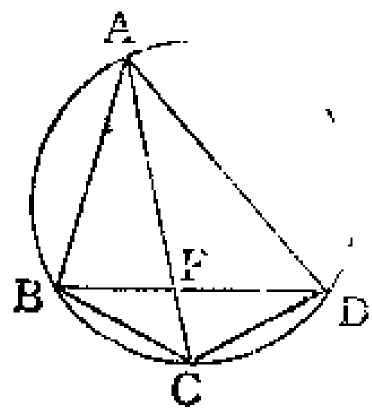
1. $\frac{p}{3q+1}$ 的值是____。

2. 如图，$\triangle ABC$的边$AB=2$，$AC=3$，Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ分别表示以AB、BC、CA为边的正方形，则图中三个阴影部分面积的和的最大值是____。



3. 如果自然数x_1、x_2、x_3、x_4、x_5满足$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5$，那么$x_5$的最大值是____。

4. 如图，A、B、C、D四点在同一圆周上，且$BC=DC=4$，$AE=6$。线段BE和DE的长都是正整数，则BD的长等于____。



第二试

本试共有三题，每一题满分20分。

一、一串数1，4，7，10，…，697，700的规律是：第一个数是1，以后的每一个数等于它前面的一个数加3，直到700为止。将所有这些数相乘，试求所得数的尾部零的个数（例如12003000的尾部零的个数是3）。

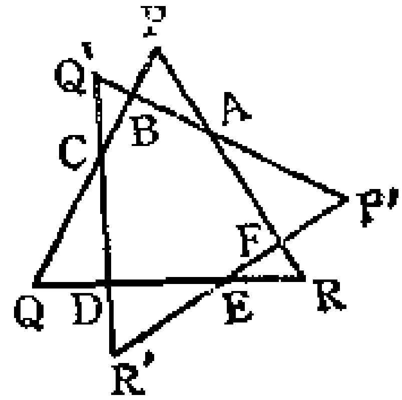
二、如果p、q、$\frac{2p-1}{q}$、$\frac{2q-1}{p}$都是整数，并且$p>1$，$q>1$，试求$p+q$的值。

三、如图，$\triangle PQR$和$\triangle P'Q'R'$是两个全等的等边三角形。

六边形$ABCDEF$的边长分别记为：

$AB=a_1$，　$BC=b_1$，　$CD=a_2$，$DE=b_2$，$EF=a_3$，$FA=b_3$。

求证：$a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$。



1989年全国初中数学联赛

第 一 试

（全卷共二道大题，总分60分）

一、选择题（本大题共5小题，每小题有一个正确答案，选对得6分，选错、不选或多选均得0分）

1. 已知最简根式 $a\sqrt{2a+b}$ 与 $\sqrt[a-b]{7}$是同类根式，则满足条件的a，b的值

(A)不存在。(B)有一组。(C)有二组。(D)多于二组。

2. 如果关于x的方程$mx^2-2(m+2)x+m+5=0$没有实数根，那么关于x的方程$(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$的实根个数为

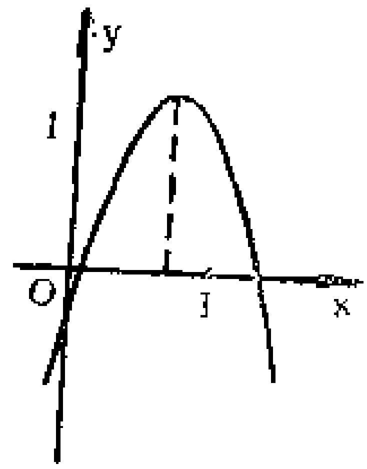
(A)2。(B)1。(C)0。(D)不确定。

3. 已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象如图所示，则下列6个代数式

$$ab，ac，a+b+c，a-b+c，2a+b，2a-b$$

中，其值为正的式子个数为

(A)2个．(B)3个．(C)4个．(D)4个以上．



4. 在三角形内（不在边上）有3个点，连同原三角形的3个顶点，共有6个点．以这6个点为顶点作出所有不重迭的三角形，如果这6个点中没有三点共线，所作三角形的个数为n_0；如果这6个点中有三点共线（但无四点共线），所作三角形的个数为n_1，如果这6个点中有四点共线，所作三角形的个数为n_2，那么

(A)$n_0=n_1=n_2$．　　(B)$n_0>n_1>n_2$．

(C)$n_0>n_1\geqslant n_2$．　　(D)$n_0\geqslant n_1>n_2$．

5. 一水池装有编号为①，②，③，④，⑤的5条水管，其中有些是进水管，有些是出水管，如果同时开放两条水管，注满水池的时间如下表：

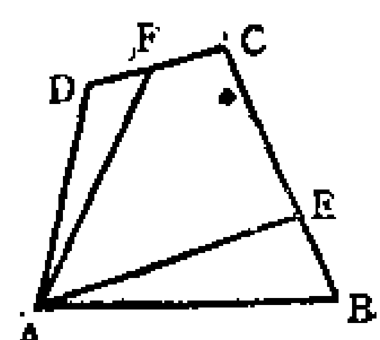
开放水管号	①②	②③	③④	④⑤	⑤①
注满水池的时间(小时)	2	15	6	3	10

那么单开一条水管，最快注满水池的水管编号为

(A)①．(B)②．(C)④．(D)③或⑤．

二、填空题（本大题共5小题，每小题6分）

1. 如图，四边形$ABCD$中，点E、F分别在BC、CD上，$\frac{DF}{FC}=1$，$\frac{CE}{EB}=2$，若$\triangle ADF$的面积为m，四



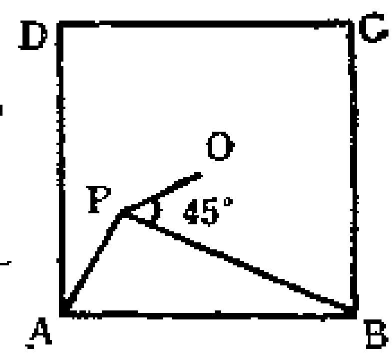
边形$AECF$的面积为$n(n>m)$。则四边形$ABCD$的面积为________。

2． 在十进制中，各位数码是 0 或1，并且能被225整除的最小自然数是________。

3． 已知x、y都是大于10的实数，$\lg x$的首数是a，尾数是b；$\lg y$的首数是c，尾数是d，且$|1-a|+\sqrt{c-4}=1$，$b+d=1$，则$xy=$________。

4 已知一个三角形的外接圆半径为4cm，一个内角为60°，夹这个角的两边长之差为4cm，那么，这个三角形的面积为______cm²。

5 如图，正方形$ABCD$的中心为O，面积为1989cm²，P为正方形内一点，且$\angle OPB=45°$，$PA:PB=5:14$，则$PB=$______cm。

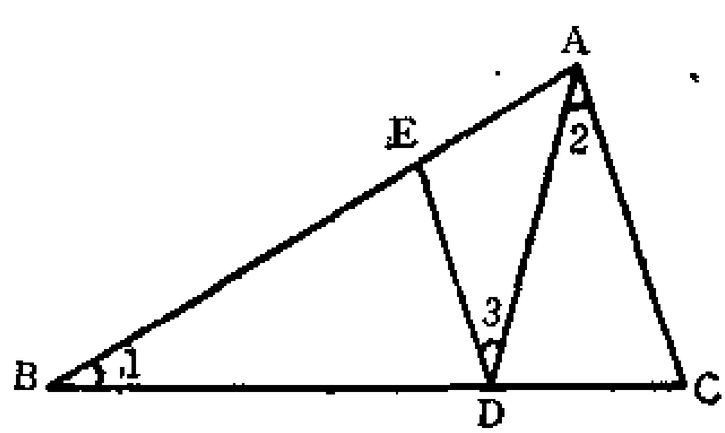


第二试

（全卷共三道题，每道题20分，共60分）

一、如图，$\triangle ABC$中，D、E分别是边BC、AB上的点，且$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，如果$\triangle ABC$、$\triangle EBD$、$\triangle ADC$的周长依次是$m$、$m_1$、$m_2$，证明：

$$\frac{m_1+m_2}{m}\leqslant\frac{5}{4}.$$



二、首项系数不相等的两个二次方程：

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0 \qquad (1)$$
$$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0 \qquad (2)$$

（其中a、b为正整数）有一个公共根，求$\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$的值。

三、设A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6是平面上的6点，其中任三点不共线。

（1） 如果这些点之间任意连接13条线段，证明：必存在4点，它们每两点之间都有线段连接。

（2） 如果这些点之间只连有12条线段，请你画一个图形，说明（1）的结论不成立（不必用文字说明）。

1986年全国部分省、市初中数学通讯赛

一、选择题（本题满分共30分）

本题共有6个小题，每一小题填对者得5分，不填者得1分，填错者得0分。

1． 下列数中最大的数是（　　）

(A)1．(B)$\sqrt{29}-\sqrt{21}$．(C)$\dfrac{\pi}{3.142}$．

(D)$5.1\times\sqrt{0.0361}$．(E)$\dfrac{6}{\sqrt{13}+\sqrt{7}}$．

2． 若$xy=a$，$xz=b$，$yz=c$，且a、b、c均不为零，则$x^2+y^2+z^2$等于（　　）

(A)$\dfrac{ab+ac+bc}{abc}$．(B)$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$．

(C) $\frac{(ab+ac+bc)^2}{abc}$. (D) $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$.

(E) $\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$.

3. 满足不等式 $|x+1|+|x|<2$ 的 x 取值范围是（　　）

(A) $-\frac{3}{2}<x<-1$. (B) $-\frac{3}{2}<x<0$.

(C) $-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$.

(D) $0<x<\frac{1}{2}$. (E) $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$, $BC=1$，则 $\triangle ABC$ 的面积是（　　）

(A) $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$. (B) $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$. (C) $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

(D) $\frac{3+\sqrt{3}}{8}$. (E) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{8}$.

5. 在等边三角形 ABC 所在平面上找这样的一点 P，使 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PAC$ 都是等腰三角形，那么具有这样性质的点的个数共有（　　）

(A) 1 个. (B) 4 个. (C) 7 个. (D) 9 个.

(E) 10个.

6. 平面上给定不共线的三点 A、B、C，在平面上作直线 l，使点 A、B、C 到直线 l 的距离之比为1:1:2或1:2:1或2:1:1，则这样的直线的条数是（　　）.

(A) 3 条。(B) 6 条。(C) 9 条。(D)12条。

(E)15条。

二、填充题（本题满分共40分）

本题共有 6 个小题，每小题的答案均为小于9999的正整数。第1、2小题每题 6 分，第3～6小题每题7分，答错0分。

1． 设p、q均为自然数，且$\frac{7}{10}<\frac{p}{q}<\frac{11}{15}$，当$q$最小时，$p\times q=$____。

2． 1343的质因数是____。

3． 某校有1400名学生，其中有1250名爱好体育，952名爱好文娱，但有60名学生二者都不爱好，因此，二者都爱好的学生有____名。

4． 如果关于x的实系数一元二次方程$x^2+2(k+3)x+k^2+3=0$有两个实数根α、β，那末$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$的最小值是____。

5． 若2^{1989}是m位整数，5^{1989}是n位整数，那末$m+n=$____。

6． 如图一所示，$\triangle ABC$的面积为100，边AB、BC、CA上分别有点D、E、F。已知：$AD:DB=2:3$，$\triangle ABE$和四边形$DBEF$的面积相等，则$\triangle AEC$的面积等于____。

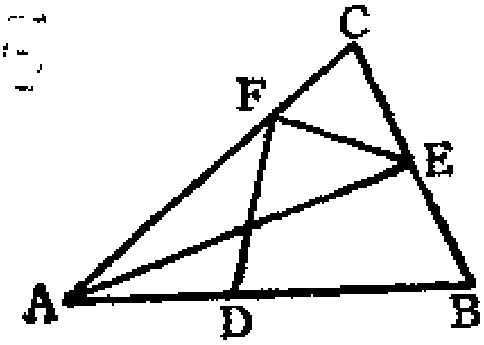


图 一

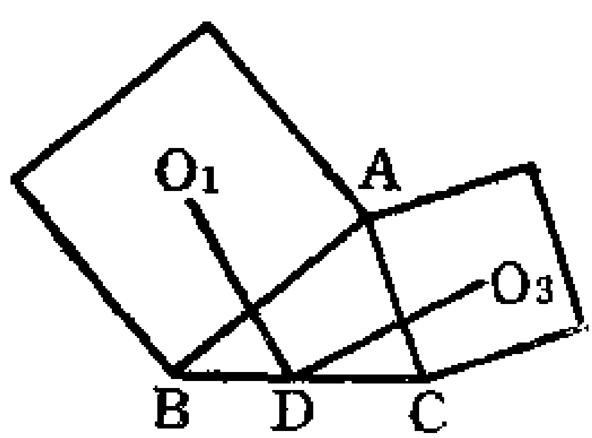


图 二

三、（本题满分30分）

（1） 以$\triangle ABC$的边AB、AC为边各向外作一个正方形（见图二），中心分别为O_1、O_3，D为BC中点。求证：O_1D与O_3D垂直并且相等。（8分）

（2） 以任意四边形$ABCD$的边AB，BC，CD，DA为边各向外作一个正方形（见图三），中心分别为O_1、O_2、O_3、O_4。求证：O_1O_3与O_2O_4垂直并且相等。（10分）

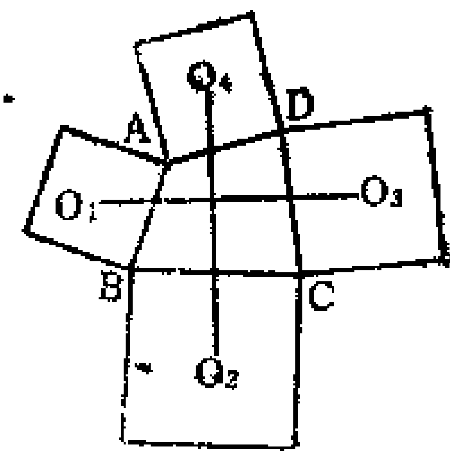


图 三

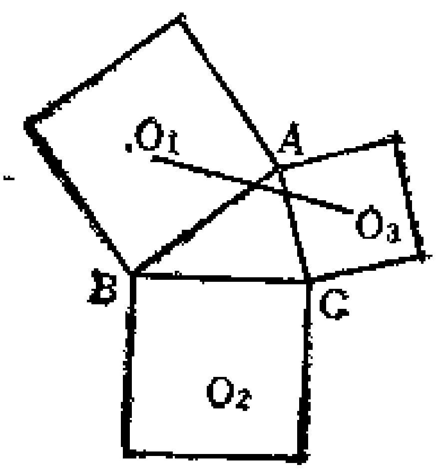


图 四

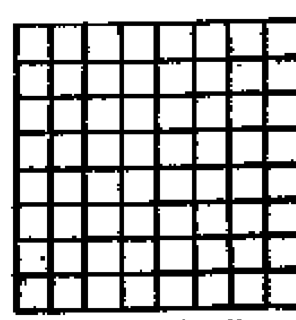
（3） 在（1）中，又以BC为边向外作正方形（见图四），中心为O_2，请你回答：

（a） 线段O_1O_3和哪一条线段垂直并且相等，并证明你的猜想；

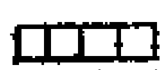
（b） 你认为（3）与（2）有何联系？（12分）

四、（本题满分20分）

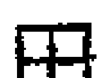
证明：用16块大小是4×1的矩形瓷砖和1块大小是2×2的矩形瓷砖，不能恰好铺盖8×8矩形的地面。



8×8矩形



4×1矩形



2×2矩形

1987年全国部分省、市初中数学通讯赛

一、选择题

1．若 $0<x<1$，则 x^2、x、$\sqrt{x}$、$\frac{1}{x}$ 这四个数中(　　)。

(A) $\frac{1}{x}$ 最大，x^2 最小。

(B) x 最大，$\frac{1}{x}$ 最小。

(C) x^2 最大，$\sqrt{x}$ 最小。

(D) x 最大，x^2 最小。

2．若7个连续偶数之和为1988，则此7个数中最大的一个是(　　)。

(A)286．(B)288．(C)290．(D)292．

3．一个凸 n 边形，除一个内角外，其余 $n-1$ 个内角的和为 $2400°$，则 n 的值是(　　)。

(A)15．(B)16．(C)17．(D)不能确定。

4．方程 $4x+5y=98$ 的正整数解的个数是(　　)。

(A)4．(B)5．(C)6．(D)无穷多。

5．设 a 表示 $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ 的小数部分，则 $\log_2 a(2a+1)$ 等于(　　)。

(A) -1．(B) -2．(C) 0．(D) $\frac{1}{2}$．

6．$\triangle ABC$的中线$AD=1$，$AB+AC=\frac{5}{2}$，$BC=2$，则$\triangle ABC$的面积等于（　　）。

(A)$\frac{9}{8}$．(B)$\frac{9}{4}$．(C)1．(D)$\frac{9}{16}$．

7．设$75^x=0.75^y=10^{-2}$，则$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$等于（　　）。

(A)$\frac{1}{4}$．(B) $-\frac{1}{4}$．(C)1．(D)-1．

8．线段AD上有两点B、C，线段AB、AC、AD的长分别为a、b、$c(a<b<c)$。如果线段AB、CD分别绕B、C旋转，使A点与D点重合于E点，组成$\triangle BCE$，则下列三个不等式(Ⅰ)$a<\frac{c}{2}$，(Ⅱ)$b<a+\frac{c}{2}$，(Ⅲ)$b<\frac{c}{2}$中能成立的情况是（　　）。

(A)只有（Ⅰ）成立。

(B)只有（Ⅱ）成立。

(C)只有（Ⅰ）与（Ⅱ）成立。

(D)只有（Ⅱ）与（Ⅲ）成立。

二、填充题

1．计算：$\sqrt{515^2-273^2-286^2}=$__。

2．三边长是各不相等的整数且周长小于13的三角形共有______个。

3．关于x的方程$x^2-501x+k=0$的一个根加上3，便是另一个根的125倍，则$k=$______。

4．1987^{1987}除以7所得的余数是____。

5．计算：$7^{-\frac{2}{\log_6 7}}=$ ____。

6．分解因式：$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2=$
________。

7．设$\sqrt{x}=\sqrt[4]{2}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$，则

$$\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{x+2-\sqrt{x^2+4x}}=$$ ________。

8．有形状、大小、材料完全相同的黑筷、白筷、红筷各4双，混杂在一起。要求闭着眼睛保证从中摸取到不同颜色的筷子两双，则一次至少要摸出 ______ 根。

三、解方程：

$$2(x+\sqrt{x^2-1})=(x-1+\sqrt{x+1})^3.$$

四、圆内接八边形的四条边长为1，另四条边长为2，求此八边形的面积。

五、有一片牧场，草每天都在匀速地生长（草每天增长的量相等）。如果放牧24头牛，则6天吃完牧草；如果放牧21头牛，则8天吃完牧草。设每头牛每天吃草的量是相等的，问：

1．如果放牧16头牛，几天可以吃完牧草？

2．要使牧草永远吃不完，至多放牧几头牛？

六、有一个凸十一边形，它由若干个边长为1的等边三角形和边长为1的正方形无重叠、无间隙地拼成。求此凸十一边形各个内角的大小，并画出一个这样的凸十一边形的草图。

1988年全国部分省、市初中数学通讯赛

一、选择题（本题满分35分）

本题共有7个小题，每个小题答对得5分，答错、不答、多答得0分。

1. 完成某项工作，甲乙合做要2天，乙丙合做要4天，丙甲合做要2.4天，则甲单独做完此项工作需要的天数是

(A)2.8；(B)3；(C)6；(D)12。

2. 方程$|2x-1|+|x-2|=|x+1|$的实数解的个数是

(A)1；(B)2；(C)3；(D)不同于上述的其他结论。

3. 若$10^{2x}=25$，则10^{1-x}等于

(A)5；(B)2；(C)$\frac{1}{5}$；(D)$\frac{1}{50}$。

4. 若$\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)]=\log_3[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y)]$

$=\log_5[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z)]=0$，

则x、y、z的大小关系是

(A)$x<y<z$；(B)$y<z<x$；

(C)$z<x<y$；(D)$z<y<x$。

5. 等边$\triangle ABC$的面积为36，P、Q、R分别是BC、AB、CA上的点，且$BP=\frac{1}{3}BC$，$AQ=QB$，$PR\perp AC$，则$\triangle PQR$的面积等于

(A)10；(B)12；(C)14；(D)15。

6. 除以7余5，除以5余2，除以3余1的所有三位数的和是

(A)2574；(B)3681；(C)4249；(D)4436。

7．P是等边$\triangle ABC$内部一点，$\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPA$的大小之比是5:6:7，则以PA、PB、PC的长为边的三角形的三个内角的大小之比（从小到大）是

(A)2:3:4；(B)3:4:5；(C)4:5:6；(D)不能确定。

二、填充题（本题满分48分，共8个小题，每小题6分）

1．方程$x+\frac{1}{x-8}=10\frac{1}{2}$的一个解是10，则另一个解是________。

2．某手表每小时比准确时间慢3分钟，若在清晨4点30分与准确时间对准，则当天上午该手表指示时间是10点50分时，准确时间应该是____点____分。

3．自然数n减去52的差以及n加上37的和都是整数的平方，则$n=$________。

4．分母有理化：$\frac{2-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$________。

5．如果对于任意的非零实数a和b定义运算$*$，使$a*b=\frac{a-b}{ab}$，则$5*(4*3)=$________。

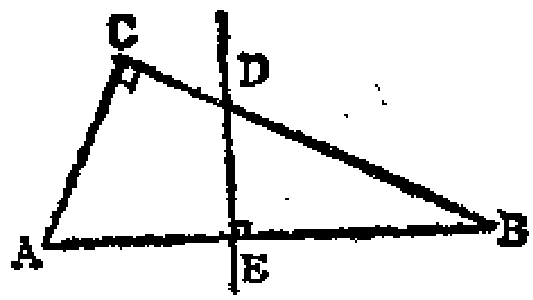
6．已知：$x^2+x-1=0$，则$x^3+2x^2+1988=$________。

7．若$\log_7(2\sqrt{2}-1)+\log_2(\sqrt{2}+1)=a$，则$\log_7(2\sqrt{2}+1)+\log_2(\sqrt{2}-1)$的值是________。

8．某学生将连续自然数1，2，3，…逐个相加，直到某个自然数为止。由于计算时漏加了一个自然数而得出了错误的和值为1988，则该漏加的自然数是________。

三、（本题满分8分）

垂直于直角$\triangle ABC$的斜边AB的直线DE分别交BC、AB于D、E，DE把直角$\triangle ABC$分成面积相等的两部分。若$AE=17$，$BE=24$，求$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}$。



四、(本题满分 9 分)

凸八边形$ABCDEFGH$的八个内角都相等。边AB、BC、CD、DE、EF、FG的长分别为7、4、2、5、6、2，求该八边形的周长。

五、(本题满分10分)

解方程组：

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{(x+2)(y+3)}=34 & (1) \\ (x+2)^2+(y+3)^2=741-(x+2)(y+3) & (2) \end{cases}$$

六、(本题满分10分)

正方形纸片内有1988个点，连同正方形的顶点共有1992个点，在这1992个点中，任何三点都不在同一条直线上，现要将该正方形纸片全部剪成三角形，这些三角形的每个顶点都在这1992个点中选取，并且这1992个点都是这种三角形的顶点。问共可剪成几个三角形？为剪成这些三角形需要剪几刀（沿一条线段剪开算作一刀）？

1986年广州、武汉、福州、重庆初中数学联赛

第 一 试（满分50分，50分钟完卷）

一、选择题：本题共 5 小题，每小题 5 分，满分25分，填对者给 5 分，填错或填代号多于一个的给 0 分，不填者也给 0 分。

1． 在实数范围内$\left|\,|\sqrt{-x^2}-1|-2\,\right|$的值（ ）

（A） 无法确定。 （B） 只能等于3。

（C） 只能等于1。 （D） 以上答案都不对。

2． 已知线段PQ与圆O只有一个公共点，那么这线段的两个端点P、Q中只能是（ ）

（A） 一点在圆O的内部，另一点在圆O的外部，或PQ是圆的切线段，P、Q之一是切点。

（B） P、Q两点中有一点在圆O外。

（C） 情况A或情况B。

（D） 至多有一点在圆内。

3． 四个互不相等的正数a、b、c、d中，a最大，d最小，且$a:b=c:d$，则$a+d$与$b+c$的大小关系是（ ）

（A） $b+c>a+d$。 （B） $a+d>b+c$。

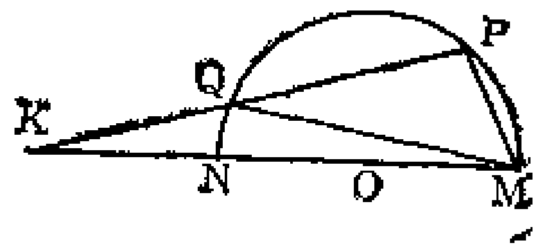
（C） $a+d=b+c$。 （D） 不能确定。

4． 已知$a=\log_{0.1}b$，则$\lg b^a$等于（ ）

（A）a^2。（B）$-2a$。（C）$-a^a$。（D）$-a^2$。

5． 如图，MN是半圆O的直径，若$\angle K=20°$，$\angle PMQ=40°$，则$\angle MQP$等于（ ）

(A) 30°. (B)35°. (C) 40°. (D)50°.



二、填空题：本题共5小题，每小题5分，满分25分。

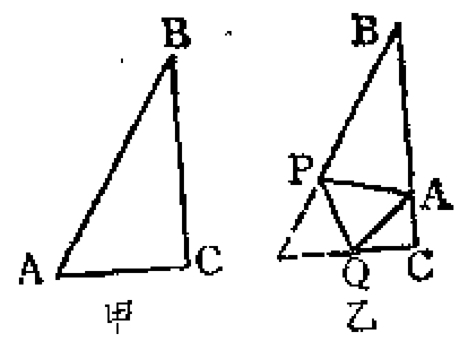
1．若$a-b=3$，$a-c=\sqrt[3]{26}$，那么$(c-b)[(a-b)^2+(a-c)(a-b)+(a-c)^2]$的值是______。

2．已知$y_1=2x$，$y_2=\dfrac{2}{y_1}$，$y_3=\dfrac{2}{y_2}$，$\cdots y_{1986}=\dfrac{2}{y_{1985}}$，则$y_1\cdot y_{1986}=$______。

3．某缝纫工做一件童装、一条裤子、一件上衣，所用的时间之比为1∶2∶3，他一天一共能做2件童装，3条裤子，4件上衣，那么他做2件上衣，10条裤子，14件童装需要___天。

4．对任意实数x、y定义运算$x*y=\dfrac{2xy}{ax+by}$，其中a、b为常数，等式右端中的运算是通常的实数四则运算，若$1*2=1$，$2*3=3$，则$2*(-1)=$______。

5．图甲表示一个形状为直角三角形ABC纸片，它的一个锐角是30°，现将它折成图乙的形状，这时顶点A正好落在BC上，而且$\triangle APQ$是正三角形，则$\triangle APQ$与原$\triangle ABC$的面积之比为______。



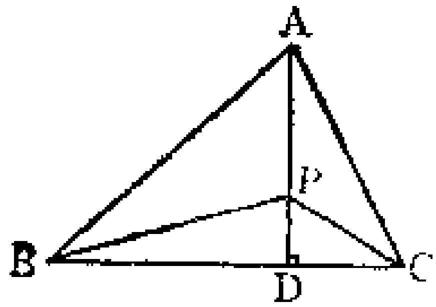
第二试（满分70分，120分钟完卷）

一、（本题满分10分）

已知 $\lg a+|\lg b|=-2$，$|\lg a|\cdot\lg b=-3$，求a，b。

二、(本题满分10分)

若a为自然数，则a^4-3a^2+9是质数还是合数？给出你的证明。



三、(本题满分16分)

已知锐角三角形ABC。

(1)若AD是BC边上的高，试在AD上求一点P，使得$\triangle APB$、$\triangle BPC$、$\triangle CPA$都是钝角三角形；

(2) 试在$\triangle ABC$的内部求出所有的点Z，使$\triangle AZB$、$\triangle BZC$、$\triangle CZA$都是钝角三角形，并加以证明。

四、(本题满分16分)

已知$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$BC:AC=3:5$，D、E、F分别是BC、AB、CA的中点。(1)试证：在$\triangle DEF$的三边上存在这样的点P，使得$CP^2=\triangle ABC$的面积。(2)求出所有满足条件的点P，给出你的证明。

五、(本题满分18分)

甲、乙二人同时解根式方程$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=7$。抄题时甲错抄成：$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+b}=7$，结果解得其一根为12。乙错抄成$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+d}=7$，结果解得其一根为13。已知二人除抄错题之外，解题过程都是正确的。又a、b、d都是整数，试求a、b之值。

1987年广州、武汉、福州、重庆初中数学联赛

一、填空题(每小题5分，共35分)

1. 点O在直线AB上，OC、OD、OE、OF是位于AB

同侧的射线，那么在这个图形中，不大于平角的角共有____个。

2． 一个两位数的30次方是34位数，这个两位数是____。

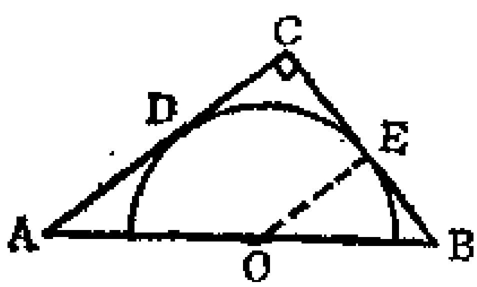
（已知$\lg2=0.301$，$\lg3=0.477$，$\lg7=0.845$）

3． 在$\triangle ABC$中，点D在AC上，点E在AB上，且$AB=AC$，$BC=BD$，$AD=DE=EB$，则$\angle A$的度数为____。

4． 设方程$x-\dfrac{1}{x}=1987$的两根为m、$n(m>n)$，则代数式$m\left(\dfrac{1-n^3}{1-n}\right)$的值是______。

5． 用$[x]$表示不超过x的最大整数（例如$[3.721]=3$，$[-4.5]=-5$，$[8]=8$），那么满足$[-1.77x]=[-1.77]x$的自然数x有________个。

6． 如图，半圆的圆心O在直角三角形ABC的斜边AB上，且与两直角边相切。若直角三角形面积为S，斜边长为C，则半圆的半径$r=$__________。



7． 方程$(x^2-x-1)^{x+10}=1$的整数解有______个。

二、选择题（每小题只有一个正确答案。不选得1分，选错得0分，选对得5分，共35分）

1． 顺次联结四边形各边的中点，所得四边形是一个菱形，那么原四边形的形状是（　　）

（A） 等腰梯形。（B） 矩形。

（C） 菱形。（D） 以上结论都不对。

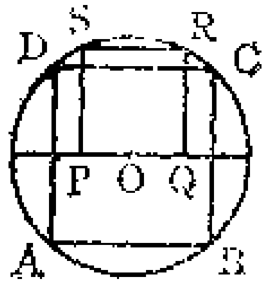
2． 给出四个命题：（1） $8\geqslant3$；（2） 若x为实数，

$|x|<1$，则 $x<1$；（3）若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；（4）若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$。下列判断中正确的是（　　）

（A）只有（1）正确。　　（B）只有（2）不正确。

（C）除（1）以外都正确。（D）除（3）以外都正确。

3. 如图，$ABCD$ 是圆O的内接正方形，$PQRS$ 是半圆的内接正方形，那么 $S_{\square PQRS}:S_{\square ABCD}$ 等于（　　）



（A）1:2。　　（B）1:3。

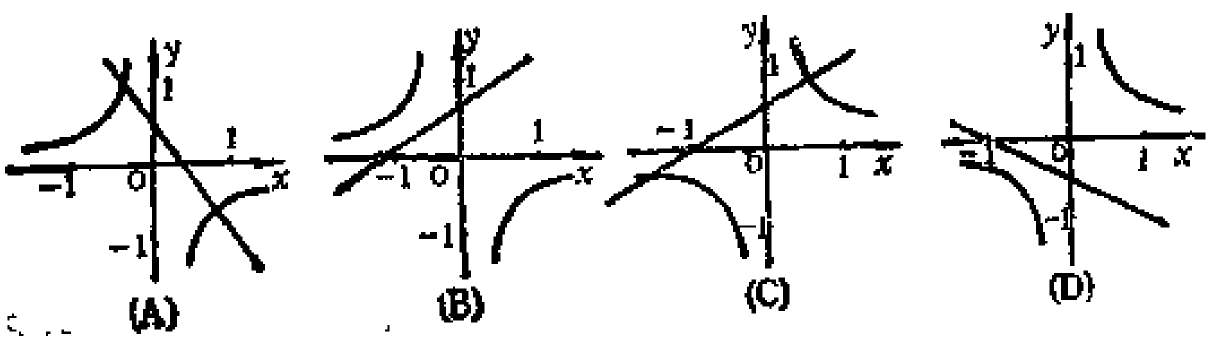
（C）$\sqrt{2}:3$。　　（D）2:5。

4. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，AC 交 BD 于O，$MON\parallel AB$，且 MON 分别交 AD、BC 于 M、N，则 $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$ 等于（　　）

（A）$\frac{1}{MN}$。　　（B）$\frac{2}{MN}$。

（C）$\frac{3}{MN}$。　　（D）$\frac{4}{MN}$。

5. 反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}$ 与一次函数 $y=k(x+1)$（其中 x 为自变量，k 为常数）在同一坐标系中的图象只有可能是（　　）



6. 在矩形的边上找一点，使得这点与对边两端点的连线将此矩形分成三个彼此相似的三角形，这样的点(　　)

(A) 不存在。　　(B) 一定有2个。

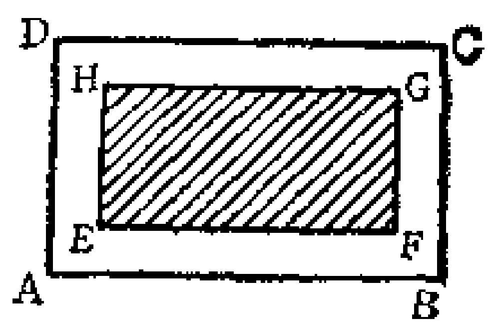
(C) 一定有4个。　　(D) 个数不能确定。

7. 方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1987}$ 的整数解的个数是（　　）

(A) 零个。　　(B) 3个。

(C) 5个。　　(D) 以上结论都不对。

三、(本题16分)如图，有矩形地$ABCD$一块，要在中央修建一矩形花圃$EFGH$，使其面积为这块地面积的一半，且花圃四周道路的宽相等，今无测量工具，只有无刻度的足够长的绳子一条，如何量出道路的宽度？



四、(本题17分) 已知实数a、b、c、r、p满足条件$pr>1$，$pc-2b+ra=0$。求证一元二次方程$ax^2+2bx+c=0$必有实根。

五、(本题17分) 平面上有12个定点，其中既没有三点在一条直线上，也没有四点共圆的情况，那么至少存在一个圆，过其中三点，且使得四点在圆内部，其余五点在这圆的外部，给出你的证明。

1988年广州、武汉、福州、重庆、洛阳初中数学联赛

一、选择题（供选择的结论只有一个正确，每题4分，

共32分）

1．关于 x 的方程$a+2bx+cx^2=0$，当$ac<b^2$时，（　　）

(A) 必有两不等实根。　　(B) 没有两不等实根。

(C) 不一定有两不等实根。　(D) 以上答案都不对。

2．圆C与三条不同的直线 l、m、n 都相切，则在下述三种情况中：

（1） l与m，m与n，n与l交角都是60°；

（2） $l\parallel m\parallel n$；

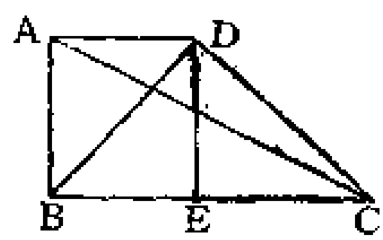
（3） 有另一圆 C' 也与l、m、n 都相切。

可以成立的是（　　）

(A) 只有(1)。　　(B) 只有(1)和(3)。

(C) 只有(1)和(2)。　(D) (1)、(2)和(3)。

3．已知四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle A=90^\circ$，$CD\perp BD$，$DE\perp BC$，垂足为E，E为BC的中点，则下列判断中错误的是（　　）



(A) CD是过A、B、D的圆的切线。

(B) BD是过C、D、E的圆的切线。

(C) AD是过B、D、C的圆的切线。

(D) CB是过B、D、E的圆的切线。

4．已知三角形P的三边长为a、$\sqrt{3}a$、$2a$，三角形Q的三边长为$3a$、$2\sqrt{3}a$、$\sqrt{3}a$，三角形 R 为有一锐角等于30°的直角三角形，记“$\backsim$”为相似，“$\not\backsim$”为不相似，则（　　）

(A) $P\backsim Q$，但$Q\not\backsim R$，$R\not\backsim P$。

(B) $P\not\backsim Q$，$Q\not\backsim R$，但$R\backsim P$。

(C) $P\infty Q$，$Q\not\infty R$，$R\not\infty P$。

(D) $P\backsim Q\backsim R$。

5． 已知$10^{-221}<N<10^{-220}$，$10^{-2}<n<10^{-1}$，N的常用对数的尾数是n，则$\frac{1}{N^9}$的常用对数的尾数是（　　）

(A) $\frac{1}{n^9}$。 (B) $-9n$。 (C) $9n-1$。

(D) $1-9n$。

6． 反比例函数$y=\frac{k}{x}$（x为自变量，k为非零常数）的图象是轴对称图形，它的一条对称轴是下列哪个正比例函数的图象？（　　）

(A) $y=-\frac{k}{|k|}x$。　　(B) $y=x$。

(C) $y=-x$。　　(D) $y=kx$。

7． 关于x的方程$6x^2=(2m-1)x+m+1$有一根α，满足不等式：$-1988\leqslant\alpha\leqslant1988$，且使得$\frac{3}{5}\alpha$为整数，则$m$可取（　　）个值.

(A) 6627。　　(B) 3977。

(C) 2385。　　(D) 1989。

（8） 以$[x]$表示不大于x的最大整数，例如$[3.72]=3$，$[-4.4]=-5$，$[8]=8$等等。则满足二元方程$[1.9x]+[8.8y]=36$的正整数解有多少个？（　　）

(A) 5。 (B) 4。 (C) 3。 (D) 2。

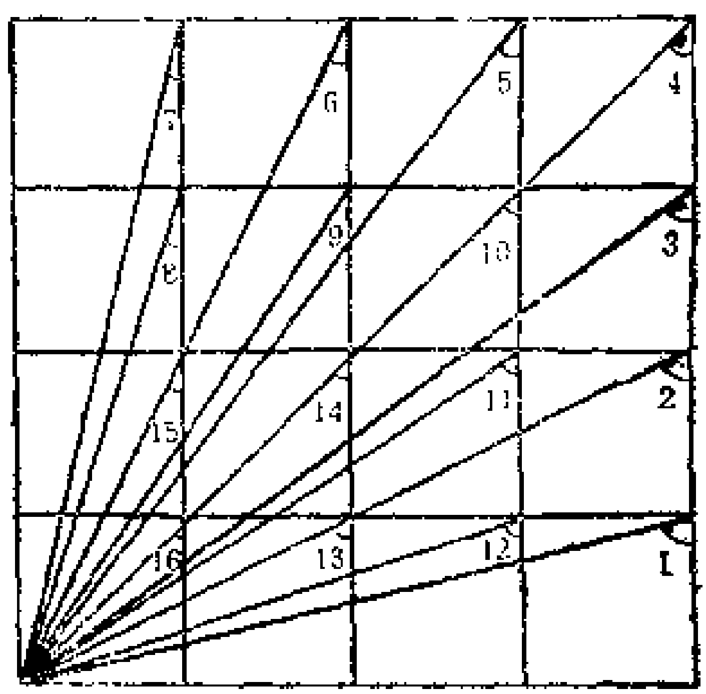
二、填空题（每小题4分，共28分）

1． 分解因式：$x^3+x^2y-xy^2-xz^2+yz^2-y^3=$ ____。

2． 如果 $x+\dfrac{1}{x}=3$，则 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=$ ______。

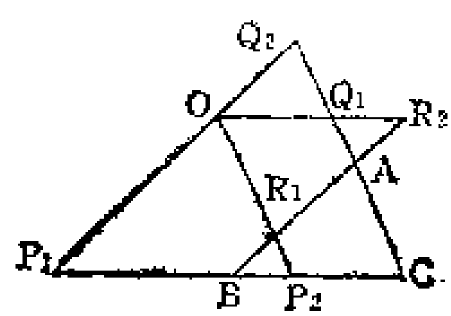
3． 以$[a,b]$表示两个正整数a和b的最小公倍数，例如$[14,35]=70$，则满足$[x,y]=6$，$[y,z]=15$的正整数组(x,y,z)共有____组。

4． 如图为16个全等的小正方形拼成的大正方形，在图中有数码标记的16个角的关系为$\angle 1-\angle 2+\angle 3-\angle 4+\cdots+\angle 15-\angle 16=$____。



5． 一水池有A、B两个进水龙头和一个出水龙头C，如果同时打开A、C，2小时可注满水池；同时打开B、C，3小时可注满水池；当水池满水时，先单独打开C2小时，再把A、B也同时打开，1小时后水池又可注满。那么单独打开A，____小时可注满水池。

6． 如图，从$\triangle ABC$外一点O（O在$\angle ACB$内）作三边的平行线，分别交三边BC、CA、AB及其延长线于P_1和P_2，Q_1和Q_2，R_1和R_2，已知$S_{\triangle OP_1P_2}=m^2$，$S_{\triangle OQ_1Q_2}=n^2$，$S_{\triangle OR_1R_2}=k^2$，此处$m>0$，$n>0$，$k>0$。则$S_{\triangle ABC}=$______。



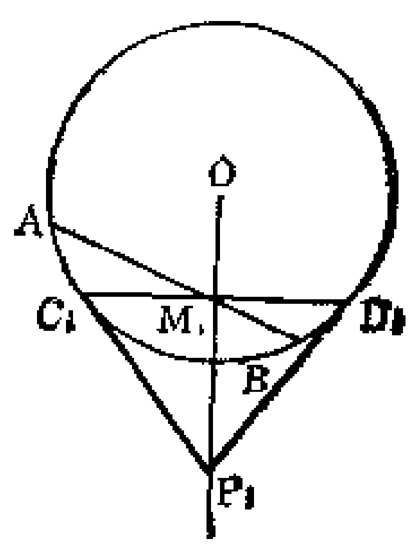
7.只有两个正整数介于分数$\frac{88}{19}$与$\frac{88+n}{19+n}$之间，则正整数n的所有可能值之和为______。

三、（20分）已知方程 $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$。

（1） 求证：$x=\frac{a-b}{a+b}, y=\frac{b-c}{b+c}, z=\frac{c-a}{c+a}$为方程的一个解。

（2） 试求出方程的一个数值解：$x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$，使得没有实数a、b、c，满足$x_0=\frac{a-b}{a+b}$，$y_0=\frac{b-c}{b+c}$，$z_0=\frac{c-a}{c+a}$。

四、（20分）AB为定圆O中的定弦，作$\odot O$中的弦C_1D_1，C_2D_2，…，$C_{1988}D_{1988}$，对其中每一i（$i=1,2,\cdots,1988$）C_iD_i都被弦AB平分于M_i，过C_i，D_i分别作$\odot O$的切线，两切线交于P_i，求证：点P_1，$P_2\cdots$，P_{1988}与某定点等距离，并指出这定点是什么点？



五、（20分） 按以下规则从左至右写一个1988位的整数N，$N=\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{1988}}$。

（1） $a_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,1988$；

（2） $a_{i+2}\neq a_i$，$i=1,2,\cdots,1986$；

（3） 两位数$\overline{a_ia_{i+1}}$与$\overline{a_{i+1}a_i}$的最大公约数是3或9，$i=1,2,\cdots,1987$。

求证：(1)若a_1写作3，6，9中的任一个，则N可以写出来，且N除了首位和末位的各位数字和相等；

(2) 若a_1写作1，2，4，5，7，8中的任一个，则N也可以写出来。

1986年北京市初二数学竞赛

一、选择题（满分30分，每小题10分）

本题共有3个小题，每小题答对得10分，答错得0分，不答记2分。

1. 化简$\dfrac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$，其结果是

( )

(A)$\dfrac{2}{3}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(C)$\sqrt{6}+\sqrt{2}$　　(D)$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

2. 长为4的线段分成四小段。以这四段为边可以作成一个四边形，则其中每一小段必须满足的条件是( )

(A)不大于1.　　(B) 大于$\dfrac{1}{2}$或小于1.

(C) 小于2.　　(D) 大于$\dfrac{1}{2}$且小于2.

3. 如果两个三角形的两条边和其中一边上的高分别对应相等，那么这两个三角形的第三边所对的角的关系是

（　　）

(A)相等． (B)不相等． (C)互余． (D)互补或相等．

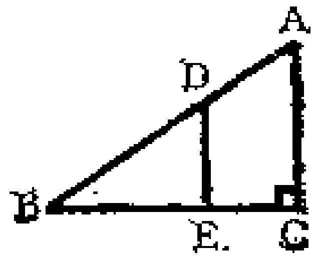
二、填空题（满分30分，每小题10分）

1． $1987\cdot19861986-1986\cdot19871987=$ ________．

2． 一个半径为1986的圆中放入n个点，这n个点两两之间的距离都大于1986．则n的最大值是________．

3． 已知一个分数的分子与分母之和为37，这个分数的算术平方根为0.92（精确到0.01），则这个分数是________．

三、（满分15分）$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，D为AB上一点．作$DE\perp BC$于E．若$BE=AC$，$BD=\frac{1}{2}$，$DE+BC=1$．求证：$\angle ABC=30^\circ$．

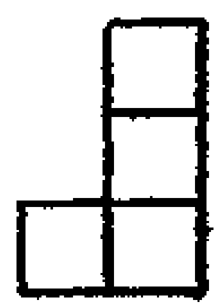


四、（满分15分）若a、b、c为实数，

$$A=a^2-2b+\frac{\pi}{2},\ B=b^2-2c+\frac{\pi}{3},\ C=c^2-2a+\frac{\pi}{6}.$$

证明：A、B、C中至少有一个的值大于0．

五、（满分10分）如图，是由4个1×1的正方形组成的“L形”．用若干个这种“L形”硬纸片无重叠地拼成了一个$m\times n$（长为m个单位，宽为n个单位）的矩形．试证明：mn必是8的倍数．



1987年北京市初二数学竞赛

一、填写答案（满分60分，每小题10分）．

1． 把11112222分解成两个连续的正整数的乘积．其中

较大的那个正整数因数是________。

2. 如果a是$x^2-3x+1=0$的根，试求

$$\frac{2a^5-5a^4+2a^3-8a^2}{a^2+1}=\_\_\_\_\_\_\_\_。$$

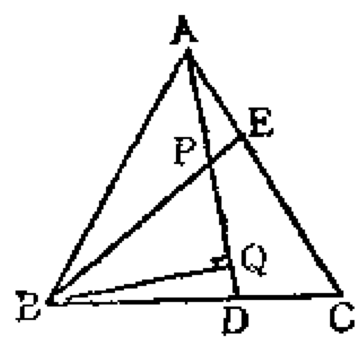
3. 如果用四则运算的加法与除法定义一种新的运算*。对任意实数A、B有$A*B=\frac{A+B}{2}$。试计算$(1*9)*(8*7)=$________。

4. 已知$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$于D，CE为AB边上的中线，且$DE=DC$。试求$\triangle ABC$中较小的那个锐角的度数=________。

5. 两个正整数的和比积小1000，并且其中一个是完全平方数。试求较大数与较小数的比值=________。

6. 已知$\sqrt{2009}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，且$0<x<y$，满足上式的整数对$(x, y)$的个数是________。

二、(满分10分)如图，$\triangle ABC$中，$AB=BC=CA$，$AE=CD$，AD、BE相交于P，$BQ\perp AD$于Q。求证：$BP=2PQ$。



三、(满分10分)

1. x、y均为整数，若$5|(x+9y)$，求证：$5|(8x+7y)$。

2. x、y、z均为整数，若$11|(7x+2y-5z)$，求证：$11|(3x-7y+12z)$。

四、(满分10分)一直线从左到右顺次排列着1987个点：P_1，P_2，…，P_{1987}。已知P_k点是线段$P_{k-1}P_{k+1}$的k等分点当中最靠近P_{k+1}的那个分点($2\leqslant k\leqslant 1986$)。例如，$P_5$点就是线

段P_4P_5的五等分点中最靠近P_5的那个点。如果线段P_1P_2的长度是1，线段$P_{1986}P_{1987}$的长度为l，求证：

$$2l<\frac{1}{3^{1983}}.$$

五、(满分10分)有一个5×5的正方形方格棋盘，共由25个1×1的单位正方格组成。在每个单位正方形格子的中心处都染上一个红点。请你在棋盘上画若干条不通过红点的直线，分棋盘为若干小块（形状大小未必一样），使得每一小块中至多有一个红点。问你最少要画几条直线？举出一种画法，并证明你的结论。

1988年北京市初二数学竞赛

一、填空题（满分50分，每小题10分）

1．若$(xy-2)^2+(x-2y)^2=0$，

则$x^2+y^2=$________。

2．若$a+b+c=0$，$a^3+b^3+c^3=0$，

则$a^{10}+b^{10}+c^{10}=$________。

3．若a为自然数，且$a^4-4a^3+15a^2-3a+27$的值是一个质数。问这个质数是________。

4．设P为等边三角形ABC所在平面上的一点，它并且使$\triangle ABP$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$都是等腰三角形，问满足这种条件的P点共有______个。

5．已知关于x的方程

$(a^2-1)x^2-2(a+1)x+1=0$恰有一个实数根，a应取值为________。

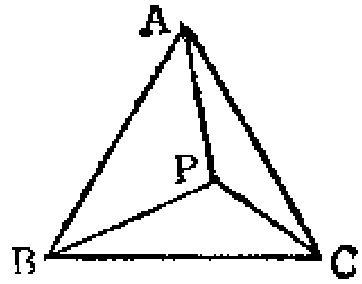
二、（满分10分）

方程$x^2-mx+m+5=0$有二实根为α、β。

方程$x^2-(8m+1)x+15m=7+0$有二实根为α、γ。求$\alpha^2\beta\gamma$的值。

三、（满分10分）

P为边长为1的等边三角形ABC内任意一点。设$l=PA+PB+PC$，

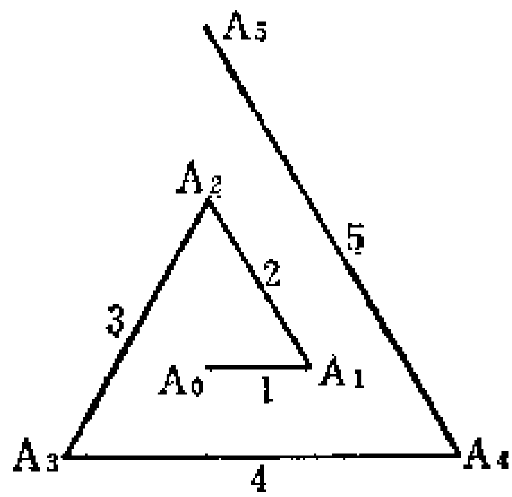


求证：$1.5<l<2$。

四、（满分10分）

任意十个连续的自然数，求证：其中至少有一个与其余九个数互质。

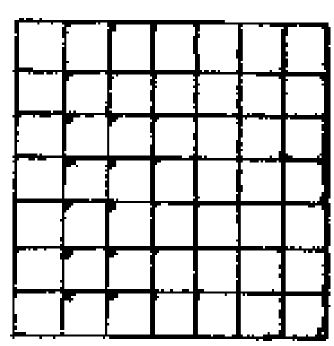
五、（满分10分）

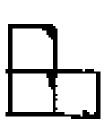


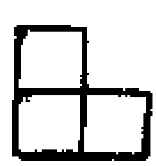
如图所示，$A_0A_1A_2A_3A_4A_5$是一个折线，$A_0A_1=1$，$A_1A_2=2$，$A_2A_3=3$，$A_3A_4=4$，$A_4A_5=5$；且$\angle A_0A_1A_2=\angle A_1A_2A_3=\angle A_2A_3A_4=\angle A_3A_4A_5=60^\circ$。

求证：$A_0A_5\perp A_3A_4$。

六、（满分10分）



在7×7的网格正方形中任意挖去一个1×1的小方格。证明剩下的48个方格，可以沿格线完整地剪成16个如图所示的“”形。



1986年上海市初中数学竞赛

一、选择题（本题满分30分，每小题6分）

本题共有5小题，每一小题答对者得6分，不答者得1分，答错者得0分。

1. 设实数x满足$|2-x|=2+|x|$，则$\sqrt{(x-1)^2}$等于（　　）

(A)$x-1$.　(B)$1-x$.　(C)$\pm(x-1)$.　(D)1.

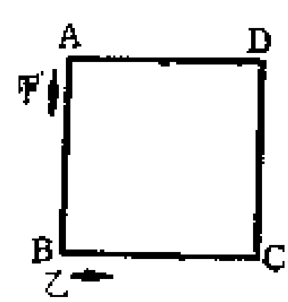
2. 已知$\lg a=\bar{1}.02$，则$0.01^{0.01}$等于（　　）

(A)a.　(B)$\frac{1}{a}$.　(C)$10a$.　(D)$\frac{1}{10a}$.

3. 满足不等式$10^4\leqslant A\leqslant 10^5$的整数$A$的个数是$x\times 10^4+1$，则$x$的值是（　　）

(A)9.　(B)8.　(C)7.　(D)6.

4. 如图，沿着边长为90米的正方形，按$A\to B\to C\to D\to A\cdots\cdots$方向，甲从$A$以65米/分的速度，乙从$B$以72米/分的速度行走，当乙第一次追上甲时在正方形的（　　）



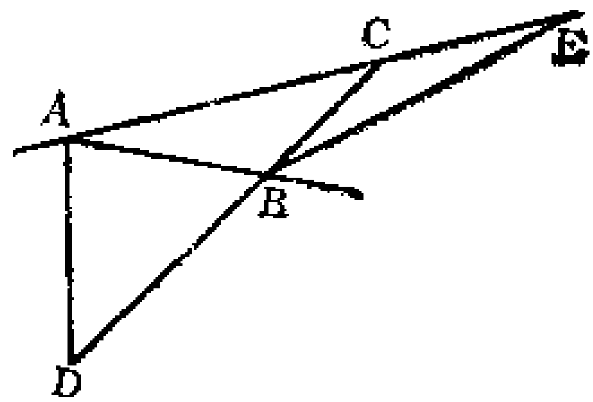
(A)AB边上.　(B)BC边上.

(C)CD边上.　(D)DA边上.

5. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$的外角平分线AD、BE分别交对边的延长线于D、E，且$AD=AB=BE$，则$\angle A$的度数是（　　）

(A)10°.　(B)11°.　(C)12°.　(D)非上述答案.

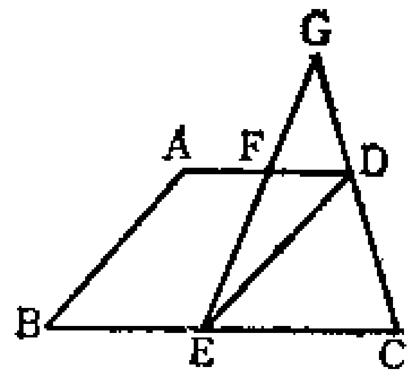
二、填充（本题满分40分，每小题8分）



1．若$y=2-\sqrt{3}$，则$x^4-5x^3+6x^2-5x=$______。

2．对于实数a、b，规定演算$a*b=(a+1)(1-b)$，则满足等式$(a*a)*(a+1)=(a+1)*(a*a)$的a的值是______。

3．如图，梯形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，$AD:BC=2:5$，$AF:FD=1:1$，$BE:EC=2:3$，EF和CD的延长线交于G，则用最简的整数比表示$S_{\triangle GFD}:S_{\triangle FED}:S_{\triangle DEC}=$______。



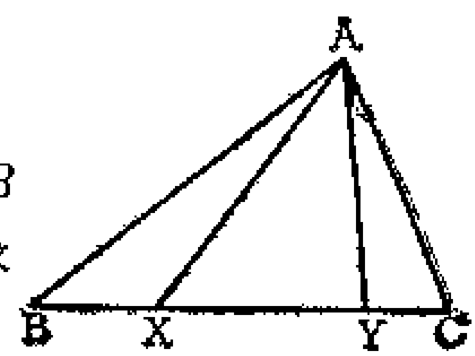
4．在一次射箭比赛中，已知小王与小张三次中靶的环数之积都是36，且总环数相等，还已知小王的最高环数比小张的最高环数多（中箭的环数是不超过10的自然数），则小王的三次射箭的环数从小到大排列是______。

5．设a、b是相异的正数，且$a^{\lg(ax)}=b^{\lg(bx)}$，则$(ab)^{\lg(abx)}=$______。

三、（本题满分15分）

100个正整数之和为101101，则它们的最大公约数的最大可能值是多少？证明你的结论。

四、（本题满分15分）



自$\triangle ABC$的顶点引两条射线交BC于x、y，使$\angle BAX=\angle CAY$。求证：$\dfrac{BX\cdot BY}{CX\cdot CY}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$。

五、（本题满分20分）

设a、b为整数，且方程$ax^2+bx+1=0$的两个不同的正数根都小于1，求a的最小值。

1987年上海市初中数学竞赛

一、选择题（本题满分30分，每小题6分）

本题共有5小题，每小题答对者得6分，不答者得1分，答错者得0分。

1. 凸七边形的所有对角线把该七边形分割成许多不重叠的小凸多边形，其中边数最多的小多边形的可能的边数是（　）

(A)5. (B)6. (C)7. (D)大于7的自然数.

2. 方程组：

$$\begin{cases}x+y=2\\ xy-z^2=1\end{cases}$$

的实数解的组数是（　）

(A)1.　(B)2.　(C)3.　(D)无穷多.

3. $\log_3\left[(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{64}+1)+\frac{1}{2}\right]+\log_3 2$的值为（　）

(A)32.　(B)64.　(C)128.　(D)非上述答案.

4. 若数$n=20\cdot30\cdot40\cdot50\cdot60\cdot70\cdot80\cdot90\cdot100\cdot110\cdot120\cdot130$，则不是$n$的因数的最小质数是（　）

(A)19.　(B)17.　(C)13.　(D)非上述答案.

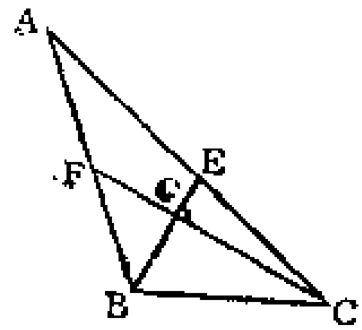
5. 为了给一本书的各页标上页码，印刷工人用了3289个数字，则本书的页数是（　）

(A)1095. (B)1096. (C)1097. (D)非上述答案.

二、填空题（本题满分40分，每小题8分）

1. 已知方程$\lg 2x \cdot \lg 3x = -a^2$有两相异实数解，则实数$a$的取值范围是 ______.（可保留常用对数）

2. 在△ABC中，已知$BC=10$，$AC>AB$，且中线BE、CF互相垂直，重心G到BC的距离为3，则$AB=$ ______，$AC=$ ______.



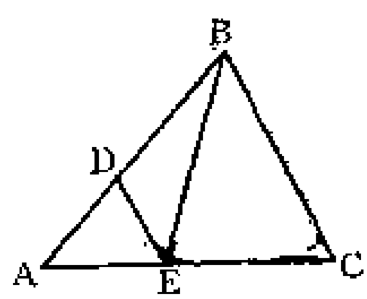
3. 能被33整除的六位数$\overline{19xy87}$的个数是______.

4. 某校举办数学竞赛，甲、乙、丙、丁、戊五位同学得了前五名，发奖前，老师让他们猜一猜各人的名次排列情况。甲说：乙第三名，丙第五名；乙说：戊第四名，丁第五名；丙说：甲第一名，戊第四名；丁说：丙第一名，乙第二名；戊说：甲第三名，丁第四名；老师说，每个名次都有人猜对，则获第四名的是 ______.

5. 在第一象限内，函数$y=\sqrt{x^2-105}$图象上坐标x、y都是整数的点(x,y)的个数是______.

三、（本题满分16分）

已知△ABC与平行BC的直线DE相交，且△BDE的面积等于给定值k^2，那么当k^2与△ABC的面积S之间满足什么关系时问题有解？有多少解？



四、（本题满分16分）

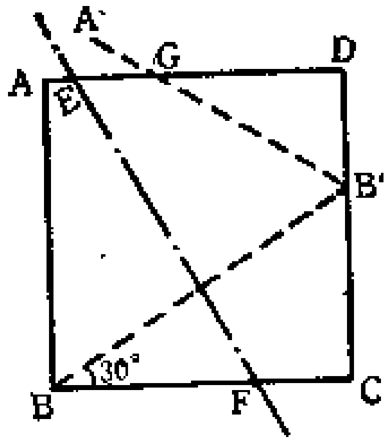
将边长为3的正方形$ABCD$折叠，折痕为EF（如图），使点B落在CD上的B'处，点A落在点A'处，且$\angle B'BC=30°$，试计算△$A'EG$的面积。

五、（本题满分18分）

设正数x、y、z满足不等式

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}>1.$$

求证：x、y、z是某个三角形的三边长。



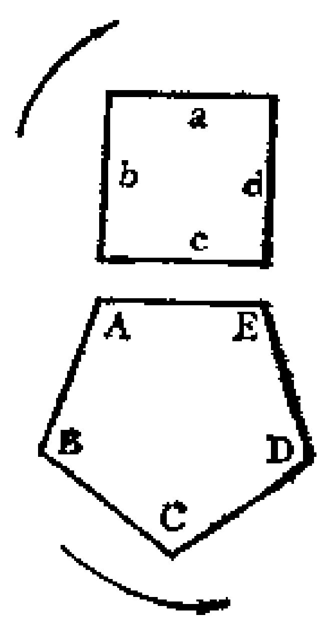
1987年上海市中学生业余数学学校首届招生（初一）

一、选择题（每小题4分，共20分）

1. 数2，4，6，8，……是连续偶数，若五个连续偶数的和是1990，则这五个数中最小的一个是（　）

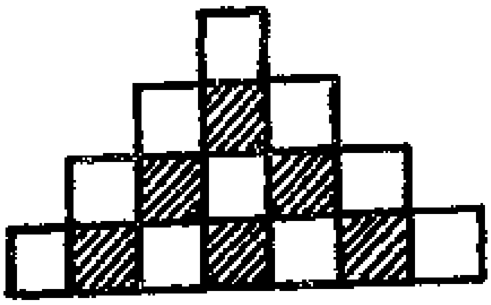
(A)392.　(B)394.　(C)396.　(D)398.

2. 如图，有两个各边完全相等的正方形和正五边形。若正五边形按逆时针方向开始旋转，而它上面的正方形按顺时针方向一边对着一边旋转，则直到正五边形的AE边和正方形的c边重合为止，正方形旋转的圈数为（　）



(A)10.　(B)5.　(C)4.　(D)非上述答案.

3. 一“台阶”图的每一层要由黑色和白色正方形交错组成，且每一层的两端



是白色正方形。从上到下第一层到第四层如图所示。在第1987层中黑色正方形的数目是（　　）

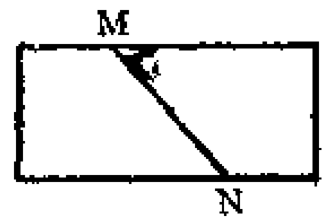
(A)993.　(B)1985.　(C)1986.　(D)非上述答案。

4. 某商品因滞销而降价10%，后开拓了市场转为畅销，要恢复原价，应提价（　　）

(A)9%.　(B)10%.　(C)11%.　(D)非上述答案.

5. 在右边的长方形中，线段MN分这个长方形为两个部分，那么再画上三条线段最多能把这个长方形分成的块数是（　　）

(A)8.　(B)9.　(C)10.　(D)11.



二、填充题（每小题8分，共80分）

1. $1987\times20002000-2000\times19871987=$______.

2. 109除以一个两位数的余数是4，则适合上述条件的所有两位数是______.

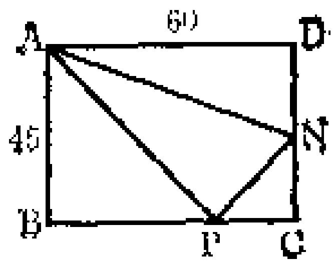
3. 若三个有理数a、b、c满足$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=1$，则$\frac{|abc|}{abc}=$______.

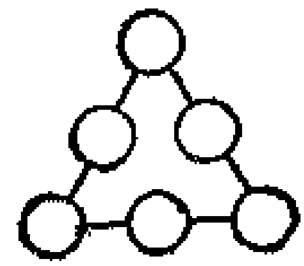
4. 30枚硬币由2分和5分组成，共值9角9分，则两种硬币的数目之积是______.

5. 已知$\frac{1}{3}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，$A$、$B$为不同的正整数，则$A+B=$______.

6. 在矩形$ABCD$中，$AD=60$cm，$AB=45$cm，N为

CD中点，在BC边上取一点P作$\triangle APN$，使它的面积不超过$900cm^2$，且点P尽可能靠近B，则$BP=$________cm。





7、 如图，在一个幻三角形中，10、11、12、13、14、15这六个数各自放置在一个圆圈内，使得这三角形各边上的三个数之和S是相同的，这S的最大值可能是______。

8． 一本书有500页，编上页码1、2、3、…、500，那么数字1在页码中共出现________次。

9． 某人将球放进两种盒子里，每个大盒子装12只，小盒子装5只，恰好装完，若球数为99，盒子数大于10，则有大盒子___只，小盒子___只。

10． A、B、C三个足球队举行循环比赛，下表给出了部分比赛结果：

球队	比赛场数	胜	负	平	进球数	失球数
A	2	2场				1
B	2			1场	2	4
C	2				2	7

则A队与B队比赛时，A队的进球数与B队的进球数之比是___。

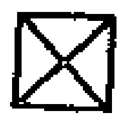
1988年上海市初一数学竞赛

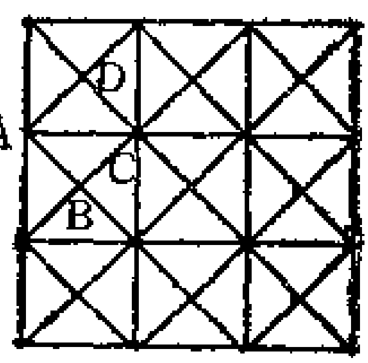
本试卷共14题，前12题每题7分，最后 2 题每题8分，满分100分。各题只要填最后的结果，不必写出中 间 的过程.

1． 分解质因数：999999＝____________.

2． 已知自然数a、b、c（其中$c\geqslant 3$），a除以c余1，b除以c余2，则ab除以c的余数是________.

3． 已知四个数的和为64，若第一数加3，第二数减3，第三数乘以3，第四数除以3，所得的结果均相同，则这相同的结果是________.

4． 右图是由9个相同的形如  的带有对角线的小正方形拼成的图形，假定已知形如$ABCD$的四边形都是正方形，则图中一共可找出____个正方形.



5． 某宾馆底楼客房比二楼少5间. 某旅游团有48人，若全安排住底楼，每间住4人，房间不够；每间住5人，有房间没有住满5人，又若全安排住二楼，每间住3人，房间不够；每间住4人，有房间没有住满4人，该宾馆底楼有客房____间.

6． 若a、b、c、d是四个互不相同的自然数，且$abcd=1988$，则$a+b+c+d$的最大值是________.

7． 1988个空格排成一行，预先在左边第 1 格放入一枚棋子，然后甲、乙两人交替走，先甲后乙，每步可向右移1

格、2格或3格。规定谁先到最右一格为胜。甲为了保证获胜，他第一步必须把棋子向右移______格。

8．某校初一年级学生身高的厘米数都为整数，且都不大于160厘米，不小于150厘米，则至多从任意的______个初一学生中至少能找到4个人的身高相同。

9．若$|a-1|+(ab-2)^2=0$，则

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+2)(b+2)}+\cdots$$

$$+\frac{1}{(a+1986)(b+1986)}=\_\_\_\_\_\_.$$

10．把23个数：3，33，333，…，$\underbrace{33\cdots3}_{23个3}$相加，所得的和的末四位数字是______。

11．从1到10000这一万个自然数中，有______个数能被5或能被7整除。

12．由偶数数码（零除外）组成的且能被16整除的最小五位数是______。

13．若记三位数与组成该三位数的各数码之和的比值为M（如，三位数为234，则$M=\frac{234}{2+3+4}$），则M的最大值是______。

14．甲、乙两人在相距90米的直路上来回跑步，甲速度为3米/秒，乙速度为2米/秒，若他们同时分别在二端点出发，且每人均跑了12分钟，则他们在这段时间内共相遇____次。

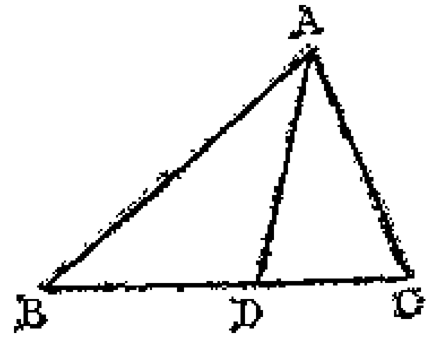
1988年上海市初二数学竞赛

本试卷共14题，前12题每题7分，最后2题每题8分，满分100分。本题只要填最后的结果，不必写出中间过程。

1．若$x+y=10$，$x^3+y^3=100$，则$x^2+y^2=$ ______.

2．设$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，则$\frac{x^3+x+1}{x^5}=$ ______.

3．如图，D在$\triangle ABC$的边BC上，且$BD=DA=AC$，$\angle BAC=63°$，则$\angle DAC=$ ______度。



4．快慢两列车的长分别是150米、200米，相向行驶在平行轨道上，若坐在慢车上的人见快车驶过窗口的时间是6秒，则坐在快车上的人见慢车驶过窗口所用的时间是______秒。

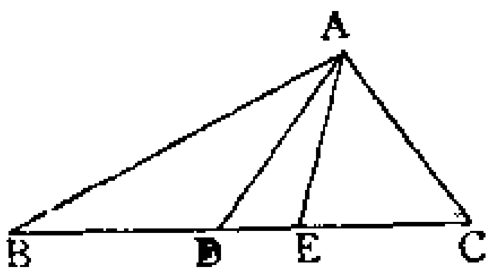
5．$\triangle ABC$中，$\angle A$是最小角，$\angle B$是最大角，且$2\angle B=5\angle A$，若$\angle B$的最大值是$m°$，最小值是$n°$，则$m+n=$ ______.

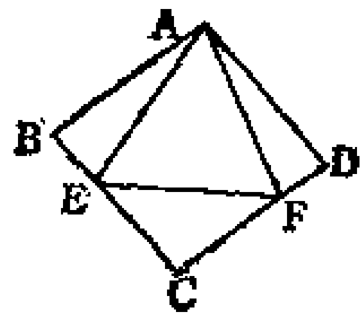
6．某校初二年级学生的身高厘米数都是整数，且都不大于160厘米，不小于150厘米，则至多从任意____个初二学生中至少能找到4个人的身高相同。

7．已知四位数$A=\overline{6**8}$能被236整除，则A除以236的商是____.

8．如图，$\triangle ABC$的两边AB和AC的垂直平分线分别交BC于D、E，若$\angle BAC+\angle DAE=150°$，则$\angle BAC=$ ______

度。





9． 如图，E、F分别在BC和CD上，$AB=AE=AF=AD=BC=CD=EF$，

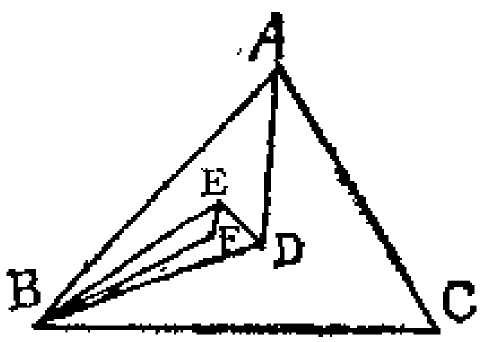
则$\angle C=$__________度。

10． 方程$x^2-y^2=1988$的不同的整数解的组数是________。

11． 周长为30，各边长互不相等且都是整数的三角形中，不全等的有___个。

12． 一个六边形的六个内角都是120°，连续四边的长依次是1，3，3，2，则该六边形的周长是_____。

13． 三角形的内角平分线的交点称为三角形的内心，如图，D是$\triangle ABC$的内心，E是$\triangle ABD$的内心，F是$\triangle BDE$的内心，若$\angle BFE$的度数为整数，则$\angle BFE$至少是______度。



14． 在1，2，3，…，1988这1988个自然数中，最多能取_____个数，使在所取的数中，任意两个数的和能被100整除。

1988年上海市初三数学竞赛

一、填空题（本题有10小题，每小题9分，共90分）

1．若自然数n的各位数码之和为1988，则n的最小值是______．

2．在凸四边形$ABCD$中，已知$AB:BC:CD:DA=2:2:3:1$，且$\angle ABC=90°$，则$\angle DAB$的度数是____．

3．若n^{30}为1000位数，则$\frac{1}{\sqrt{n}}$的值在小数点后连续有____个零。

4．若正数x的整数部分的平方等于x与它小数部分的积，则$x-\frac{1}{x}=$______。

5．满足方程$x^2-2y^2=1$的所有质数解（即x、y都是质数的解）是______．

6．一个9×10的矩形网格，每个小方格都是1×1的正方形，其中每个顶点都是小方格顶点，且边平行网格边的各种正方形的总数是______．

7．若凸$4n+2$边形$A_1A_2\cdots A_{4n+2}$（n为自然数）的每个内角都是30°的整数倍，且$\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=90°$，则$n$的所有可能值是____．

8．三条直线l、m、n互相平行，l、n在m的两侧，且l，m间的距离为2，m、n间的距离为1，若正△ABC的三个顶点分别在l、m、n上，则正△ABC的边长是______．（必须用精确值表示）

9. 已知一元二次方程$x^2-x+1-m=0$的两实根α、β满足$|\alpha|+|\beta|\leqslant5$，则实数$m$的取值范围为____。

10. 40只脚的蜈蚣与3个头的龙同在一个笼中，共有26个头和298只脚，若40只脚的蜈蚣有一个头，则3个头的龙有____只脚。

二、（本题15分）

任给锐角$\triangle ABC$，问在BC、CA、AB上是否各存在一点D、E、F，使$FD\perp BC$，$DE\perp AC$，$EF\perp AB$。

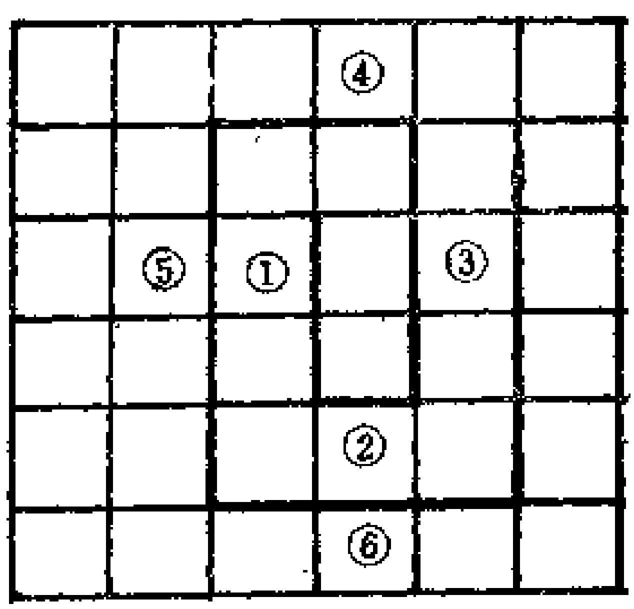
证明你的结论。

1989年上海市初一数学竞赛

本试卷共12题填空，每小题10分，共120分。

1. 由数字1，2，3，4可以组成没有重复数字，并且千位数字是1的四位数共有____个。

2. 在各边长都是1的正方形方格纸上画着如图所示的折线，它的各段依次标着①，②，③，④，…的序号，那么㉔号线段的长度是____。



3. 方程$\dfrac{x-a-b}{c}+\dfrac{x-b-c}{a}+\dfrac{x-c-a}{b}=3$，并且$abc\neq0$，那么$x=$____。

4. 计算：$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\cdots+\frac{58}{60}+\frac{59}{60}\right)=$____。

5. 使得不等式$3x-a\leqslant 0$只有三个正整数解，那么这时正数a的取值范围是____。

6. 现定义两种运算："$\oplus$"、"$\otimes$"，对于任意两个整数a、b，$a\oplus b=a+b-1$，$a\otimes b=ab-1$，那么$4\otimes[(6\oplus 8)\oplus(3\otimes 5)]=$____。

7. $76^{25}+25^{76}$的末两位数码是____。

8. 在一个箱子里有90只球，其中20只是红色球，20只是黄色球，20只是蓝色球，20只是绿色球，其余的是黑色球和白色球，这些球只是颜色上有区别，如果在黑暗中取球，要使取出的球中有不少于10只同色的球，那么至少必须取出____只球。

9. 某两位数，它的各位数字之和的立方等于它的平方，这样的两位数是____。

10. 九位数32＊35717＊能被72整除，其中每个星号"＊"表示一个数码，那么这个九位数是____。

11. 篮子里装有不多于500个苹果，如果每次二个、每次三个、每次四个、每次五个、每次六个地取出来，篮子里都剩下一个苹果，而如果每次七个地取出，那么没有苹果剩下，篮子里共有苹果____个。

12. 将两筐苹果分给甲、乙两个班级，甲班有一人分到6只，其余的人每人都分到13只，乙班有一人分到5只，其余的每人都分到10只，如果两筐苹果的数目相同，并且大于

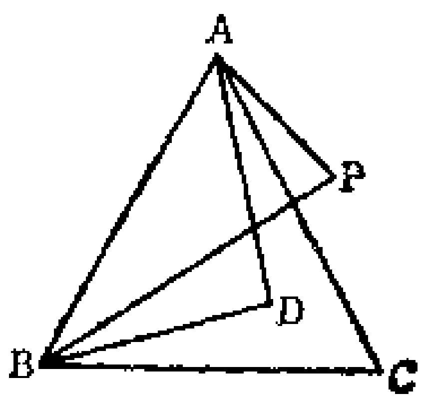
100不超过200，那么甲班有____人，乙班有____人。

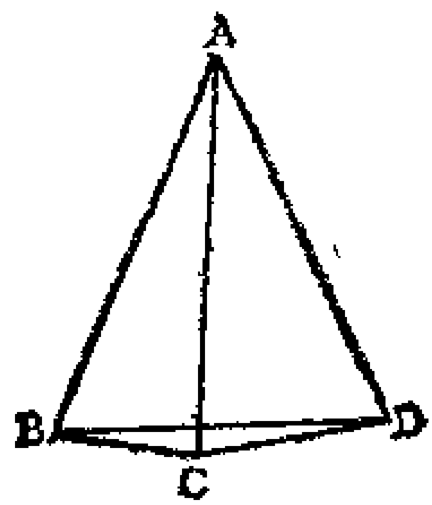
1989年上海市初二数学竞赛

本试题共12题填空，每小题10分，共120分。

1．如果直角三角形的边长分别是6、8、x，那么$x=$____。

2．如图，设D为等边$\triangle ABC$内一点，且$DB=DA$，$BP=BA$，$\angle DBP=\angle DBC$，则$\angle BPD=$____。





3．如果x、y分别表示$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$的整数和小数部分，那么$x^2+(1+\sqrt{7})xy=$____。

4．如图，$AB=AC=AD$，如果$\angle DAC$是$\angle CAB$的k倍，那么$\angle DBC$是$\angle BDC$的____倍。

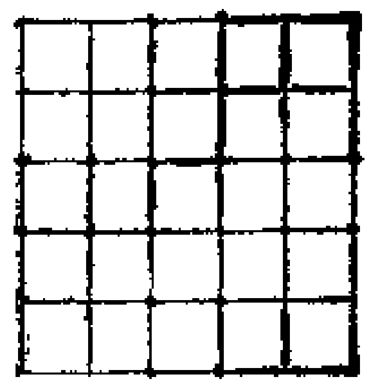
5．如果关于x、y的方程组$\begin{cases}2x+3y=2k+1\\3x-2y=4k+3\end{cases}$的解$x$、$y$

的值之和为6，那么$k=$____。

6. 如果关于x的不等式$(2a-b)x+a-5b>0$的解为$x<\frac{10}{7}$，那么关于x的不等式$ax>b$的解是____。

7. 如果$x=2-\sqrt{3}$，那么$\frac{x^4-4x^3-x^2+9x-4}{x^2-4x+5}=$____。

8. 两位数$\overline{xy}$（这里x、y分别表示十位数字与个位数字），减去互换数字位置后的自然数$\overline{yx}$，所得的差恰好是某自然数的立方，这样的两位数共有____个。



9. 在正方形格纸上有20个点，其分布如图所示，现用4个点作为正方形的4个顶点，这样总共可以组成____个正方形。

10. 形如$\underbrace{1989\ 1989\cdots1989}_{n个1989}\ 129$，且能被11整除的最小数是____。

11. $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots98\cdot99\cdot100}{6^{100}}$约简后所得的分数的分母是____。（结论可以用指数形式表示）

12. 满足方程$(10-x)(8-x)=2^y$的整数x、y是____。

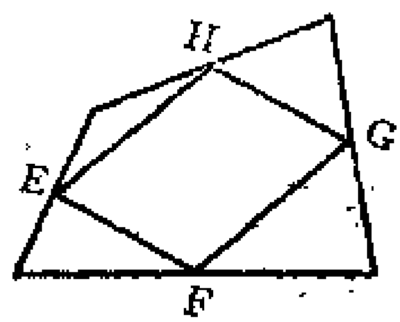
1986年"缙云杯"初中数学邀请赛

一、判断正误（本题满分20分，每小题2分），以下命题若正确，请在题后的（　　）内打"√"；否则打"×"。每答对一题得2分，答错或不答得0分。

1．两边与其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等。（　　）

2．直角三角形的三条边的垂直平分线交于一点，且这个点一定在斜边上。（　　）

3．如图，E、F、G、H依次是任意凸四边形各边的中点，则四边形$EFGH$一定是中心对称图形。（　　）



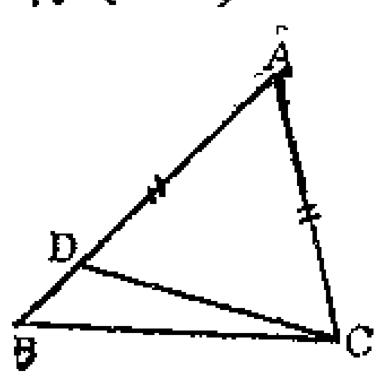
4．若$a^2+b^2=c^2$，则$|a|$、$|b|$、$|c|$必是一个直角三角形三边的长。（　　）

5．若$a>0$，$x>0$，那么$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a-x}$一定成立。（　　）

6．如果n是正整数，那么$[1-(-1)^n](n^2-1)$一定是偶数。（　　）

7．若$a\neq b$，那么一定有$a^2+b^2\neq 2|ab|$。（　　）

8．如图$\triangle ABC$中，$AB>AC$，在AB上截取$AD=AC$，则$\angle BCD=\dfrac{1}{2}(\angle BCA-\angle B)$。（　　）



9．$\sqrt{1986\times1987\times1988\times1989+1}$

不是整数．（　　）

10．规定是非题的评分标准是：填对一题得5分，填错的得0分，不填得2分，那么解答1986道是非题时，一定可以找到662道题，它们的得分是相同的．（　　）

二、选择题（本题满分30分，每小题6分）．每填对一题得6分，不填或填错得0分．

1．方程 $ax^2+bx+c=0(a<0)$ 的两个实根的大小关系是（　　）

(A) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\geqslant\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

(B) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

(C) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\leqslant\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

(D) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$．

2．方程 $x^2-y^2=12$ 的整数解的组数是（　　）

(A)2组；(B)4组；(C)8组；(D)12组．

3．化简 $\sqrt{\dfrac{1\cdot2\cdot3+2\cdot4\cdot6+\cdots+n\cdot2n\cdot3n}{1\cdot5\cdot10+2\cdot10\cdot20+\cdots+n\cdot5n\cdot10n}}$ 得（　　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$；(B) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$；(C) $\sqrt{\dfrac{3}{10}}$；(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$．

4．若方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有一个相同的根，且 a、b、c 为一个三角形的三条边，则此三角形为（　　）

(A) 锐角三角形；

(B) 钝角三角形；

(C) 以c为斜边的直角三角形；

(D) 以a为斜边的直角三角形。

5. 铁板甲形状为等腰三角形，其顶角为$45°$，腰长12 cm；铁板乙形状为直角梯形，两底长分别为4cm、10cm，且有一个内角为$60°$。现在我们把它们任意翻转，分别试图从一个直径为8.5cm的圆洞中穿过，结果（　　）

(A) 甲板能穿过，乙板不能穿过；

(B) 甲板不能穿过，乙板能穿过；

(C) 甲、乙两板都能穿过；

(D) 甲、乙两板都不能穿过。

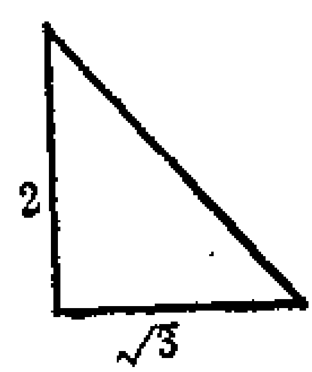
三、填空题（本题满分48分，每小题8分）。请将下列各题的最后结果填在横线上。

1. 已知$\sqrt{11-6\sqrt{2}}$的整数部分为a，小数部分为b，

则$a+b+\dfrac{2}{b}=$________。

2. 方程组$\begin{cases} x+y+z=\sqrt{x+y+z+1}+5 \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4} \end{cases}$

的解是________。

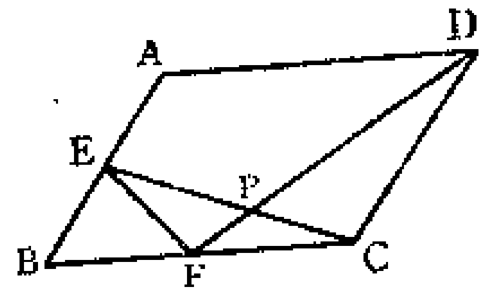


3. 有直角边分别为2和$\sqrt{3}$的直角三角形纸板一块。请将这三角形分成三块，再拼成一个正三角形。（通过画图表示）

4. 实数x、y满足$x^2-2x-4y=5$，则$x-2y$的取值范

围是________。

5. 已知：E、F分别是$\square ABCD$的边AB、BC的中点，P是DF、CE的交点，则$S_{\triangle FPC}$：$S_{\square ABCD}=$________。



6. 若k为正整数，且二次方程$(k-1)x^2-px+k=0$有两正整数根，则$k^{kp}(p^p+k^k)+k^{k+2-p}$的值为________。

四、综合题（本题满分22分）

1. （本题满分10分）把$\triangle AOB$绕顶点O旋转$90°$，使顶点A变成A_1，B变成B_1。求证：在$\triangle OAB_1$里，AB_1边上的中线是$\triangle OA_1B$的A_1B边上的高。

2. （本题满分12分）矩形四边的长度数是小于10的整数（单位：厘米），用这四个长度数可构成一个四位数，这个四位数的千位数字与百位数字相同，并且这个四位数是一个完全平方数，求这个矩形的面积。

1986年"缙云杯"数学邀请赛（初二）

一、判断是非题（共15分，每小题3分）

以下结论，若正确，请在题后的（　）内填"√"；若错误则填"×"。判断正确者得3分，判断错误或不填者得0分。

1. -0.1^2的二次幂是0.0001。（　）

2. 如果$a^2+(bc)^2>0$，那么a、b、c都不等于零。（　）

3. 无论a为任何值，一定有$a^2-2|a|+1<a^2+1$。

(　　)

4．如果a个人需要s天完成某项工程，那么$(a+b)$个人需要$\frac{s}{a+b}$天完成此项工程。(　　)

5．分式

$$\frac{\frac{1}{(a-b)^2}-\frac{2}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}}{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{2}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}}$$

$$\div\frac{\frac{1}{(a^2-b^2)^2}-\frac{2}{a^4-b^4}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}}{\frac{1}{(a^2-b^2)^2}+\frac{2}{a^4-b^4}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}}$$

化简的结果是$\frac{a^2}{b^2}$。(　　)

二、选择题（共30分，其中每小题5分）填对得5分，不填得1分，填错得0分。

1．1、9、8、6四个数中，完全平方数、奇数、合数和质数的个数依次是（　　）

(A) 1，2，3，1；　　(B) 1，2，3，0；

(C) 2，2，3，0；　　(D) 2，2，3，1。

2．下面不等式中正确的是（　　）

(A) $4.1a>4a$；　　(B) $5-a>4-a$；

(C) $a^6>a^4$；　　(D) $\frac{5}{a}>\frac{4}{a}$。

3．使分式$\frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$的值为零的x值是（　　）

(A) 2；(B) 5；(C) 2或5；(D) -2。

4．小王从山脚A到山顶B，然后从山顶B到山脚A。去时速度为每小时 3 公里，原路返回时的速度为每小时5公里。小王往返一次的平均速度是（　　）

(A) 3.75公里/小时；(B) 3.85公里/小时；

(C) 4公里/小时；　(D) 4.2公里/小时。

5．设$[x]$表示不超过x的最大整数，则$[-\pi]^{[\pi]}$的值应为（　　）

(A) 27；(B) -27；(C) 64；(D) -64。

6．整数M满足$10<M<100$，交换M的各位数字的位置后，所得的数比原数小 18，这样的整数M的个数有（　　）

(A) 2个；(B) 3个；(C) 7个；(D) 8个。

三、填空题（共48分，每小题 6 分）

1．如果$a+b\leqslant 0$，$ab<0$，$a<b$，那么a____0；b____0；$|a|$____$|b|$。

2．x^3+4x^2+5x+2用整式________________除，商和余式都是$x+1$。

3．3^{1986}的个位数字是____________。

4．两个自然数的最大公约数是 6，最小公倍数是 84，那么这两个数是____________。

5．如果使分式$\dfrac{ax+7}{bx+11}$有意义的一切x的值都使这个分式的值是一个定值，那么a、b应满足的条件是________________________。

6．五边形$ABCDE$的边长都是1，有两个点同时从A点沿此五边形的边界反向运动。它们第五次相遇时的地点恰好

是A点。这两个点的运动速度之比（较小速度：较大速度）为________。

7．a、b为非零常数，$x_2=ax_1+b$，$x_3=ax_2+b$，$x_4=ax_3+b$，……，$x_{10}=ax_9+b$。如果$x_{10}=0$，则$x_1=$________。

8．若$\frac{x-y}{A}=\frac{y-z}{B}=\frac{z-x}{C}=ABC<0$，则$A$、$B$、$C$中有______个为负数。

四、（8分）

如果$(-x+6):(x-y):(4x+y)=3:14:1$，求$x+y$的值。

五、（9分）

一轮船从重庆到上海要5昼夜，而从上海到重庆要7昼夜，那么有一木排从重庆顺流漂到上海要多少昼夜。

六、（10分）

求方程$4x+y=3xy$的一切整数解。

1987年“缙云杯”初中数学邀请赛

一、判断正误（本题满分10分，每小题2分）

以下命题若正确，请在题后的（　）内打“√”，否则打“×”。每答对一题得2分，答错或不答得0分。

1．凸1987边形的外角和是360°.（　）

2．方程$|x-y+3|+|x+y-1|=0$与$(x-y+3)(x+y-1)=0$的解相同.（　）

3．等边三角形有三条对称轴，这三条对称轴的交点是

它的对称中心。(　　)

4. 若关于x的方程$(a+1)x=a^2-1$有唯一解$x=0$，则$a=-1$。(　　)

5. 关于x的方程$(k^2-1)x^2-2kx+1=0$，在k为任意实数时，总有两个不相等的实数根。(　　)

二、选择题（本题满分30分，每小题6分）

每填对一题得6分，不填或填错得0分.

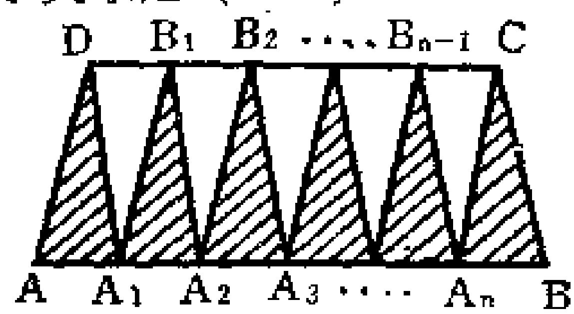
1. 数3^{555}，4^{444}，5^{333}的大小关系是（　　）

(A) $3^{555}<4^{444}<5^{333}$;

(B) $4^{444}<3^{555}<5^{333}$;

(C) $5^{333}<4^{444}<3^{555}$;

(D) $5^{333}<3^{555}<4^{444}$.



2. 如图，梯形$ABCD$的底$AB=a$，$CD=b$，A_1、A_2、…、A_n依次为AB上的任意点. B_1、B_2、…、B_{n-1}依次为DC上的任意点，顺次连接DA_1、A_1B_1、B_1A_2、…、A_nC，图中阴影部分的面积与未画阴影部分的面积比为（　　）

(A) $\frac{a}{b}$; (B) $\frac{n}{n-1}$; (C) $\frac{a}{b-1}$; (D) $\frac{an}{b(n-1)}$.

3. 如果4个人每人每天工作4小时，4天能粉刷4间教室，那么8个人每人每天工作8小时粉刷8间教室所需的天数是（　　）

(A) 2天；(B) 4天；(C) 8天；(D) 16天.

4. 方程$(x+1)^2+(y-2)^2=1$的整数解有（　　）

(A) 1组；(B) 2组；(C) 4组；(D) 无数多组.

5. 周长为有理数的等腰三角形，底边上的高是底边的$\frac{1}{2}$，则（　　）

(A) 腰与底边上的高都是有理数；

(B) 腰与底边上的高都不是有理数；

(C) 腰是有理数，底边上的高不是有理数；

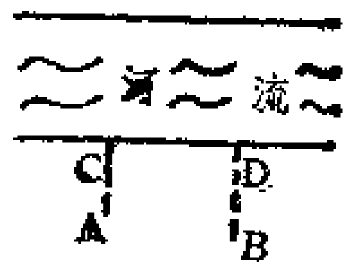
(D) 腰不是有理数，底边上的高是有理数。

三、填空题（本题满分50分，每小题 5 分）。

请将下列各题的最后结果填在横线上。

1. 计算：

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1001}}=\underline{\qquad\qquad}.$$



2. 如右图，一牧童在A处牧马，牧童家在B处。A、B处距河岸分别为 300m、500m，$CD=600$m。天黑前，牧童从A点将马赶到河边去饮水后再赶回家。那么牧童最少要走____m。

3. 已知 $x^2+x+1=0$，则 x^3+2x^2+2x+3 的值为________。

4. 当$(a-1)^{a^2-1}$的值为1时，a的值是______。

5. $\triangle ABC$的面积为 16cm²，AB、BC、CA 的中点分别为A_1、B_1、C_1，设$\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 S_1，A_1B_1、B_1C_1、C_1A_1的中点分别为A_2、B_2、C_2，设$\triangle A_2B_2C_2$的面积为S_2。如此继续下去，则$S_{1987}=$____cm²。

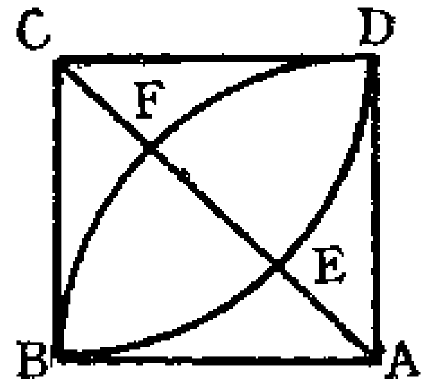
6. 设一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 α、β，令 $S_n=\alpha^n+\beta^n$（如$S_1=\alpha+\beta$，$S_2=\alpha^2+\beta^2\cdots$），则 $S_4=$____。

7. 已知平行四边形的周长为$2p$，高分别为h_1和 h_2，则它的面积是______。

8. 化简：若$\sqrt{\sqrt{b}-a}\neq 0$，则 $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}\cdot$

$\sqrt[8]{a^2-2a\sqrt{b}+b}=$______.

9. 如图，分别以正方形相对顶点为圆心，以边长为半径画两条四分之一圆弧，如果对角线夹在两弧间的线段 $EF=1$，那么正方形的边长是______.



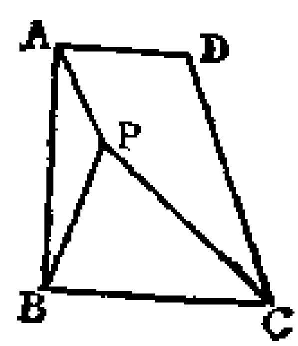
10. 若 $a=\sqrt{17}-1$，则 $(a^5+2a^4-17a^3-a^2+18a-17)^{1987}=$______.

四、综合题（本题满分30分，1、2小题各8分，3小题14分）

1. 解方程：$\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}$

2. 设方程 $x^2+ax+bc=0$ 与方程 $x^2+bx+ac=0$ 有一个公共根，求证其它两个根必为方程 $x^2+cx+ab=0$ 的根。

3. 如图，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，且 $AB=BC=2AD$，$PA=1$，$PB=2$，$PC=3$，求 $ABCD$ 的面积。



1988年"缙云杯"初中数学邀请赛

一、判断正误（本题满分18分，每小题 3 分）

以下命题若正确，请在题后的（　　）内打"√"，否则打"×"。每答对一题得3分，答错或不答得0分。

1. $|-a|^2=a^2$.（　　）

2. $(-1^{-1988}+1)^0=1$.（　　）

3．有一组对边平行，且另一组对边相等的四边形是平行四边形。（　　）

4．方程$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}$没有实数解。（　　）

5．当$b=0$时，一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两根必互为相反数。（　　）

6．如果三条线段的长度分别是$\sqrt{2}$、5、$\sqrt{41}$，那么这三条线段不能构成三角形。（　　）

二、填空题（本题满分35分，每小题5分）

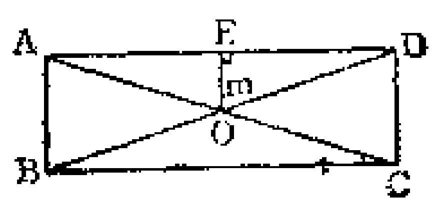
1．甲加工a个零件需m天，乙加工b个零件需n天，若两人共同加工p个零件，需____天。

2．在$\triangle ABC$中，$\angle B=45°$，$\angle C=30°$，$AB=2\sqrt{2}$。则$BC=$____。

3．若$\begin{cases} x+2y=9z \\ x-2y=5z, \end{cases}$　则　$\dfrac{2x^2+3y^2+7z^2}{x^2-4y^2+9z^2}=$____。

4．若$-2\leqslant x\leqslant 2$，则$y=|x+3|+\sqrt{x^2-4x+4}$化简的结果是$y=$____。

5．如图，已知矩形$ABCD$的长边与短边的比是3:1，过对角线交点O作$OE\perp AD$，交AD于E，设$OE=m$，且使二次方程$(m-4)x^2-(2m-1)x+m=0$的二根倒数和为3/2，那么矩形$ABCD$的面积是____。



6．已知实数a、b、c满足$\frac{1}{2}|a-b|+\sqrt{2b+c}+c^2-c+\frac{1}{4}=0$，则$(b+c)^a=$____。

7. 观察下列数的规律，然后按此规律在横线上填上恰当的数：

0，3，8，15，___，35，48.

三、选择题（本题满分36分，每小题6分）

每小题填对得6分，不填或填错得0分。

1. 如果$a<b$，那么（　　）

(A) $\frac{a}{b}<1$.　(B) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.　(C) $3^{-a}>3^{-b}$.

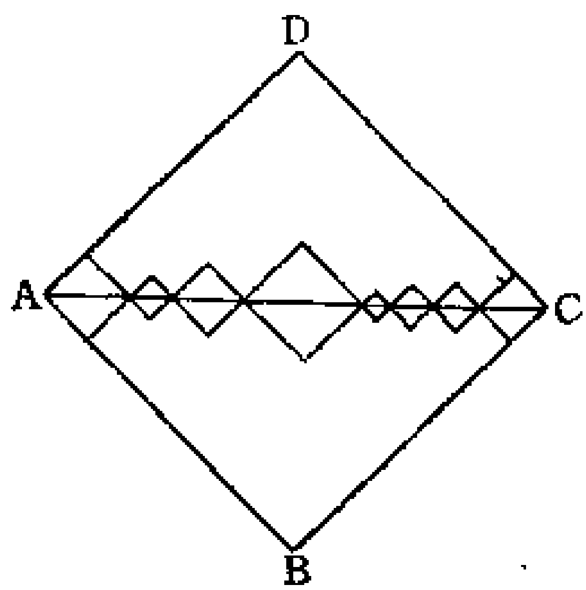
(D) $a^2>b^2$.

2. 对于实数，我们规定$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$. 如果

$\begin{vmatrix} 2x & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}<8$，那么$x$的取值范围是（　　）

(A) 大于-3.　(B) 小于-3.　(C) 小于5.　(D)大于-5.

3. 如图，把正方形$ABCD$的对角线AC分成n段，以每一段为对角线作正方形。设这n个小正方形的周长和为P，正方形$ABCD$的周长为L，则P与L的关系是（　　）



(A) $P>L$.　(B) $P=L$.

(C) $P<L$　(D) P与L无关。

4. 连接下列四边形各边中点所得的四边形中，是中心对称图形，但不是轴对称图形的是（　　）

(A) 对角线互相垂直的四边形。

(B) 对角线相等的四边形。

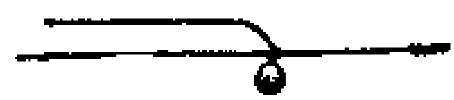
(C) 对角线垂直且相等的四边形。

(D) 对角线既不垂直又不相等的四边形。

5. 如图是关于x的不等式$ax>2x$的解集在数轴上的表示，那么$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$的值是（　　）

(A) $2\sqrt{a-1}$。　　(B) 2。

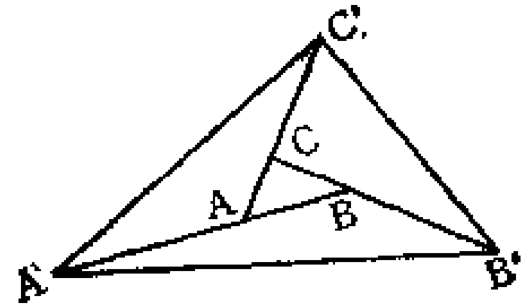
(C) a。　　(D) 1。



6. 如图，把△ABC的各边延长 2 倍至$A'B'C'$，则△$A'B'C'$的面积是△ABC的面积的（　　）

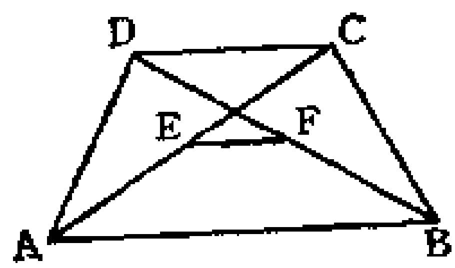
(A) 13倍。　　(B) 4倍。

(C) 19倍。　　(D) 7倍。



四、(10分)

如图，在等腰梯形$ABCD$中，$AB\parallel DC$，$\angle ABC=60°$，AC平分$\angle DAB$，E、F分别是对角线AC、BD的中点，且$EF=a$，试求梯形$ABCD$的面积。

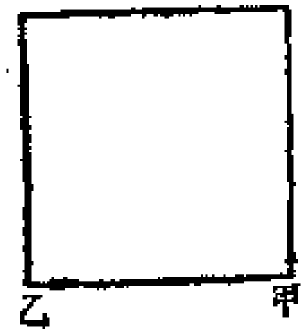


五、(10分)

△ABC的三边a、b、c满足$b+c=8$，$bc=a^2-12a+52$。试问△ABC是什么三角形（按边分类），并证明你的结论。

六、(11分)

如图，甲、乙两人分别位于周长为400米的正方形水池相邻的两个顶点上，同时开始沿逆时针方向绕池边行走。甲的速度为50米/分，乙的速度为44米/分，(1) 求甲、乙两人出发后几分钟才能第一次在正



方形同一边上行走。(不含甲、乙两人在正方形相邻顶点时的情形)。(2)第一次相遇之前，两人在正方形同一边上行走了多少分钟?

1989年《祖冲之杯》初中数学邀请赛

一、选择题

1． 给出五个命题：

(1) 若a、b、$a-b$都是无理数，则$a+b$也是无理数；

(2) 若k是整数，则2^k也是整数；

(3) 若a、b都是有理数，则a^b也是有理数；

(4) 对于实数x、y，若$\lg(xy)$有意义，则$\lg(xy)=\lg x+\lg y$；

(5) 若$a>b>0$，则$a^2>b^2$。

上述命题中，正确命题的个数是(　　)。

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

2． 设$ab\neq0$，$a^2+b^2=1$，如果$x=\dfrac{a^4+b^4}{a^6+b^6}$，$y=\dfrac{a^4+b^4}{\sqrt{a^6+b^6}}$，$z=\dfrac{\sqrt{a^4+b^4}}{a^6+b^6}$，则$x$、$y$、$z$的大小关系是(　　)。

(A) $x<y<z$　(B) $y<z<x$　(C) $y<x<z$

(D) $z<x<y$

3． 已知n是偶数，m是奇数，方程组

$\begin{cases}x-1988y=n\\11x+27y=m\end{cases}$的解$\begin{cases}x=p\\y=q\end{cases}$是整数，则(　　)。

(A) p、q都是偶数　(B) p、q都是奇数

(C) p是偶数，q是奇数　(D) p是奇数，q是偶数

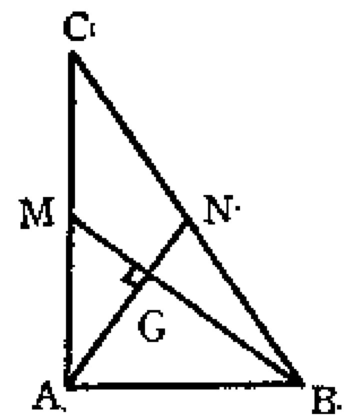
4．在三角形中，三边a、b、c满足等式$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，则c边所对的角等于(　　)。

(A) $30°$　(B) $60°$　(C) $90°$　(D) $120°$

5．在$\triangle ABC$中，BC、CE分别是AC、AB边上的高，则DE/BC等于(　　)。

(A) $\frac{AE}{AB}$　(B) $\sin A$　(C) $\cos A$　(D) $|\cos A|$

二、填空题



1．方程$\sqrt{x^2-2x+1}+(x-1)=0$的解是____。

2．求值$3^{\lg 20}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg 0.3}=$____。

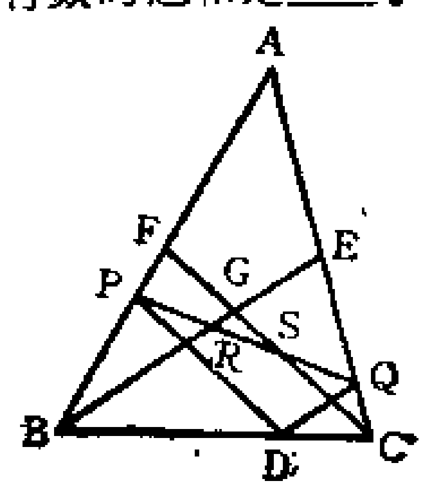
3．已知$x-y+4$是$x^2-y^2+mx+3y+4$的一个因式，则$m=$____。

4．如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$AB=\sqrt{6}$，中线AN与中线BM垂直，则$BM=$____。

5．已知三角形的三条边长均为整数，其中有一条边长为4，但它不是最短边，这样的三角形共有____个。

6．自然数$1,2,3,\cdots,9998,9999$所有数码之和是____。

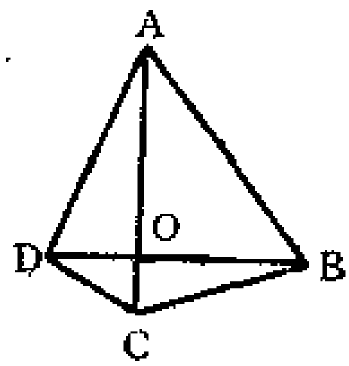
三、已知方程$x^2-4mx+5m^2-6m+8=0$有两个不同的实数根x_1、x_2，且m是整数。求$x_1^2+x_2^2$的值。



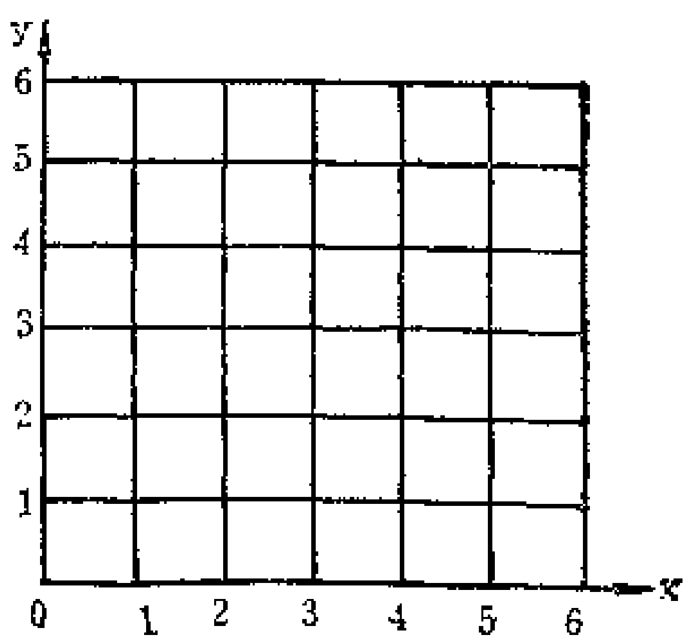
四、如图，在$\triangle ABC$中，BE、CF分别是AC、AB边上的中线。D是BC边上的一点，过D作$DP\parallel CF$交AB于P点，作

$DQ \parallel BE$交AC于Q，PQ分别交BE、CF于R、S.求证：$RS=\frac{1}{3}PQ$.

五、如图，凸四边形$ABCD$的AC、BD相交于O，且$AC\perp BD$，已知$OA>OC$，$OB>OD$，求证：$BC+AD>AB+CD$.



六、图中有$7\times7=49$个点，坐标都是整数，能否从这49个点中选出10个点，使得这10个点中



的任何两点(a,b)、(c,d)都满足条件：$6>|a-c|>1$或者$6>|b-d|>1$.（若能，请在图上把这10个点用"×"号标出，不必说明理由；若不能，请说明理由.）

1988年"辽教杯"初二数学竞赛

一、选择题（每小题4分，共40分）

1．如果方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根互为倒数，那么(　　)

(A) $a=b$；　(B) $a=bc$；

(C) $c=a$；　(D) $c=ab$。

2．若 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$，$xyz\neq0$，且 a、b、c 两两不等，则有(　　)。

(A) $cx+ay+bz=0$；(B) $cx=ay=bz$；

(C) $x+y+z=0$；　(D) $x=y=z$。

3．若 $\sqrt[1987]{M}=3$，$\sqrt[1988]{N}=7$，且 M、N 为自然数，则 $M\cdot N$ 的末位数字是(　　)。

(A) 9；(B) 7；(C) 3；(D) 1。

4．$\triangle ABC$ 中，$a=4k$，$b=3k$，$c=4(k>0)$，则 k 的取值范围是(　　)。

(A) $\frac{4}{7}<k<4$；　(B) $\frac{7}{4}<k<4$；

(C) $k\geqslant2$；　(D) $7<k<14$。

5．化简 $\sqrt{-x^3}-x\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 得(　　)。

(A) $(x-1)\sqrt{-x}$；　(B) $(1-x)\sqrt{-x}$；

(C) $-(x+1)\sqrt{x}$；　(D) $(x-1)\sqrt{x}$。

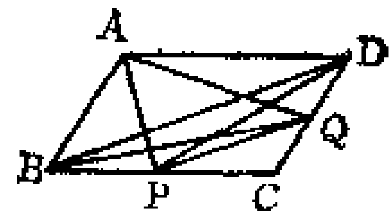
6．方程 $x^2-3|x|+2=0$ 的实数根的个数是(　　)。

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

7. 一个凸多边形，除了一个内角外，其余各内角的和为3290°，则这个内角的度数是（　　）。

(A) 140°; (B) 130°; (C) 120°; (D) 110°.

8. 如图，在平行四边形$ABCD$中，P为BC的中点，过P作BD的平行线交CD于Q，连结PA、PD、QA、QB，则图中与$\triangle ABP$面积相等的三角形，共有（　　）。



(A) 三个；　　(B) 四个；

(C) 五个；　　(D) 六个。

9. Rt$\triangle ABC$的三条边长都是正整数，其中一条直角边长是方程$3x^2-32x-11=0$的一个根，则这个三角形的面积是（　　）。

(A) $\frac{121}{2}$; (B) 121; (C) 330; (D) 66.

10. 在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$\angle B=60°$，$\angle A=75°$，则$\triangle ABC$的面积是（　　）。

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;　　(B) $3+\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(C) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}$.

二、填空题（每小题4分，共40分）

1. 当 $x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$时，

$3x^2-5xy+3y^2$的值是____。

2. 若$a+\frac{1}{a}=3$，则$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$的值是____。

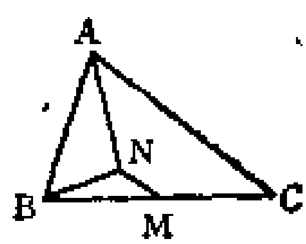
3. 已知$-2a<x<-a$，化简$|x+a|+\sqrt{x^2-2ax+a^2}+2\sqrt{x^2+4ax+4a^2}$得____。

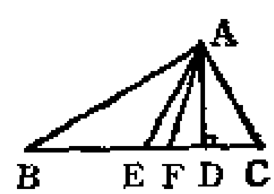
4. 方程组$\begin{cases} x+y+xy=19 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$的解是____。

5. 若方程$4x^2-4(k-1)x+k^2-7=0$的两根之差为2，则k的值为____。

6. 如左下图，在$\triangle ABC$中，M是BC的中点，AN平分$\angle BAC$，$BN\perp AN$于N，$AB=10\text{cm}$，$MN=3\text{cm}$，$BC=15\text{cm}$，则$\triangle ABC$的周长为____cm。

7. 如右下图，$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle BAC$是直角，$AD\perp BC$于D，E是BC的中点，AF平分$\angle BAC$，如果把图中所有相等的锐角作为一组，那么，图中所有相等的锐角共有____组。





8. 若$|a\cdot b|+1=|a|+|b|$，则a、b的值分别为____。

9. 求值：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{1987\times1988}$

$=$____。

10. 某人步行9小时，先在平地上走，然后走上坡路，到达目的地后，沿原路返回，如果走平地、上坡、下坡的速度分别是4公里/小时、3公里/小时、6公里/小时，则这个人

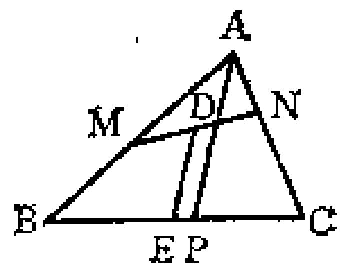
往返共走了____公里。

三、（本题满分10分）证明方程$x^3-x-1988=0$没有整数解。

四、（本题满分15分）甲乙两人同时分别从A、B两地相向而行，当甲到达AB的中点处时，乙离A处还有24公里，而当乙到达AB的中点处时，甲离B处还有15公里，问甲到达B时，乙离A处还有多少公里？

五、（本题满分15分）如图，在$\triangle ABC$中，M、N分别在AB、AC上，且$BM=CN$，D、E分别是MN、BC的中点，过点A作$AP\parallel DE$，AP交BC于P。

求证：$\angle BAP=\angle PAC$。



1987年湖北省数学奥林匹克函授学校初中数学竞赛

一、选择题（每小题填对给2分，填错或不填给0分。本题共20分）

1． 下列四个数中，有一个是1到15这15个整数的乘积，这个数是（　　）

（A） 1307674368000；（B） 1307674368500；

（C） 1307674368200；（D） 1307674368010。

2． 记$S=(1+2^{-\frac{1}{32}})(1+2^{-\frac{1}{16}})(1+2^{-\frac{1}{8}})(1+2^{-\frac{1}{4}})(1+2^{-\frac{1}{2}})$，那么，化简$S$的结果是（　　）

（A） $\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$，（B） $(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$

(C) $1-2^{-\frac{1}{n}}$;　　　(D) $\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{n}})$。

3. 已知

$$a=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

$$b=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$（n为自然数）。

那么a和b的大小关系是（　　）

(A) $a>b$；(B) $a=b$；(C) $a<b$；(D) 不能确定，随n的变化而变化。

4. 如果$a<b$，那么$\sqrt{-(x+a)^3(x+b)}$等于（　　）

(A) $(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$；

(B) $(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$；

(C) $-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$；

(D) $-(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$。

5. 对于$k<9$的一切实数，关于x的方程$(k-5)x^2-2(k-3)x+k=0$（　　）

(A)没有实数根；(B)有两个相等的实数根；(C)有两个不相等的实数根；(D)不能肯定实数根的个数。

6. 在等边$\triangle ABC$所在的平面内求一点P，使$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PAC$都是等腰三角形，具有这样性质的点P有（　　）

(A) 1个；(B) 4个；(C) 7个；(D) 10个。

7. 凸n边形（$n\geqslant4$）的内角中，锐角的个数最多是

(　　)

(A)　2个；(B)　3个；(C)　4个；(D)　多于4个。

8．以线段$a=16$，$b=13$，$c=10$，$d=6$为边，且使$a \parallel c$作四边形，这样的四边形(　　)

(A)能作一个；(B)能作两个；(C)能作无数个；(D)不能作。

9．$\triangle ABC$的三条外角平分线所在的直线相交构成一个$\triangle LMN$，则$\triangle LMN$(　　)。

(A)一定是直角三角形；(B)一定是锐角三角形；

(C)一定是钝角三角形；(D)以上结论都不对。

10．P是正方形$ABCD$内一点，且$PA:PB:PC=1:2:3$，那么$\angle APB$的角度数是（　　）

(A)　$120°$；(B)　$135°$；(C)　$150°$；(D)　$165°$。

二、填空题（每空2分，本题共20分）

1．已知$\dfrac{1001\times1002\times1003\times\cdots\times19999\times20000}{11^n}$是整数，则自然数$n$的最大值是______。

2．$(\sqrt{5}+1)^{1987}-2(\sqrt{5}+1)^{1986}-4(\sqrt{5}+1)^{1985}+1987=$________。

3．当$x<-1$时，$|x-\sqrt{(x-2)^2}-2|x-1||=$______。

4．方程$x^y+1=z$的所有质数解为：____________。

5．已知x为非零实数，且$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=a$，那么$\dfrac{x^2+1}{x}=$______。

6．等边三角形中，一边上的高为$\sqrt{3}$，则这个三角形的面积为______。

7．在$\triangle ABC$中，$\angle B$、$\angle C$的平分线相交于一点P，

设$\angle A=x^\circ$，$\angle BPC=y^\circ$，如果x增加1°，那么y增加______度。

8．三条直线两两相交，且不经过同一点，那么，到这三条直线距离相等的点有___个。

9．以三角形的三个顶点和它内部7个点共10点为顶点，最多能将原三角形分割成小三角形的个数是_______。

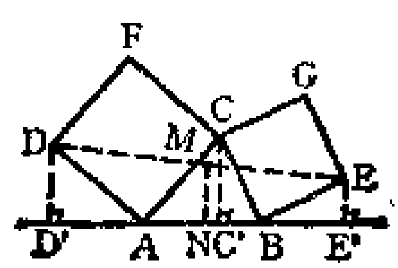
10．已知P是边长为1的正方形$ABCD$内一点，且$S_{\Delta APB}=0.1987$，则$S_{\Delta CPD}=$______。

三、若正整系数二次方程$4x^2+mx+n=0$有相异二有理根p、q，且$p<q$，又方程$x^2-px+2q=0$与方程$x^2-qx+2p=0$有一公共根，试求方程$x^2-px+2q=0$的另一根。(20分)

四、甲、乙、丙三个机器人进行110米跨栏比赛，自动记录仪器表明：当甲到达终点时，乙还差1米，丙还差2米，而当乙到达终点时，丙还差1.01米，比赛结束时，跑在最后的丙提出抗议说：这个跑道不准，不满110米，要求重新比赛。通过计算，这条跑道确实不准，你算算它比110米少多少米？(10分)

五、若方程$\dfrac{(a+1)(b+1)}{x+1}+\dfrac{(a-1)(b-1)}{x-1}=\dfrac{2ab}{x}$无解，且$a\neq b$，试求$a^2+ab+b^2$的值。(15分)

六、如图，C为定线段AB外一动点，以AC、BC为边分别向外侧作正方形$CADF$和正方形$CBEG$，不论C的位置在AB的同侧怎样变化，求证：



1．D、E到AB所在直线的距离DD'、EE'之和为定值；

2. 线段DE的中点M为定点。(20分)

七、由锐角三角形各边中点作其它两边的垂线，求证：六条垂线围成的六边形的面积等于原三角形面积的一半。(15分)

1986年吉林省八地、市初中数学竞赛

一、选择题（本题满分20分）

说明：本题共有4个小题，每小题答对者得5分，不答者得1分，答错者得0分。

1. 设$a+b>c>0$且$|a-b|<c$，那么二次方程$a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$的根的情形是（　　）

(A)有两个等根；(B)无实根；(C)有两个不等根；(D)有实根；(E)不定。

2. P是高为h的等边三角形内部一点，设P到各边的距离分别为x、y、z，若以x、y、z为长度的三线段可以构成一个三角形，则x、y、z各自所应满足的条件是（　　）

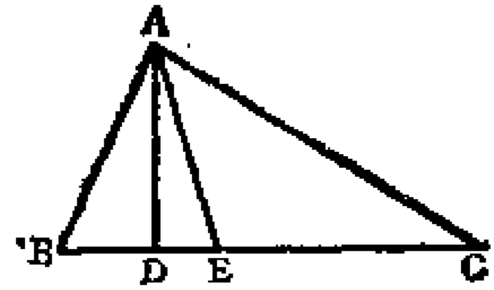
(A) $x<h$，$y<h$，$z<h$；

(B) $x<\frac{h}{2}$，$y<\frac{h}{2}$，$z<\frac{h}{2}$；

(C) $x\leqslant\frac{h}{2}$，$y\leqslant\frac{h}{2}$，$z\leqslant\frac{h}{2}$；

(D) $x<\frac{h}{3}$，$y<\frac{h}{3}$，$z<\frac{h}{3}$；

(E) $x\leqslant\frac{h}{3}$, $y\leqslant\frac{h}{3}$, $z\leqslant\frac{h}{3}$.



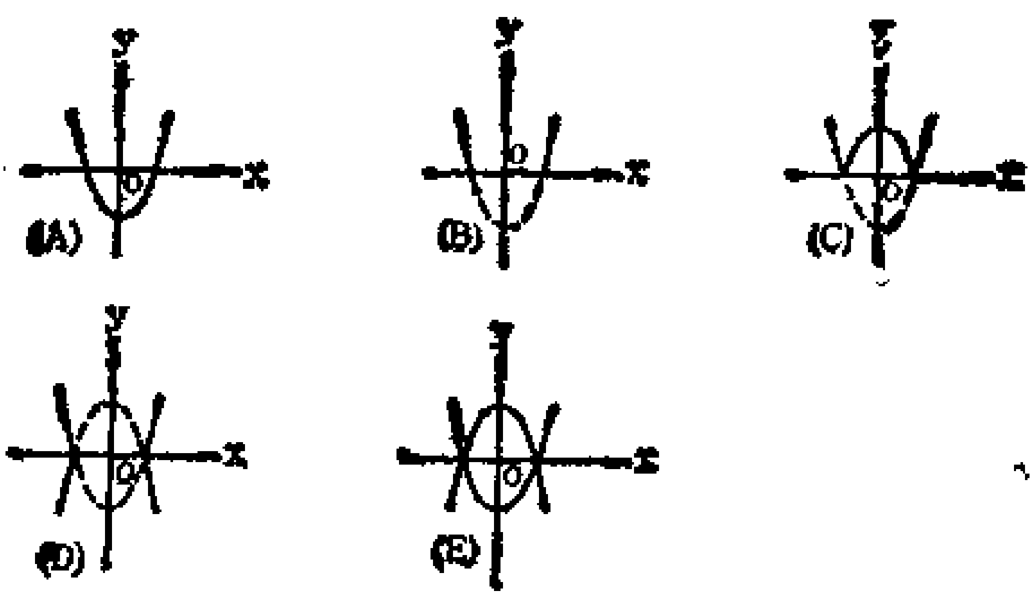
3. 如图，在以A为直角顶点的直角三角形ABC中，$\angle B=60^\circ$，$AD\perp BC$，AE平分内角$\angle BAC$，$AB=a$，则DE之长是（　　）

(A) $(\sqrt{3}-1)a$; (B) $(\sqrt{3}+1)a$;

(C) $\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)a$; (D) $\left(\frac{5}{2}-\sqrt{3}\right)a$;

(E) $\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)a$.

4. 函数$|y|=x^2-1$的图象大致形状是下列哪个图象中的实线部分。（　　）

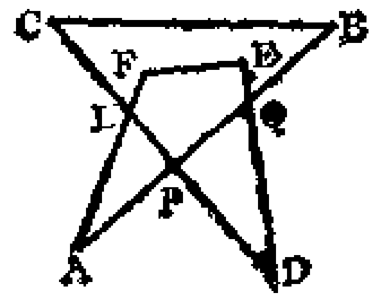


二、填空题（每小题 5 分，本题满分30分）

1. 已知$\begin{cases}x=10\\y=-1\end{cases}$是方程组$\begin{cases}ax-by=391\\a^2x+by=29\end{cases}$的解，那么

以a、b为邻边的矩形的面积是____。

2. 设$a+b=3+\sqrt{3}$，$b-c=3-\sqrt{3}$，则$a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc$的值为____。



3. 在图中，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$的度数是____。

4. 等腰直角三角形一腰上的中线与斜边的夹角正弦值是____。

5. $\log_{16}(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})$的值为____。

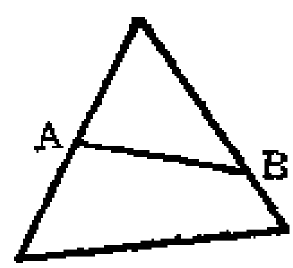
6. 当x、y、z同时满足下面二式：$2^x+3^y+5^z=7$，$2^{x-1}+3^y+5^{z+1}=11$时，$2^{x+1}+3^y+5^{z-1}$的取值范围是____。

三、（本题满分12分）

已知$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是二个锐角三角形，且$AB<A'B'$，$BC<B'C'$，$CA<C'A'$。

证明：$S_{\triangle ABC}<S_{\triangle A'B'C'}$。

四、（本题满分12分）



如图，以直线AB截边长为1的正三角形，使截成面积为相等的二部分，问如何截取，截口线段AB最短。

五、（每小题8分，本题满分16分）

1. 已知小数$x=0.12345678910111213\cdots998999$，这个小数的小数点右边的数字依次是由整数1至999排列而成的。试求小数点右边第1986位上的数字。

2. 设一次函数$y=ax+b(a\neq0)$。有一组对应值$x=\sqrt{2}$，$y=0$。试证明$y=ax+b$不能有二组以上有理数的对应值。

六、（本题满分10分）

平面上有10条直线，无任何三条交于一点，欲使它们出现31个交点，怎样安排才能办到？（只要求画出符合条件的10条直线）

1986年江苏省初中数学竞赛

一、选择题（本题满分36分）

每填对一小题得6分，填错和不填均得0分。

1．任意调换五位数12345各数位上数字的位置，所得五位数中质数的个数是（　　）。

(A)4；(B)8；(C)12；(D)0。

2．某学生在暑假期间观察了x天的天气情况，其结果是：(1)共有7个上午是晴天；(2)共有5个下午是晴天；(3)共下了8次雨，在上午或下午；(4)下午下雨的那天，上午是晴天。则x等于（　　）

(A)8；(B)9；(C)10；(D)11。

3．$Rt\triangle ABC$三边的长都是正整数，其中一条直角边的长是方程$2x^2-23x+11=0$的根，这个三角形的面积是

（　　）

(A)$\frac{121}{2}$；(B)121；(C)330；(D)660.

4．在由两个不同数字组成的所有两位数中，每个两位数被其两个数位上的数字之和除时，所得的商的最小值是

（　　）

(A)1.5；(B)1.9；(C)3.25；(D)4。

5．长方形场地上竖有一根电线杆，如果已知电线杆底

部到场地三个顶点的距离，则电线杆底部到第四个顶点的距离 ( )

(A)可以确定；

(B)必须已知场地的两条边长后才能确定；

(C)当且仅当已知场地一边的长后可以确定；

(D)当且仅当场地是正方形时可以确定。

6. 设n^3+p能被$n+q$整除（n、p、q都是正整数）。当n最大时，相应的p和q的值是 ( )

(A)$p=100$，$q=10$；(B)$p=5000$，$q=20$；

(C)$p=50$，$q=12$；　(D)$p=300$，$q=15$。

二、填空题（本题满分36分）

每填对一小题得6分。

1. 分解因式：

$x^4+1987x^2+1986x+1987=$________。

2. 某山区，农民可拿鸡蛋到商店换热水瓶。商店起初规定40个鸡蛋换一个热水瓶，没有人去换。后来，热水瓶降价，去换的人就多了。已知商店里的全部热水瓶共换到了3317个鸡蛋，则降价后每个热水瓶换____个鸡蛋。（每个热水瓶的成本高于10个鸡蛋的价钱，交换时商店没有亏本）

3. 十个小学生在边长为30米的正长形运动场上踢足球。设他们俩俩之间的距离（单位：米）的最小值为d，则d的取值范围是____。

4. $\triangle ABC$内有一点P，如果$\triangle PAB$、$\triangle PAC$和$\triangle PBC$的面积之比为$7:7:1$，则确定点P位置的方法应该是：________。

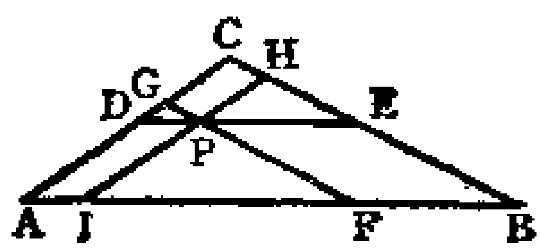
5. 分别记函数$y=3x+2$和$y=4x+1$在同一直角坐标系中的图象为l_1和l_2。设直线$y=m$(m为正整数）和l_1、l_2分别交

于点$P_1(n_1, m)$、$P_2(n_2, m)$。当n_1、n_2都是正整数时，m的值可表示成____的形式。

6. 设100个实数a_1、a_2、…、a_n、…、a_{100}满足$(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}+1=0$ $(2\leqslant n\leqslant 100)$，并且已知$a_{100}=199$，则$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=$________。

三、（本题满分12分）当p和q都是大于5的任意质数时，证明p^4-q^4总能被80整除。

四、（本题满分12分）P是$\triangle ABC$内的一点，等长的三条线段DE、FG和HI分别平行于边AB、BC和CA，并且都过点P（如图）。



已知：$AB=12$，$BC=8$，$CA=6$。

求证：$AI:IF:FB=1:5:3$。

五、（本题满分12分）在平面上任意给定5个点，其中任何三点不在一条直线上，并且它们不是凸五边形的顶点。证明下列两个结论中必有一个成立：（1）存在以某四点为顶点的凸四边形，使得另一点在该四边形内；（2）存在以某三点为顶点的三角形，使得其余两点在该三角形内。

六、（本题满分12分）平面上有40个点，任何三点不在一条直线上。

已知：每一点至少和其余27个点之间有线段相连结。

求证：必可找到4个点A、B、C、D，它们之中任何两点间都有线段相连结。

1987年江苏省初中数学竞赛

一、选择题（本题满分30分）　每填对一小题得6分，填错和不填均得0分。

1. 以三角形的三个顶点和它内部的九个点（共12个点）为顶点，能把原三角形分割成的小三角形的个数是（　　）。

(A)15；(B)19；(C)22；(D)不能确定。

2. 从1，2，3，4，5，6，7，8，9中任取5个数，则

（1）其中必有两数互质；

（2）其中必有一数是另一数的倍数；

（3）其中必有一数的两倍是另一数的倍数。

以上结论中，正确的个数为（　　）。

(A)0个；(B)1个；(C)2个；(D)3个。

3. 设方程$x^2-y^2=1988$共有n组整数解，则n等于（　　）

(A)4；(B)6；(C)8；(D)12。

4. 某中学初三年级有13个课外兴趣小组，各组人数如下表：

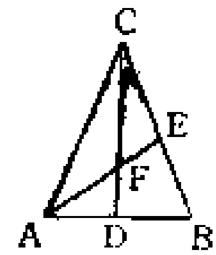
组别	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
人数	2	3	5	7	9	10	11	14	13	17	21	22	24

一天下午，学校同时举办语文、数学两个讲座。已知有12个小组去听讲座，其中，听语文讲座是听数学讲座人数的

6倍。还剩下1个小组在教室讨论问题，这一组是（　　）

(A)第4组；(B)第7组；(C)第9组；(D)第12组。

5. 如图，在等腰$\triangle ABC$中，CD是底边AB上的高，E是腰BC的中点，AE交CD于F。现在给出三条路线：



(a)$A\to F\to C\to E\to B\to D\to A$；

(b)$A\to C\to E\to B\to D\to F\to A$；

(c)$A\to D\to B\to E\to F\to C\to A$。

设它们的长度分别是$L(a)$，$L(b)$，$L(c)$。那么下列三种关系：

$L(a)<L(b)$，$L(a)<L(c)$，$L(b)<L(c)$中，一定能成立的个数是（　　）。

(A)0个；(B)1个；(C)2个；(D)3个。

二、填空题（本题满分30分）本题共6个小题，每小题6分。

1. 已知$ABCDE$是正五边形，O是平面上一点，$\triangle DOE$是等边三角形，则$\angle AOC$的度数为________。

2. 设直线$kx+(k+1)y-1=0$与坐标轴所构成的直角三角形的面积是S_k，则$S_1+S_2+\cdots+S_{1887}=$________。

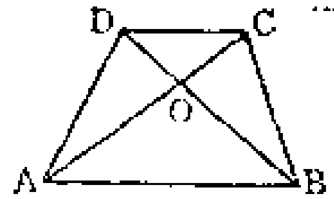
3. $\triangle ABC$的三边都是整数，其中一边长为21，周长为54，当它的面积是整数时，三角形的另外两边长为______、____。

4. 已知$p^3+q^3=2$，其中p、q都是实数，则$p+q$的最大值为________。

5. 设α、β是二次方程$x^2+(p-2)x+1=0$的两根，且$[1+\alpha(p+\alpha)-\beta][1+\beta(p+\beta)-\alpha]=-\frac{7}{2}$，则$p$的值

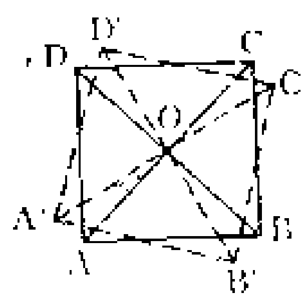
等于 ____。

三、（本题满分 15 分）如图，梯形 $ABCD$ 的面积为 S，$AB \parallel CD$，$AB=b$，$CD=a(a<b)$，对角线 AC 与 BD 交于 O，$\triangle BOC$ 的面积为 $\frac{2}{9}S$。求：$\frac{a}{b}$。



四、（本题满分15分）今有一个三位数，其各位数字不尽相同，如将此三位数的各位数字重新排列，必可得一个最大数和一个最小数（例如，427，经重新排列得最大数742，最小数为247），如果所得最大数与最小数之差就是原来的那个三位数，试求这个三位数。

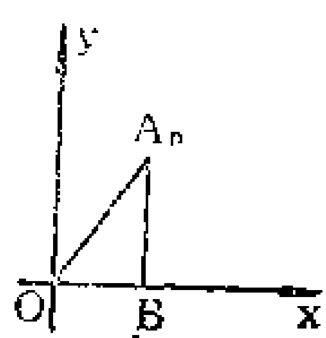
五、（本题满分15分）如图，边长为1的正方形 $ABCD$，绕其中心 O 旋转角 $\alpha(\alpha<90°)$，试求旋转后的正方形 $A'B'C'D'$ 与正方形 $ABCD$ 重叠部分的面积。



六、（本题满分15分）如图，在直角三角形 OBA_n 中，$\angle OBA_n$ 是直角，在 BA_n 上从 B 到 A_n 依次取 $n-1$ 个分点 A_1，$A_2,\cdots,A_{n-1}$，把 BA_n 分成 n 等分，连结 OA_i 且延长 OA_i 到 $A_i'(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $OA_1'=OA_1$，$OA_2'=2OA_2$，$\cdots$，$OA_i'=iOA_i$，$\cdots$，$OA_n'=nOA_n$。证明：

（1）A_1'，A_2'，$\cdots$，A_n' 在同一条抛物线上；

（2）如果 $OB=1$，$BA_n=n$，那么在 A_1'，A_2'，$\cdots$，A_n' 这 n 个点中，任意两点间的距离是无理数；



（3） 条件同(2)，当$n\geqslant 3$时，$A'_1, A'_2, \cdots, A'_n$中任何三点构成的三角形的面积是有理数。

1988年江苏省初中数学竞赛

一、选择答案题（本题满分36分）

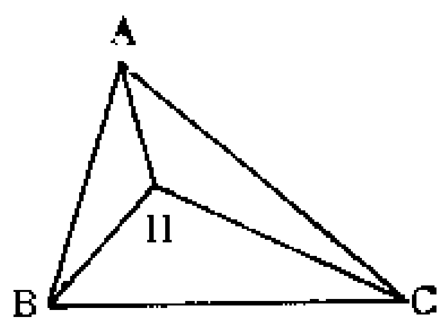
1． 某厂一月份的产值为8万元，二月份的产值为10万元，下面的说法中正确的是（　　）。

(A)二月份比一月份增产20%；(B)二月份的产值是一月份的1.2倍；(C)二月份比一月份增加125%；(D)二月份的产值是一月份的125%。

2． 用$[x]$表示不超过x的最大整数（例如$[2.8]=2$，$[-4.5]=-5$，$[6]=6$），则满足$[-77.66x]=[-77.66]x+1$的整数x的个数是（　　）。

(A)1；(B)2；(C)3；(D)4。

3． 三所中学分别位于$\triangle ABC$的三个顶点处，而其垂心H处恰有一所邮局，已知$\angle C<\angle B<\angle A<90^\circ$，且$A$、$B$、$C$、$H$每两处之间均有笔直的公路相通（如图）。今有一邮递员从邮局出发，到三所中学投递报刊，最后回到邮局，则他行程最短的线路是（　　）。



(A)$H\to C\to A\to B\to H$；

(B)$H\to A\to B\to C\to H$；

(C)$H\to B\to C\to A\to H$；

(D)以上均不是。

4． 设p为质数，如果方程$x^2-px-580p=0$的两个根均为整数，则（　　）。

(A)$0<p<10$；(B)$10<p<20$；(C)$20<p<30$；(D)$30<p<40$。

5. 已知凸四边形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，且$AB+BC=CD+AD$，则（　）。

(A)$AD>BC$；(B)$AD<BC$；(C)$AD=BC$；

(D)AD与BC的大小关系不能确定。

6. 设a为任一给定的正整数，则关于x与y的方程$x^2-y^2=a^3$（　）。

(A)没有正整数解；(B)只有正整数解；(C)仅当a为偶数时才有整数解；(D)总有整数解。

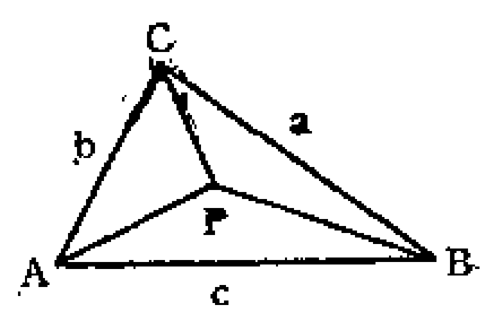
二、填空题（本题满分36分）

1. 设m、n、p均为自然数，适合$m\leqslant n\leqslant p$与$m+n+p=15$，则以m、n、p为三边长的三角形有___个。

2. 设a、b、c、d均为不等于1的正数，u、v、x、y均为非零数。如果$a^u=b^v=c^x=d^y$，且$uvx+uvy+uxy+vxy=0$，则$abcd=$____。

3. 如图，P为$\triangle ABC$内一点，已知$S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}:S_{\triangle PAB}=1:2:3$，$\triangle ABC$三边上的高为$h_a=3$，$h_b=5$，$h_c=4$，则$P$到$BC$、$CA$、$AB$的距离依次是____。

4. 方程$\left|\log_{\frac{1}{2}}\frac{|x|}{4}\right|+1=\left|\log_{\frac{1}{2}}x^2\right|$的解$x=$____。



5. Q为等边$\triangle ABC$内一点，已知$QA=6$，$QB=8$，$QC=10$，则最接近$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}$的整数是____。

6. 在所有五位数中，各位数字之和等于43，且能被11整

除的数是____。

三、（本题满分12分）

设$\triangle ABC$的面积$S=1$，试分别在边BC、CA、AB上依次找一内点E、F、G，使得$\triangle EFG$的面积S'适合

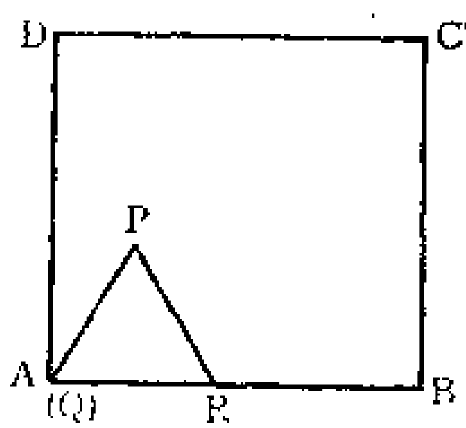
$$\frac{1}{4}<S'<\frac{1}{3}.$$

四、（本题满分12分）解方程组：

$$\begin{cases} xy+yz+zx=1 & (1)\\ yz+zt+ty=1 & (2)\\ zt+tx+xz=1 & (3)\\ tx+xy+yt=1 & (4)\end{cases}$$

五、（本题满分12分）

边长为4的正方形$ABCD$内有一边长为2的等边$\triangle PQR$，其中Q与A重合，R在AB边上。现将$\triangle PQR$绕点R作顺时针方向转动，使RP落在边AB上后，再将此三角形绕点$B(P)$作顺时针方向转动，使PQ落在边BC上，然后，按此种方式将$\triangle PQR$沿正方形$ABCD$的边继续转动下去。



（1）计算：$\triangle PQR$从起始位置（Q与A重合，R在边AB上）出发沿$ABCD$的边转动，直到它的三个顶点第一次均回到起始位置时，点P所走路程的长。

（2）求证：如果$\triangle PQR$绕其任一顶点转动一次，叫做一次自转，则在$\triangle PQR$的任意100次连续的自转中，至少有一个顶点保持不动的次数是奇数，且至少有一个顶点保持

不动的次数是偶数。

六、（本题满分12分）

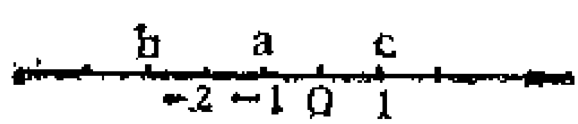
从十个英文字母 A、B、C、D、E、F、G、X、Y、Z 中任选五个字母（字母允许重复）组成一个"词"。将所有可能的"词"按"字典次序"（即英汉辞典中英语词汇排列的顺序）排列，得到一个"词表"：$AAAAA$，$AAAAB$，$AAAAC$，…，$AAAAZ$，$AAABA$，$AAABB$，…，$DEGXY$，$DEGXZ$，$DEGYA$，…，$ZZZZY$，$ZZZZZ$。设位于词$CYZGB$与词$XEFDA$之间（这两个词本身除外）的词的个数是k，试写出"词表"中的第k个词，并加以证明。

1986年无锡市初中数学通讯赛

说明：本试题都是填空题，只要求在横线上方直接填入最后的运算结果，中间过程和运算步骤在草稿纸上进行。各题的最后运算结果是0～2 000中的某一整数。本试卷共有30道题，每题4分，满分120分。

1. 若$2x+3=1$，则$2x^{1986}+3=$____。

2. 已知a、b、c在数轴上的位置如下：

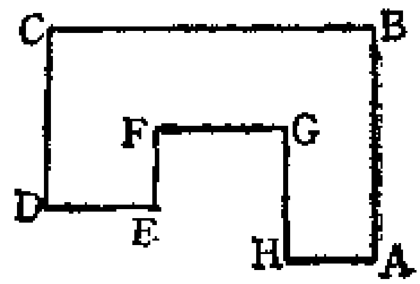


则代数式$\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c|$的值等于____。

3. 有一个学生花了很多时间求出了$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{1986}$等1986个数的平均数为2 000，后来这个学生粗心地将这个平均数又混入了这1986个数中，于是他又求出了这1987个数的平均数，问这1987个数的平均数是多少？答：____.

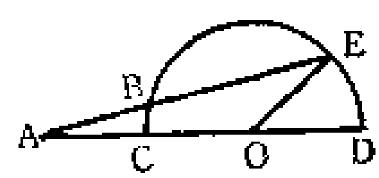
4. 如图，多边形$ABCDEFGH$相邻两边互相垂直，若要求出其周长，那么，最少需要知道多少条边的长度？

答：____条边。



5. 已知关于x的一元二次方程：$4x^2-2x+2=3x^2+mx-2$没有实数根，则m的最大整数值为____.

6. 如图，CD是以O为圆心的半圆的直径，A点在过O的DC的延长线上，ABE是割线，且$2AB=CD$，$\angle EOD=45^\circ$。则$\angle BAC=$____度。



7. 三只猴子分一堆苹果，老大猴子先拿了这一堆苹果的一半少一只，老二猴子拿了余下的一半多一只，小猴子分得了余下的8只苹果，问这一堆苹果有多少只？答：____只。

8. 设 $x=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，$y=\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$（$n$为自然数），则当$n=$____时，代数式$x^2+1504xy+y^2$的值为1986。

9. 已知x、y为实数，且$x^2+2x+y^2-6y+10=0$，则$\log_2(y-x)\cdot\log_2(y+x)=$____.

10. 方程$|x-|2x+1||=3$有____个不同的根。

11. 已知关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两根和为s_1，平方和为s_2，立方和为s_3，则$as_3+bs_2+cs_1$等于

____.

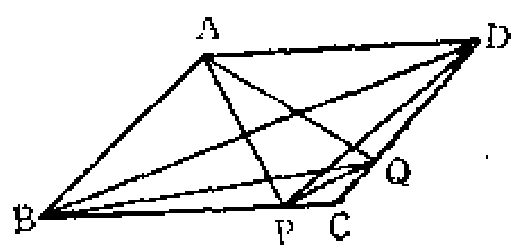
12. 无理方程 $\sqrt{(x-1)\cdot(x-2)}+\sqrt{(x-2)\cdot(x-3)}=\sqrt{2}$ 的较大的一个根是较小的一个根的____倍。

13. 甲、乙、丙三位机器人进行110米高栏比赛，自动记录仪器表明：当甲到达终点时，乙还差1米，丙差2米；而当乙到达终点时，丙还差1.01米。比赛结束，跑在最后的丙提出抗议说，这条跑道不准，不满110米，要求重新比赛，通过计算，他们比赛的跑道确实不准，而比110米少____米。

14. 设 $x>0$，$y>0$，$x\neq y$，$2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$，则 $x:y=$____。

15. 已知 w、x、y、z 均不为 0，在实数范围内，当 $\frac{w}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{w}$，且 $w\neq x$ 时，则 $\frac{w+x+y+z}{x+y+z-w}=$____。

16. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 的 BC 边上有一点 P（不是 BC 的中点），过 P 作 BD 的平行线交 CD 于 Q，连 PA、PD、QA、QB，则图中与 $\triangle ABP$ 面积一定相等的三角形有____个。（$\triangle ABP$ 本身不包括在内）



17. 设 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，

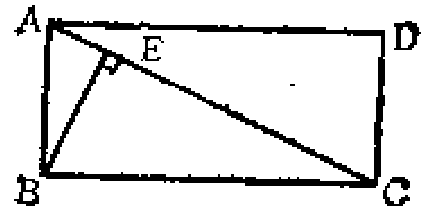
则 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=$____。

18. 如果对于任意两个实数 a、b，定义 $a*b=\frac{a+2b}{3}$，

则函数$y=x^2*(2x)+2*4$的最小值为____。

19． 已知点$A(-2,2)$，$B(2,-1)$及点$C(0,y)$，$\angle ACB=90°$，当$y<0$时，则$(1+y)^2=$____。

20． 如图，$ABCD$为矩形，AC为对角线，$BE\perp AC$，E为垂足，$AE=\dfrac{EC}{4}=10$厘米，则$ABCD$的面积等于____厘米^2。



21． 设x与y^2成反比例，y与z^2成正比例，当$x=24$，$y=2$；当$y=18$，$z=3$。则$z=1$时，$x=$____。

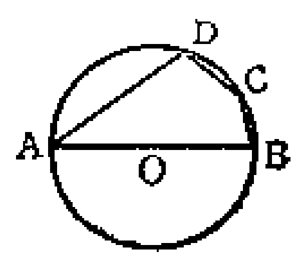
22． 在同一个平面内，点P和等边三角形ABC的顶点分别构成三个等腰三角形，那么符合这样条件的点P的位置个数共有____个。

23． 如果抛物线$y=x^2+bx-4$截x轴所得的线段长为5，则$|b|=$____。

24． 已知$x^2-3xy+2y^2+x-y=0$，$x^2-2xy+y^2-5x+7y=0$，则$xy-12x+15y+10=$____。

25． 等腰梯形$ABCD$的较长底边AB长16厘米，另一底CD长8厘米，对角线$AC=13$厘米，则梯形$ABCD$的面积等于____厘米^2。

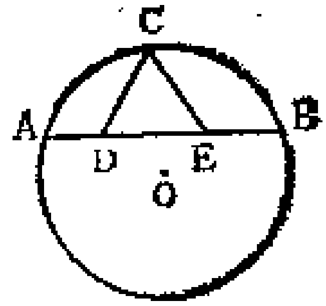
26． 如图，四边形$ABCD$内接于一个以长度为4的AB边作为直径的圆，若BC和CD的长度各为$\sqrt{2}$，则 $AD=$____。



27． 已知一个自然数减去50是一个完全平方数，而这个自然数加上39也是一个完全平方数，那么这个自然数是____。

28． 如图，$\odot O$中，AB为弦，D、E在AB上，C在圆周上，$\overset{\frown}{ACB}$为120°，$\triangle CDE$为等边三角形，$AD=\sqrt{3}$厘米，

$EB=12\sqrt{3}$厘米，则$DE=$____厘米。



29． 当k在实数范围内变动时，关于x、y的方程组

$$\begin{cases} x+ky=10 \\ kx-y=10k+2 \end{cases}$$ 有且只有三组整数解：

$$\begin{cases} x_1=m_1 \\ y_1=n_1 \end{cases};\quad \begin{cases} x_2=m_2 \\ y_2=n_2 \end{cases};\quad \begin{cases} x_3=m_3 \\ y_3=n_3 \end{cases}$$ （其中 $m_1<m_2<m_3$），则

$m_1n_1+m_3n_3-m_2n_2=$____。

30． 已知m、n是自然数，$\lg m$的首数是x，尾数是a；$\lg n$的首数是y，尾数是b，且$x^2+y^2=5$，$a+b=1$，当$m<n$时，则m的最大值为____。

1986年扬州市初一数学竞赛

一、填空题（每题5分，共35分）

1． 1984^{1986}的个位数是____。

2． 方程$ax+\frac{b}{x}=ac+\frac{b}{c}$的解是____。

3． 已知$a<0$，$-1<b<0$，则a、ab、ab^2从小到大的排列顺序是____。

4． 乘积$1\times2\times3\times4\times\cdots\times99$的末尾零的个数是____。

5． 一个自然数与3的和是5的倍数，与3的差是6的倍数，这样的自然数中最小的是____。

6． 甲、乙两人相距22.5公里，分别以2.5公里/小时、5公里/小时的速度相向而行，同时，甲所带的小狗以7.5公

里/小时的速度奔向乙，小狗遇乙后又立即回头奔向甲，遇甲后又立即奔向乙，……，直到甲、乙相遇，小狗所走的路程是____。

7．有甲、乙、丙三种货物，若购甲3件，乙7件，丙1件，共需3.15元；若购甲4件，乙10件，丙1件，共需4.20元。则购甲、乙、丙各1件共需____。

二、(15分) 设$T=|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$，其中$0<p<15$，对于满足$p\leqslant x\leqslant 15$的x来说，T的最小值是多少？

三、(15分) 分解因式：

$$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2.$$

四、(15分) A、B、C三人各有豆若干粒，要求互相赠送。先由A给B、C，所给的豆数等于B、C原来各有的豆数，依同法再由B给A、C现有豆数，后由C给A、B现有豆数。互送后每人恰好各有64粒。问原来三人各有豆多少粒？

五、(20分) 任给五个正整数，证明一定能从中选出三个，使得它们的和能被3整除。

1986年宿州市初中数学竞赛

第一试（共60分）

一、(10分) 求值：

1．已知$\lg 1.986=0.2980$，求$10^{8.2980}$的值。

2．已知$x^2+x-1=0$，求x^3+2x^2+1985的值（不准用求根公式）。

二、(15分)计算:

1. $(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})\div(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})$

2. $\left(\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}\right.$

$\left.+\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}\right)(x^2+7x+6)$

3. $\sqrt[3]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{15+4\sqrt{14}}$

三、(10分)解关于x的方程:

1. $abx^2+ab-(a^2+b^2)x=0$

2. $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$

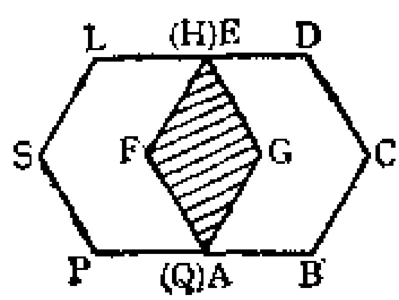
四、(以下每题7分)求$xyz=6$的所有正整数解,并指出共有几组解。

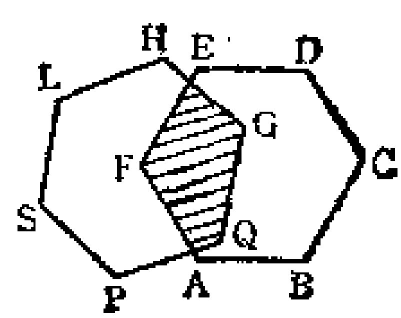
五、若$(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$,试求$x+z$与y的关系。

六、一个矩形内有任意一圆,请你用一条直线同时将圆和矩形的面积二等分,作图并写明作法。

七、设$t,t+1,t+2$为钝角三角形的三边,求t的取值范围。

八、正六边形$ABCDEF$的一个顶点F落在和它大小相同的另一个正六边形$GHLSPQ$的中心上,若六边形$GHLSPQ$绕着它的中心F自转,那么两个正六边形重叠部分的面积有何变化?请说明理由。



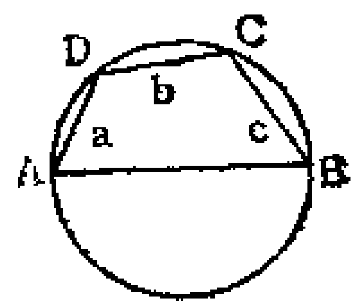


第 二 试

每题8分，共40分。

一、若$a>0$，$b>0$，$a^3+b^3=2$，试证明：$a+b\leqslant 2$。

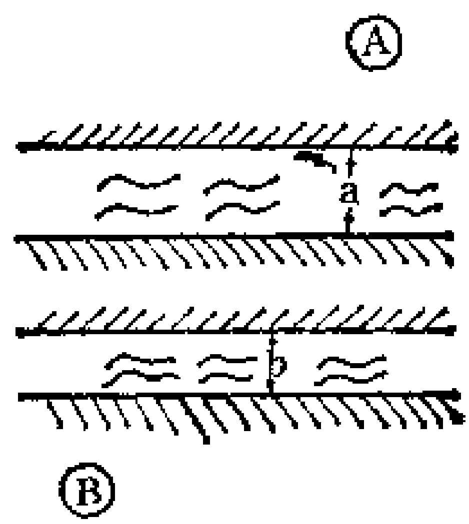
二、设圆内接四边形一边为圆的直径，其余三边为a,b,c，试证明这个圆的直径是方程$x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$的根。



三、在$\triangle ABC$的外侧分别以BC、CA、AB为一边各作一正m、n、t边形，若这三个正多边形的外接圆交于$\triangle ABC$内一点O。

求证：$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{t}=1$。

四、如图所示，A、B两村之间有两条平行的河（一河宽为a，另一河宽为b），从A到B经过两个垂直于河岸的桥，要使路途最近，请你设计修桥地点，并说明根据。



五、试证明：

$1^{1986}+9^{1986}+8^{1986}+6^{1986}$是一个偶数。

1986年齐齐哈尔市初中数学竞赛

一、选择题（60分）

下面十个小题，填对得6分，填错得0分，不填得1分。

1． 若方程$2x^2+2\sqrt{2}x+\mathrm{tg}\alpha=0$有等根，且$0°<\alpha<180°$，那么$\alpha$等于(　　)。

(A) 45°；(B) 135°；(C) 45°或135°；(D) 30°。

2． 已知满足$2x-3y=11-4m$和$3x+2y=21-5m$的x、y也满足$x+3y=20-7m$，那么m的值是(　　)。

(A) 0；(B) 1；(C) 2；(D) $\frac{1}{2}$。

3． a、b都是实数，且$|a|+a=0$，$|ab|=ab$，$|c|-c=0$，那么代数式$\sqrt{b^2}-|a+b|-\sqrt{(c-b)^2}+|a-c|$的值为(　　)。

(A) $2c-b$；(B) $2b-2a$；(C) b；(D) $-b$。

4． 在$\triangle ABC$中，已知$\sin A\mathrm{tg}B<0$，那么这个三角形是(　　)。

(A) 锐角三角形；　　(B) 直角三角形；

(C) 钝角三角形；　　(D) 不能确定。

5． 已知一个正数N的倒数$\frac{1}{N}$的常用对数的首数为a，尾数为$b(b\neq0)$。则N的常用对数为(　　)。

(A) 首数是$-a$，尾数是$-b$；

(B) 首数是$1-a$，尾数是$-1-b$；

(C) 首数是$\frac{1}{a}$，尾数是$\frac{1}{b}$；

(D) 首数是$-a-1$，尾数是$1-b$。

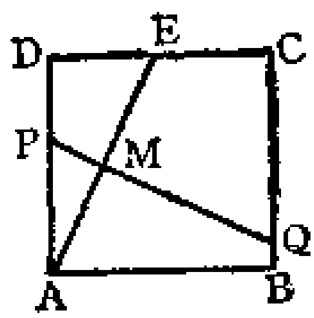
6． $\dfrac{2\lg2+\lg3}{1+\frac{1}{2}\lg0.36+\frac{1}{3}\lg8}\cdot9^{\log_3(\sin30°)}$的值是(　　)。

(A) 0；(B) $\frac{1}{4}$；(C) 1；(D) $\frac{1}{2}$。

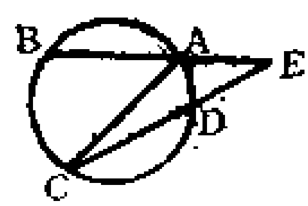
7. $1986^{323}+323^{1986}$的末位数字是（　　）。

(A) 3；(B) 5；(C) 6；(D) 9。

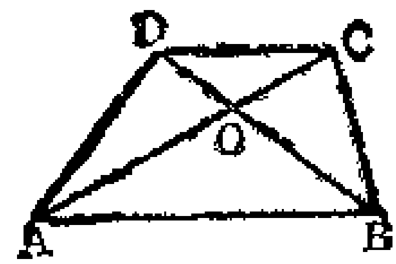
8. 正方形$ABCD$的边长为12，E在DC边上，$DE=5$，AE的垂直平分线分别与AE、AD、BC交于M、P、Q，则线段PM和MQ的比为（　　）。



第 8 题



第 9 题



第10题

(A) 5:12；(B) 5:13；(C) 5:19；(D) 1:4。

9. 如图，$\angle E=40^\circ$，弧AB、弧BC和弧CD的长相等，则，$\angle ACD$的度数为（　　）。

(A) 10°；(B) 15°；(C) 20°；(D) 30°。

10. 已知梯形$ABCD$，对角线AC、BD交于O，$\triangle AOB$的面积为9，$\triangle DOC$的面积为4，则梯形$ABCD$的面积为（　　）。

(A) 21；(B) 22；(C) 25；(D) 26。

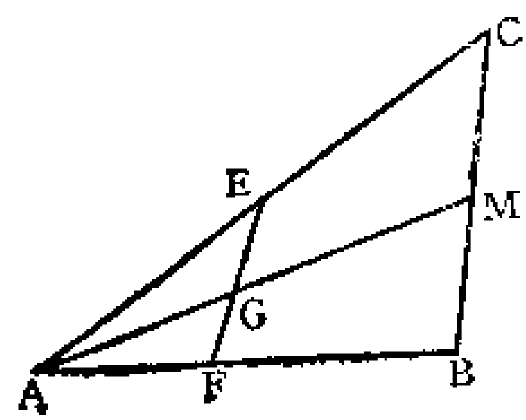
二、(6分) 设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (a、b、c、d为正实数)。

求证：$\sqrt[1986]{\frac{a^{1986}+b^{1986}}{c^{1986}+d^{1986}}}=\frac{a+b}{c+d}$。

三、(7分) 将1至16各数放在正方形的边上，每个顶点放一个，每条边再放3个，每边上5个数的和称作该边"重量"，对于每一种放法，总有一边重量S不大于其余各边的重量。请给出S最大时的一种放置方法，它们各边的重量都是多少？

四、(8分)已知$7^{82}+8^{161}$能被57整除，求证：$7^{83}+8^{163}$也能被57整除。

五、(9分) 一船在海面C处望见一灯塔A在它的正北方向，另一个灯塔B在它的北60°西的方向，这船向正西航行1海里后到D，此时两灯塔A、B分别在它的东北和西北方向，求这两个灯塔的距离。(精确到0.1海里。已知$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$)



六、(10分) 在$\triangle ABC$中，M是BC的中点，$AB=12$，$AC=16$。E、F点分别在AC和AB上，直线EF和AM相交于G。若$AE=2AF$，求$EG:GF$。

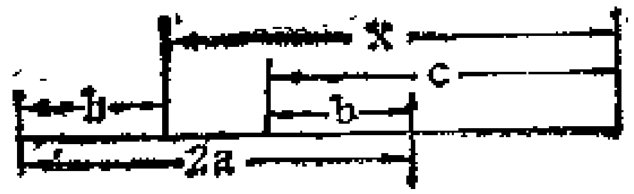
1988年山西省初二数学竞赛

一、填空题

1. 若$x=0.5$能使方程$2x^2-3x+a=0$成立，则$a=$____，方程的根是____。

2. 已知$\sqrt{3.65}=1.910$，$\sqrt{36.5}=6.042$，则$\sqrt{365000}=$____，$\sqrt{0.000365}=$____。

3. 任意一个三角形的外角中，至少有____个钝角，至多有____个锐角。



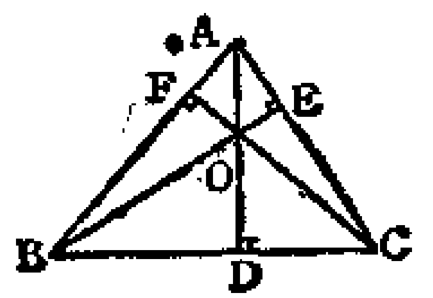
4. 如图，$x=$____。

5. $1988^2-1987^2=$____。

$1999^2+3998=$____。

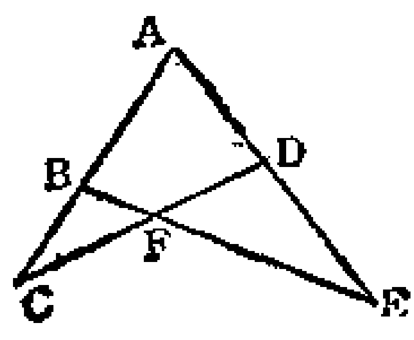
6. 如图，若AD、BE、CF是$\triangle ABC$的三条高，则 (1)与$\angle CAD$互余的角有____。

(2) 与$\angle EOF$互补的角有____。



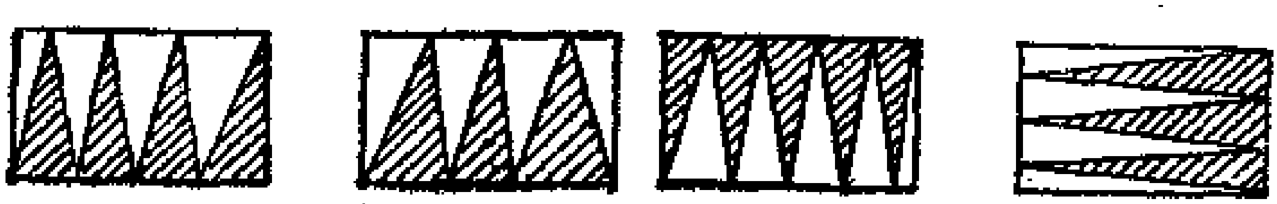
7. $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\dfrac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$____。

8. 如图，若$AC=CD$，$BE=AE$，$\angle BFD=105°$，则$\angle A=$____度，$\angle C=$____度。



9. 如果$\dfrac{1}{a}\geqslant 1$，则a的取值范围是____，如果$\dfrac{1}{a^2}<1$，则a的取值范围是____。

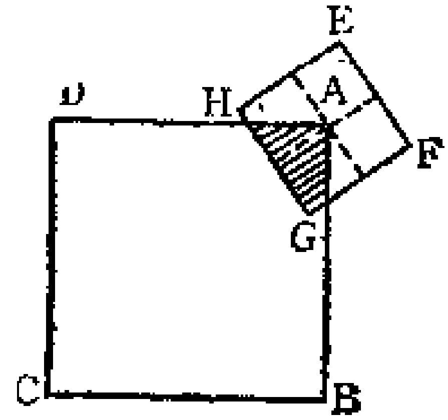
10. 若图中的四个矩形全等，则图(1)、(2)的两个矩形中的阴影部分面积之比依次为____、____。



(1)　　(2)

11．若只有一个实数满足关于x的方程$ax^2+bx+c=0$（其中a、b、c为实数，且$b\neq0$），则a、b、c应满足的条件是__或__。

12．命题“矩形的四个角都是直角”的逆命题是________。



13．如图，正方形$EFGH$的中心在正方形$ABCD$的顶点A，$EF=4mm$，图中阴影的面积=____。

14．把关于x的方程$x^2-2x+2=0$配方成为$a(x-2)^2+b(x-2)+c=0$的形式，得______。

15．根据$1=1^2$，$1+3=2^2$，$1+3+5=3^2$，…，可得$1+3+5+\cdots+(2n-1)=$____（其中n为自然数），如果$1+3+5+\cdots+x=361$，则奇数$x=$____。

二、选择题

1．如果a是负数，则a^2的平方根是（　　）。

(A) $-a$；(B) a；(C) $\pm\sqrt{a}$；(D) $\pm a$。

2．方程$x+y=5$的非负整数解有（　　）。

(A) 4个；(B) 5个；(C) 6个；(D) 7个。

3．对于实数x、y、a、b，下列四式中正确的是（　　）。

(A) $2a\sqrt{b}=\sqrt{4a^2b}$；(B) $3\sqrt{\frac{a}{3}}=\sqrt{a}$；

(C) $x^2\sqrt{\frac{y}{x}}=|x|\sqrt{xy}$；(D) $\sqrt{\frac{a}{9b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{3b}$。

4．设$a>0$，$b<0$，$a+b>0$，则下列各式成立的是（　　）。

(A) $b<-a<-b<a$; (B) $b<-b<-a<a$;

(C) $-a<-b<b<a$; (D) $-a<b<-b<a$.

5. 已知方程$x^2+px+q=0$，数x_1、x_2使 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$ 两式中一个成立，另一个不成立，则下面结论错误的是（　　）。

(A) x_1和x_2都不是方程的根；

(B) x_1和x_2不都是方程的根；

(C) x_1和x_2至少有一个不是方程的根；

(D) x_1和x_2至多有一个是方程的根。

（注：第3题和第5题编者有改动）

三、判断题

1. 三角形的外角必大于内角。（　　）

2. 无论怎样延长也不相交的两条直线是平行线。（　　）

3. 两条对角线分别平分一组对角的四边形是菱形。（　　）

4. 有一组对角相等的四边形是平行四边形。（　　）

5. 两条对角线互相垂直且相等的四边形是正方形。（　　）

四、在下题解法中不妥或错误的地方打“×”，并在旁边改正：

$$\text{解方程组：}\begin{cases} x^2+y^2=32 & (1) \\ x-y=0 & (2) \end{cases}$$

解：由(2)得 $y=x$　　　　(3)

将(3)代入(1)，解得$x=\pm4$。

将$x=4$代入(1)，解得$y=\pm4$。

将$x=-4$代入(1)，解得$y=\pm4$。

∴ 原方程组的解为：

$$\begin{cases} x=4 \\ y=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=-4; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=-4. \end{cases}$$

五、1. 分解因式：$(1+ab)^2-(a+b)^2$。

2. 解方程：

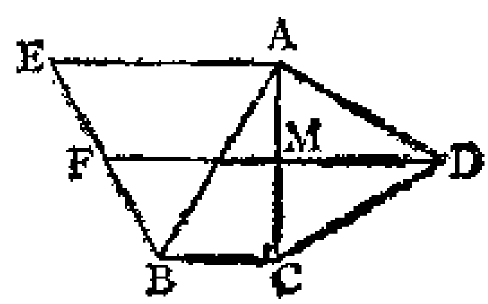
$$3x^2-12x-2\sqrt{x^2-4x+7}+13=0.$$

六、(本题要求用两种方法解答，每种方法只要求设出未知数，列出方程或方程组为止，不必解出方程或方程组)

甲脱粒机的工作效率是乙机的2倍，某农场的脱粒工作先用甲机完成$\frac{2}{3}$后，改用乙机，这样完成任务所用时间比用两机同时工作晚4天，两机单独完成这个农场的脱粒工作各需多少天？

七、如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$\triangle ABE$和$\triangle ACD$都是正三角形，$BF=FE$，DF交AC于M。求证$AM=MC$。

八、设“*”是一种运算符号，对于任意实数x、y，有$x*y=\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}$，其中$a$、$b$是不等于0的常数，等式右边仍按以前学过的有关运算的意义与顺序进行运算。



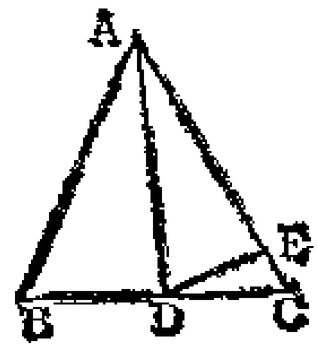
1. $x*y$是否等于$y*x$？

2. 如果已知$1*2=4$，$2*3=2$，求a、b的值。

3. 求$2*5$。

九、下列两题任意选做一题，若两题全做，可得附加分。

1. 如图，$AB=AC$，D在BC上，$\angle BAD=30^\circ$，在AC上取$AE=AD$，求$\angle EDC$的度数。



2. 已知：三角形的三边为a、b、c，且$(2-\sqrt{2})a=2b$。

求证：$1<\frac{c-\sqrt{2}b}{b}<3$。

1987年青岛市初中数学竞赛

第一试

一、选择题

1. 把式子$a\sqrt{-\frac{1}{a}}$根号外的字母a移入根号内，那么原式变形为（ ）。

(A) $\sqrt{-a}$。 (B) $-\sqrt{a}$。

(C) $-\sqrt{-a}$。 (D) $\sqrt{a}$。

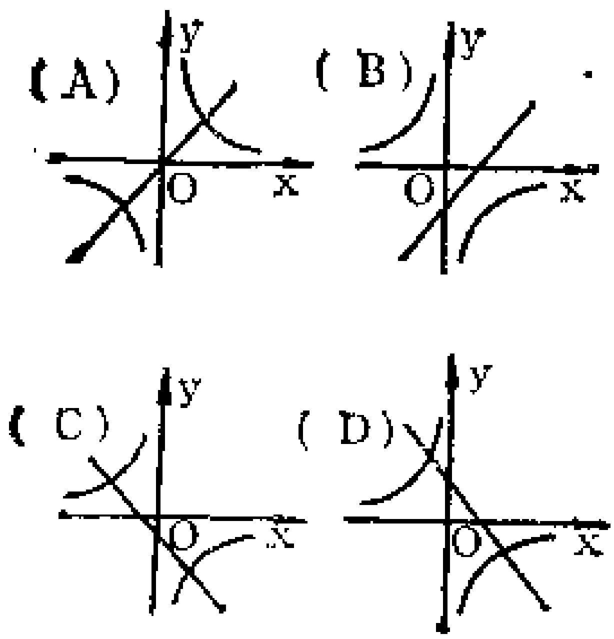
2. 以线段$a=16$，$b=13$，$c=10$，$d=6$为边，且使$a\parallel c$作四边形。这样的四边形（ ）。

(A)能作一个。 (B)能作两个。

(C)能作无数个。 (D)不能做。

3. 函数$y=k(x+1)$与$y=\frac{k}{x}$的图象的大致位置是（ ）。

4. $\triangle ABC$的三条外角平分线相交成一个$\triangle PQR$，则



$\triangle PQR$(　　)。

(A)一定是直角三角形。

(B)一定是钝角三角形。

(C)一定是锐角三角形。

(D)以上结论都不对。

5. 定义运算$*$为：$a*b=a^b$（a和b为任意正数）。当a，b，c，n为正数时，下列四个等式中成立的是(　　)。

(A)$a*b=b*a$。

(B) $a*(b*c)=(a*b)*c$。

(C) $(a*b^n)=(a*n)*b$。

(D) $(a*b)^n=a*bn$。

6. 把一个矩形剪去一个正方形，所剩的矩形和原矩形相似，则原矩形长边与短边比为(　　)。

(A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。　　(B) $\frac{3}{2}$。

(C) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$。　　(D) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$。

7. 下列四个数中最接近$\sqrt{65}-\sqrt{63}$的是(　)。

(A)0.12。　(B)0.13。　(C)0.14。　(D)0.15。

8. 在一行八个小方格图中，把每个小方格涂上黑、白两种颜色中的一种，那么涂色相同的小方格至少有(　)。

(A)2个。(B)4个。(C)5个。(D)6个。

9. 如果限定凸多边形有且仅有三个内角是钝角，那么这种多边形的边数最多是n，n等于(　)。

(A)5。　(B)6。　(C)7。　(D)8。

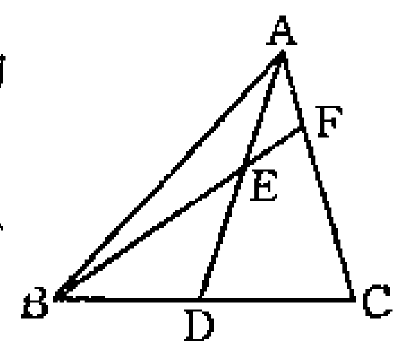
10. 三角形的三边都是正整数，其中有一边长为4，但它不是最短边，这样不同的三角形共有(　)。

(A)6个。(B)7个。(C)8个。(D)9个。

二、填空题

1. 方程$|x|^2-7|x|+6=0$，各根的和____。

2. AD是$\triangle ABC$的中线，E是AD上的一点，BE交AC于F，且$AE:ED=1:3$，则$AF:FC=$________。



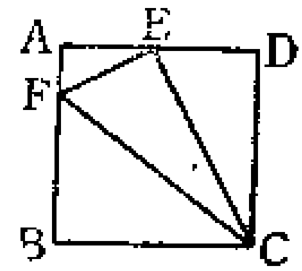
3. 已知$f(x)+af\left(\frac{1}{x}\right)=b\lg x$（其中$f(x)$表示自变量$x$的函数），则$f(10)=$____。

4. 一个三角形的一边长是2，这边上的中线长是1，另两边之和为$1+\sqrt{3}$，那么三角形的面积为____。

5. 若$[a]$表示不大于a的整数，如$[2.3]=2$，$\left[-\frac{1}{2}\right]=-1$，已知方程$\left[\frac{3}{4}x-1\right]=x-3$，那么满足方程的$x$是____

____。

6. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，若 $\triangle EFC$ 为直角三角形，且 $EF=3$，$EC=4$，$\angle FEC=90°$，则正方形的边长是______。

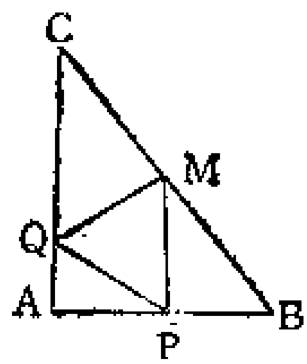


第二试

一、在凸四边形$ABCD$中，若$AB+BD\leqslant AC+CD$。求证：$AB<AC$。

二、在直角$\triangle ABC$中，M是斜边BC的中点，P，Q分别为AB，AC上的点。

求证：$\triangle MPQ$的周长大于BC。



三、数 3^n+1 当 n 为偶数时，能被 2 整除，当 n 为奇数时，能被2^2整除，但在两种情况下，都不能被 2 的任何更高次幂整除，试证明之。

四、有甲、乙两个四位数。乙数的常用对数是 $A+\lg B$，A、B是自然数。甲数的千位数与百位数之和等于 $5B$。乙数比甲数大$6B$。试求这两个四位数。

五、已知三角形一个角为$180°-n°$，最大角与最小角之差为$24°$，求 n 的取值范围。

1987年四川省初中数学联赛

第 一 试

一、选择题

1. 若$\frac{|a|}{a}=-1$，则a一定是( )。

(A)正数。(B)非正数。(C)负数。(D)非负数。

2. 如果两个非零的实数互为相反数，那么下列说法中错误的一个是( )。

(A)它们的和一定为零。

(B)它们的差一定为正数。

(C)它们的积一定为负数。

(D)它们的商一定为-1。

3. 若$x^2+mx-6=0$的二根都是整数，则m可取值的个数是( )。

(A)2。(B)4。(C)6。(D)以上结论都不对。

4. 若$\left|\frac{x+2y+3}{\sqrt{5}}\right|+x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$

$=\lg\left(-\frac{1}{4}\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{4}\right)$，则$x^2-xy+y^2$的值是( )。

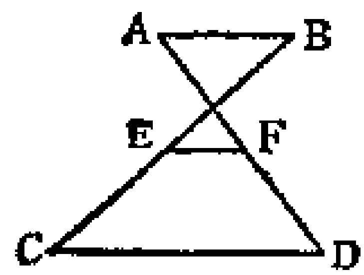
(A)1。(B)3。(C)7。(D)以上结论都不对。

5. 如果等腰三角形的顶角为36°，腰为1，那么它的底边长是( )。

(A)0.618.　　(B)$2-\sqrt{2}$.

(C)$\sqrt{2-\sqrt{2}}$.　(D)$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

二、填空题



1. 如图，若 $AB\parallel CD$，E、F分别为BC、AD的中点，且$AB=a$，$CD=b$，则$EF=$________.

2. 若$\lg x$的首数与$\frac{1}{2}\lg 3$的首数相同，且尾数与$3\lg 5$的尾数相同，则x的值是____.

3. 已知$-2<x<\frac{3}{2}$，把$(x-4)|2x-3|+(1-x)\sqrt{x^2+4x+4}$化简，得________.

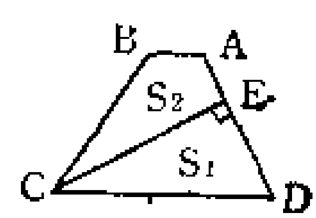
4. 使得方程$(2-k)x^2-2x+6=0$无实根的最大整数$k=$________.

5. 若$\log_x(\sqrt{x^2+21}-\sqrt{x^2+12})=0$，则$x=$____________.

6. 设n为正整数，如果$n+1$能整除n^2+76，那么n的可取值是________.

7. 分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)-6\times7\times8=$____________________.

8. 如图，在梯形$ABCD$中$AB\parallel DC$，CE是$\angle BCD$的平分线，$CE\perp AD$，$DE=2AE$，CE把梯形分成面积为S_1和S_2两部分.若$S_1=1$，则$S_2=$________.



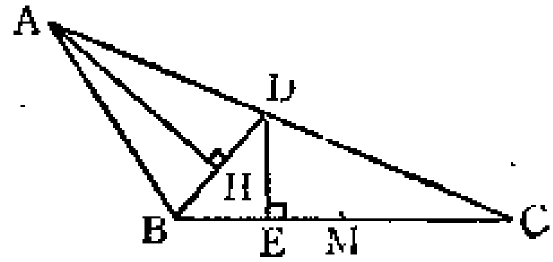
三、解下列各题

1. a为何值时，方程$x^2+ax-6=0$与$x^2-6x+a=0$至

少有一个公共根？

2. 已知方程$|x|=ax+1$有一负根，且无正根，求a的取值范围.

四、如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=5\angle ACB$，BD与$\angle A$的平分线垂直于H，$DE\perp BC$。若M是BC边的中点，则$EM=\frac{1}{2}BD$。



第二试

一、填空题

1. 设a、b是两个自然数。如果将运算符号“$*$”规定为$a*b=a^2+b^2+a+b$，那么方程$(x+2)*x=26$的正整数解为________.

2. 设角A为60°。如果在它的一边上取一点P，使$AP=12$；在它的另一边上取一点Q，使得$AP^2+AQ^2+PQ^2$的值为最小，那么AQ的长为________.

3. 设n是正整数。如果将n的首位数字去掉后所得到的数是n的$\frac{1}{15}$，那么一切具有上述性质的n为________.

4. 设有如下的一列数

$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \cdots$

如果我们从左边的第一个数起一直往右边数，那么$\frac{8}{9}$是这列数的第 ________ 个数。

二、已知 $ax+by-2c=0$，$ab-c^2>0$。

求证：xy的值不超过1。

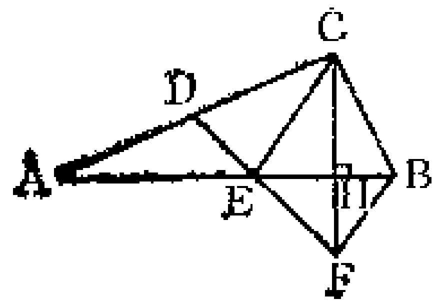
三、五支球队进行循环比赛，每两队都比赛一场，规定每场比赛的胜者得2分，负者得0分，平者各得1分。已知各队所得总分互不相等，并且

（1） 获得冠军的队没有平过一场；

（2） 获得亚军的队没有负过一场；

（3） 获得第四名的队没有胜过一场。试确定出所有各场比赛的结果。

四、如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CH\perp AB$，$AD=DC$，CE平分$\angle ACH$，DE与CH的延长线相交于点F，求证：$BF\parallel CE$。



1987年天津市初二数学邀请赛

一、选择题（满分40分）

答对1个小题得5分，不答者得1分，答错者得零分。

1．若两个三角形的两边和其中一边上的高分别对应相等，那么这两个三角形的第三边所对的角的关系是（　　）

(A)相等。　　(B)互余。

(C)互补。　　(D)相等或互补。

2．已知$2^{96}-1$可以被在60至70之间的两个整数整除，

这两个数是（　　）

(A)61，63。　　　(B)61，65。

(C)63，65。　　　(D)63，67。

3．在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=80^\circ$，D、E、F分别是BC、AB、CA边上的点，且$BD=BE$，$CD=CF$，$\angle EFD$的度数：$\angle FED$的度数$=3:2$，那么$\angle AEF$的度数是（　　）

(A)78°。(B)63°。(C)52°。(D)37°。

4．方程$x|x|-3|x|-4=0$的实根个数是（　　）

(A)1。　(B)2。　(C)3。　(D)4。

5．设$m=n^4+x$，其中n为自然数，x为二位正整数，那么使m为合数的x值可能为（　　）

(A)16。　(B)61。　(C)81。　(D)64。

6．在凸四边形中，两条边的长与两条对角线的长都等于a，则这个四边形的最大内角为（　　）

(A)120°。(B)135°。(C)150°。(D)不能求出。

7．在锐角三角形ABC中，三个内角的度数都是质数，则这样的三角形（　　）

(A)只有一个，且为等腰三角形。

(B)至少有二个，且都为等腰三角形。

(C)只有一个，但不是等腰三角形。

(D)至少有一个，其中有非等腰三角形。

8．某商店有126箱苹果，每箱至少有120只，至多有144只，现将苹果只数相同的箱子作为一组，设其中箱子最多的一组有n个箱子，那么n的最小值为（　　）

(A)5。　(B)6。　(C)7。　(D)8。

二、填空题（满分为40分）

本题共有8个小题，每题5分，不答者、答错者、多答或少答者都得零分。

1．设$19\times20\times21\times\cdots\times86\times87=A\cdot10^k$（$A$为自然数），则最大的正整数$k=$________。

2．关于x的方程$x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{a-1}$的根是________。

3．在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$于D，E、F分别是AB、BC的中点。$\angle FDB=50^\circ$，则$\angle ECD=$______度。

4．一个凸n边形最小内角为95°，其它内角依次增加10°，则$n=$________。

5．$a=\frac{4}{\sqrt{5}-1}$，则$a^3-2a^2-4a=$________。

6．方程组$\begin{cases}|x^2-2|+|y-2|=6\\|x^2-2|=2y-4\end{cases}$的实数解是________。

7．定义运算"$*$"为$a*b=\frac{2a-b}{2ab}$，则$5*(3*2)=$________。

8．五位数中各位数字的和为42，则其中能被4整除的数共有______个。

三、（满分10分）

证明：在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半。

四、（满分10分）

已知关于x的方程$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+a}=1$有一个增根

$x=4$。

（1） 求 a 的值；（2） 求方程的根。

五、（满分10分）

扑克牌中的 A、J、Q、K 分别表示1、11、12、13。甲取13张红桃，乙取13张黑桃，分别洗和后，甲、乙依次各出一张牌，使红、黑牌配成13对，证明这13对的差的积必为偶数。

六、（满分10分）

已知$\triangle ABC$的三边长为a、b、c，且满足

（1） $a>b>c$；　　（2） $2b=a+c$；

（3） b为正整数；　　（4） $a^2+b^2+c^2=84$。

求b的值。

1987年沈阳市初中数学邀请赛

一、填空（1～5每题1分，6～9每题2分，共13分）

1． 已知 $\lg 7=0.8451$，$\lg x=-2.8451$，则 $x=$__________。

2． 令 $3\log_9(1-\sqrt{5})^2+2\log_4(1+\sqrt{5})^2=x$，则$x=$__________。

3． 若$|\lg x|+\lg y=-3$，且$|\lg y|\cdot\lg x=-4$，则 $x=$________，$y=$________。

4． 凸 n 边形的对角线共有 945 条，则边数 $n=$__________。

5． 直角三角形斜边上的中线长为1，周长为$2+\sqrt{6}$，则其面积是__________。

6. 某人步行5小时，先沿平坦道路走，然后上山，再沿来的路线返回，若在平坦道路上每小时走4公里，上山每小时走3公里，下山每小时走6公里，那么这5小时共走路程______公里。

7. 将抛物线$y=2x^2-4x-5$向左平移3个单位，再向上平移两个单位，得到抛物线L，则L的解析式为______，L关于y轴对称的抛物线的解析式为______。

8. 容器A中装有水m升，容器B中装有纯酒精n升，若从A往B中倒入水a升，均匀混合后，再从B往A中倒回a升酒精溶液，则在容器A中渗了纯酒精______升，在B中渗了水______升。

9. 四个数之和为100，如果第一个数加上4，第二个数减去4，第三个数乘以4，第四个数除以4，所得和、差、积、商全相等，那么这四个数依次应为______、______、______、______。

二、选择题（每小题3分，共18分）选对得3分，选错或不选一律得0分。

1. 直角的定义是（　　）

(A)等于平角的一半的角叫做直角。

(B)大于锐角且小于钝角的角叫做直角。

(C)两条直线互相垂直，它们所夹的角叫做直角。

(D)90°叫做直角。

2. 圆O的半径$R=5$，圆的两条弦$MN\parallel PQ$，且$MN=6$，$PQ=8$，则MN与PQ间的距离等于（　　）

(A)1．(B)1或7．(C)7．(D)以上都不对．

3. $\triangle ABC$中，$AB=15$，$AC=13$，高$AD=12$，则周长为（　　）

(A)42。(B)32。(C)42或32。(D)以上都不完全。

4. 在实数范围内$y=||\sqrt{-(x-1)^2}\pm 2|\pm 5|$的值为（　　）

(A)无法确定。(B)7。(C)3。(D)7或3。

5. 整数a、b、c互不相等且不为0，则关系式$\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}-\frac{|abc|}{abc}$的值为（　　）

(A)2。(B)-2。(C)2或-2。(D)以上结论都不够全面。

6. 等腰三角形一底角平分线将周长分成168与112两部分，则腰长为（　　）

(A)80。(B)105或80。(C)105。(D)以上全不对。

三、填空（每小题3分，共30分）

1. 将31个规格一样的瓷盘分给甲、乙、丙三人，每人得到的都是完整的瓷盘，若甲分得$\frac{1}{2}$，乙分得$\frac{1}{3}$，丙分得$\frac{1}{5}$，则甲、乙、丙分得的瓷盘数依次是______，______，______。

2. 若$\frac{a+b+c}{d}=\frac{a+b+d}{c}=\frac{a+c+d}{b}=\frac{b+c+d}{a}=k$，则$k=$______，$\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d}=$______。

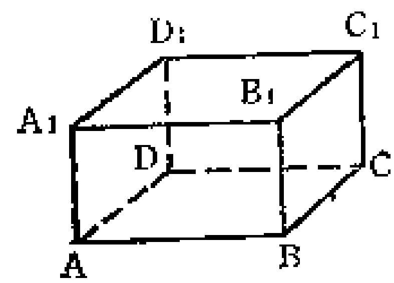
3. 关系式$|x|+|y|=1$的图象所围成的图形的面积

$S=$ ________；这个图形的对称轴方程是 __________．

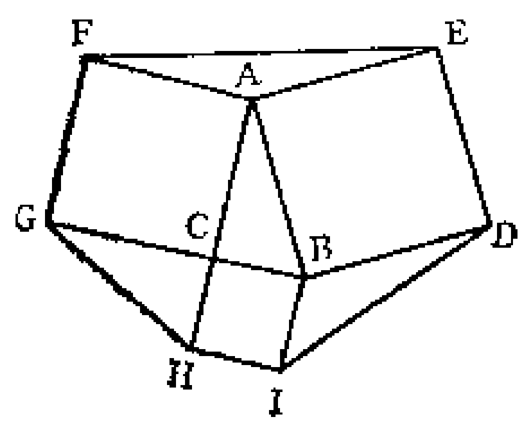
4．如果$\triangle ABC$的外心O是$\triangle ABC$的中位线$\triangle DEF$的三条高线的交点，则O又是$\triangle DEF$的垂足$\triangle GHL$的三条________的交点。

5．若抛物线$y=-x^2+ax+b-b^2$的顶点在抛物线$y=4x^2+4x+\frac{19}{12}$上，则$a=$ ________，$b=$ ________．

6．如图，已知长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的长$AB=5$，宽$BC=4$，高$BB_1=3$，那么一虫由A爬到C_1点，它所走的最短路程应该等于________．



7．已知直角$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$BC=a$，$AC=b$，以其各边为边向外作正方形（如图）得到一个凸六边形$DEFGHI$，这个六边形的面积为S，则$S=$ ____．



8．抛物线$y=x^2-2bx+1$和直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}m$，不论$b$为何实数值时，总有交点，则实数$m$的取值范围是____________．

9．x_1与x_2为方程$x^2+(m-1)x+\left(m^2-3m+\frac{9}{4}\right)=0$的二实根，则$x_1^2+x_2^2$的最大值为________，最小值为__________．

10．
$$\begin{array}{r} EBFDHE \\ +\,ALGDHE \\ \hline CBCLGI \end{array}$$
算式中不同的字母代表1，2，3，…，9，

0中的不同数字，若$E=5$，请求出它们所对应的数字，按A，B，C，D，E，F，G，H，L，I 的顺序写出：______________________.

四、选择题（每题4分，共20分）选对得4分，选错或不选一律得0分。

1．将自然数N记成$N=10A+B$，其中B为个位数字，A为十位以上部分，记$A-2B=M$，用7去除M与N，下面各式中成立的是

(A)N能被7整除，M不能被7整除。

(B)M能被7整除，N不能被7整除。

(C)M，N都能被7整除或都不能被7整除。

(D)以上结论都不对。

2．方程$8(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101=0$的所有解应该是

(A)1或-1。　　(B)1或2。

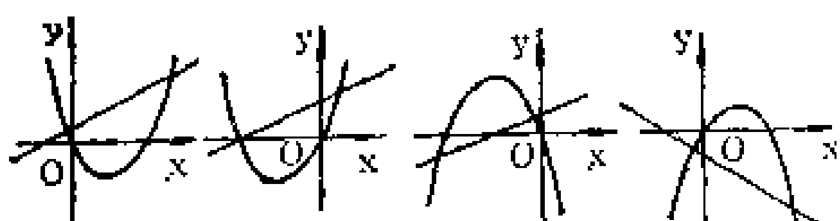
(C)2或-2。　　(D)1或-1或2或-2。

3．不等式$x^2-2|x|-15>0$的解集是

(A)$-5<x<5$。　　(B)$-3<x<5$。

(C)$x<-3$或$x>5$。　　(D)$x<5$或$x>5$。

4．$y=ax+b$与$y=ax^2+bx$的图象从a、b的符号上看应是



(A)　(B)　(C)　(D)

5．袋子里装有红色球80只，蓝色球70只，黄色球60只，白色球50只，它们的大小与质量都一样，只是颜色不

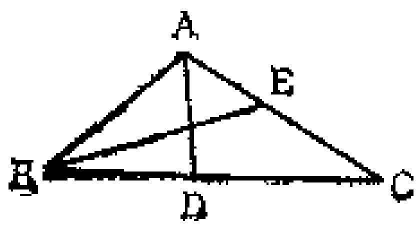
同，若规定颜色相同的两只球为一对，今不许看只许用手摸取，要保证摸出10对，至少应取多少只？

(A)20。 (B)21。 (C)23。 (D)24。

五、证明（每小题 6 分，共12分）

1． 任给五个整数，证明必能从中选出三个，使它们的和能被 3 整除。

2． $\triangle ABC$ 中，角 $A:B:C=4:2:1$，AD、BE 分别为 $\angle BAC$、$\angle ABC$的平分线，求证：$AB^2=AD\cdot BE$。



六、(7分)圆内接八边形的四条边长都等于3，另外四条边长都等于2，求这八边形的面积。

1987年杭州市初中数学竞赛

一、选择题（24分）

(1) 若$a>b$，且$c=d$，则$ac>bd$；

(2) 若$a>b$，则$ac^2>bc^2$；

(3) 若$ac>bc$，则$a>b$；

(4) 若$ac^2>bc^2$，则$a>b$。

其中，真命题是（ ）

(A)(1)。 (B)(2)。 (C)(3)。 (D)(4)。

2． 对于同一坐标系，在函数$y=\frac{x^2}{x}$，$y=|x|$，$y=\sqrt{x^2}$，$y=2^{\log_2 x}$的图象中，与函数 $y=x$ 的图象完全重合的有（ ）

(A)0个．(B)1个．(C)2个．(D)3个．

3．如果正数N的常用对数的尾数是$\frac{1}{a}$，那么$\frac{1}{N}$的常用对数的尾数是（　　）

(A)a．(B) $\frac{a-1}{a}$．(C) $\frac{a}{a-1}$．(D) $\frac{1}{a-1}$．

4．当n是任意自然数时，方程

$$x^2-(4n-1)x+(2n-5)=0$$

的两个根是（　　）

(A)都是正数．　　(B)都是负数．

(C)一正一负．　　(D)不是整数．

5．如果$x+\sqrt{x^2-1}=a^{\frac{m-n}{2mn}}$，那么$x-\sqrt{x^2-1}=$（　　）

(A)$a^{\frac{n-m}{2mn}}$．　(B)$a^{\frac{m+n}{2mn}}$．

(C) $a^{\frac{2mn}{n-m}}$．　(D)$a^{\frac{2mn}{m+n}}$．

6．$\triangle ABC$中，$\angle C$是直角，CD是角平分线，已知$AD=p$，$DB=q$，那么AB边上的高等于（　　）

(A)$\frac{pq}{p^2+q^2}$．　　(B) $\frac{p+q}{p^2+q^2}$．

(C) $\frac{pq(p+q)}{p^2+q^2}$．　　(D) $\frac{p+q^2}{pq(p+q)}$．

7. 已知$x+y+z=0$，则$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)$ $+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+6=$(　　)

(A)0。　(B)1。　(C)2。　(D)3。

8. 直线$y=\frac{1}{2}x+k$与x、y轴的交点分别是A、B，如果$S_{\Delta AOB}\leqslant 1$，那么$k$的取值范围是（　　）

(A)$k\geqslant -1$。　(B)$k\leqslant 1$。

(C)$-1\leqslant k\leqslant 1$。　(D)$k\leqslant -1$或$k\geqslant 1$。

二、填空题（18分）

1. 在实数范围内分解因式：$x^4+3x^3+2x^2+3x+1=$______。

2. 一个正整数，如果加上50，便得一个完全平方数，如果减去31，又得一个完全平方数。那么这个正整数是______。

3. 如果$abc\neq 0$，且$\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}$，那么$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$的值等于______。

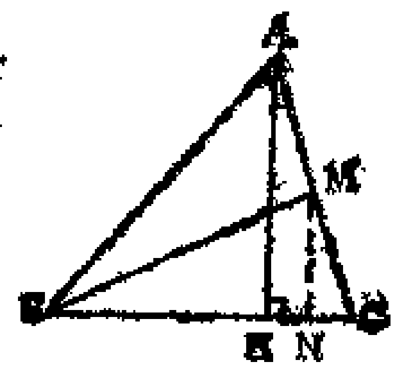
4. 方程$\left||2x+1|-x\right|=3$的解是______。

5. 线段AB上有9个点，依次记作C_1，…，C_9，那么以A，C_1，C_2，…，C_9，B为端点的线段共有______条。

6. 甲、乙两人共带330个蛋，去市场全部卖完，已知他们所带的蛋的个数不等，但卖得的钱一样多。并且，甲对

乙说过："如果我有你这么多的蛋，我便可卖得32.4元"；乙的回答是："如果我有你这么多的蛋，我只能卖得22.5元"，由此可以推算出甲所带的蛋是________个，乙所带的蛋是________个。

三、（10分）如图，锐角三角形ABC中，$BC<AB$，AH是BC边上的高，BM是AC边上的中线，$AH=BM$。



求证：(1) $\angle MBC=30^\circ$；

(2) $\angle ABC<60^\circ$。

四、（8分）下面数表的第1，2，3行数字，分别是当$n=1, 2, 3$时计算$(1+x+x^2)^n$所得的多项式（按x的升幂排列）各项系数，试按数表中，下行数字与相邻的上行数字之间的推算规则，算出第4，5，6行的数字（即当$n=4, 5, 6$时计算$(1+x+x^2)^n$所得多项式各项的系数），把它们填在数表中的相应位置。

1　1　1

1　2　3　2　1

1　3　6　7　6　3　1

五、（8分）求证：当$x\geqslant\frac{1}{8}$时，

$$\sqrt[3]{x+\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}+\sqrt[3]{x-\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}=1.$$

六、（10分）$\triangle ABC$是等腰三角形（$AB=AC\neq BC$）。

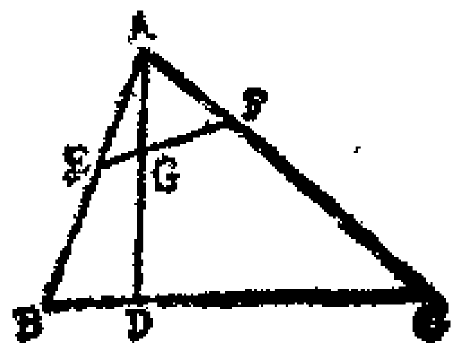
① 求作点P，使$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$都是等腰三角形（要写作法，并保留作图痕迹）。

②如果$\triangle ABC$是正三角形，那么符合求作条件的点共有

几个？

七、（10分）已知：$\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n个1} = \frac{10^n-1}{9}$，

求证：$\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n个1}\ \underbrace{22\cdots\cdots2}_{(n+1)个2}5 = (\underbrace{33\cdots\cdots3}_{n个3}5)^2$。



八、（12分）如图，$\triangle ABC$中，点D在BC上，$BD:BC=1:4$。点E、G分别在AB、AD上，$AE:AB=2:5$，$AG:AD=1:3$，EG交AC于F，已知$S_{\triangle AEG}=1$。

求：(1)$S_{\triangle ABC}$；(2)$AF:AC$。

1987年苏州市初中数学竞赛模拟试题

一、选择题

1. 如果$\log_2[\log_3(\log_4 x)] = \log_3[\log_4(\log_2 y)] = \log_4[\log_2(\log_3 z)] = 0$，则$x+y+z$等于（ ）

(A)50 (B)58 (C)89 (D)111

2. 定义运算“$*$”为$a*b=a^b$（a和b为任意正数），当a、b、c、n为正数时，下列四个等式中哪一个成立？（ ）

(A) $a*b=b*a$ (B) $a*(b*c)=(a*b)*c$

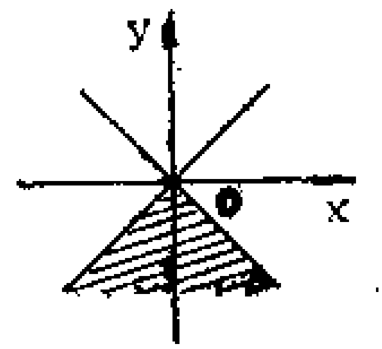
(C) $(a*b^n)=(a*n)*b$ (D) $(a*b)^n=a*bn$

3. 从直角三角形斜边所对的顶点作斜条的三等分点的连线，这两条线段分别长$\sin x$和$\cos x$，其中x是$0<x<\frac{\pi}{2}$的

一个实数。斜边的长是（　　）

(A)$\frac{4}{3}$　(B)$\frac{3}{2}$　(C)$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　(D)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 如图，阴影区域的边界线的斜率分别为1和-1，用不等式表示这个区域为（　　）



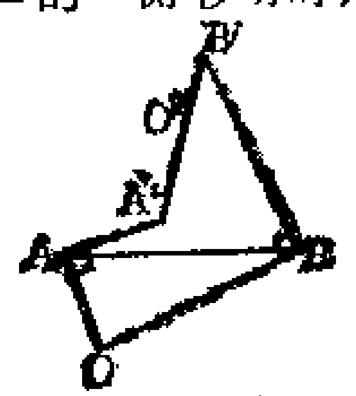
(A)　$x+y\geqslant0$且$x-y\geqslant0$。

(B)　$x+y\geqslant0$且$x-y\leqslant0$。

(C)　$x+y\leqslant0$且$x-y\geqslant0$。

(D)　$x+y\leqslant0$且$x-y\leqslant0$。

5. 如图，A、B为定点。O为一动点，在异于O点的一侧取两点A'、B'，使$\angle OAA'=\angle OBB'=90°$，且$AA'=OA$，$BB'=OB$。设$A'B'$的中点为$O'$，当$O$在$AB$的一侧移动时，$O'$的位置将怎样变化？（　　）



(A)　O'沿着某一直线移动。

(B)　O'沿着某一圆周移动。

(C)　O'固定不动。

(D)　上述结论都不对。

6. 平面上给出四点，其中没有三点在一条直线上，可组成四个三角形，其中最多有几个锐角三角形。（　　）

(A)4。　(B)3。　(C)2。　(D)1.

二、填充题

1. 已知方程$x_1+x_2+\cdots+x_{1987}=x_1\cdot x_2\cdots x_{1987}$。试写出在自然数集中的一组解：________。

2. 某三位数的各位数都不为零，并且这三位数被它的各位数字之和除，则所得的商最小可能是______。

3. 锡一块，重121克，铸成5个砝码，使1—121克内任一整数克的重量，均能用这5个砝码在天平上称出，问这五

个砝码各重几克？________。

4．已知$f(x)+af\left(\frac{1}{x}\right)=b\log_a x(a\neq\pm1)$，则 $f(10)=$____________。

5．已知某二次三项式在$x=\frac{1}{2}$时取极小值$-\frac{49}{4}$，它的两个根的四次方之和等于337，则这个二次三项式是________。

6．1986^{2000}的末两位数是________。

三、用直线将边长为1的正方形分成三个凸多边形，试证至少存在两点属于同一多边形，它们的距离不小于$\frac{\sqrt{65}}{8}$。

四、求证：任意直角或钝角三角形可分成七个锐角三角形。

五、已知三角形的两角之和为$n°$，最大角比最小角大$24°$，求n的取值范围。

1987年南昌市初中数学竞赛

一、（40分，每小题5分）

1．已知a，b与$\sqrt{a^2+b^2+ab}$分别是$\triangle ABC$的顶点A、B、C所对的边的边长，且知$x\cos C=\sqrt{2}$，那么$x=$________。

2．在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{3}$，$b=6$，$A=30°$，这个三角形中c边的长是________。

3．不等式组$\begin{cases}2x-5>3-2x\\3x-6>4x-9\end{cases}$的解是________。

4. $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，且$x+2y=1$，那么$x+3y^2$的最小值为______。

5. 关于x的方程$(x-p)^2=(x-q)^2$的解是______。

6. 如果$\sqrt{7}$的小数部分是a，而$\frac{1}{a}$的小数部分是b，则b的值是______。

7. 设直角三角形的斜边长为$\sqrt{6}$，其余两直角边中，一边长等于另一边长的小数部分，则此两直角边长分别是______。

8. 已知P是正方形$ABCD$的外接圆的$\overset{\frown}{AD}$上的任意一点，那么$\frac{PA+PC}{PB}$的值是______。

二、选择题（30分，每小题6分）

答对的给6分，不答给1分，答错者给0分。

1. 已知实数a、b满足关系：$(a-2b)^2+\sqrt{b^2+2b+1}=0$，则下面各等式中只有（　　）成立。

(A) $a+b=-1$。　　(B) $a-b=-1$。

(C) $a-b=1$。　　(D) $a+b=1$。

2. 当$a>b$，且$ab\neq 0$时，以下论断中只有（　　）正确。

(A) 必有$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

(B) 必有$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$。

(C) 必有$a^2\neq b^2$。

(D) $a^2=b^2$ 有可能成立，$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小不能确定。

3. 一元二次方程 $x^2+2Kx+2l-1=0$（K与l都是整数），如果有整数根α，则它的另一根β必是如下（　　）的论断。

(A)不是整数。　　　　(B)一定是整数。

(C)不一定是整数。　　(D)既可能是整数又是偶数。

4. 对于正实数a与b，定义运算“*”如下：

$a*b=\frac{ab}{a+b}$，则 $4*(4*4)$等于（　　）

(A) 1　(B) 2　(C) $\frac{4}{3}$　(D) $\frac{3}{4}$

5. 如果实数a与$\lg b$满足$|a-\lg b|=a+\lg b$，那么（　　）必成立。

(A) $b=1$。　　　(B) $a=0$。

(C) $a=ab$。　　　(D) $a=0$且$b=1$。

三、（10分）将$\triangle ABC$的AB边n等分($n>2$)，再过这些等分点分别作平行于BC的直线，把$\triangle ABC$划分为几部分，从最靠近边BC的那一块数起，第二块的面积恰好等于$\triangle ABC$的面积的$\frac{1}{4}$，求n的值。

四、（16分，每小题8分）

1. 甲、乙、丙三人同时出发作100公里旅程的旅行，甲与丙一同乘车以每小时25公里的车速前进，而乙却以每小时5公里步行，经过某距离后，丙下车改步行，每小时5公里，而甲驾车折返，将乙载上而与丙同时达到目的地，求此旅程

所费的时间。

2. 平面直角坐标系上有点$P(-1, -2)$和点$Q(4, 2)$，取点$R(1, m)$，求m为何值时$PR+RQ$有最小值？

五、（12分）证明在任意1987个连续整数中，一定有一个能被1987整除，而且只有一个能被1987整除。

六、（12分）小明与同学做游戏，他把一张纸剪成七块，再从所得的纸片中任取一块又剪成七块，然后再将任意一块剪成七块，这样类似地进行下去，问剪到n次时剪出来的大小块数是多少？有没有n的值使剪到第n次后总块数正好是1987？若有的话，求出这个n的值。

1987年桂林市初二数学竞赛

一、选择题（24分，每小题4分）

答对得4分，答错得－1分，不答得0分。

1. 3.14159，$-\sqrt[3]{343}$，0.131131113，$-\pi$，这四个实数中无理数的个数是（　　）

(A)0。　(B)1。　(C)2。　(D)3。　(E)4。

2. a、b是实数，下面五个命题中正确的是（　　）

(A)　若$a>b$，则$a^2>b^2$。

(B)　若$|a|>b$，则$a^2>b^2$。

(C)　若$a>|b|$，则$a^2>b^2$。

(D)　若$a^2>b^2$，则$a>b$。

(E)　若$a\neq|b|$，则$a^2\neq b^2$。

3. 一个数等于它的倒数的四倍，这个数一定是(　　)

(A)?。 (B)1。 (C)$\frac{1}{2}$。 (D)-2。 (E)以上答案都不对。

4．多项式$2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$能被x^2+x-2整除，则$\frac{a}{b}$的值是（　）

(A)-2。 (B)-12。 (C)6。 (D)4。 (E)3。

5．等腰三角形ABC中，一腰上的高线长为1，这个高与底边夹角为45°，则$\triangle ABC$的面积是（　）

(A)1。 (B)0.5。 (C)0.25。 (D)$\sqrt{3}$。

(E)以上答案都不对。

6．若$a>b>c>0$，$l_1=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$，$l_2=\sqrt{(b+c)^2+a^2}$，$l_3=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$，则乘积$l_1l_2, l_1l_3, l_2l_3, l_2^2, l_3^2$最小的一个是（　）

(A)l_1l_2。 (B)l_1l_3。 (C)l_2l_3。 (D)l_2^2。 (E)l_3^2。

二、填空（每小题4分，共20分）

1．化简：$\sqrt{18+8\sqrt{2}}=$______。

2．在实数范围内分解多项式：$x^6-7x^4-26x^2+72=$____。

3．$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+$

$$\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}=\_\_\_\_。$$

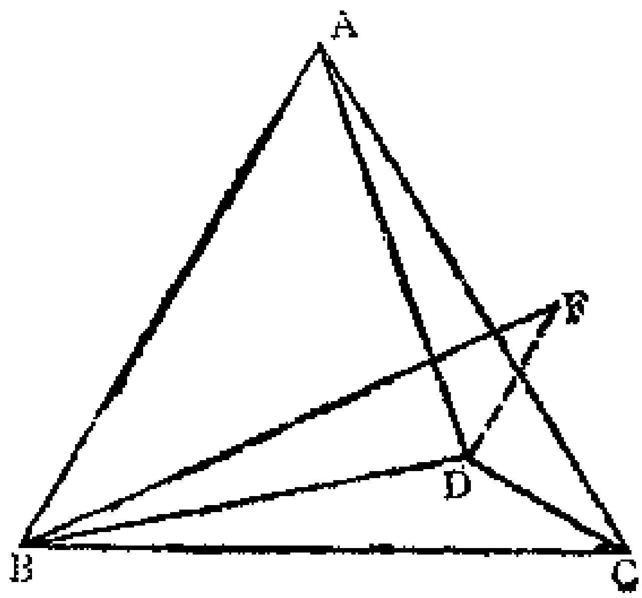
4．矩形两邻边的差为2cm，对角线长为4cm，则矩形的面积为____cm²。

5．x、y、z均为实数，且$|2x-y|+\sqrt{y+2z}+z^2-4z$

$+4=0$，则$(x-y)^2$的值为__.

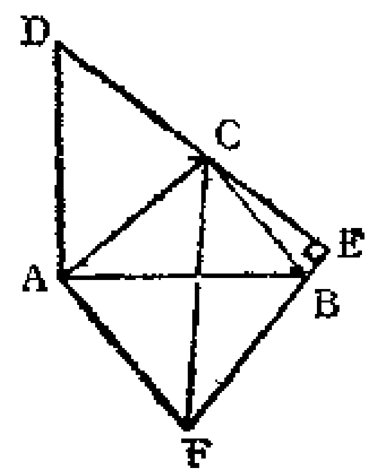
6. 方程$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=0$的解为____.

三、拖拉机比汽车早30分钟从A城开往B城，当汽车超过拖拉机到达B城时，拖拉机还需行驶3公里才能到B城．如果汽车的速度比拖拉机的速度快20公里/小时，而A、B两城相距12公里，求汽车与拖拉机的速度.（10分）



四、如图，D为等边$\triangle ABC$内一点，$DB=DA$，$BF=AB$，$\angle DBF=\angle DBC$．求$\angle BFD$的度数。（12分）

五、如图，已知$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AD\perp AB$，$AD=AB$，$BE\perp DC$，$AF\perp AC$。



求证：CF平分$\angle ACB$。（14分）

六、若n为自然数，和数$1981^n+1982^n+1983^n+1984^n$不能被10整除时，$n$必须满足什么条件？试说明理由。（20分）

1987年宝鸡市初中数学竞赛

第 一 试

一、填空题（本题满分28分，每小题4分，结果可保留根号）

1．如果不等式$x^2-2ax+a^2+b\geqslant 0$对任意实数都成立，则b的取值范围是______。

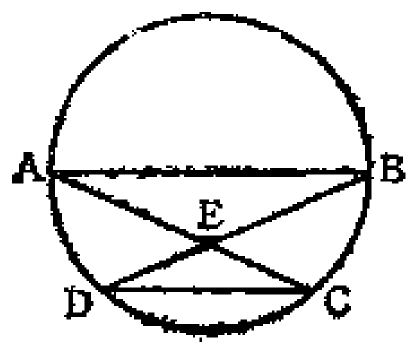
2．函数 $y=\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$的值的变化范围是______。

3．某人从边长为2米的正六边形水池的一个顶点出发，沿着池边前进5米，这时他离出发点____米。

4．半径为2cm和1cm的$\odot O$和$\odot O'$相交于A、B两点，且$OA\perp O'A$。则公共弦AB的长为___ cm。

5．在$\triangle ABC$中，$AB=8$，$BC=7$，$CA=6$，延长BC到P，使$\triangle PAB$与$\triangle PCA$相似，则PC的长为____。

6．如图，AB是圆的直径，CD是平行于AB的弦，且AC和DB相交于E，$\angle AED=\alpha$，则$\triangle CDE$与$\triangle ABE$的面积之比用含α的式子表示为______。



7．如果方程式$\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{2x+a}{x(x-2)}=0$只有一个实数根，则$a$的值及对应的原方程的根分别是______。

二、选择题（填对1个得4分，答错得0分，不答得1分，满分共32分）

1．已知一个三位数等于另一个三位数的9倍，则这样的三位数有（　　）

(A)2对。(B)7对。(C)9对。(D)12对。

2．两个同心圆，已知小圆的切线被大圆所截部分的长等于6，则此两圆所围成的环形面积是（　　）

(A)3π。(B)6π。(C)9π。(D)12π。

3．根据下面字母的排列规律

abacbadcbabcdabacbadcbabcdaba…

确定第100个字母应该是（ ）

(A)a。 (B)b。 (C)c。 (D)d。

4．如图为一个大半圆弧与n个半径相等的小半圆弧．则大半圆弧的弧长与n个小半圆弧弧长的关系是（ ）

(A) 长度相等。 (B) 大半圆弧长长一些。

(C) 大半圆弧长短些。 (D) 长短随小半圆弧的个数而定。

5．$a=\frac{1}{4}$，$b=\log_a\frac{3}{2}$，$c=\log_8\sqrt{3}$的大小顺序是（ ）

(A) $a<b<c$， (B) $a<c<b$，

(C) $b<a<c$， (D) $c<b<a$。

6．若三角形的三个内角A、B、C的关系满足$A>3B$，$C<2B$，则这个三角形是（ ）

(A) 钝角三角形 (B) 直角三角形

(C) 锐角三角形但不等边 (D) 等边三角形

7．某乒乓球队共有男女队员23人，在男队员中有4人和第一个女队员配合过双打，有5人和第二个女队员配合过双打，…，所有的男队员都和最后一个女队员配合过双打。则男、女队员的人数是（ ）

(A) 男10，女13 (B) 男11，女12

(C) 男12，女11 (D) 男13，女10

8．某人在x天中观察天气，共测得下列四种数据：

（1） 上午或下午共下雨7次，

（2） 有5个下午晴；

（3） 有6个上午晴；

（4） 当下午下雨时上午晴。则天数x是（ ）

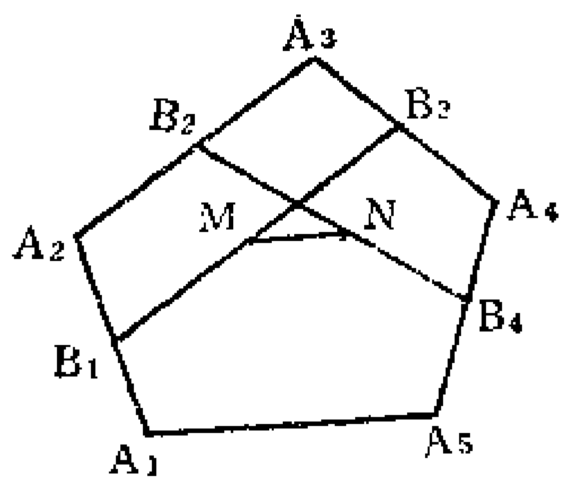
(A)11． (B)7． (C)9． (D)无法确定．

第 二 试

一、（本题满分10分）

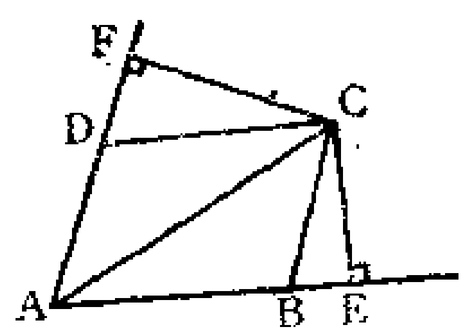
已知二次方程$(m+1)x^2+3x+1=0$。1.求m为何值时，方程有实数根？2.当两实根的平方和为$\frac{1}{3}$时，求m的值．

二、（本题满分为12分）



如图，凸五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$中，B_1、B_2、B_3、B_4分别为A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_5的中点，M为B_1B_3的中点，N为B_2B_4的中点，若$A_1A_5=a$，求线段MN的长．

三、（本题满分12分）



如图，AC是▱$ABCD$较长的对角线，过C作$CF\perp AF$，$CE\perp AE$．求证：$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^2$．

四、（本题满分13分）

从相距105市里的A、B两地，两个骑自行车的人同时相向而行(途中不停)，经1小时45分钟在M点相遇．相遇3分钟

后，速度为40市里/小时的第一个人在N点碰见与他相向而行的第三个人。此后，第三个人继续前进，并在P点赶上第二个人。如果第一个人的速度比原来减少20市里/小时，第二个人比原来速度增加2市里/小时，则第一、二两人相遇地点也将是P。求第三个人的速度。

五、（本题满分13分）

任给5个自然数，证明：必能从中选取三个，使得它们的和能被3整除。

1985年全国初中数学联赛

一、选择题（满分30分）

本题共有6个小题。答对的每小题得5分，不答者得1分，答错者得0分。

1. 设$ABCD$为圆内接四边形，现在给出四个关系式

（1）$\sin A=\sin C$。　　（2）$\sin A+\sin C=0$。

（3）$\cos B+\cos D=0$　　（4）$\cos B=\cos D$。

其中总能成立的关系式的个数是（　　）

(A) 一个。　　(B) 两个。

(C) 三个。　　(D) 四个。

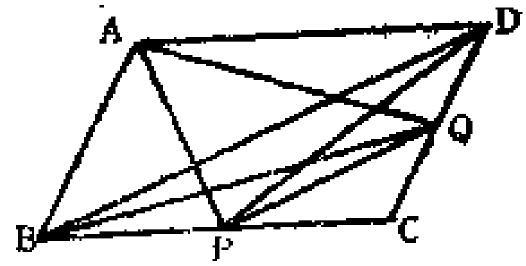
2. 若n是大于1的整数，则

$$p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$$ 的值（　　）

(A) 一定是偶数。　　(B) 一定是奇数。

(C) 是偶数但不是2。　　(D) 可以是偶数也可以是奇数。

3．在平行四边形$ABCD$中，过P作BD的平行线交CD于Q，连PA、PD、QA、QB，则图中与$\triangle ABP$面积相等的三角形，除$\triangle ABP$外还有（　　）



(A)　三个。　　(B)　四个。

(C)　五个。　　(D)　六个。

4．函数$y=1-|x-x^2|$的图象大致形状是（　　）

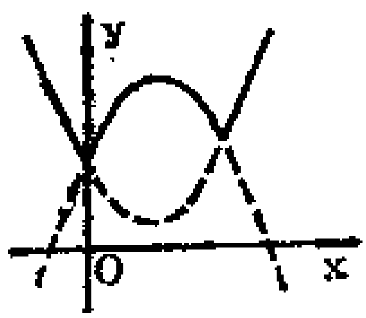


图 1

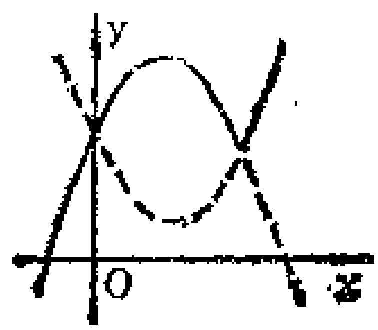


图 2

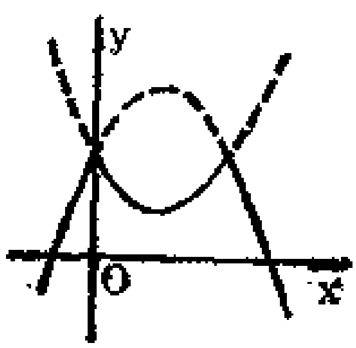


图 3

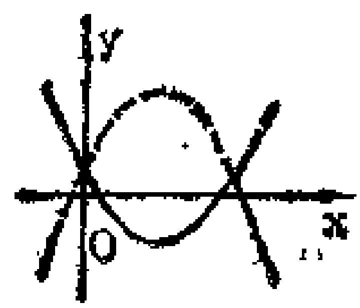


图 4

(A)　图1中的实线部分。　　(B)　图2中的实线部分。

(C)　图3中的实线部分。　　(D)　图4中的实线部分。

5．$[x]$表示取数x的整数部分，例如$\left[\frac{15}{4}\right]=3$，若$y=4\left(\frac{x+[u]}{4}-\left[\frac{x+[u]}{4}\right]\right)$，

且当　$x=1, 8, 11, 14$时　$y=1$；

$x=2, 5, 12, 15$时　$y=2$；

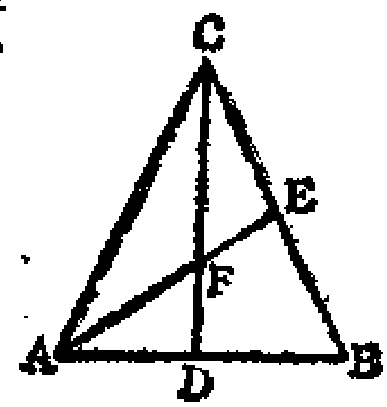
$x=3, 6, 9, 16$时　$y=3$；

$x=4, 7, 10, 13$时　$y=0$。

则表达式中的u等于（　　）

(A)$\frac{x+2}{4}$　　(B)$\frac{x+1}{4}$　　(C)$\frac{x}{4}$　　(D)$\frac{x-1}{4}$

6. 如图，在等腰$\triangle ABC$中，CD是底边AB上的高，E是腰BC的中点，AE交CD于F。



现在给出三条路线：

(a)　$A\to F\to C\to E\to B\to D\to A$；

(b)　$A\to C\to E\to B\to D\to F\to A$；

(c)　$A\to D\to B\to E\to F\to C\to A$。

设它们的长度分别是$L(a)$，$L(b)$，$L(c)$。那么下列三种关系式：

$L(a)<L(b)$，$L(a)<L(c)$，$L(b)<L(c)$

中，一定能够成立的个数是（　　）

(A)0个。　(B)1个。　(C)2个。　(D)3个。

二、填空题（满分30分）

每填对一小题得5分。

1. 设 $a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$，则$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值为________。

2. 设方程$x^2-402x+k=0$的一根加3，即为另一根的80倍。那么$k=$________。

3. 有甲、乙、丙三种货物，若购甲3件，乙7件，丙1件，共需3.15元。若购甲4件，乙10件，丙1件，共需4.20元，

现在购甲、乙、丙各1件，共需______元。

4. 不等式$42x^2+ax<a^2$的解为______。

5. 已知$x(x\neq0, \pm1)$和1两个数，如果只许用加法、减法、1作被除数的除法三种运算（可以使用括号）经过六步算出x^2，那么计算的表达式是____。

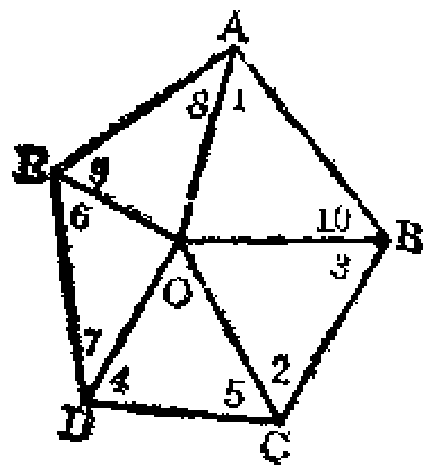
6. 在正实数集上定义一个运算$*$，其规则为：当$a\geqslant b$时，$a*b=b^a$；当$a<b$时，$a*b=b^2$。根据这个规则，方程$3*x=27$的解是________。

三、如图，O为凸五边形$ABCDE$内一点，且

$\angle1=\angle2$，$\angle3=\angle4$，

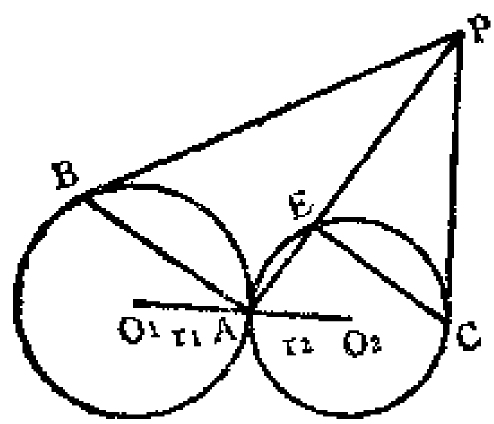
$\angle5=\angle6$，$\angle7=\angle8$，

求证：$\angle9$与$\angle10$相等或互补。



四、如图，$\odot O_1$、$\odot O_2$外切于A，半径分别为r_1和r_2；PB、PC分别为两圆的切线，B、C为切点；$PB:PC=r_1:r_2$，PA交$\odot O_2$于E点。

求证：$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$。

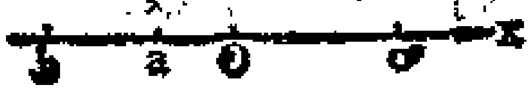


五、有一长、宽、高分别为正整数m、n、r（$m\leqslant n\leqslant r$）的长方体，表面涂上红色后切成棱长为1的正方体。已知不带红色的正方体个数与两面带红色的正方体个数之和减去一面带红色的正方体个数得1985。求m、n、r的值。

1985年全国部分市(地)、县初中数学通讯赛

一、选择题（40分，答对得5分，不答得1分，答错得0分）

1．实数a、b、c在数轴上的位置如下图所示，则代数



式

$|a|-|a+b|+|c-a|+|b-c|$的值等于(　　)

(A) $-a$。(B) $2a-2b$。(C) $2c-a$。(D) a。(E) 0。

2．若$\frac{x}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{7}$，则$\frac{3x+y+z}{y}$的值为（　　）

(A) 0。(B) -1。(C) -2。(D) -3。(E) 3。

3．从甲地到乙地有两条同样长的路，一条在平地上，一条有$\frac{1}{3}$的路是上山，$\frac{2}{3}$的路是下山。如果上山速度为平地的$\frac{1}{2}$，平地速度为下山的$\frac{1}{2}$，那么从甲地到乙地。

(A) 走山路快。(B) 走平地快。(C) 走山路与平地一样快。(D) 若甲地到乙地路程很长，则走山路快，路程较短则走平地快。(E) 若甲地到乙地路程很长则走平地快，路程较短则走山路快。

答：(　　)

4．如果把函数$y=2x$的图象向下平移二个单位，再向

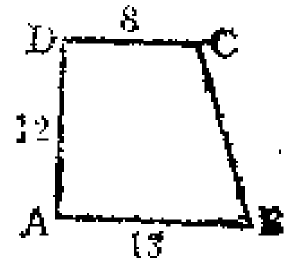
左平移一个单位，那么得到的图象是函数（　　）

(A) $y=x-2$。　(B) $y=2x-1$。

(C) $y=2x-3$。　(D) $y=2x+3$。

(E) $y=2x$。

5. 如图，在直角梯形$ABCD$中，底$AB=13$, $CD=8$, $AD\perp AB$，并且$AD=12$，则A到BC的距离为（　　）



(A) 12。　(B) 13。　(C) 10。

(D) $\frac{12\times 21}{13}$。　(E) $\frac{13+8}{2}$。

6. 若$\triangle ABC$的三边长为a、b、c，且同时满足 $a^4=b^4+c^4-b^2c^2$，$b^4=c^4+a^4-a^2c^2$，

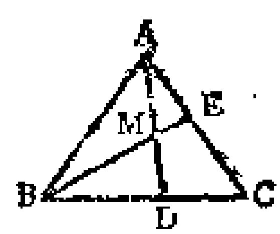
则$\triangle ABC$是（　　）

(A)不等边三角形。(B)等边三角形。(C)直角三角形。(D)钝角三角形。(E)等腰直角三角形。

7. 如图，$\triangle ABC$中，已知$BD:DC=3:2$, $AE:EC=3:4$，M是AD与BE的交点，且$\triangle ABC$的面积为1，则$\triangle BMD$的面积是（　　）

(A) $\frac{3}{5}$。(B) $\frac{3}{7}$。(C) $\frac{12}{35}$。

(D) $\frac{4}{15}$。(E) $\frac{4}{9}$。



8. 如果对于数集A中任意两个数a、b，其和$a+b$，差$a-b$，积$a\cdot b$都在数集A内，就称数集A为数环。下面六个数集：①Z={全体整数}，②N={全体自然数}，③Q={全体有理数}，④R={全体实数}，⑤M={全体形如$n+m\sqrt{2}$的

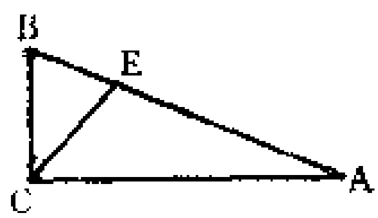
数，其中n、m是整数}，⑥$P=${全体形如$m/2^n$的数，其中n、m是自然数}中是数环的有(　　)

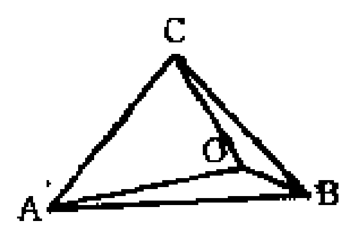
(A) 6个．(B) 5个．(C) 4个．(D) 3个．(E) 1个．

二、填空题（32分）

1．(10分)有九个袋子分别装球9、12、14、16、18、21、24、25、28只．甲取走若干袋，乙取走若干袋，最后只剩下一袋．已知甲取走的球数是乙的两倍，剩下的一袋内装球____只．

2．(10分)如左下图，在直角$\triangle ABC$中，CE为直角C的平分线，且$CE+BC=AC$，那么$\frac{AC}{BC}$的值是______．





3．(12分)如右上图，在$\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\angle ACB=80^\circ$，O为$\triangle ABC$内的一点，已知$\angle OAB=10^\circ$，$\angle ABO=30^\circ$，则$\angle ACO=$______．

三、解方程(12分)：

$$x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=16.$$

四、(16分)

1．n为自然数，证明：

$n^4+4=[(n-1)^2+1]\cdot[(n+1)^2+1]$．

2．利用或不利用上式，计算下式的值：

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(19^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(20^4+\frac{1}{4}\right)}.$$

五、(20分) 在平面内有四个不同位置的点，其中任何两点之间的距离仅取两个不同的长度。试确定满足上述条件的四个点所有可能构成的图形。并写出这时所取的两个长度中，较大的与较小的比值。(不要求写出论证或计算过程)

1985年上海市初中数学竞赛

一、选择题(本题满分30分，每小题6分)

本题共有5个小题，每一小题答对者得6分，不答者得1分，答错者得0分。

1．设二次方程$x^2+px+q=0$的两根恰为p、q，则pq的值是(　　)

(A) 0。(B) -2。(C) 0或-2。(D) 非上述答案。

2．$x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$ 因式分解后的结果是(　　)

(A) $(y-z)(x+y)(x-z)$。

(B) $(y-z)(x-y)(x+z)$。

(C) $(y+z)(x-y)(x+z)$。

(D) $(y+z)(x+y)(x-z)$。

3．已知只有一个x的值满足方程$(1-\lg^2a)x^2+(3+\lg a)x+2=0$，则实数$a$等于(　　)

(A) $\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$。(B) 10．(C) $\frac{1}{10}$。(D) 非上述答案。

4. 设n为自然数且$n\geq 4$，又设凸n边形中出现锐角的最大个数为M，出现锐角的最小个数为m，则$M+m$的值是(　　)

(A) 3. (B) 4. (C) 大于4的一个自然数.

(D) 不能确定.

5. 以三角形的3个顶点和它内部的7个点，共10个点为顶点，能把原三角形分割成小三角形的个数是(　　)

(A) 11. (B) 15. (C) 19. (D) 不能确定.

二、填充（本题满分40分，每小题8分）

1. 已知n为自然数，且$9n^2+5n+26$的值是两个相邻自然数之积，则$n=$________.

2. 方程$x=(x^2-2)^2-2$的解是________.

3. 已知闹钟每小时慢4分钟，且在3点半时对准，现在正确时间是12点，则经正确时间____分钟，闹钟才指到12点上.

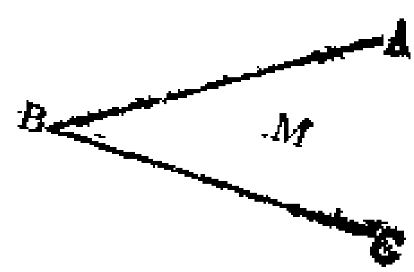
4. 从1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13……99 100中划去100个数字，使剩下的数首位不是0，且数值最小，这个数是________.

5. 设$a<b<c$，则函数$y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$的最小值是____.

三、(本题满分15分)

已知直角三角形的两直角边长分别为l厘米、m厘米，斜边长为n厘米，且l、m、n均为正整数，l为质数，证明$2(l+m+1)$是完全平方数.

四、(本题满分15分，要求作图，写作法并证明) 已知$\angle ABC$和角内一点M，在BC边上求一点N，使它到



边AB和到点M的距离相等。

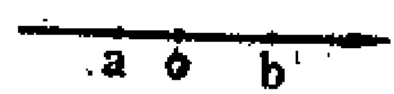
五、(本题满分20分)

在1×2的矩形内不重迭地放两个与大矩形相似的小矩形，且每个小矩形的每条边与大矩形的一条边平行。求两个小矩形周长和的最大值。

1985年"缙云杯"初中数学邀请赛

一、选择题(本题满分60分)

本题共15个小题，每小题填对得4分，填错得0分，不填得1分。



1．有理数a、b在数轴上的对应点见图(其中O为原点)，那么下列四个式子：$a+b$，$b-2a$，$|a-b|$，$|a|-|b|$取负值的总个数是(　　)

(A) 0个．(B) 1个．(C) 2个．(D) 3个．

2．x为任何实数，下列哪个式子有意义？

(A) $\sqrt{-x^2+4x-4}$．(B) $\sqrt{x^2}-x$．(C) $(x-1)^0$．

(D) $\dfrac{x}{2+x}$．

3．$\triangle ABC$为非等边的锐角三角形，O为$\triangle ABC$内一点，且满足$OA=OB=OC$。分别作O点关于BC、CA、AB的对称点A'、B'、C'，以A、B、C、O、A'、B'、C'中任四点作四边形，其中平行四边形有(　　)

(A) 3个．(B) 6个．(C) 9个．(D) 12个．

4. 方程$x^2+3x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{x-1}$的解与方程$x^2+3x=a$的解(　　)

(A) 相同。(B) 不相同。(C) 相同与不相同不确定，而与a的取值有关。(D) 以上结论都不对。

5. 直角三角形有一条直角边的长是质数n，另外两边长是某两个自然数，那么它的周长是(　　)

(A) n^2+1。(B) n^2-1。(C) n^2+n。(D) 以上答案都不对。

6. 若$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$c=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$，则下式中成立的式子是(　　)

(A) $a<b<c$。(B) $b<c<a$。(C) $a<c<b$。

(D) $c<b<a$。

7. 有一个关于未知数x的方程$m^2x+m(1-x)-2(1+x)=0$，其中m为常数。下列说法中哪一个是正确的：

(A) m不得为0，否则方程无解。

(B) 不管m为何值，方程总有唯一的解。

(C) 当m为某一个正数时，方程有无数多解。

(D) 当m为某一个负数时，方程有无数多解。

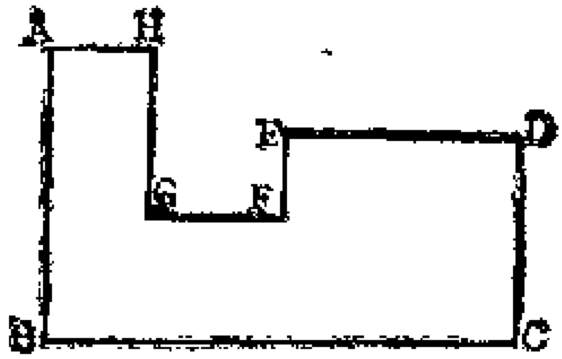
答：(　　)

8. 已知$a+b+c=0$，化简

$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$的答案为(　　)

(A) 1。(B) -1。(C) ±1。(D) 0。

9. 如图，多边形$ABCDEFGH$相邻两边互相垂直，若要求出其周长，那么所需最少边数是(　　)



(A) 3． (B) 4． (C) 5． (D) 6．

10．方程$x|x|-3|x|+2=0$的实根的个数是(　　)

(A) 1个． (B) 2个． (C) 3个． (D) 4个．

11．三辆汽车A、B、C各以一定的速度从甲地开往乙地，B比C迟5分钟出发，出发后20分钟追上C．A比B迟10分钟出发，出发后50分钟追上C．A在出发后追上B的时间是(　　)

(A) 100分钟． (B) 200分钟．

(C) 250分钟． (D) 50分钟．

12．梯形$ABCD$中，$AD /\!/ BC$，$\angle B=40°$，$\angle C=50°$，E、M、F、N分别是AB、BC、CD、DA的中点，且$EF=a$，$MN=b$，则BC为(　　)

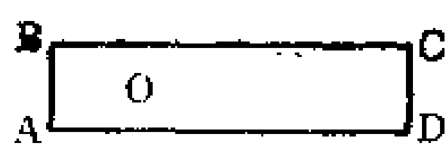
(A) $a+b$。 (B) $a+2b$．

(C) $2a+b$． (D) $2a-b$．

13．在1，2，3，…，101这101个整数中能同时被3与5除都余1的数共有(　　)

(A) 6个。 (B) 7个。

(C) 8个． (D) 9个．



14．如图，矩形$ABCD$中，$AB=CD=2$，$BC=AD=8$，矩形内部有一点O，它与AB、BC、AD的距离都是1，把矩

形$ABCD$绕O点旋转45°，那么旋转后的公共部分的面积是(　　)

(A) $\frac{6\sqrt{2}+1}{2}$. (B) $2(3\sqrt{2}-2)$. (C) $4\frac{3}{4}$.

(D) $4\frac{1}{18}$.

15. 完成同一工作，A独做所需时间为B与C共同工作所需时间的m倍，B独做所需时间为A与C共同工作所需时间的n倍，而C独做所需时间为A与B共同工作所需时间的x倍。则x用m、n表示为(　　)

(A) $\frac{2mn}{m+n}$. (B) $\frac{1}{m+n-mn}$. (C) $\frac{1-mn}{m+n+2mn}$.

(D) $\frac{m+n+2}{mn-1}$.

二、填空题（本题满分60分）。请将下列各题的最后结果填入横线上。

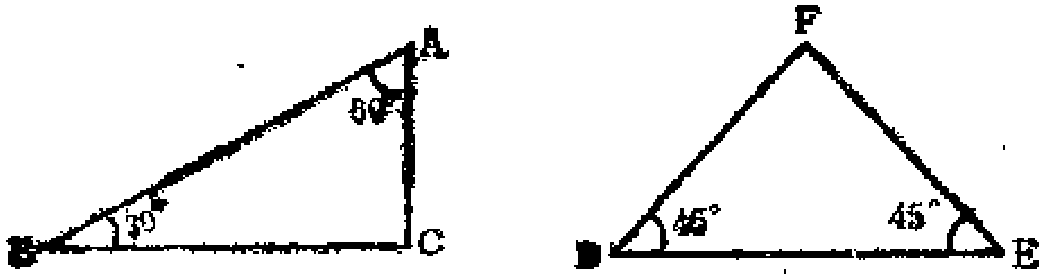
1. 若$(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=$________.

2. 若$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，则$\frac{2x+3xy-2y}{x-y-2xy}$的值为______.

3. 设$x=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，$y=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$（$n$为自然数），则当$n=$____时，代数式$19x^2+123xy+19y^2$的值为1985.

4. 把日常使用的三角板画下来可得直角三角形ABC与直角三角形DEF（如图），如果$BC=DE=\sqrt{6}$，DF的小数部分为a，AC的小数部分为b，则$\frac{a}{(a-b)b}$精确到整数

位的近似值为________。



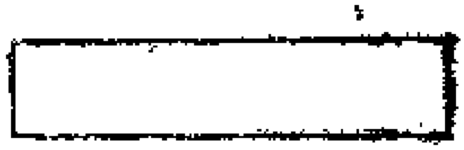
5． 若方程$x^2+px+q=0$与$x^2+qx+p=0$有一个公共根，则$(p+q)^{20}=$________。

6． 假设“$*$”是一种运算符号；任意两数a、b有$a*b=\dfrac{a+2b}{2}$，则方程$3*|x|=2$的解是________。

7． 已知数$\dfrac{1}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$的整数部分为$a$，小数部分为$b$，则$a=$________，$b-\dfrac{4}{b}=$________。

8． 现有一张长5cm、宽1cm的矩形纸，请你将它分成五块，再拼合成一个正方形（通过画图来表示）。

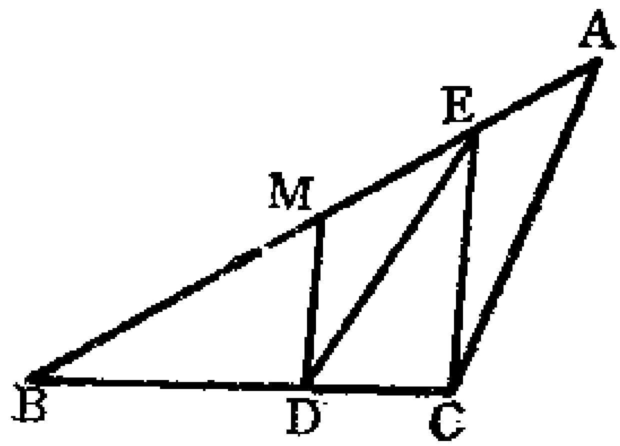
矩形纸的分割法请在下图中示意出来：



正方形的拼合图请画在横线上：

9． 已知x、y、z均为自然数，且$x<y$。当$x+y=1985$，$z-x=9000$时，则$x+y+z$的所有值中，最大的一个是________。

10． 如下图，在钝角$\triangle ABC$中，$AM=BM$，$MD\perp BC$，



$EC\perp BC$，若$\triangle ABC$的面积是24，则$\triangle BED$的面积是_______。

11．设$x=\sqrt{3}+1$，则多项式$x^3-(2+\sqrt{3})x^2+(1+2\sqrt{3})x-\sqrt{3}+5$的值为_______。

12．一对角线长为$\sqrt{6}$的矩形，它的宽是长的小数部分，那么此矩形的长是____，宽是_______。

13．设等腰梯形的大底等于对角线，而小底等于高，则小底对大底的比为_______。

14．已知方程$\frac{3x+2a}{x+b}=x$（其中a、b为实数），有两个绝对值相等符号相反的实根，则a、b可取值的范围为______。

解　　答

1986年全国初中数学联赛

一、填空题

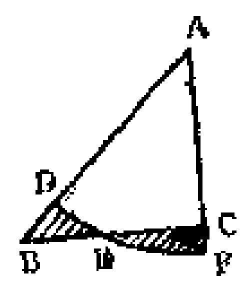
1．解：设 x^2+px+q 的二根为 a，$2a$。

则 $3a=-p$，且 $2a^2=q$。

消去 a 得　$\underline{2p^2=9q}$。

2．解：设 $AC=BC=1$，则 $AB=\sqrt{2}$。

∵　$S_{\triangle ABC}=S_{扇形ADF}$，∴ $\frac{\pi}{8}AD^2=\frac{1}{2}$，



即 $AD=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$，

又　$$\frac{AD}{DB}=\frac{AD}{AB-AD}=\frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}-2}$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}+2}{\pi-2},$$

故　$AD:DB=\underline{(\sqrt{2\pi}+2):(\pi-2)}$。

3．解：任取自然数P，魔术数为N，设N为m 位数，并将接写后的数记作$\overline{PN}$，

则　$\overline{PN}=P\times N^m+N$。

∵　$\overline{PN}$能被N整除$\Longrightarrow P\times 10^m$能被$N$整除，

3. N为魔术数的条件是10^m能被N整除。

当 $m=1$ 时，$N=1, 2, 5$；

当 $m=2$ 时，$N=10$，20，25，50；

当 $m=3$，且 $N<130$时，$N=100$，125。

故小于 130 的魔术数有九个。

4. 解：$m\cdot n=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

或$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$。

5. 解：∵ $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}$

$$=4-\sqrt{3},$$

∴ $(x-4)^2=3$，即 $x^2-8x+13=0$。

因分式的分子除以 $x^2-8x+13$ 后余 10，分式的分母除以 $x^2-8x+13$ 后余 2，故原式的值为5。

另解：$x^4-6x^3-2x^2+18x+23$

$$=x^2(x^2-8x+13+2x-16)+x^2-8x$$
$$+13+26x+10$$
$$=2x^2(x-8)+26x+10$$
$$=2(4-\sqrt{3})^2(4-\sqrt{3}-8)+26(4-\sqrt{3})$$
$$+10=10,$$

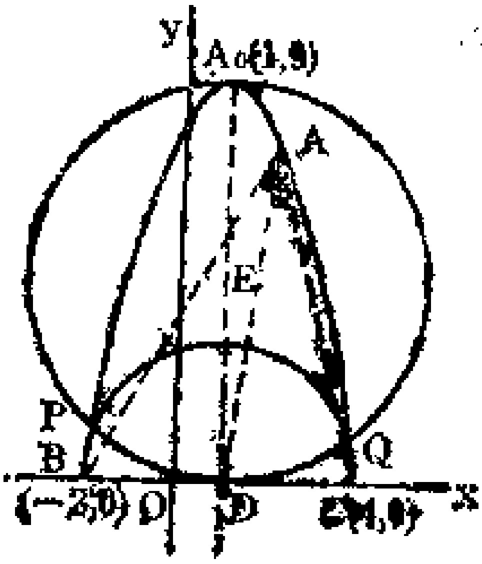
$x^2-8x+15=x^2-8x+13+2=0+2=2$，

故原式的值为5。

6. 解：显然抛物线 $y=-x^2+2x+8$ 的顶点是 $A_0(1, 9)$，对称轴为 $x=1$。

∵ 抛物线交 x 轴于点 $B(-2, 0)$、$C(4, 0)$，且过点 $P(1-2\sqrt{2}, 1)$、$Q(1+2\sqrt{2}, 1)$。

∴ 分别以BC、DA_0为直径作⊙D、⊙E，两圆与抛物线交于P、Q两点(如图)。



∵ 直径所张的圆周角为直角，圆外角为锐角，圆内角为钝角，

∴ 点A在不含端点P、Q的抛物线$\overset{\frown}{PAQ}$内时，

$\angle BAC<90^\circ$（因$\angle BAC$为$\odot D$的圆外角）。

又 $DP=DQ=3, DA_0=9$，

故 $\underline{3<AD\leqslant 9}$。

二、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	C	B	A	C	D

1．解：$\log_x a=a \Rightarrow x^a=a \Rightarrow \lg x=\dfrac{\lg a}{a}$，

故 $x=10^{\frac{\lg a}{a}}$.

2．解：$-(x+a)^3(x+b)\geqslant 0 \Rightarrow (x+a)(x+b)\leqslant 0$，

又 $a<b \Rightarrow -b\leqslant x\leqslant -a \Rightarrow x+a\leqslant 0$，$x+b\geqslant 0$，

故原式$=|x+a|\sqrt{-(x+a)(x+b)}$

$=-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$。

3．解：∵ 当$a=0$时，方程$||x-2|-1|=0$，

有$x=1, 3$两解，故A应排除。

∵ 当$a=1$时，$||x-2|-1|\Rightarrow |x-2|=2$或$|x-2|=0$，

∴ 有$x=0$，2，4三个解。

因 A、B、C、D 中只有一个正确，

故应选择 B。

4．解：∵ n 为正整数，

$$\therefore\quad n+1<\sqrt{(n+1)(n+2)}<n+2.$$

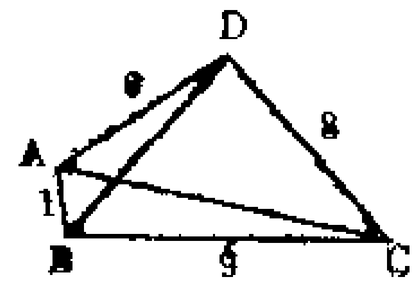
$$[\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}]=[\sqrt{(n+1)(n+2)}]$$

$$=n+1,$$

故 $I=(n+1)^2+n-[\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}]^2$

$$=(n+1)^2+n-(n+1)^2$$

$$=n>0.$$



5．解：(1)若④真，则由 $\angle ADC=90^\circ\Rightarrow AC=10$，

$\angle ADC>90^\circ\Longrightarrow AC>10$；

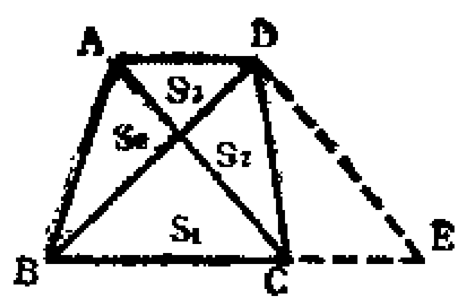
∴ $\angle ADC\geqslant 90^\circ\Longrightarrow AC\geqslant 10$，但在$\triangle ABC$中，$AC<AB+BC=10$，产生矛盾，故④假。

(2) 若③假，则对角线互相垂直 $\Rightarrow AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$，但 $1^2+8^2\neq 6^2+9^2$，产生矛盾，故③真。

由④假或③真皆可判定A、D不成立。

(3) ∵ $BD<AD+AB=6+1=7$，$BC=9$，$CD=8$，∴ $\triangle BCD$ 不是等腰三角形，故⑤假。

综上可定选择(C)。



6．解：如图，延长BC至E，使 $CE=AD$，则 $S_{\triangle BDE}=S$。因为相似三角形面积之比等于对应边的平方之比，所以

$$\frac{AD}{BC}=\frac{BE}{BC}-1=\sqrt{\frac{S}{S_1}}-1.\ \left(\text{同理：}\frac{BC}{AD}=\sqrt{\frac{S}{S_3}}-1\right).$$

显然 $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OCD}=S_2$， $\frac{AD}{BC}=\frac{S_2+S_3}{S_1+S_2}=\frac{S}{S_1+S_2}-1$，

故①，②都是正确的。

又∵ $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_2}{S_3}=\frac{OB}{OD}$， ∴ $S_1S_3=S_2^2$。

$$\frac{S_1}{S}\cdot\frac{S_3}{S}=\left(\frac{S_2}{S}\right)^2\Rightarrow\sqrt{\frac{S_1}{S}}\cdot\sqrt{\frac{S_3}{S}}=\frac{S_2}{S}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{BC}{BC+AD}\cdot\frac{AD}{BC+AD}=\frac{S_2}{S}\Rightarrow\frac{BC\cdot AD}{(BC+AD)^2}=\frac{S_2}{S}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{AD}{BC}}{\left(1+\frac{AD}{BC}\right)^2}=\frac{S_2}{S}.$$

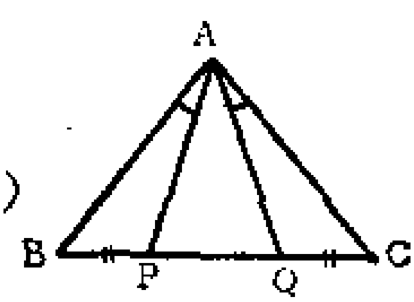
解得 $\frac{AD}{BC}=\left(1-\frac{2S_2}{S}-\sqrt{1-\frac{4S_2}{S}}\right)\Big/\frac{2S_2}{S}$，

因而③也正确，故应选择D。

三、答：当$\angle BAP=\angle CAQ$时，$\triangle ABC$为等腰三角形。

设$\angle BAP=\alpha$，则$\angle CAQ=\alpha$。

证法一：如图，∵ $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ACQ}$，即$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACQ}}=1$。



∴ $\frac{AB\cdot AP\cdot\sin\alpha}{AC\cdot AQ\cdot\sin\alpha}=\frac{AB\cdot AP}{AC\cdot AQ}=1$，

故 $AB\cdot AP=AC\cdot AQ$ （1）

同理，∵ $S_{\triangle BAQ}=S_{\triangle CAP}$，

∴ $AB\cdot AQ=AC\cdot AP$ （2）

(1)×(2) 得 $AB^2=AC^2$，故 $AB=AC$。

证法二：(反证法)假设 $AB\neq AC$，不妨设$AB>AC$，则

$\angle B<\angle C\Rightarrow\angle QPA<\angle AQP\Rightarrow AP>AQ$　　　　(1)

$$\frac{AP}{\sin B}=\frac{BP}{\sin\alpha}=\frac{QC}{\sin\alpha}=\frac{AQ}{\sin C}\Rightarrow\frac{AP}{AQ}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB},$$

从而 $AP\cdot AB=AC\cdot AQ$。

又 $\because$ $AB>AC$，$\therefore$ $AP<AQ$　　　　(2)

于是(1)、(2)两式矛盾，故$AB=AC$。

证法三：由正弦定理，在$\triangle ABP$和$\triangle ACQ$中，

$$\frac{AB}{\sin\angle BPA}=\frac{BP}{\sin\alpha}=\frac{CQ}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\angle AQC}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\angle BPA}{\sin\angle AQC}.$$

在$\triangle ABQ$和$\triangle APC$中，

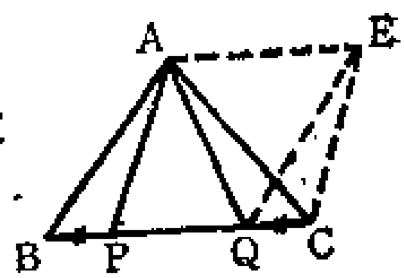
$$\frac{AB}{\sin\angle AQB}=\frac{BQ}{\sin\angle BAQ}=\frac{PC}{\sin\angle PAC}=\frac{AC}{\sin\angle APC}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\angle AQB}{\sin\angle APC}.$$

$\because$　$\sin\angle BPA=\sin\angle APC$,

　　$\sin\angle AQC=\sin\angle AQB$,

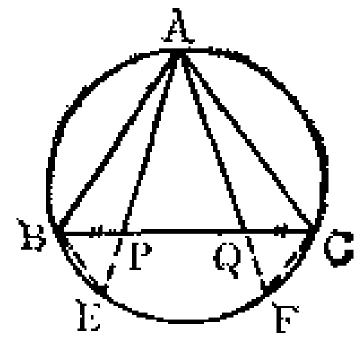
$\therefore$　$\dfrac{AB^2}{AC^2}=1$，故 $AB=AC$。



证法四：如图，过A作$AE\parallel BC$，过C作$CE\parallel AP$，交点为E，连结QE，$APCE$为平行四边形。

显然，$\triangle ABP\cong\triangle EQC\Rightarrow AB=EQ\Rightarrow ABQE$为平行四边形$\Rightarrow\angle ECA=\angle PAC=\angle BAQ=\angle AQE\Rightarrow A$、$Q$、$C$、$E$四点共圆$\Rightarrow\angle ACQ=\angle AEQ=\angle ABC\Rightarrow AB=AC$。

证法五：如图，作$\triangle ABC$的外接圆，延长AP、AQ分别交外接圆于E、F，连结BE、CF。



$\because\ \angle BAE=\angle CAF$，

$\therefore\ BE=FC$，$\angle EBC=\angle FCB$，又 $BP=QC$，$\therefore\ \triangle BEP\cong\triangle QFC\Rightarrow\angle AEB=\angle AFC$，

故 $AB=AC$。

四、证明：

第一步先证三数均能被 2 整除。

$\because\ a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2)$，

$b^3c-bc^3=bc(b^2-c^2)$，

$c^3a-ca^3=ca(c^2-a^2)$。

$\therefore$ 在 a，b，c 中至少有一个偶数或者都是奇数时，这三个数：a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3 都是偶数，即都能被2整除。

第二步再证三数中至少有一个能被 5 整除。

当 a、b、c 中，若有一个能被 5 整除，则结论成立。

如果 a、b、c 都不能被 5 整除，则 a^2，b^2，c^2 的个位数只能是1，4，6，9。从而a^2-b^2，b^2-c^2，c^2-a^2 的个位数是从 1、4、6、9 中，任取三个（可以重复取）两两相减之差，因为这些差中必有 0 或±5，所以 a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ac^3 三个数中至少有一个能被 5 整除。

由于 2、5 互质，故这三个数中至少有一个能被10整除。

1987年全国初中数学联赛

第一试

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	D	D	C	B	B

1. 解．显然，a，b，c 全不为零，由 $a+b+c=0$ 得

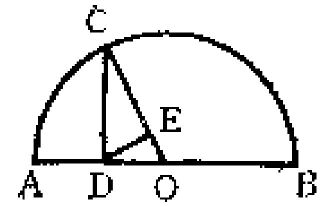
$0=(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$．

因 $a^2+b^2+c^2>0$，所以 $ab+bc+ca<0$．

于是 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{ab+bc+ca}{8}<0$．

2. 解：容易证明，线段BC上的每一个点到A，B，C，D四点的距离之和都等于 $AD+BC$．这是平面上任何一点到A，B，C，D 的距离之和中的最小者，所以(D)正确．

3. 解：因为AD，BD和CD的长都是有理数，所以$OA=OB=OC=\frac{AD+BD}{2}$是有理数．于是$OD=OA-AD$是有理数．由此 $OE=\frac{OD^2}{OC}$，$DE=\frac{DC\cdot DO}{OC}$都是有理数．$CE=OC-OE$，$AB=AD+DB$ 也是有理数．所以甲、乙、丙都是正确的，故(D)正确．

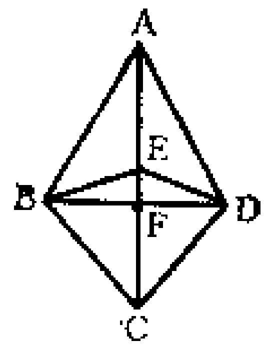


4. 解：设 x 是方程的负根，则$-x=ax+1$，由此 $x=$

$\frac{-1}{a+1}<0$，所以$a+1>0$，$a>-1$. 显然，$a>-1$时，方程有负根.

假设方程有一个正根x，则$x=ax+1$. 由此$(1-a)x=1$，$x=\frac{1}{1-a}>0$，所以$a<1$.

由上可知，方程有一个负根而且没有正根的条件是$a>-1$成立而且$a<1$不成立，所以$a\geqslant 1$. 故(C)正确.



5. 解：如果$ABCD$是以AC为对称轴的凹四边形，易见AC的中点具有题中E点所要求的性质. 所以甲、丙都不正确.

设AE、BE、CE、DE将四边形$ABCD$分成四个面积相等的三角形. 由$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADE}$得$B$、$D$到直线$AE$的距离相等，设直线$BD$，$AE$交于$F$，则$F$是$BD$的中点，即$E$在直线$AF$上.

如果F与E重合，则E是BD的中点，乙成立. 如果F与E不重合，同理，由$S_{\triangle BEC}=S_{\triangle DEC}$得$E$在直线$CF$上，也就是说$A$、$C$都在直线$EF$上，所以$A$、$E$、$F$、$C$在一条直线上. 再由$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BEC}$得$AE=EC$. 所以$E$是$AC$的中点，乙成立. 故(B)正确.

6. 解：这个数是

$$1234\cdots9101112\cdots99100101102.$$

因为$1+2+\cdots+9$能被9整除，$1+0+1+1+1+2+\cdots+9+9$也能被9整除，所以这个数被9除的余数是$1+0+0+1+0+1+1+0+2=6$. 所以(B)正确.

二、填空题

1． 解：设满足条件的三角形的三边长分别是$n-1$，n，$n+1$，则

$$\begin{cases}(n-1)+n+(n+1)\leqslant 100,\\(n-1)+n>n+1\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}n\leqslant 33\\n>2\end{cases}.$$

所以$n=3$，4，…，33，$n=3$时，$2^2+3^2<4^2$，三角形是钝角三角形；$n=4$时，$3^2+4^2=5^2$，三角形是直角三角形；$n\geqslant 5$时，$(n-1)^2+n^2-(n+1)^2=n^2-4n=n(n-4)>0$，三角形是锐角三角形。所以满足条件的锐角三角形的个数是<u>29</u>。

2． 解：由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$。于是$\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{ac+c^2+ab+b^2}{a^2+ab+ac+bc}=\dfrac{ab+ac+b^2+c^2}{ab+ac+b^2+c^2}=\underline{1}$。

3． 解：令$2x-\dfrac{1}{2}=t$，t表整数，则有$x=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}$，

所以$3x+1=\dfrac{3}{2}t+\dfrac{7}{4}$。故

$$0\leqslant\left(\frac{3}{2}t+\frac{7}{4}\right)-t<1,$$

即
$$-\frac{7}{2}\leqslant t<-\frac{3}{2},\ \text{所以}\ t=-2,\ -3.$$

当$t=-2$时，$x=-\dfrac{3}{4}$，$t=-3$时，$x=-\dfrac{5}{4}$。所以所有根之和是$\underline{-2}$。

4． 解：因为$50=7\times 7+1$。由抽屉原则，从1，2，…，98中任取50个不同的数，必有8个数被7除所得的余数相

同。设余数为 r。又因为 $98=14\times7$，所以在1，2，…，98中恰有14个数被7除余数为 r。这14个数中任意8个不同的数，必有两数之差等于7。即98具有题中的性质。

另一方面，在1，2，…，99中可取出下列50个数：1，2，…，7，15，16，…，21，29，30，…，35，43，44，…，49，57，58，…，63，71，72，…，77，85，86，…，91，99。它们中任何两数之差都不是7。所以99没有题中的性质。因此这样的 n 最大的一个是98。

5．解：首先，x 的万位数字显然是2，从而 y 的万位数字必是5；其次 x 的千位数字必大于5，但百位数字乘2后至多进1到千位，这样千位数字只能是9，依此类推得到 x 的前四位数字是2，9，9，9。x 的个位数字只能是1，3，5，7，9。经检验，x 的个位数字只能是5。所以 x 是29995。

第二试

一、解：因为方程有实根，所以判别式

$$\begin{aligned}\triangle&=4[(1+a)^2-(3a^2+4ab+4b^2+2)]\\&=4(-1+2a-2a^2-4ab-4b^2)\\&=-4[(1-2a+a^2)+(a^2+4ab+4b^2)]\\&=-4[(1-a)^2+(a+2b)^2]\geqslant0.\end{aligned}$$

因为 $\qquad -4[(1-a)^2+(a+2b)^2]\leqslant0,$

所以 $\qquad -4[(1-a)^2+(a+2b)^2]=0,$

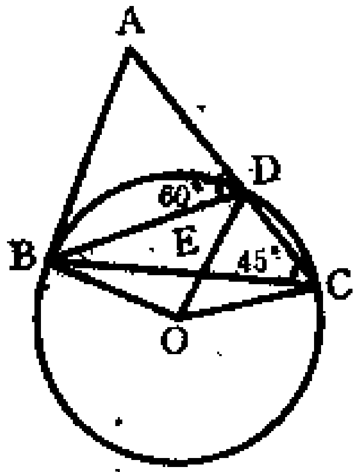
即 $\qquad 1-a=0$ 且 $a+2b=0,$

得 $\qquad a=1,\quad b=-\dfrac{1}{2}.$

因此，当 $a=1$，$b=-\frac{1}{2}$ 时方程有实数根。

二、证一：作 $\triangle BCD$ 的外接圆，设圆心为 O，连 OB、OC、OD，OD 与 BC 相交于 E。

因为 $\angle DCB$ 是 $\overset{\frown}{BD}$ 上的圆周角，$\angle BOD$ 是 $\overset{\frown}{BD}$ 所对的圆心角，$\angle BCD=45^\circ$，所以 $\angle BOD=90^\circ$，同理，因为

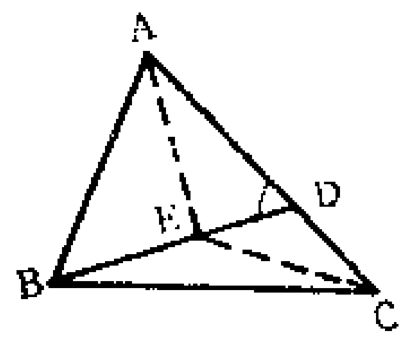


$\angle DBC=\angle ADB-\angle ACB=15^\circ$，所以 $\angle DOC=30^\circ$，所以 $\angle BOC=120^\circ$，因为 $BO=OC$，所以 $\angle OBC=\angle OCB$ $=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$。

在 $\triangle OEC$ 中，因为 $\angle EOC=\angle ECO=30^\circ$，所以 $OE=EC$。

在 $\triangle BOE$ 中，因为 $\angle BOE=90^\circ$，$\angle EBO=30^\circ$，所以 $BE=2EO=2EC$。

所以 $\frac{CE}{EB}=\frac{1}{2}=\frac{CD}{DA}$，所以 AB // DO，所以 $\angle ABO=90^\circ$，AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线。



证二：过 A 作 $AE\perp BD$ 交 BD 于 E，连 EC。在 $\triangle ADE$ 中，$\angle AED=90^\circ$，$\angle ADE=60^\circ$，所以 $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}AD=\sqrt{3}DC$，$DE=\frac{1}{2}AD=DC$。所以 $\triangle EDC$ 是等腰三角形。

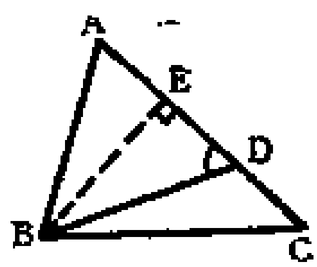
因为 $\angle EDC=180^\circ-\angle ADB=120^\circ$，所以 $\angle DCE=30^\circ$，$EC=2DC\cos30^\circ=\sqrt{3}DC=AE$，$\angle ECB=\angle DCB-\angle DCE=15^\circ$。

因为 $\angle DBC=\angle ADB-\angle ACB=15^\circ$，所以 $BE=EC=AE$。所以 $\triangle AEB$ 是等腰直角三角形，$\angle ABE=45^\circ=\angle ACB$。由弦切角定理，$AB$是$\triangle BCD$的外接圆的切线。

证三：不妨设$AD=2$，$DC=1$。作$BE\perp AC$交AC于E。设$ED=x$。

因为$\angle EDB=60^\circ$，所以$BE=\sqrt{3}x$。又因为$\angle ECB=45^\circ$，所以$BE=EC=1+x$。

所以$1+x=\sqrt{3}x$，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$。



在$\triangle ABE$中，$BE=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$，

$AE=AD-ED=2-x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，

$\angle AEB=90^\circ$，所以

$$AB^2=AE^2+BE^2=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2=6$$
$$=AD\cdot AC。$$

由切割线定理，AB是$\triangle BCD$的外接圆的切线。

三、证：易见

$$p=\underbrace{11\cdots11}_{n个}(10^{3n}+9\times10^{2n}+8\times10^{n}+7)，$$

因为$\underbrace{11\cdots11}_{n个}$能被1987整除，所以$p$能被1987整除。

类似地，

$$q=\underbrace{11\cdots11}_{n+1\text{个}}(10^{3(n+1)}+9\times10^{2(n+1)}+8\times10^{n+1}+7).$$

由 $$10^n=9\times\underbrace{11\cdots11}_{n\text{个}}+1,$$

$$10^{3(n+1)}=(10^n)^3\times10^3$$

$$10^{2(n+1)}=(10^n)^2\times10^2$$

$$10^{n+1}=10^n\times10.$$

得$10^{3(n+1)}$，$10^{2(n+1)}$，10^{n+1}被$\underbrace{11\cdots11}_{n\text{个}}$除的余数分别是1000，100，10。于是$q$的表达式中括号内的数被$\underbrace{11\cdots11}_{n\text{个}}$除余1987。所以$q$能被1987整除。

1988年全国初中数学联赛

第一试

一、选择题

题号	1	2	3	4
答案	A	D	C	A

1．解：$\because 0<\cos45^\circ<1$，$0<\sin48^\circ<1$，

$\therefore$ $\sin48^\circ+\cos48^\circ<\dfrac{\sin48^\circ}{\cos48^\circ}+\dfrac{\cos48^\circ}{\sin48^\circ}=\operatorname{tg}48^\circ+\operatorname{ctg}48^\circ$，$\operatorname{tg}48^\circ+\cos48^\circ<\operatorname{tg}48^\circ+\dfrac{\cos48^\circ}{\sin48^\circ}=\operatorname{tg}48^\circ+\operatorname{ctg}48^\circ$，

$$\operatorname{ctg}48^\circ+\sin 48^\circ<\operatorname{ctg}48^\circ+\frac{\sin 48^\circ}{\cos 48^\circ}$$

$$=\operatorname{ctg}48^\circ+\operatorname{tg}48^\circ.$$

所以最大的是$\operatorname{tg}48^\circ+\operatorname{ctg}48^\circ$。

2、解：要使两个根式都有意义，必须

$$(a-2)(|a|-1)\geqslant 0,\ 且(a-2)(1-|a|)\geqslant 0.$$

但是 $(a-2)(1-|a|)=-(a-2)(|a|-1)$，

所以只能是$(a-2)(|a|-1)=0$，

解得 $a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=-1$。

若 $a_1=2$，则 $1+\dfrac{1}{1-a}=0$，

若 $a_2=1$，则 $1-a=0$，均使分母为零。

因而仅有 $a_3=-1$ 合用。

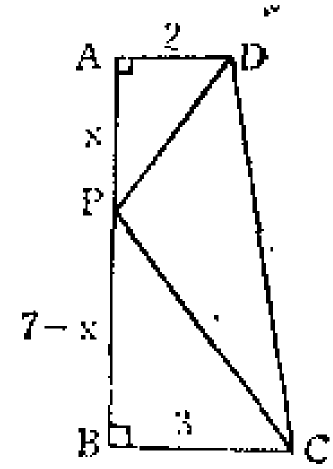
此时，$x=\left(\dfrac{5\times(-1)+1}{1-(-1)}\right)^{1988}=(-2)^{1988}=2^{4\times 497}$

$$=16^{497},$$

故 x 的个位数字是6。

3．解法一：如图，设 $AP=x$，则 $PB=7-x$。

（1） 如果$\triangle PAD\backsim\triangle PBC$，



则 $\dfrac{x}{7-x}=\dfrac{2}{3}$，故 $x=\dfrac{14}{5}<7$

符合条件。

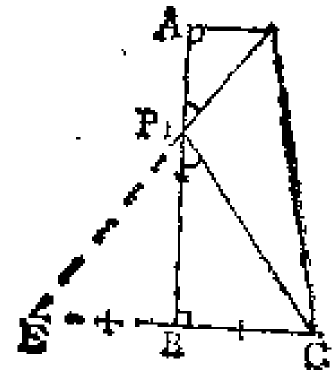
（2） 如果 $\triangle PAD\backsim CBP$，则

$\dfrac{x}{3}=\dfrac{2}{7-x}$.

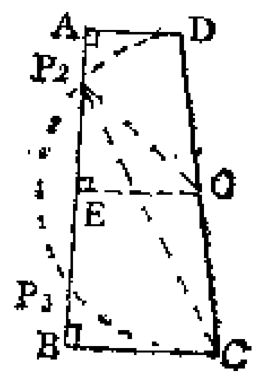
故 $x_1=1$，$x_2=6$，也都符合条件。

因此满足条件的点P有3个。

解法二：（1）如图，延长CB到E，使$BE=CB$。连接DE交AB于P_1。易证$\triangle P_1AD\backsim\triangle P_1BE\cong\triangle P_1BC$，故$P_1$符合条件。



（2）如图，易知：中位线$OE=\frac{5}{2}$，$CD=\sqrt{7^2+(3-2)^2}=5\sqrt{2}$。因此，以$CD$的中点$O$为圆心，以$OD=\frac{5\sqrt{2}}{2}\left(>\frac{5}{2}\right)$为半径的圆，必和直径$AB$交于两点，记为$P_2$和$P_3$。又由$EP_2=EP_3=\sqrt{OP_2^2-OE^2}=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}<\frac{7}{2}=EA$



知：P_2和P_3落在线段AB上。

易证：$\triangle P_2AD\backsim\triangle CBP_2$，$\triangle P_3AD\backsim\triangle CBP_3$，故$P_2$和$P_3$也都符合条件。

以下证明：P_1必不与P_2(同理，P_3)重合。假若不然，应有$\angle BP_1C=\angle AP_1D=BCP_1=45^\circ$。

$\triangle P_1AD$和$\triangle P_1BC$都是等腰直角三角形。而

$AB=AP_1+P_1B=AD+BC=2+3=5$与$AB=7$矛盾。

综上所述，满足条件的点P共有三个。

4．解：对于(1)、(2)、(4)可分别给出反例。例如，

（1）如图一中的四边形$ABCD$，其中$\triangle ABD\cong\triangle CDE$。

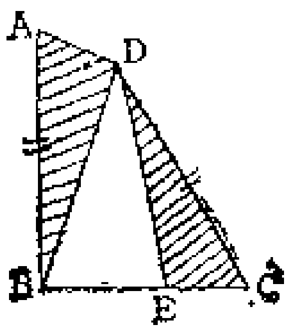


图　一

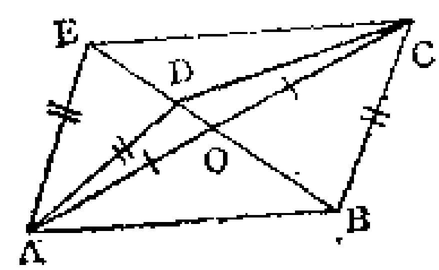


图　二

（2）　如图二，作等腰$\triangle ADE$，延长底边ED至任意点O，以O为对角线的交点可作出平行四边形$ABCE$。而此时的四边形$ABCD$满足条件$AD(=AE)=BC$，且$AO=CO$，但不是平行四边形。

（3）　如图三中的四边形$ABCD$，其中，B、D是AC的垂直平分线上的任意两点。

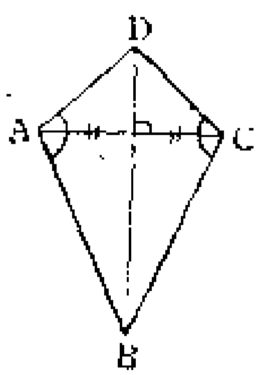


图　三

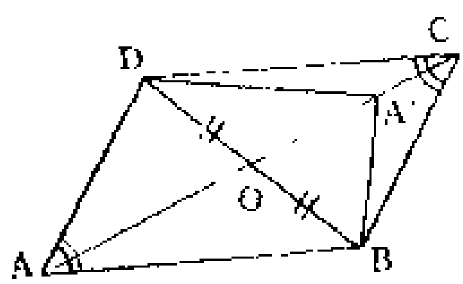


图　四

以下证明命题(3)是正确的。

如图四，已知$\angle BAD=\angle DCB$，且$OB=OD$。以O为中心，将$\triangle ABD$逆时针旋转180°，由于$OB=OD$，所以D与B重合，B与D重合，点A与射线OC上的某点A'重合。如果A'不是C，则$\angle BA'D>\angle BCD$（A'在线段OC上），或$\angle BA'D<\angle BCD$（A'在OC的延长线上），都与$\angle BA'D=$

$\angle BAD=\angle BCD$矛盾。从而A'即是C，即$OA=OA'=OC$，故四边形$ABCD$是平行四边形。

综上所述，仅有命题(3)正确。

二、填空题

1． 解：由条件知，$3p$ 和 $5q$ 中必有一个是偶数而另一个是奇数。

若$3p$是偶数，则只有$p=2$，从而$q=5$，这时

$$\log_2\frac{p}{3q+1}=\log_2\frac{2}{3\times5+1}=\log_2\frac{1}{8}=-3,$$

若$5q$是偶数，则只有$q=2$，从而$p=7$。这时$\log_2\frac{p}{3q+1}$

$$=\log_2\frac{7}{3\times2+1}=\log_2 1=0.$$

故 $\log_2\frac{p}{3q+1}$的值是$\underline{-3或0}$。

2． 解：利用公式$S=\frac{1}{2}ab\sin C$和$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$。易知，三个阴影三角形的面积都分别等于$\triangle ABC$的面积。因此，三个阴影部分面积的和为

$$3\times\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\angle BAC=9\sin\angle BAC\leqslant9.$$

当$\angle BAC=90^\circ$时，等号成立，故三个阴影部分面积的和的最大值是$\underline{9}$。

3． 解：由条件等式的对称性，不妨设

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5.$$

由 $1=\frac{1}{x_2x_3x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_3x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_2x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_2x_3x_5}$

$$+\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}\leqslant\frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_4}$$

$$=\frac{3+x_4+x_5}{x_4x_5}.$$

得 $$x_4x_5\leqslant 3+x_4+x_5,$$

$\therefore\quad (x_4-1)(x_5-1)\leqslant 4.$

若 $x_4=1$，则 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$，这时，题设等式成为 $4+x_5=x_5$，矛盾。

若 $x_4>1$，则 $x_5-1\leqslant 4$，即 $x_5\leqslant 5$。

当 $x_5=5$ 时，容易找到满足条件的解组：(1，1，1，2，5)，故 x_5 的最大值是5。

4．解：设 $EC=x$，$BE=y$，$ED=z$，由 $\triangle DCE\backsim\triangle ACD$ 得：$\frac{CD}{CA}=\frac{EC}{DC}$，即 $\frac{4}{6+x}=\frac{x}{4}$。解得 $x=2$($x=-8$ 不合题意)。

又由 $AE\cdot EC=BE\cdot ED$，得 $yz=6\times 2=12$。但在 $\triangle BCD$ 中，又可得 $y+z<4+4=8$。从而，只能求出正整数解组

$\begin{cases}y=3\\z=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=4\\z=3\end{cases}$，此时都有 $BD=y+z=7$。

第二试

一、解：首先求出积中含有因数5的个数。数组中，10，25，40，55，…，700。均含有因数5。这一组数共有$(700-10)\div 15+1=47$个。

如果每一个数各计一个5，共47个5。

但是，其中25，100，175，…，700还有第二个因数5，这些数计有(700－25)÷75＋1＝10个。因此，应该再添上10个5。

类似地，250，625还含有第三个因数5，625还含有第四个因数5。

这样，积中因数5的个数为47＋10＋2＋1＝60个。

至于积中因数2的个数显然多于60个，故积的尾部共有60个零。

二、解法一，首先有$p\neq q$。事实上，若$p=q$，则$\frac{2p-1}{q}=\frac{2p-1}{p}=2-\frac{1}{p}$，因$p>1$，$\frac{2p-1}{q}$不是整数，与题设矛盾。

由对称性，不妨设$p>q$。令$\frac{2q-1}{p}=m$，则m为正整数。

$\because\ mp=2q-1<2p-1<2p$，$\therefore m=1$。

这样$p=2q-1$。

据此，$\frac{2p-1}{q}=\frac{4q-3}{q}=4-\frac{3}{q}$。但$\frac{2p-1}{q}$也是正整数，且$q>1$，$\therefore q=3$。于是，$p=2q-1=5$，$\therefore p+q=8$。

解法二，如解法一的讨论，知$p\neq q$。

不妨设$p>q$，令$\frac{2p-1}{q}=m$　　(1)

$$\frac{2q-1}{p}=n \tag{2}$$

则m、n都是正整数，且易知$m>n$。

由(2)有$q=\frac{np+1}{2}$，将其代入(1)，得

$$2p-1=mq=m\cdot\frac{np+1}{2}.$$

$\therefore\quad (4-mn)p=m+2$。故$4-mn$为正整数。

所以$mn=1$，$mn=2$ 或 $mn=3$。再注意到 $m>n$，因而仅有：$\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}m=3\\n=1\end{cases}$。

当$m=2$，$n=1$时，由(1)、(2)解得$p=2$，$q=\frac{3}{2}$，不合题意。

当$m=3$，$n=1$时，由(1)、(2)解得$p=5$，$q=3$。

故　$p+q=8$。

三、证明：首先容易证明，

$\triangle PAB\backsim\triangle Q'CB\backsim\triangle QCD\backsim\triangle R'ED\backsim$

$\triangle REF\backsim\triangle P'AF$

依次记上述六个三角形的面积为S_1，S_1'，S_2，S_2'，S_3，S_3'。容易知道：

$$S_1+S_2+S_3=S_1'+S_2'+S_3'.$$

由$\frac{b_1^2}{a_1^2}=\frac{S_1'}{S_1}$，$\frac{b_2^2}{a_1^2}=\frac{S_2'}{S_1}$，$\frac{b_3^2}{a_1^2}=\frac{S_3'}{S_1}$

得　$\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_1^2}=\frac{S_1'+S_2'+S_3'}{S_1}$，即$\frac{a_1^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$

$$=\frac{S_1}{S_1'+S_2'+S_3'}.$$

同理，$\frac{a_2^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}=\frac{S_2}{S_1'+S_2'+S_3'}$，

$$\frac{a_3^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}=\frac{S_3}{S_1'+S_2'+S_3'}.$$

$$\therefore\quad \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_1'+S_2'+S_3'}=1,$$

故 $\quad a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$。

1989年全国初中数学联赛

第 一 试

一、选择题

题号	1	2	3	4	5
答案	B	D	A	A	C

1．解：

由$\begin{cases}2a+b=7\\a-b=2\end{cases}$得唯一的一组解$\begin{cases}a=3\\b=1.\end{cases}$

2．解：因前一个方程没有实根，则其判别式$\Delta=4(m+2)^2-4m(m+5)<0$，解得$m>4$，后一个方程在$m>4$且$m\neq5$时，其判别式$\Delta=4(m+2)^2-4m(m-5)=36m+16>0$，有两个相异实根，而在$m=5$时，方程为一次方程，有一个实根，因而其实根个数不确定。

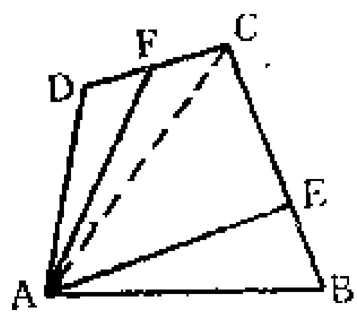
3．解：图象开口向下，则$a<0$；顶点横坐标$0<\dfrac{-b}{2a}<1$，则$b>0$，$2a+b<0$。因而$ab<0$，$2a-b<0$。又当$x=0$时，$y=c<0$，因而$ac>0$，$a-b+c<0$。当$x=1$时，$y=a+b+c>0$。所给6个代数式中只有2个为正。

4．解：无论是这三种情形中哪一种，以这6个点为顶点作出所有不重迭的三角形个数都是7个，即$n_0=n_1=n_2=7$。

5． 解：设编号为i的水管每小时的流量为Q_i（$i=1$，2，3，4，5，$Q_i<0$表示出水）由所列表相邻两栏比较可得：$Q_1>Q_3$，$Q_2<Q_4$，$Q_3<Q_5$，$Q_4>Q_1$，$Q_5<Q_2$，即$Q_4>Q_2>Q_5>Q_3$，$Q_4>Q_1>Q_3$。同时易知Q_i中必有为正的，其中Q_4最大，因而单开编号为④的水管，注满水池的时间最短。

二、填空题

1． 解：连接AC，据三角形面积公式知：



$S_{\triangle AFC}=S_{\triangle ADF}=m$，

则$S_{\triangle ACE}=n-m$，$S_{\triangle ABE}$

$=\frac{1}{2}S_{\triangle ACB}=\frac{n-m}{2}$，

故 $S_{ABCD}=m+n+\frac{n-m}{2}=\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}m$。

2． 解：$225=9\times25$，9与25互质。

一个数的各位数码是0或1，它能被25整除，则它的末尾两位数字都为0；它能被9整除，则它的各位数字之和必为9的倍数，即至少有9个1，因而11111111100满足题意。

3． 解：首数a、c都是正整数，$|1-a|$为非负整数，由已知推得$\sqrt{c-4}$也为非负整数，则有

$$(\text{I})\begin{cases}|1-a|=1\\ \sqrt{c-4}=0\end{cases} \text{或}\ (\text{II})\begin{cases}|1-a|=0\\ \sqrt{c-4}=1\end{cases}.$$

解(I)得$\begin{cases}a=2\\ c=4\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=0\\ c=4\end{cases}$(舍去)；解(II)得$\begin{cases}a=1\\ c=5.\end{cases}$

因而$a+c=6$，$\lg(xy)=\lg x+\lg y=a+b+c+d=7$。

故 $xy=10^7$。

4．解：不妨设$\triangle ABC$中$\angle A=60^\circ$，$b-c=4$，$R=4$，由余弦及正弦定理得

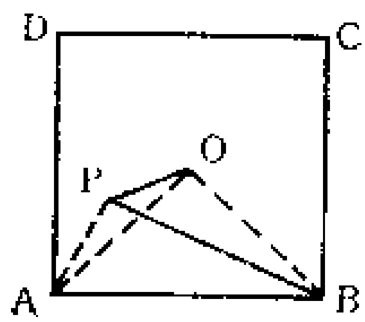
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos60^\circ=(b-c)^2+bc=16+bc$

及　$a=2R\sin\angle A=4\sqrt{3}$．

则　$bc=a^2-16=32$，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=8\sqrt{3}.$$

5．解：连接OA、OB．由$\angle BAO=\angle BPO=45^\circ$知$A$、$B$、$O$、$P$四点共圆，则$\angle APB=\angle AOB=90^\circ$．

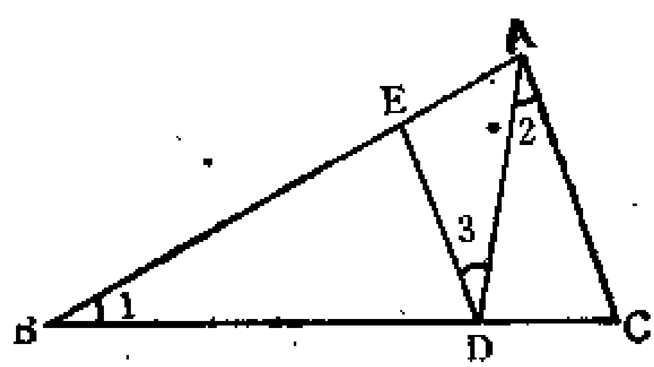


设$PA=5x$，$PB=14x$，则$(5x)^2+(14x)^2=1989$．

解得　$x=3$，则　$PB=42$．

第二试

一、证法1，设$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$．



则　$m=a+b+c$．

$\because\angle1=\angle2=\angle3$，

$\therefore ED\parallel AC$．

得．$\triangle ABC\backsim\triangle EBD\backsim\triangle DAC$．

由　$\triangle DAC\backsim\triangle ABC\Longrightarrow\dfrac{DC}{b}=\dfrac{AD}{C}=\dfrac{AC}{a}=\dfrac{b}{a}$，

$$m_2=DC+AD+AC=\frac{b}{a}(a+b+c).$$

同时 $BD=a-DC=\dfrac{a^2-b^2}{a}$.

由 $\triangle EBD\backsim\triangle ABC\Longrightarrow\dfrac{ED}{b}=\dfrac{BE}{c}=\dfrac{BD}{a}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$.

$m_1=ED+BE+BD=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}(a+b+c)$.

$$\therefore\quad \frac{m_1+m_2}{m}=\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{b}{a}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}$$

$$=-\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}.$$

证法二：设$BC=a$，$AC=b$. $\because\angle1=\angle2=\angle3$，

$ED\parallel AC\Longrightarrow\triangle ABC\backsim\triangle EBD\backsim\triangle DAC$.

则 $\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{AC}{BC}$，即 $DC=\dfrac{b^2}{a}$，

$BD=BC-DC=a-\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{a^2-b^2}{a}$.

因而 $\dfrac{m_1}{m}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$，$\dfrac{m_2}{m}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{b}{a}$.

$$\therefore\quad \frac{m_1+m_2}{m}=\frac{m_1}{m}+\frac{m_2}{m}=\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{b}{a}$$

$$=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}=-\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

$$\leqslant\frac{5}{4}.$$

二、解法一：由已知：$a>1$，$b>1$，$a\neq b$.

(1)的两个根为a、$\dfrac{a+2}{a-1}$，(2)的两个根为b、$\dfrac{b+2}{b-1}$.

$\because\ a\neq b$, $\therefore\ a=\dfrac{b+2}{b-1}$ 或 $b=\dfrac{a+2}{a-1}$。

上两式均得 $ab-a-b-2=0$,

即 $(a-1)(b-1)=3$。

因a、b均为正整数，则有$\begin{cases}a-1=1\\b-1=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-1=3\\b-1=1\end{cases}$。

解得 $\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$。

$$\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=a^bb^a=4^2\cdot 2^4=256.$$

解法二：由条件知$a>1$，$b>1$，$a\neq b$。

设方程(1)、(2)的公共根为x_0，则

$$(a-1)x_0^2-(a^2+2)x_0+(a^2+2a)=0 \qquad (3)$$

$$(b-1)x_0^2-(b^2+2)x_0+(b^2+2b)=0 \qquad (4)$$

将 $(3)\times(b-1)-(4)\times(a-1)$整理得

$$(a-b)(ab-a-b-2)(x_0-1)=0.$$

因 $a\neq b$，则 $x_0=1$ 或 $ab-a-b-2=0$.

若 $x_0=1$代入(3)即推得$a=1$，矛盾.

因而 $x_0\neq 1$，$\therefore$ $ab-a-b-2=0$，即 $ab=a+b+2$。

若 $a>b>1$，则 $b=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{2}{a}<3$，得 $b=2$，$a=4$。

同样，若$b>a>1$，得 $a=2$，$b=4$。

代入所求值的表达式得

$$\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=\frac{2^4+4^2}{2^{-4}+4^{-2}}=\frac{16+16}{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=32\times 8=256.$$

三、(1)证法一：如果这6点中每两点都有线段相连，

共可连15条线段，故由已知条件知这6点中恰有两对点之间无线段相连。

若这两对点有一公共点，不妨设是A_1与A_2，A_2与A_3之间无线段相连，则A_1、A_3、A_5、A_6这四个点符合题意。

若这两对点无公共点，不妨设A_1与A_2，A_3与A_4之间无线段相连，则A_1、A_3、A_5、A_6这4个点符合题意。

证法二：由已知条件知这6个点中至少有2个点（不妨设为A_1、A_2）之间无线段连接（否则，这6个点可连15条线段，与已知矛盾）。因连有13条线段，而A_1、A_2与其余4点的连线至多8条，故A_3、A_4、A_5、A_6之间至少有5条线段连接。

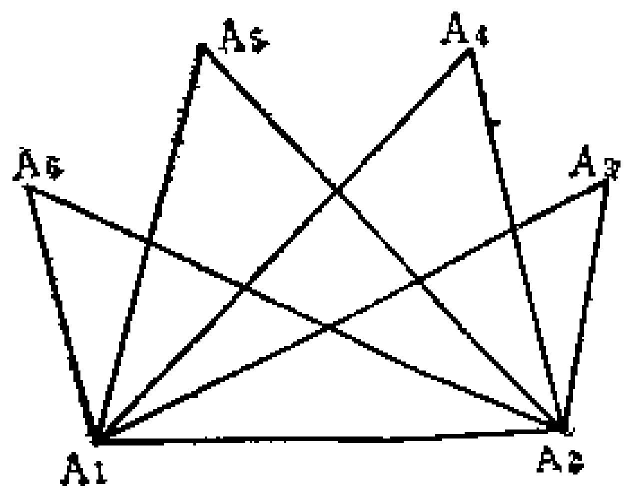
若A_3、A_4、A_5、A_6之间有6条线段相连，则该4点符合题意。

若A_3、A_4、A_5、A_6之间只有5条线段相连，则其中仅有2点（不妨设是A_3、A_4）无线段相连，这时A_1、A_2与其余4点都有线段相连，则A_1、A_3、A_5、A_6这4个点符合题意。

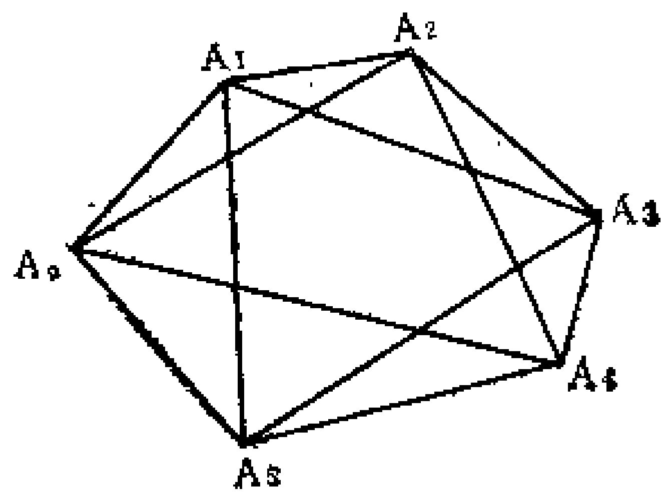
证法三：若某2点（不妨设为A_1、A_2）之间无线段相连（否则，命题显然成立），则与A_1相连的线段至多4条，去掉A_1及与A_1相连的线段，则在其余A_2、A_3、A_4、A_5、A_6这5点之间至少有9条线段相连。若这五点中仍有某2点（不妨设为A_5、A_6）之间无线段相连（否则，命题显然成立），则与A_5相连的线段至多3条；去掉A_5及与A_5相连的线段，则剩下的4个点之间至少有6条线段相连，满足题意。

证法四：若一个点与m条线段相连，我们把这个点称为m元点（$0\leqslant m\leqslant 5$），显然，所有6个点的元数之和为$13\times 2=26$。易知6个点中至少有两个5元点，否则，这6个点的元数之和至多为$5+5\times 4=25<26$，矛盾。不妨设A_1、A_2为5元点，即A_1、A_2都分别连5条线段。如图，这些线段共9条，

于是，A_3、A_4、A_5、A_6之间的连线为13－9＝4条，这4条线段的任一条的两个端点与A_1、A_2这4点，每两点之间都有线段相连。



（2） 例如可用下图说明：



说明：所画图中，若恰有3对点（各不相同）无线段连接，则(1)结论不成立。如图中有A_1，A_4；A_2，A_5；A_6，A_6；这3对点无线段连接。

1986年全国部分省、市初中数学通讯赛

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	*A*	*E*	*C*	*D*	*E*	*D*

1． 解：$\sqrt{29}-\sqrt{21}\approx5.385-4.582=0.803<1$；

$\frac{\pi}{3.142}<1$；$5.1\times\sqrt{0.0361}=5.1\times0.19=0.969<1$；

$\frac{6}{\sqrt{13}+\sqrt{7}}=\sqrt{13}-\sqrt{7}\approx3.60-2.64=0.96<1$。

2. 解：可以逐个验证。

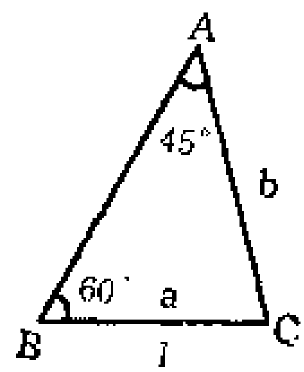
$$\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}=\frac{x^4y^2z^2+x^2y^4z^2+x^2y^2z^4}{x^2y^2z^2}$$

$$=x^2+y^2+z^2.$$

3. 解：令$x=0$，代入$|x+1|+|x|<2$，显然满足，故可排除(A)、(B)、(D)。

令$x=1$，代入以上不等式，显然不满足，故可排除(E)。

4. 解：由正弦定理：



$$\frac{\sin 60^\circ}{b}=\frac{\sin 45^\circ}{1},$$

$$b=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

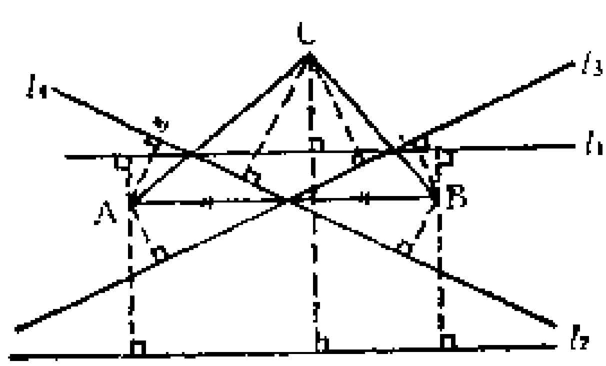
$$S=\frac{1}{2}ab\sin 75^\circ=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{6}}{2}\sin(30^\circ+45^\circ)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}(\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cos 30^\circ)$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{8}.$$

5. 解：见1986年无锡市初中数学竞赛试题解答。

6. 解：以1:1:2为例，其他类推。如图所示。



二、填充题

1．解：∵ $\frac{7}{10}=0.7$，$\frac{11}{15}=0.7\dot{3}$，

∴ 逐个考察：$\frac{1}{2}<0.7$，$\frac{2}{3}<0.7$，

$\frac{3}{4}>0.7\dot{3}$，$\frac{3}{5}<0.7$，$\frac{4}{5}>0.7\dot{3}$，$\frac{4}{6}<0.7$，$\frac{5}{6}>0.7\dot{3}$，

$\frac{4}{7}<0.7$，$\frac{5}{7}\approx0.71$，故 $p=5$，$q=7$，$pq=\underline{35}$。

2．解：可以用3，7，9，11，13，17试除之。1343的质因数是$\underline{17，79}$。

3．解：∵有1250人爱好体育，∴不爱好体育者有150人，其中两者都不爱好的有60人，余下90人为只爱好文娱者，故两者都爱好的为 $952-90=\underline{862}$(名)。

4．解：$b^2-4ac=4(k+3)^2-4(k^2+3)\geqslant0$，

即 $4k^2+24k+36-4k^2-12\geqslant0\Longrightarrow k\geqslant-1$。

$\alpha+\beta=-2(k+3)$，$\alpha\cdot\beta=k^2+3$。

$$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2$$
$$=4(k+3)^2-2(k^2+3)+4(k+3)+2$$
$$=2(k^2+14k+22)$$
$$=2(k+7)^2-54\geqslant\underline{18}\ (\because k\geqslant-1)。$$

5．解：∵$\lg2^{1986}=1986\lg2=1986\times0.3010=597.786$，

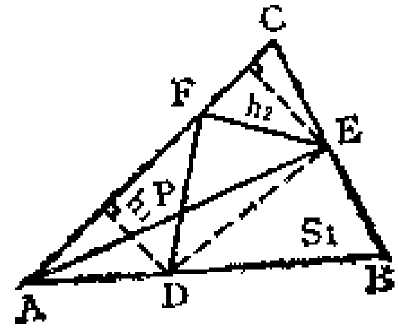
∴ $m=598$。

∵ $\lg5^{1986}=1986\lg5=1986\times0.6990$
$=1388.214$，

∴ $n=1389$，

故 $m+n=598+1389=\underline{1987}$。

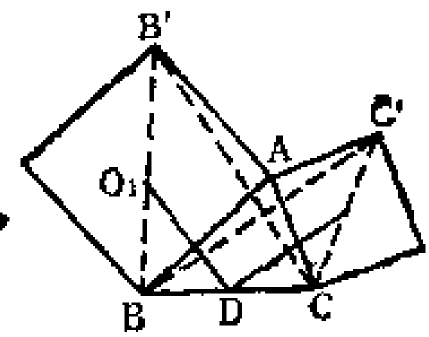
6\. 解：如图，$S_{DABE}=S_{DBEF}\Longrightarrow S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PFE}$
$\Longrightarrow S_{\triangle ADF}=S_{\triangle AEF}\Longrightarrow h_1=h_2$.



设 $S_{\triangle DBE}=S_1$，则 $\frac{S_1}{100}=\frac{3^2}{5^2}\Longrightarrow S_1=36$.

$$S_2=S_{\triangle ADE}=\frac{2}{3}S_1=24,$$

故 $S_{\triangle AEC}=100-S_1-S_2=\underline{40}$.



三、(本题满分30分)

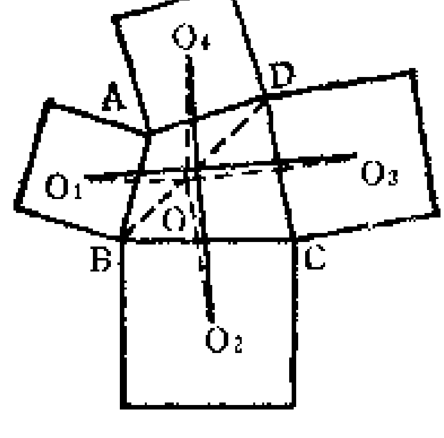
(1) (本小题满分8分)

如图，连 CB'、BC'，以 A 为中心，分别将 B 点、C' 点绕 A 点按顺时针方向旋转90°，于是 B 点到 B' 点，C' 点到 C 点，这就是说：线段 BC' 绕 A 点旋转90°后完全落到线段 $B'C$ 上。从而可知，线段 BC' 与 $B'C$ 垂直且相等。

连 BB'、$C'C$，可证 DO_1、DO_3 分别是△$BB'C$ 及△CBC' 的中位线，从而有 $O_1D\mathrel{\underline{\underline{\parallel}}}\frac{1}{2}CB'$，$O_3D\mathrel{\underline{\underline{\parallel}}}\frac{1}{2}C'B$.

由于 CB' 和 BC' 垂直且相等，所以 O_1D 与 O_3D 亦垂直且相等。

(2) (本小题满分10分)



① 连 BD，取 BD 中点 O，点 OO_1，OO_2，OO_3，OO_4.

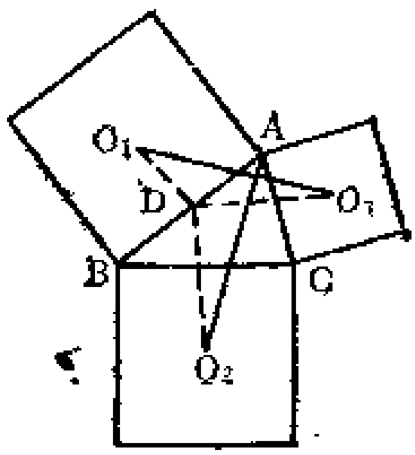
② 对于△ABD，由(1)小题的结论可知：OO_1 与 OO_4 垂直且相等，对于△BCD，同理有 OO_2 与 OO_3 垂直且相等。

③ 类似(1)题的证法，线段O_1O_3绕O点按顺时针方向旋转90°，完全落在线段O_4O_2上。所以线段O_1O_3与O_2O_4垂直且相等。

（3）（本小题满分12分，(a)满分9分，(b)满分3分）

(a) ①O_1O_3可能与AO_2垂直并且相等。

② 取AB中点D，连O_1D，O_2D，O_3D。



因O_1是正方形中心，D是AB中点，所以O_1D与AD垂直并且相等，由(1)小题可知DO_2与DO_3垂直并且相等。

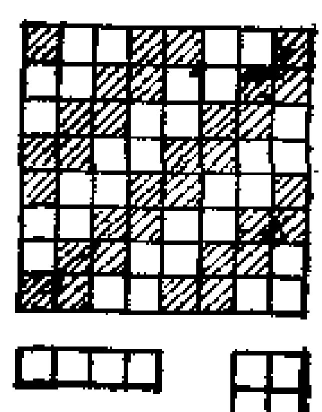
类似于(1)可证得O_1O_3与AO_2垂直并且相等。

(b) (3)小题可看作(2)小题的特殊情形，即四边形$ABCD$的一边AD退化成一点(A)时，即是(3)小题。这时AD边上的正方形也退化成一点，其中心O_4就是点A。

四、(本题满分20分)

（1） 将8×8的矩形小格，涂成黑、白两色，涂色方法如图所示。

（2） 每一块4×1的瓷砖，不论怎么铺，都恰好盖住两个白格，因此，15块4×1的瓷砖盖住偶数个白格。



一块2×2的瓷砖，不论怎么铺，或者盖住一个白格，或者盖住3个白格。总之，一块2×2的

瓷砖总是盖住奇数个白格。

（3） 15块4×1的瓷砖与1块2×2的瓷砖，在图上盖住的白格是奇数，但是图上的白格总数是偶数，所以不能恰好铺盖住8×8的地面。

1987年全国部分省、市初中数学通讯赛

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	A	C	A	B	A	D	D	C

1． 解：∵ 当$0<x<1$时，$0<x^2<1$，$0<\sqrt{x}<1$，

$$\frac{1}{x}>1,$$

∴ $\frac{1}{x}$最大，故(A)成立。

2． 解：$\frac{1988}{7}=284$，7个连续偶数应为

278，280，282，284，286，288，290。

3． 解：设一个内角为x，则$(n-2)180^\circ=2400^\circ+x$，

$$n-2=13\frac{1}{3}+\frac{x}{180}.$$

∵ $0^\circ<x<180^\circ$，$n-2$为正整数，∴ $\frac{x}{180}=\frac{2}{3}$。

则　$n-2=13\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=14$，故$n=16$。

4．解：将方程变形为 $y=\dfrac{98-4x}{5}$。

x	2	7	12	17	22
y	18	14	10	6	2

故有五组正整数解。

5．解：∵ $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$，大于1，小于2，

∴ 其小数部份 $a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}-1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$。

$$\log_2 a(2a+1)=\log_2\left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1\right)\right]$$

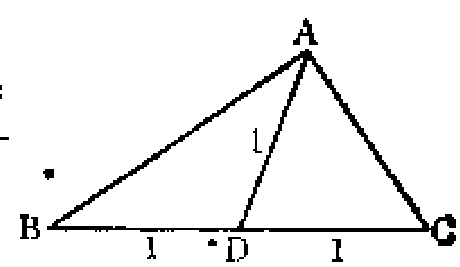
$$=\log_2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

$$=\log_2\frac{4}{8}=\log_2\frac{1}{2}=-1。$$

6．解：由已知条件知 $\angle A=90^\circ$。

设 $AB=x$，则 $AC=\dfrac{5}{2}-x$。

故 $x^2+\left(\dfrac{5}{2}-x\right)^2=2^2$，化简得 $8x^2-20x+9=0$。



解方程得 $x_1=\dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$，$x_2=\dfrac{5-\sqrt{7}}{4}$。

则另一边为

$$y_1=\frac{5}{2}-\frac{5+\sqrt{7}}{4}=\frac{5-\sqrt{7}}{4}，\quad y_2=\frac{5+\sqrt{7}}{4}。$$

由此可见，三角形一边长为 $\dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$，另一边长为 $\dfrac{5-\sqrt{7}}{4}$。

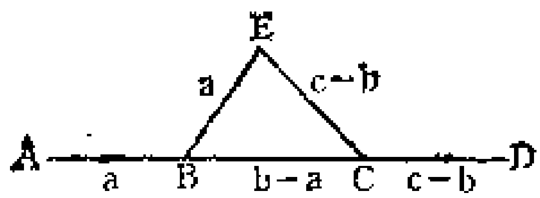
故$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{5-\sqrt{7}}{4}=\frac{25-7}{32}$

$=\frac{18}{32}=\frac{9}{16}$。

7． 解：$75^x=10^{-2}\Rightarrow x\lg75=-2$，$x=\frac{-2}{\lg75}$，

$0.75^y=10^{-2}\Rightarrow y\lg(75\times0.01)=-2$，$y=\frac{2}{2-\lg75}$，

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{1}{2}\lg75-\frac{1}{2}(2-\lg75)=-1$，



8． 解：$a+(c-b)>b-a\Rightarrow b<a+\frac{c}{2}$，

$(c-b)+(b-a)>a\Rightarrow a<\frac{c}{2}$，

$a+(b-a)>c-b\Rightarrow b>\frac{c}{2}$，

故只有(Ⅰ)与(Ⅱ)成立。

二、填充题

1． 解：

原式$=\sqrt{(273+242)^2-273^2-286^2}$

$=\sqrt{2\times273\times242+242^2-286^2}$

$=\sqrt{2\times13\times21\times2\times11^2+(2\times11^2)^2-(2\times11\times13)^2}$

$=2\times11\times\sqrt{13\times21+11^2-13^2}$

$=22\sqrt{273-24\times2}=22\times15=\underline{330}$.

2. 解：满足条件的三边长有三种情况：

（1） 3、4、5，周长为12；

（2） 2、4、5，周长为11；

（3） 2、3、4，周长为9。

故这样的三角形共有$\underline{3}$个

3. 解：设方程的两根为x_1和x_2，

则 $x_1+3=125x_2$，即$x_1=125x_2-3$。

又 $x_1+x_2=501$，$x_1=501-x_2$。

$125x_2-3=501-x_2$，$126x_2=504$，$x_2=4$。

$x_1=501-4=497$。

故 $k=x_1x_2=497\times4=\underline{1988}$。

4. 解：$\because 1987=283\times7+6$，$\therefore 1987^{1987}$除以7所得余数与$6^{1987}$除以7所得余数相同；$\because 6^{2n}(n=1,2,\cdots)$除以7所得余数为1，$6^{2n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$除以7所得余数为6，故1987^{1987}除以7所得的余数是$\underline{6}$。

5. 解：$7^{\frac{-2}{\log_6 7}}=7^{-2\log_7 6}=(7^{\log_7 6})^{-2}=6^{-2}=\underline{\frac{1}{36}}$。

6. 解：

原式$=(a+b)^2-2(1+ab)(a+b)+4ab+(1-ab)^2$

$=(a+b)^2-2(a+b)(1+ab)+(1+ab)^2$

$=(a+b-1-ab)^2$

$=(a-1)^2(1-b)^2$。

7. 解：$\sqrt{x}=\sqrt[4]{2}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2}-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$，

$$x=\sqrt{2}-\sqrt[4]{16}+\frac{\sqrt{8}}{4}=\sqrt{2}-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2,$$

$$x^2=\frac{9}{2}-6\sqrt{2}+4=\frac{17}{2}-6\sqrt{2},$$

$$\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{\frac{17}{2}-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}-8}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{故原式}=\frac{(x+2+\sqrt{x^2+4x})^2}{(x+2)^2-x^2-4x}=\frac{1}{4}(x+2+\sqrt{x^2+4x})^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2+2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{2})^2=\frac{1}{2}.$$

8． 解：一双筷子有2根，三种颜色各4双，即各8根，若只摸8根或9根(或更少)，其中有8根同色，就不能保证有一双不同色；若只摸10根，其中有8根同色，其他两色各1根，也不能保证摸到不同颜色的筷子两双。若摸11根，则必可以取到不同颜色的筷子两双。故一次至少要摸出11根

三、解：x的允许值范围由下面不等式组确定：

$$\begin{cases} x^2-1\geqslant 0 \\ x+1\geqslant 0. \end{cases}$$

解得$x\geqslant 1$ 或$x=-1$。

显然$x=-1$不是方程的解。因此，如果方程有解，则必须满足条件$x\geqslant 1$。在此条件下，将原方程作如下变形：

$$(x+1)+(x-1)+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$$

$$=[(x+1)+\sqrt{x+1}-2]^2,$$

即 $$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2$$

$$=[(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+2)]^2.$$

注意到两边括号内的式子的值非负，故上式又等价于

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+2),$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=x-1+\sqrt{x+1},$$

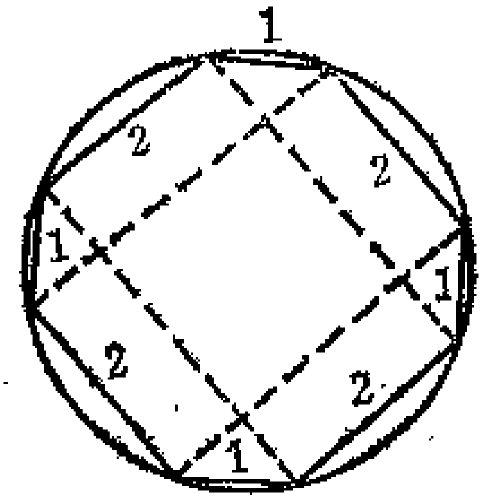
$$\sqrt{x-1}=x-1,\quad x-1=x^2-2x+1,$$

$$x^2-3x+2=0,\quad (x-1)(x-2)=0.$$

故 $x=1$或$x=2$，因它们都满足$x\geqslant1$，

则1和2都是原方程的解。

四、解：显然此圆内接八边形的面积是一定的，与八条边的位置无关。不妨设形状如图。



显然，由对称性知八边形的内角相等，都是$\frac{180^\circ(8-2)}{8}=135^\circ$。

作辅助线——连接四条线（如图虚线）。由对称性可知，这四条线将八边形分成一个正方形、四个矩形和四个等腰直角三角形。

故八边形的面积

$$S=2\times2+4\times2\times1+4\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=13.$$

五、解：设每头牛每天吃草量为x，草每天增长量为y，牧场原有草量为z。由题意有

$$24\times6\times x=6\times y+z,$$

$$21\times 8\times x=8\times y+z.$$

由上两式解得 $x=\frac{z}{72}$，$y=\frac{z}{6}$。

（1） 设放牧16头牛，t 天可以吃完牧草，

则 $$16\times t\times\frac{z}{72}=t\times\frac{z}{6}+z.$$

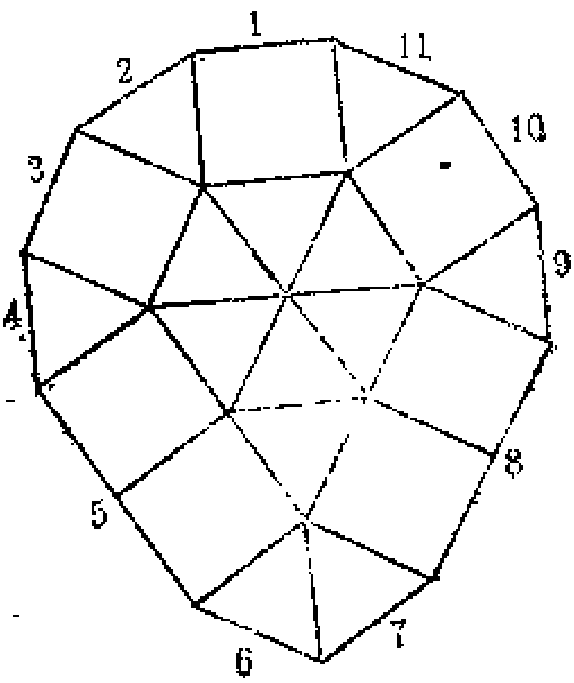
解得 $t=18$（天）。

（2） 设要使牧草永远吃不完（即天数t可以无限大），至多放牧S头牛。则

$$S\times t\times\frac{z}{72}<t\times\frac{z}{6}+z,$$

$$S<12+\frac{72}{t}.$$

由于t可以无限大，故至多放牧12头牛。



六、解：这个凸十一边形可由7个正方形和13个等边三角形（边长均为1）无重叠、无间隙地拼成。有十个内角为150°，只有一个内角为120°。

1988年全国部分省、市初中数学通讯赛

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7
答　案	B	D	B	C	A	D	A

1． 解：设单独做完此项工作甲需a天，乙需b天，丙需c天。由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2.4}\\[2mm] \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

解得 $a=3$。

2． 解：分段研究，在 $x<-1$，$-1\leqslant x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$，$2<x$ 四个范围考查，发现方程在$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$的范围内恒成立，则实数解有无数多个。

3． 解：$\because\ 10^{2x}=25$，$\therefore\ 2x=\lg 25$，$x=\lg 5$，

故 $10^{1-x}=10^{\lg 2}=2$。

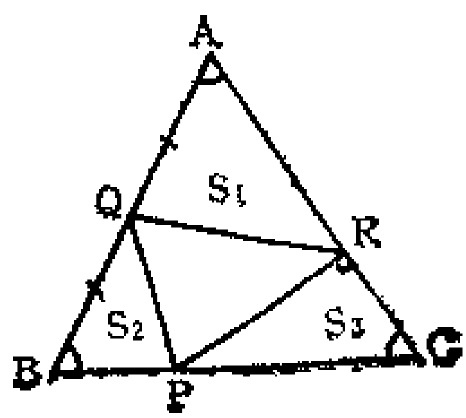
4． 解：由条件可得 $x=\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}=\sqrt[10]{32}$， $y=\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$，$z=\sqrt[5]{5}=\sqrt[10]{25}$，故$y>x>z$。

5． 解：设$\triangle ABC$的边长为a，

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=36$。

易知 $RC=\dfrac{a}{3}$。

故 $S_{\triangle PQR}=36-S_1-S_2-S_3$



$$=36-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=36-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)=10.$$

6． 解：由题意可设

$$a_k=m\times5\times3+n\times7\times3+p\times7\times5+7\times5\times3\times k.$$

其中要求第一项除以 7 余 5，第二项除以 5 余 2，第 三 项除以3 余1，不难看出：$m=5$，$n=2$，$p=2$。

则 $a_k=5\times5\times3+2\times7\times3+2\times7\times5+105k$

$=187+105k\ (k=0,1,2,\cdots,7)$，

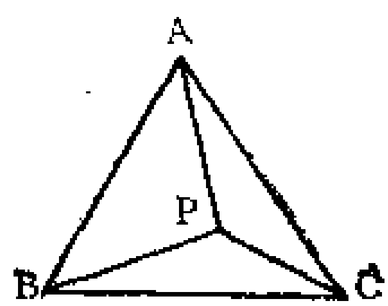
$100\leqslant a_k<1000$.

故所有三位数（共8个）之和$S_8=187\times8+\frac{8\times7}{2}\times105$

$=4436$。

7． 解：易知 $\angle APB=100^\circ$，$\angle BPC=120^\circ$，$\angle CPA=140^\circ$。$\because\angle ABP+\angle PBC=\angle BCP+\angle PBC=60^\circ$，

$\therefore\ \angle ABP=\angle PCB$.



$\because\ \frac{a}{\sin100^\circ}=\frac{PA}{\sin\angle ABP}$,

$\frac{a}{\sin120^\circ}=\frac{PB}{\sin\angle PCB}$,

$\therefore\ PA\cdot\sin100^\circ=PB\cdot\sin120^\circ$,

即$\frac{PA}{\sin60^\circ}=\frac{PB}{\sin80^\circ}$．同理可得$\frac{PB}{\sin80^\circ}=\frac{PC}{\sin40^\circ}$.

则此三角形三个内角分别 为 40°、60°、80°（不可能有

一个角为钝角），故三内角的大小之比（从小到大）为2∶3∶4。

二、填充题

1. 解：由 $8\frac{1}{2}+\frac{1}{8\frac{1}{2}-8}=10\frac{1}{2}$ 知另一个解为 $8\frac{1}{2}$。

2. 解：设慢了 x 分钟，则看表时距 4 点30分已有 6 小时 $(20+x)$ 分钟，由题意知手表走20分钟比准确时间慢 1 分钟。

$$6\times 3+\frac{20+x}{20}=x，解得x=20。$$

故准确时间应该是11点10分。

3. 解：由题意得

$$\begin{cases} n-52=a^2 & (1) \\ n+37=b^2 & (2) \end{cases}$$

(2)－(1) 得 $89=b^2-a^2=(b+a)(b-a)$，因为89为质数，所以 $b+a=89$，$b-a=1$，则 $b=45$，$a=44$。

故 $n=1988$。

4. 解，分式的分子分母同乘 $\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})$，化简后得 $\sqrt{5}-\sqrt{3}$。

5. 解：$\because\ 4*3=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$，

$$\therefore\ 5*(4*3)=5*\frac{1}{12}=\left(5-\frac{1}{12}\right)+\frac{5}{12}=\frac{59}{5}。$$

6. 解：x^3+2x^2+1988

$=x^3+x^2+(x^2+x)-3+1988$

$=x(x^2+x-1)+(x^2+x)+1988$

$=0+1+1988=1989$.

7. 解：$[\log_7(2\sqrt{2}-1)+\log_2(\sqrt{2}+1)]$

$+[\log_7(2\sqrt{2}+1)+\log_2(\sqrt{2}-1)]$

$=\log_7 7+\log_2 1=1$,

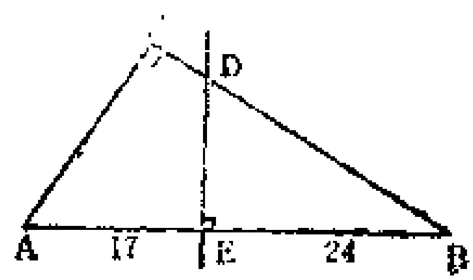
故 $\log_7(2\sqrt{2}+1)+\log_2(2\sqrt{2}-1)=1-a$。

8. 解：设漏加的自然数为 x，因为从1加到 n，其和为 $\frac{n(n+1)}{2}$，故有 $S=\frac{n(n+1)}{2}=1988+x\ (1\leqslant x\leqslant n)$

n	62	63	64
S	1953	2016	2080
x	-35	28	92

显然漏加的自然数为 28。

三、解：显然 $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$，则其面积比为 $\frac{BC^2}{BE^2}=\frac{2}{1}$，

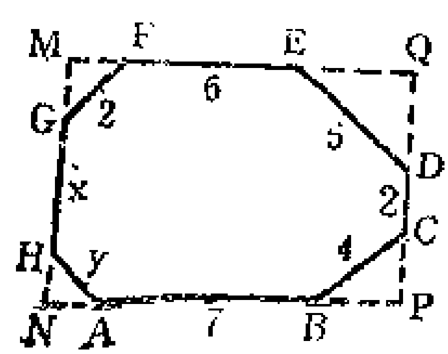


即 $BC=\sqrt{2}BE=24\sqrt{2}$。

容易求出 $AC=23$，

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 23\times 24\sqrt{2}$

$=276\sqrt{2}$。



四、解：如图，延长 AB、CD、EF、GH 得四边形 $MNPQ$。

因为原八边形的八个内角都相等，所以它的每个内角为$\frac{(8-2)\times 180^\circ}{8}=135^\circ$，每个外角为$45^\circ$。因而四边形$MNPQ$为矩形，$\triangle HNA$、$\triangle CBP$、$\triangle EDQ$、$\triangle MGF$都是等腰直角三角形。

设$GH=x$，$HA=y$，由$MQ=NP$得

$\frac{\sqrt{2}}{2}y+7+2\sqrt{2}=\sqrt{2}+6+\frac{5\sqrt{2}}{2}$，$y=3-\sqrt{2}$。

由$PQ=MN$得$\sqrt{2}+x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=\frac{5\sqrt{2}}{2}+2+2\sqrt{2}$，$x=3+2\sqrt{2}$。

故该八边形的周长为$32+\sqrt{2}$。

五、解：将(1)改写成

$$(x+2)+(y+3)+\sqrt{(x+2)(y+3)}=39 \qquad (3)$$

令$x+2=u$，$y+3=v$。原方程组化为

$$\begin{cases} u+v+\sqrt{uv}=39 & (4) \\ u^2+v^2+uv=741 & (5) \end{cases}$$

(5)÷(4)得 $u+v-\sqrt{uv}=19 \qquad (6)$

由(4)和(6)得 $\begin{cases} u+v=29 \\ uv=100, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} u_1=25 \\ v_1=4, \end{cases}$ $\begin{cases} u_2=4 \\ v_2=25. \end{cases}$

故 $\begin{cases} x_1=23 \\ y_1=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=22. \end{cases}$

经检验它们都是原方程的解。

六、解：把所有三角形的内角分为两类。第一类内角的

顶点是正方形的顶点，这些内角的和为$90^\circ\times4$。第二类内角的顶点是正方形内的点，以每一个内点为顶点的内角和是360°，故这些内角的和为$360^\circ\times1988$。因为每个三角形的内角和为180°，所以共有$(90\times4+360\times1988)\div180=3978$个三角形。因每个三角形有3条边，故3978个三角形有3×3978条边，但这些边中需除去正方形的四条边，则有$(3\times3978-4)$条边需用刀剪出来，因每一刀可剪两条边，故剪3978个三角形需要剪的刀数为

$$(3\times3978-4)\div2=5965.$$

1986年广州、武汉、福州、重庆初中数学联赛

第一试

一、选择题

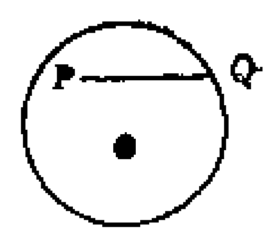
题号	1	2	3	4	5
答案	C	D	B	D	B

1．解：由$\sqrt{-x^2}$知x只能为0才有意义，

$$\left|\left|\sqrt{-x^2}-1\right|-2\right|=|1-2|=1.$$

2．解：（用排除法）

因为线段PQ与$\odot O$的关系有相切和相交两种情形．由右图可排除A、B、C三种情况．



3．解：$\because\ a>b,\ c>d,\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d},$

$\therefore \quad \dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a}{b}>1$，即$a-c>b-d$，

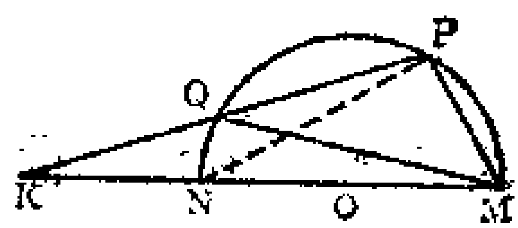
故 $a+d>b+c$。

4. 解：$\because \quad a=\log_{0.1}b$，

$\therefore \quad a=\dfrac{\lg b}{\lg 0.1}=\dfrac{\lg b}{-1}$，$\lg b=-a$，

故 $\lg b^{a}=a\lg b=-a^{2}$。

5. 解：如图，连PN，



$\angle MQP=\angle MNP=\angle K+\angle QPN=20^\circ+(90^\circ-40^\circ-\angle MQP)=70^\circ-\angle MQP$，

故 $\angle MQP=35^\circ$。

二、填空题

1. 解：$\because \quad a-b=3$，$a-c=\sqrt[3]{26}$，

$\therefore \quad c-b=3-\sqrt[3]{26}$，

$\therefore \quad (c-b)[(a-b)^2+(a-c)(a-b)+(a-c)^2]$

$=(3-\sqrt[3]{26})[9+3\sqrt[3]{26}+(\sqrt[3]{26})^2]$

$=27+9\sqrt[3]{26}+3(\sqrt[3]{26})^2-9\sqrt[3]{26}-3(\sqrt[3]{26})^2-26$

$=\underline{1}$。

2. 解：由已知有$y_1=2x$，$y_2=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$，

$y_3=\dfrac{2}{y_2}=\dfrac{2}{\frac{1}{x}}=2x$，$y_4=\dfrac{2}{y_3}=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$，推知$y_{2k-1}$

$=2x$，$y_{2k}=\dfrac{1}{x}$，从而$y_{1988}=\dfrac{1}{x}$。

故 $y_1 \cdot y_{1989} = 2x \cdot \dfrac{1}{x} = 2$。

3. 解：设做一件童装的时间为x，

根据题意得 $2x + 3\times(2x) + 4\times(3x) = 1$(天)，

$2x + 6x + 12x = 1$，$20x = 1$ (天)。

故 $2\times(3x) + 10(2x) + 14x$

$= 6x + 20x + 14x = 40x = \underline{2}$(天)。

4. 解：由已知，$1*2 = \dfrac{2\times1\times2}{a+2b} = 1$，$2*3 = \dfrac{2\times2\times3}{2a+3b}$

$=3$，

即 $\begin{cases} a+2b=4 \\ 2a+3b=4。\end{cases}$

解得 $a=-4$，$b=4$。

故 $2*(-1) = \dfrac{2\times2\times(-1)}{(-4)\times2+4\times(-1)} = \dfrac{-4}{-12} = \underline{\dfrac{1}{3}}$。

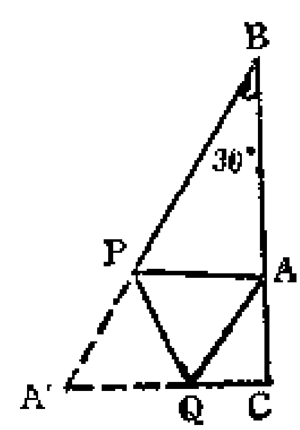
5. 解：如图，由已知条件，

设 $AQ = A'Q = A'P = AP = PQ = a$，

则 $AC = AQ\cos30^\circ = a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$。

$QC = AQ\sin30^\circ = \dfrac{a}{2}$，

$AB = \dfrac{PA}{\mathrm{tg}30^\circ} = \dfrac{a}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}a$。



因此，$A'C = A'Q + QC = a + \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a}{2}$，

$$BC=AB+AC=\sqrt{3}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3\sqrt{3}}{2}a,$$

故 $$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AP\cdot AC}{\frac{1}{2}BC\cdot A'C}=\frac{\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{3a}{2}}=\frac{2}{9}.$$

第二试

一、解：由$\lg a+|\lg b|=-2$知$\lg a<0$。

由$|\lg a|\cdot\lg b=-3$知$\lg b<0$，

且$\lg a$为方程$x^2+2x-3=0$之负根。

解方程得$x=-3$，即$\lg a=-3$，

则$a=10^{-3}=0.001$。

又由已知得$\lg b=-1$，故$b=10^{-1}=0.1$。

二、解：$a^4-3a^2+9=a^4+6a^2+9-9a^2$

$=(a^2+3)^2-(3a)^2$

$=(a^2-3a+3)(a^2+3a+3)$（a为自然数）。

当$a=1$时，$a^4-3a^2+9=1\times7=7$为一质数，

当$a=2$时，$a^4-3a^2+9=1\times13=13$为一质数，

当$a\geqslant3$时，$a^2-3a+3=a(a-3)+3>1$。

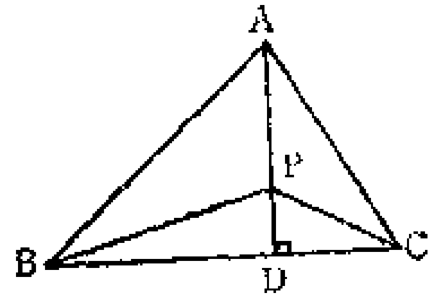
又$a^2+3a+3>1$，则a^4-3a^2+9可分解为两个大于1的自然数之积，故为合数。

因此，当$a=1$或2时，a^4-3a^2+9是质数．当$a\geqslant3$时，a^4-3a^2+9是合数。

三、解：(1) 不妨设$BD\geqslant CD$，在AD上取点P，使得

$DP<CD$，连结BP、CD，（如图）在$\triangle PDC$中，$\because \angle PDC=90^\circ$，$\angle DPC>\angle DCP$，$\therefore \angle DPC>45^\circ$.

同理可证$\angle DPB>45^\circ$，故$\angle BPC>90^\circ$.

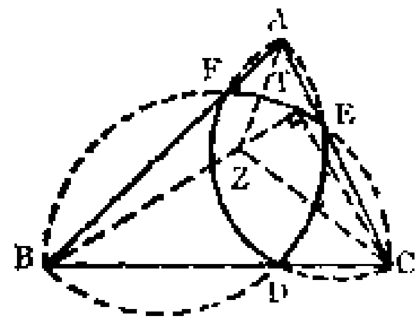


即$\triangle BPC$为钝角三角形；

又$\angle APC=180^\circ-\angle DPC>90^\circ$，故$\triangle APC$为钝角三角形；

同理可证$\triangle ABP$为钝角三角形。

（注：利用垂心或其他方法亦可）



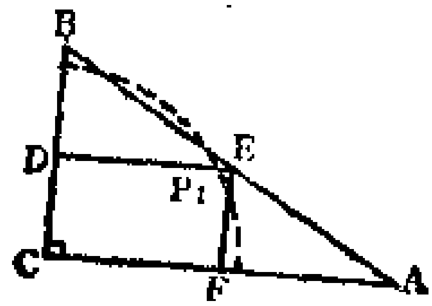
(2) 以AC为直径作圆，与BC、AB分别交于D和F，易知D、F分别为BC边和AB边上高的垂足；同理，分别以AB、BC为直径作半圆，与其他两边分别交于垂足D、F和E、F，则三劣弧$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{FD}$所围成的封闭图形内的点（不包括边界）即为所求。

证明：设Z是此封闭图形内的任一点。

因Z是半圆$\overset{\frown}{BFEC}$内的点，连结BZ延长交半圆周于T，连结CT，则$\angle BTC=90^\circ$. $\because \angle BZC>\angle BTC$，$\therefore \triangle BZC$为钝角三角形；同理可证，$\triangle CZA$和$\triangle AZB$也是钝角三角形。

反之，若点Z满足条件，即$\triangle AZB$、$\triangle BZC$和$\triangle CZA$都是钝角三角形，$\angle AZB$为钝角，故Z在以AB为直径的半圆半部；同理点Z也在以BC和AC为直径的半圆内部，故点Z必在上述封闭图形内。

四、解：(1) 证明：不妨设$BC=3a$，则$AC=5a$，$AB=\sqrt{34}a$，$\triangle ABC$的面积$S=\frac{15}{2}a^2$，于是对满足条件的点P，有$CP=\sqrt{S}=\frac{1}{2}\sqrt{30}a$。



现需证明，以C为圆心，$\sqrt{S}$为半径的圆与$\triangle DEF$的三边必有公共点，事实上，由于$CE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{34}a>\sqrt{S}$，$CD=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}a<\sqrt{S}$，则$D$在$\odot C$内，$E$在$\odot C$外，故$\odot C$与线段$DE$必相交于一点，设此点为$P_1$，显然有

$$CP_1^2=(\sqrt{S})^2=S,\quad \therefore 点P_1满足条件。$$

(2) 以C为圆心，$\sqrt{S}=\frac{1}{2}\sqrt{30}a$为半径的圆与线段$DE$、$EF$分别交于$P_1$、$P_2$，则$P_1$、$P_2$即为满足条件的所有点。事实上，点$P_1$符合条件上面已证；同理，由于$CF=\frac{5}{2}a<\sqrt{S}<CE$，可见圆与线段$EF$必交于一点$P_2$；此外，由于$D$、$F$都是$\odot C$内的点，故线段$DF$与圆不相交。综上所述，$\triangle DEF$的三边上满足条件的点$P$有且仅有两个。

五、解：据题设条件有

$$\sqrt{12-a}+\sqrt{12+b}=7,\quad \sqrt{13+a}+\sqrt{13+d}=7,$$

即
$$\sqrt{12-a}=7-\sqrt{12+b} \tag{1}$$
$$\sqrt{13+a}=7-\sqrt{13+d} \tag{2}$$

注意到a、b为整数，易证$\sqrt{12+b}$、$\sqrt{13+d}$均为整数，事

实上，由(1)得

$$12-a=7+12+b-14\sqrt{12+b},$$

即 $a+b+7=14\sqrt{12+b}$，

式中左端为整数，因而右端亦为整数，于是$\sqrt{12+b}$为有理数。由于b为整数，故$12+b$为完全平方数，亦即$\sqrt{12+b}$为整数。

同理可证，$\sqrt{13+d}$也为整数。

设 $p=7-\sqrt{12+b}$，$q=7-\sqrt{13+d}$（由(1)、(2)知p、q均为非负整数），从(1)、(2)消去a得

$$p^2+q^2=25.$$

列表

p	0	3	4	5
q	5	4	3	0

相应的由(1)式有

a	12	3	-4	-13
b	37	4	-3	-8

故所求(a,b)之值有如下四组：

(12，37)；(3，4)；(−4，−3)；(−13，−8)。

1987年广州、武汉、福州、重庆初中数学联赛

一、填空题

1．解：不难看出共有15个。

2. 解：设这个两位数为 x，则

$33 \leqslant \lg x^{30} < 34$，$\quad \frac{33}{30} \leqslant \lg x < \frac{34}{30}$，

$1.1 \leqslant \lg x < 1.134$。

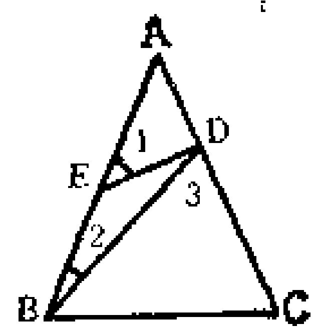
易知 $\lg 12 = 2\lg 2 + \lg 3 = 0.602 + 0.477 = 1.079$，

$\lg 14 = \lg 2 + \lg 7 = 1.146$。

∴ $12 < x < 14$，故 $x = \underline{13}$。

3. 解：由已知有 $\angle A = \angle 1 = 2\angle 2$，

$\angle ABC = \angle C = \angle 3 = \angle A + \angle 2$，



∴ $180° = \angle A + \angle ABC + \angle C$

$= \angle A + 2(\angle A + \angle 2)$

$= 4\angle A$，

故 $\angle A = \underline{45}°$。

4. 解：由已知：$x^2 - 1987x - 1 = 0$，

∴ $\begin{cases} m + n = 1987 \\ mn = -1 \end{cases}$，

$m - n = \sqrt{(m+n)^2 - 4mn}$

$= \sqrt{1987^2 + 4} \quad (\because m > n)$，

∴ $m\left(\frac{1-n^3}{1-n}\right) = m(1 + n + n^2) = m + mn + mn^2$

$= m - n - 1 = \underline{\sqrt{1987^2 + 4} - 1}$

或 $= \underline{\sqrt{3948173} - 1}$。

5. 解：由 x 为自然数知 $-2x$ 为整数，因而

$[-1.77x] = [-2x + 0.23x] = -2x + [0.23x]$。

又 $[-1.77]x = -2x$，

原方程成为 $\quad -2x + [0.23x] = -2x$，

$[0.23x]=0$,

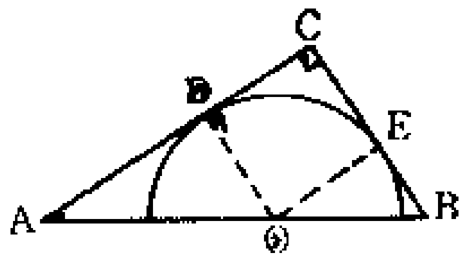
$0\leqslant 0.23x<1$，又 x 为自然数，

$\therefore$ $x=1$，2，3，4。故 x 有<u>4</u>个。

6．解：由面积关系可得

$r(AC+BC)=AC\cdot BC$，

故 $r=\dfrac{AC\cdot BC}{AC+BC}$



$=\dfrac{2S}{\sqrt{(AC+BC)^2}}$

$=\dfrac{2S}{\sqrt{AC^2+BC^2+2AC\cdot BC}}=\dfrac{2S}{\sqrt{C^2+4S}}$

7．解：1)当 $x+10=0$ 时，经验证 $x=-10$ 是根。

2) 当 $x+10$为奇数时，x^2-x-1是1的奇次方根或1的奇次方根的倒数。总有$x^2-x-1=1$。由此得$x=-1$。

3) 当 $x+10$ 为偶数时，$(x+10\neq 0)$，x^2-x-1是 1 的偶次方根或 1 的偶次方根的倒数，总有 $x^2-x-1=\pm 1$，由此得 $x=0$，$x=2$。

综上，得原方程的整数解为 $x_1=-10$，$x_2=-1$，$x_3=0$，$x_4=2$。故整数解有<u>4</u>个。

二、选择题

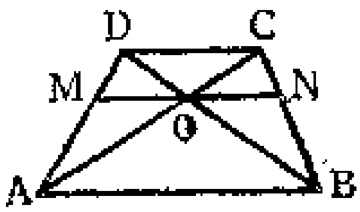
题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	D	D	D	B	B	D	C

1．解：原四边形对角线相等，故D正确。

2．解：(1)对，(2)对，(3)错（$c=0$，不等式不成立）；(4)对。

3. 解：因为$S_{\square PQRS}=\frac{4}{5}R^2$，$S_{\square ABCD}=2R^2$。

4. 解：∵ $\frac{MN}{AB}+\frac{MN}{CD}=\frac{MO+ON}{AB}+\frac{MO+ON}{CD}$



$$=\frac{MO}{AB}+\frac{ON}{AB}+\frac{MO}{CD}+\frac{ON}{CD}$$

$$=\frac{DO}{DB}+\frac{CO}{AC}+\frac{AO}{AC}+\frac{OB}{DB}$$

$$=\frac{DO+OB}{DB}+\frac{CO+AO}{AC}=2,$$

∴ $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{2}{MN}$.

5. 解：直线应过点$(-1,0)$，否定A。其余三图中$|k|<1$，$k-1<0$。故反比例函数图象应在Ⅱ、Ⅳ象限。故B正确。

6. 解：这样的点与对边两端点的两条连线应成$90°$角，因此这样的点是以矩形一边为直径向矩形内所作半圆与对边的公共点，当$ABCD$为正方形时，这样的点不存在，否定了(B)，(C)；当$AB>2AD$时，这样的点有4个，否定了(A)。故(D)正确。

7. 解：原方程可化为

$xy-1987x-1987y=0$,

$(x-1987)(y-1987)=1987^2$.

因为1987为质数，可得$x-1987$，$y-1987$的值为

$x-1987$	1	1987^2	-1	-1987^2	1987	-1987
$y-1987$	1987^2	1	-1987^2	-1	1987	-1987

由最后一组值得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$为原分式方程的增根，其余五组值分别可得原方程的一个解。所以原方程的整数解有 5 个，即结论(C)正确。

三、解：设道路宽度为 x，$AB=a$，$AD=b$。

则
$$(a-2x)(b-2x)=\frac{1}{2}ab,$$
$$8x^2-4(a+b)x+ab=0,$$
$$x=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2}}{4}.$$

当根号前为"+"号时，

$$2x=\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}>\frac{a+2b}{2}>b,\text{ 不合题意。}$$

$$\therefore \text{宽 } x=\frac{(a+b)-\sqrt{a^2+b^2}}{4}=\frac{AB+AD-BD}{4}.$$

具体量法如下：用绳量出 $AB+AD$，从中减出 BD 之长。用将余下的一段（长$AB+AD-BD$）对折两次，即得道路的宽 $x=\frac{1}{4}(AB+AD-BD)$。

四、证明：$\Delta=(2b)^2-4ac$，

由已知有 $2b=pc+ra$，代入上式得

$$\Delta=(pc+ra)^2-4ac$$
$$=(pc-ra)^2+4ac(pr-1).$$
$$(pc-ra)^2\geqslant0,\ pr>1.$$

当 $ac\geqslant0$ 时有 $\Delta\geqslant0$；

当 $ac<0$ 时，有 $\Delta=(2b)^2-4ac>0$。

综上，证明了 $\Delta\geqslant0$。

故一元二次方程 $ax^2+2bx+c=0$ 必有实根。

五、证明：由题设12个定点无三点共线，因此点可以从中找到两点，不妨设为 A_1、A_2，使其余10点在直线 A_1A_2 的同侧。

又由题设知12个点无四点共圆，所以 $\angle A_1A_kA_2(k=3, 4, \cdots, 12)$ 互不相等，不妨设

$$\angle A_1A_sA_2<\angle A_1A_{s+1}A_2(s=3,4,\cdots,11).$$

过不共线三点 A_1、A_2、A_8 可确定一个圆，记为圆O。

$\because$ $\angle A_1A_iA_2<A_1A_8A_2$ $(i=3,4,5,6,7)$

$\therefore$ 点 A_3、A_4、A_5、A_6、A_7 在圆 O 外部。

又 $\because$ $\angle A_1A_iA_2>\angle A_1A_8A_2$ $(i=9,10,11,12)$，

$\therefore$ 点 A_9、A_{10}、A_{11}、A_{12} 在圆 O 内部。

故圆 O 合所求，命题得证。

1988年广州、武汉、福州、重庆、洛阳初中数学联赛

一、选择题

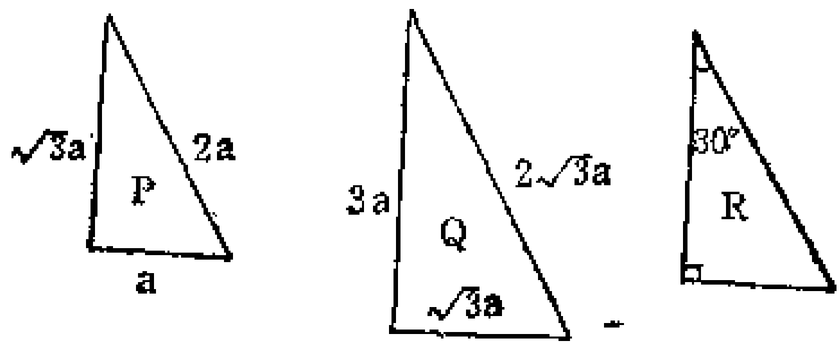
题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	C	B	D	D	D		C	C

1. 解：虽然判别式 $\Delta=4b^2-4ac>0$，但是当 $c=0$，$b\neq0$ 时，方程只有一个实根，故不一定有两不等实根。

2. 解：因三条不同的平行直线 l、m、n 不可能与一圆都相切，故(2)不成立；而 l、m、n 构成的等边三角形有内切圆 C 及旁切圆 C'，说明(1)和(3)可以成立。

3. 解：因为 CB 是过 B、D、E 的圆的割线，而不是切线。

4. 解：如图所示，显然可知 $P \backsim Q \backsim R$。因为容易计算 P 和 Q 都是一锐角等于 30° 的直角三角形。



5. 解：∵ $10^{-221}<N<10^{-220}$，n 为尾数，

∴ $\lg N=-221+n \quad (0.01<n<0.1)$。

$\lg N^{-9}=-9\lg N=-9(-221+n)=1989-9n$。

因为一个正数的常用对数的尾数是小于 1 的非负数，又 $0.09<9n<0.9$，$1-9n>0$，

则 $\lg N^{-9}=1988+1-9n$，

故 $\lg N^{-9}$ 的尾数为 $1-9n$。

6. 解：此题有误，因为正确的结论不唯一。

7. 解：方程变形为 $6x^2-(2m-1)x-(m+1)=0$。

∵ α 为方程的根，∴ $6\alpha^2-(2m-1)x-(m+1)=0$，

$$\alpha=\frac{(2m-1)\pm\sqrt{(2m-1)^2+24(m+1)}}{12}$$

$$=\frac{2m-1\pm\sqrt{(2m+5)^2}}{12}$$

$$=\frac{2m-1\pm|2m+5|}{12}=\frac{2m-1\pm(2m+5)}{12}.$$

$\alpha=\dfrac{2m-1-2m-5}{12}=-\dfrac{1}{2}$，但 $\dfrac{3}{5}\alpha$ 不为整数。

$$\alpha=\frac{2m-1+2m+5}{12}=\frac{m+1}{3}.$$

要满足不等式 $-1988\leqslant\frac{m+1}{3}\leqslant1988$，

$$-5964\leqslant m+1\leqslant5964,$$

且使 $\frac{3}{5}\alpha=\frac{m+1}{5}$ 为整数，则 $m=-1+5n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，

$$-5964\leqslant-1+5n+1\leqslant5964,$$

$$-1192\frac{4}{5}\leqslant n\leqslant1192\frac{4}{5},$$

则 $n=0，\pm1，\pm2，\pm3，\cdots，\pm1192$。

故 m 可取 $1192\times2+1=2385$ 个值。

8．解：列表观察满足 $[1.9x]+[8.8y]=36$ 的正整数解。

x	$1.9x$	$[1.9x]$	y	$8.8y$	$[8.8y]$	和
1	1.9	1	4	35.2	35	36
5	9.5	9	3	26.4	26	35
10	19	19	2	17.6	17	36
15	28.5	28	1	8.8	8	36

显然正整数解 (x, y) 只有三个：

$$\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases},\quad\begin{cases}x=10\\y=2\end{cases},\quad\begin{cases}x=15\\y=1\end{cases}.$$

二、填空题

1　解：原式 $=x^3-y^3+(x^2y-xy^2)-(xz^2-yz^2)$

$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$+xy(x-y)-z^2(x-y)$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2+xy-z^2)$$
$$=(x-y)[(x+y)^2-z^2]$$
$$=\underline{(x-y)(x+y+z)(x+y-z)}。$$

2．解：$\because \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$，

$\therefore \quad x^2+1+\frac{1}{x^2}=8$。

$\because \quad \frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}=8$，

$\therefore \quad \frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\underline{\frac{1}{8}}$。

3．解：$\because [1,6]=[6,1]=[2,3]=[3,2]=[2,6]=[6,2]=[3,6]=[6,3]=6$，$[1,15]=[15,1]=[3,5]=[5,3]=[3,15]=[15,3]=[5,15]=[15,5]=15$，$\therefore$满足条件的$(x,y,z)$共有$\underline{五}$组：$(6,1,15)$；$(2,3,5)$；$(2,3,15)$；$(6,3,5)$；$(6,3,15)$。

4．解：由图可知：$\angle 1+\angle 7=90°$，$\angle 3+\angle 5=90°$，
$\angle 9+\angle 11=90°$，$\angle 13+\angle 15=90°$，
$\angle 2+\angle 6=90°$，
而 $\angle 4+\angle 10=90°$，$\angle 8+\angle 12=90°$，
$\angle 14+\angle 16=90°$。
故 $\angle 1-\angle 2+\angle 3-\angle 4+\cdots+\angle 15-\angle 16=\underline{0°}$。

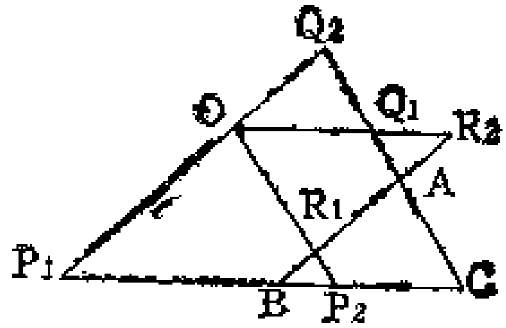
5．解：此题有误。

6．解：已知$S_{\triangle OP_1P_2}=m^2$，$S_{\triangle OQ_1Q_2}=n^2$，$S_{\triangle OR_1R_2}=k^2$。根据作法可知：

$\triangle OP_1P_2 \backsim \triangle OQ_1Q_2 \backsim \triangle OR_1R_2 \backsim \triangle ABC$。

∵ $S_{\triangle OP_1P_2} : S_{\triangle OQ_1Q_2} : S_{\triangle OR_1R_2} = m^2 : n^2 : k^2$。

又两个相似三角形面积之比等于对应边平方之比。



∴ 三角形对应边之比 $OP_1 : OQ_2 : R_1R_2 = m : n : k$。

则 $$\frac{Q_2C}{Q_2Q_1} = \frac{Q_2P_1}{Q_2O} = \frac{m+n}{n} \qquad (1)$$

$$\frac{Q_2A}{Q_2Q_1} = \frac{OR_1}{Q_2Q_1} = \frac{R_1R_2}{OQ_2} = \frac{k}{n} \qquad (2)$$

（1）－（2）得 $\frac{AC}{Q_2Q_1} = \frac{Q_2C - Q_2A}{Q_2Q_1} = \frac{m+n-k}{n}$。

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle OQ_1Q_2}} = \frac{AC^2}{Q_2Q_1^2} = \frac{(m+n-k)^2}{n^2},$$

故 $$S_{\triangle ABC} = \frac{(m+n-k)^2}{n^2} S_{\triangle OQ_1Q_2}$$

$$= \frac{(m+n-k)^2}{n^2} n^2 = \underline{(m+n-k)^2}。$$

7． 解：显然，当 n 为正整数时，$\frac{88+n}{19+n} < \frac{88}{19}$，由题意，$n$ 须满足 $2 < \frac{88+n}{19+n} < 3 < 4 < \frac{88}{19} = 4\frac{12}{19}$。

则 $38+2n < 88+n < 57+3n$，

∴ $15.5 < n < 50$

故 $S_n = 16+17+18+\cdots+49$

$$= \frac{(16+49)34}{2} = \underline{1105}。$$

三、(1)证明：

$$\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)\left(1+\frac{b-c}{b+c}\right)\left(1+\frac{c-a}{c+a}\right)$$

$$-\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(1-\frac{b-c}{b+c}\right)\left(1-\frac{c-a}{c+a}\right)$$

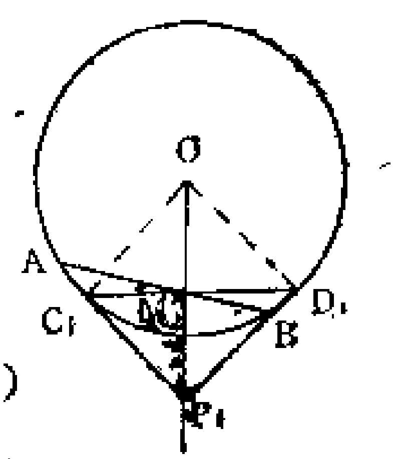
$$=\frac{2a\cdot 2b\cdot 2c}{(a+b)(b+c)(c+a)}-\frac{2b\cdot 2c\cdot 2a}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=0,$$

故 $x=\frac{a-b}{a+b}$，$y=\frac{b-c}{b+c}$，$z=\frac{c+a}{c-a}$ 为方程的一个解。

(2) 解：显然 $x=-1$，$y=1$，$z=z_0$（z_0 为任意数）是所给方程的一个解。

若有实数 a，b，c 满足 $\frac{a-b}{a+b}=-1$，$\frac{b-c}{b+c}=1$，$\frac{c-a}{c+a}=z_0$。则由第一式可得 $a=0$，由第二式可得 $c=0$，而第三式无意义，故不存在这样的 a，b，c。



四、证明：连 OC_i、OD_i，对每个 $i(i=1,2,\cdots,1988)$。

∵ C_iD_i 均被 AB 平分于 M_i，

∴ $C_iM_i\cdot D_iM_i=AM_i\cdot BM_i$ (1)

又 P_iC_i，P_iD_i 分别切⊙O于 C_i、D_i，故易知 O、C_i、P_i、D_i 共圆，且 OP_i 恰过 C_iD_i 的中点 M_i，

∴ $C_iM_i\cdot D_iM_i=P_iM_i\cdot OM_i$ (2)

由(1)，(2)得 $OM_i\cdot M_iP_i=AM_i\cdot M_iB$，

∴ P_i 和 O、A、B 共圆，但 O、A、B 为定点，故

P_i 与 ⊙OAB 的圆心距离相等。即点 $P_1, P_2, \cdots, P_{1986}$ 与定点等距，此定点为 ⊙OAB 的圆心。

五、此题。首先检查哪些两位数适合作 $\overline{a_ia_{i+1}}$，按规则（1）和（3），易知可作为 $\overline{a_ia_{i+1}}$ 的两位数有（按十位数字从小到大排列）

12，15，18，21，27，36，39，45，51，54，57，63，69，72，75，78，81，87，93，96。

检查方法是

$(11, 11)=11\neq 3$ 或 9，故 $\overline{a_ia_{i+1}}\neq 11$。

$(12, 21)=3$，故 $\overline{a_ia_{i+1}}$ 可写为12。

$(13, 31)=1\neq 3$ 或 9，故 $\overline{a_ia_{i+1}}\neq 13$。

………………

$(99, 99)=99\neq 3$ 或 9，故 $\overline{a_ia_{i+1}}\neq 99$。

其中 (a, b) 表示 a 与 b 的最大公约数。

（1）按规则（2）和以上检查结果，若 $a_1=3$，则 a_2 可为6或9，若 $a_2=6$，则可写成以下过程：

$$3\longrightarrow 36\longrightarrow 369\longrightarrow 3693\longrightarrow 36936\longrightarrow 369369\longrightarrow 3693693\longrightarrow\cdots\cdots。$$

于是 N 可写成 $\underbrace{3AA\cdots A6}_{k个}$，其中 $A=693$，$k=662$。

同理若 $a_1=3, 6, 9$，N 还可以写成

$\underbrace{3BB\cdots B9}_{k个}$，$B=963$；$\underbrace{6CC\cdots C3}_{k个}$，$C=396$；

$\underbrace{6DD\cdots D9}_{k个}$，$D=936$；$\underbrace{9EE\cdots E3}_{k个}$，$E=369$；

$\underbrace{9FF\cdots F6}_{k个}$，$F=639$，$k=662$。

且 N 这六个值中的每一个，除了首位和末位，其数字和均为 $18k=11916$。

（2） 若 $a_1=1$，N 可以由以下过程写成

$1\longrightarrow12\longrightarrow127\longrightarrow1278\longrightarrow12781\longrightarrow127812\longrightarrow\cdots\cdots$。

这时N可以写为 $\underbrace{GG\cdots G}_{r个}$，$G=1278$，$r=497$。

同理N可以写为 $\underbrace{HH\cdots H}_{r个}$，$H=2781$，

$\underbrace{II\cdots I}_{r个}$，$I=7812$，$\underbrace{JJ\cdots J}_{r个}$，$J=8127$，

$45\underbrace{GG\cdots G}_{r-1个}12$，$5\underbrace{GG\cdots G}_{r-1个}127$。

这就表明当 $a_1=1$，2，4，5，7 或 8 时，N 可以构造成功。

1986年北京市初二数学竞赛

一、选择题

题 号	1	2	3
答 案	D	C	D

1．解：$\dfrac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$$=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$

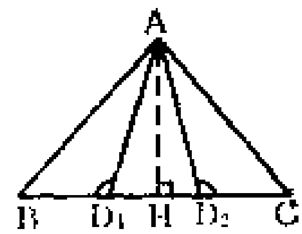
$$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3}$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

2．解：设 x 为四小段中任意一段，则 $4-x$ 为其余三段之和，由 $x<4-x$ 得 $x<2$。

3．解：如图，$BD_1=D_1D_2=D_2C$，

$AD_1=AD_2$，$AH\perp BC$。



（1）在$\triangle ABD_1$与$\triangle ACD_2$中，$BD_1=CD_2$，$AD_1=AD_2$。且边BD_1与边CD_2上的高都是 AH，$\angle AD_1B=\angle AD_2C$。

（2）在$\triangle ABD_1$与$\triangle AD_2D_1$中，$BD_1=D_2D_1$，AD_1公用，BD_1与D_2D_1上的高都是 AH，但$\angle AD_1B+\angle AD_1D_2=180°$。因此应选择(D)。

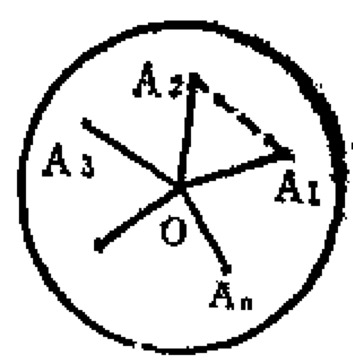
二、填空题

1．解：$1987\cdot19861986-1986\cdot19871987$

$=1987\cdot1986\cdot10001-1986\cdot1987\cdot10001$

$=\underline{0}$。

2．解：∵半径为1986，n 个点两两之间的距离都大于1986，∴这 n 个点中的任何点都不能是圆心。



从圆心 O 出发分别通过这 n 个点引 n 条射线，如图，逆时针旋转将这 n 个点逐次编号为 A_1，A_2，…，A_n。

在$\triangle A_1OA_2$中，$OA_1<1986$，$OA_2<1986$，$A_1A_2>1986$。

$\therefore\quad \angle A_1OA_2>60^\circ$。

同理，$\angle A_2OA_3$，$\angle A_3OA_4$，…，$\angle A_nOA_1$ 均大于60°。

但这 n 个角之和为360°，

$\therefore\quad n\cdot 60^\circ<360^\circ\Longrightarrow n<6\Rightarrow n\leqslant 5$.

事实上取每一个都等于 72°，可以作出 $n=5$的合于题设条件的图形，故 n 的最大值为$\underline{5}$。

3．解：设这分数的分子为 a，分母为 b（其中 a 与b都是自然数）。

由题意，$a+b=37$，$0.915\leqslant\sqrt{\dfrac{a}{b}}<0.925$，

将不等式各项平方得

$$0.837225\leqslant\frac{a}{b}<0.855625.$$

以 $a=37-b$ 代入得 $0.837225b\leqslant 37-b<0.855625b$.

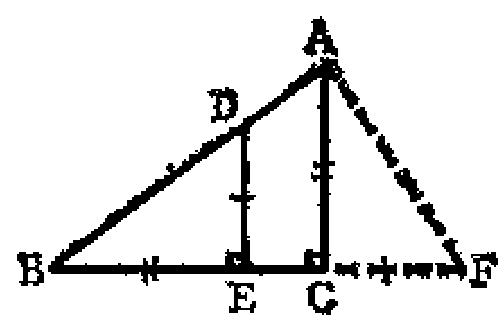
$$1.837225b\leqslant 37<1.855625b,$$

$$\frac{37}{1.855625}<b\leqslant\frac{37}{1.837225},$$

$$19.939373<b<20.139068,$$

故 $b=20$，$a=17$，$\dfrac{a}{b}=\underline{\dfrac{17}{20}}$.

三、证明：延长 BC 至 F，使 $CF=DE$，连结 AF。



在 $Rt\triangle BDE$ 与 $Rt\triangle ACF$ 中，

$BE=AC$，$DE=CF$，

$\therefore\quad \triangle BDE\cong\triangle AFC$，

则 $AF=BD=\dfrac{1}{2}$，$\angle FAC=\angle ABC$。

$\because\ \angle BAC+\angle ABC=90^\circ$，

$\therefore\ \angle BAC+\angle FAC=90^\circ$，$\triangle BAF$ 是 $Rt\triangle$。

在 $Rt\triangle ABF$ 中，$AF=BD=\frac{1}{2}$，

$BF=BC+CF=BC+DE=1$，故$\angle ABC=30^\circ$。

四、证明：$A+B+C$

$$=\left(a^2-2b+\frac{\pi}{2}\right)+\left(b^2-2c+\frac{\pi}{3}\right)+\left(c^2-2a+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)+(\pi-3)$$

$$=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+\pi-3.$$

$\because\ (a-1)^2\geqslant0$，$(b-1)^2\geqslant0$，$(c-1)^2\geqslant0$，$\pi-3>0$。

$\therefore\ A+B+C>0$。

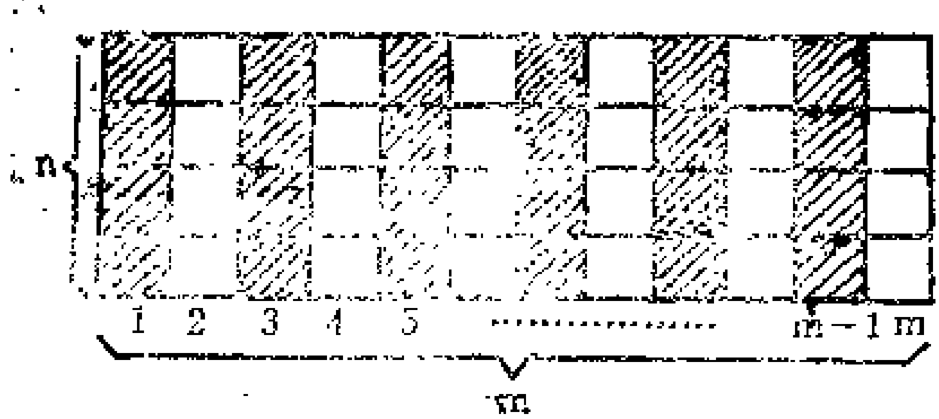
若 $A\leqslant0$，$B\leqslant0$，$C\leqslant0$，则有 $A+B+C\leqslant0$，与 $A+B+C>0$ 矛盾。

因此，可以断言，A、B、C 中至少有一个大于 0。

五、证明：设有 k 个“L形”纸片拼成 $m\times n$ 的矩形。由于每个“L形”由四个单位正方形组成。

$\therefore\ m\times n=4k(*)$

因此，m、n 中至少有一个为偶数，为确定起见，不妨设 m 为偶数。



如图，将 m 个列中的单号列，即第 1、第 3、…、第 $(m-1)$ 列涂上红色，偶号列都涂上白色，则每个"L形"纸片，不管在拼图中放在 $m\times n$ 矩形的那个位置，要么占有 3 个红方格，一个白方格，要么占有 3 个白方格，一个红方格。我们称"三红一白"者为甲类，"三白一红"者为乙类。设 $m\times n$ 矩形是由 t 个甲类"L形"与 s 个乙类"L形"所拼成，则

甲类共占 $3t$ 个红方格，t 个白方格；

乙类共占 s 个红方格，$3s$ 个白方格。

但在 $m\times n$ 的矩形中，红方格与白方格数目相等，

$$\therefore 3t+s=3s+t \Longrightarrow s=t.$$

即甲类"L形"与乙类"L形"的个数相等。

由此可以断定 k（拼成 $m\times n$ 矩形的"L形"个数）必为偶数。令 $k=2l$。由（*）式有

$$m\times n=4k=4\cdot 2l=8l.$$

故 $m\times n$ 是 8 的倍数。

1987年北京市初二数学竞赛

一、填写答案

1.解：由竖式

$$\begin{array}{r}
10002\\
10002\\
10002\\
10002\\
\hline
11112222
\end{array}$$

及$10002=3334\times 3$知$11112222=3334\times 3333$。

故其中较大的那个正整数因数为$\underline{3334}$。

2.解：由条件知$a^2-3a+1=0$(即$a^2+1=3a$ 或 $a^2-3a=-1$)，原式分母

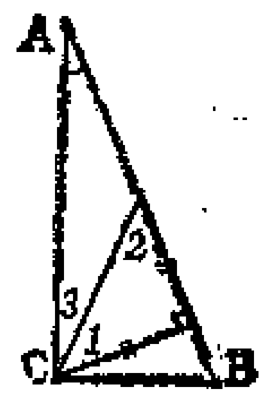
$$2a^5-5a^4+2a^3-8a^2$$
$$=a^2[2a(a^2+1)-5(a^2+1)-3]$$
$$=3a^2[2a^2-5a-1]$$
$$=3a^2[(a^2-3a+1)+(a^2-3a)+a-2]$$
$$=3a^2(a-3)。$$

原式分子　$a^2+1=3a$。

故原式$=a^2-3a=\underline{-1}$。

3.解：$(1*9)*(8*7)=\left(\frac{1+9}{2}\right)*\left(\frac{8+7}{2}\right)$

$$=\frac{5+7.5}{2}=\underline{\frac{25}{4}}。$$



4.解：如图所示，$\angle 1=\angle 2=45^\circ$，又$\angle 3+\angle A=\angle 1=45^\circ$。$\because E$是$AB$的中点，$\therefore \angle A=\angle 3$，故$\angle A=\underline{22.5^\circ}$。

5.解：设两正整数为m，n。由题意知

$$m\cdot n-(m+n)=1000,$$
$$mn-m-n+1=1001,$$
$$(m-1)(n-1)=7\times 143。$$

因7和143都是质数，1001 分解因数唯一，故$m=144$，$n=8$，　$\frac{m}{n}=\underline{18}$。

6.解：$\because \sqrt{x}+\sqrt{y}=2009=7\sqrt{41}$，

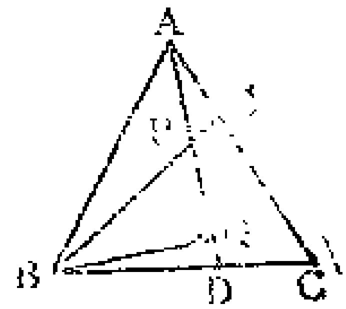
$\therefore$满足上式的$\sqrt{x}$和$\sqrt{y}$($0<x<y$)为

$\sqrt{41}$，　$6\sqrt{41}$；　$2\sqrt{41}$，　$5\sqrt{41}$；$3\sqrt{41}$，$4\sqrt{41}$。

故满足上式的整数对(x,y)的个数是$\underline{3}$。

二、证明：$\because AB=BC=CA$，

$\therefore \angle ABC=\angle BAC=\angle BCA=60°$。



在$\triangle ADC$和$\triangle BEA$中，

$\because AE=CD$，$\angle BAE=\angle ACD$，$AB=AC$，

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle BEA$。

于是，$\angle DAC=\angle EBA$。

又$BQ\perp AD$，在直角三角形BQP中，

$\because \angle QPB=\angle PAB+\angle PBA$

$=\angle PAB+\angle DAC=60°$，

$\therefore \angle PBQ=30°$，故$BP=2PQ$。

三、证明：1． $\because 5|(x+9y)$，

$\therefore 5|(2x+18y)$。显然，$5|(10x+25y)$。

但$(10x+25y)-(2x+18y)=8x+7y$，

故$5|(8x+7y)$。

2． $\because$ $4(3x-7y+12z)+3(7x+2y-5z)$

$=11(3x-2y+3z)$，

而$11|11(3x-2y+3z)$，且

$11|(7x+2y-5z)$，

$\therefore 11|4(3x-7y+12z)$。

又$(11,4)=1$，

$\therefore 11|(3x-7y+12z)$。

四、证明：由题意，

P_2应为P_1P_3的二等分点，所以$P_1P_2=P_2P_3=1$。

P_3应为P_2P_4的三等分点中最靠近P_4的那一点，有

$$P_3P_4=\frac{1}{2}P_2P_3=\frac{1}{2}.$$

一般地，P_k 是 $P_{k-1}P_{k+1}$ 中的 k 等分点中最靠近P_{k+1}的那个分点，有

$$P_kP_{k+1}=\frac{1}{k}P_{k-1}P_{k+1}=\frac{1}{k}P_{k-1}P_k+\frac{1}{k}P_kP_{k+1},$$

$$\frac{k-1}{k}P_kP_{k+1}=\frac{1}{k}P_{k-1}P_k.$$

因此，$P_kP_{k+1}=\frac{1}{k-1}P_{k-1}P_k$.

于是，

$$P_4P_5=\frac{1}{3}P_3P_4=\frac{1}{6}=\frac{1}{3\cdot 2},$$

$$P_5P_6=\frac{1}{4}P_4P_5=\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2},$$

$$P_6P_7=\frac{1}{5}P_5P_6=\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2},$$

……，

$$l=P_{1986}P_{1987}=\frac{1}{1985}P_{1985}P_{1986}$$

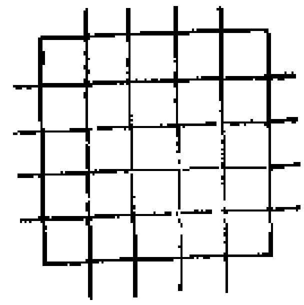
$$=\frac{1}{1985\cdot 1984\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2}.$$

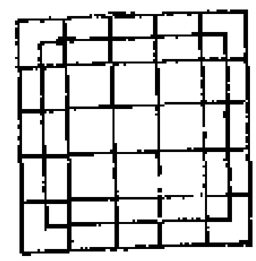
故 $2l=\frac{1}{1985\cdot 1984\cdot\cdots\cdot 3}<\frac{1}{3^{1983}}$.

五、答：最少要画八条直线。右图就是一种符合题目条件的分割法。

证明：（反证法）若至多画七条直线，这时我们把在边缘上的 16 个红点用线段依次相连（如图），共连成16条小线段（单位长），形成以这16条小线段围成的一个正方形。所画的

七条直线不过红点，每一条至多与两条小线段相交，因此，所画的七条直线至多交这16条小线段中的14条，还至少有两条小线段不与这七条直线中任一条相交。而这两条小线段中的一条，它必在被这七条直线分成的某个小区块内。此时，这个区块中至少要有这小线段两个端点的红点在内。与题设条件每个小块中至多有一个红点的要求相矛盾。因此，合于题设要求的直线最少要画八条。





1988年北京市初二数学竞赛

一、填空题

1.解：由条件知$\begin{cases} xy-2=0 & (1) \\ x-2y=0 & (2) \end{cases}$

由(2)式得$x=2y$代入(1)式得　$y^2=1$，

由(2)式得$x^2=4y^2=4$，故　$x^2+y^2=\underline{5}$。

2.解：∵　$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$，

∴由已知条件得　$abc=0$。

因此，a、b、c中至少有一个为0，不妨设$a=0$。

由已知　$a+b+c=0$　知　$b=-c$。

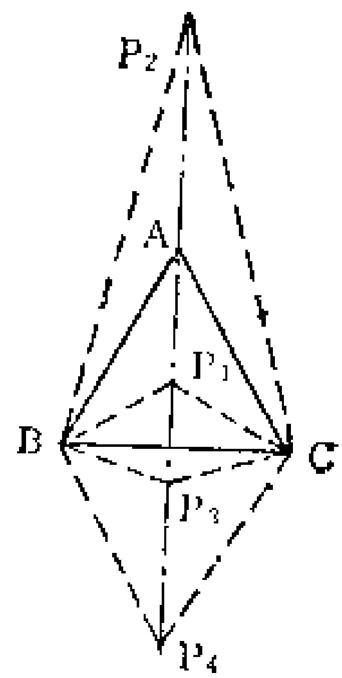
故　$a^{19}+b^{19}+c^{19}=0+(-c)^{19}+c^{19}=\underline{0}$。

3.解：令$f(a)=a^4-4a^3+15a^2-30a+27$，

则　$f(1)=9$，不是质数，

$f(2)=11$，是质数。

故这个质数是<u>11</u>。



4．解：如图所示，除中心P_1外，在等边三角形的三条对称轴上还分别有三个点满足条件，如过点A的对称轴上还有三个点P_2、P_3、P_4满足条件，这三个点分别满足$AP_2=AB$，$AB=AP_3$，$AB=BP_4$。

故满足这种条件的P点共有<u>10</u>个。

5．解：由题意知$a^2-1=0$，$a+1\neq0$，

故　$a=\underline{1}$。

二、解：$\because \alpha\beta=m+5$，$\alpha\gamma=15m+7$，

$\therefore$　$\alpha^2\beta\gamma=(m+5)(15m+7)$。

$\because$　α同是两方程的根，

$\therefore$　$\alpha^2-m\alpha+m+5=0$　　(*)

$\alpha^2-(8m+1)\alpha+15m+7=0$

由上两式相减得　$(7m+1)(\alpha-2)=0$。

当$m=-\frac{1}{7}$时，$m^2-4(m+5)<0$，与第一个方程有实根矛盾，故$m\neq-\frac{1}{7}$。

当$\alpha=2$时，代入(*)得$m=9$。

故$\alpha^2\beta\gamma=(m+5)(15m+7)=14\times142=1988$。

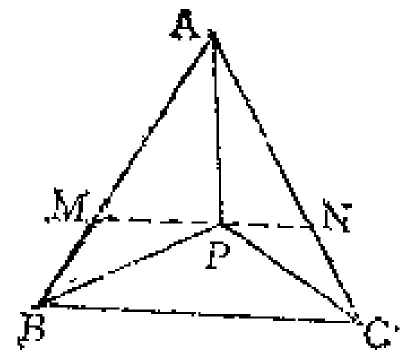
三、证：如图，$\because PA+PB>AB$，$PB+PC>BC$，$PC+PA>AC$，

$\therefore$　$PA+PB+PC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)=1.5$。

过P作BC的平行线交AB、AC于M、N，显然$\triangle AMN$也是正三角形。

由$\angle APM>\angle ANP=\angle AMP$，知$PA<AM$，

又$PB<MB+MP$，$PC<PN+NC$。



故 $PA+PB+PC<AM+MB+MP+PN+NC$

$=AB+MN+NC=AB+AN+NC$

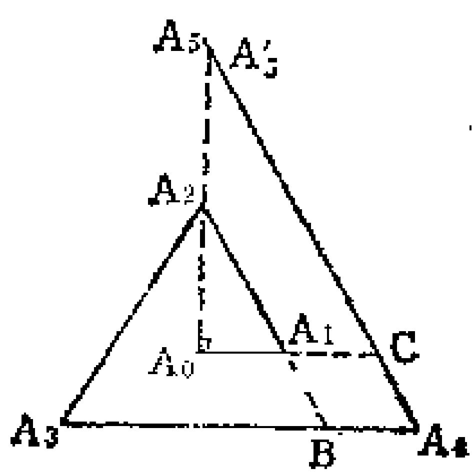
$=AB+AC=2$。

四、证明：显然任意十个连续的自然数中，一定有五个2的倍数和二个5的倍数，至多有四个3的倍数和二个7的倍数，但二个5的倍数中（一奇一偶）必有一个是2的倍数，四个3的倍数中（两奇两偶）必有二个是2的倍数，二个7的倍数中（一奇一偶）必有一个是2的倍数。因而任意十个连续的自然数中至多有九个数（13－4＝9）是2、3、5、7的倍数，即至少有一个数不是2、3、5、7的倍数，设这个数为S，则S的质因数都大于10。

设x为S的任一质因数，因为$x>10$。所以$S+x$和$S-x$都不等于其余九个自然数，则这十个连续的自然数中，只有S的x的倍数，即S与其余九个自然数无公约数，故这个数与其余九个自然数互质。

五、证：连结A_0A_2，延长交A_4A_5于A_5'。$\because \angle A_0A_1A_2=60°$，$A_0A_1:A_1A_2=1:2$，$\therefore A_2A_0\perp A_0A_1$。

延长A_0A_1、A_2A_1分别交A_4A_5、A_3A_4于C、B，显然$\triangle A_2A_3B$为正三角形，因此，$A_0A_1 /\!/ A_3A_4$。现只

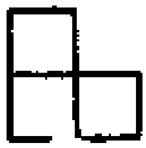
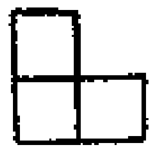


需证明 A_5' 和 A_5 重合。

$\because \quad \angle A_3A_4A_5=60^\circ$，

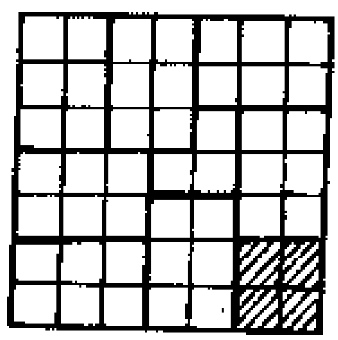
$\therefore BA_4=A_4C=CA_1=A_1B=1$。

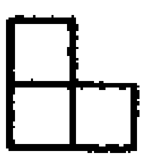
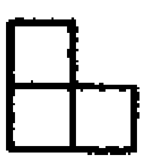
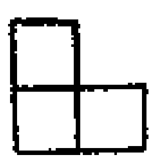
由 $\triangle A_0A_1A_2 \backsim \triangle A_0CA_5'$，得 $CA_5'=4$，于是 $A_4A_5'=5$，故 A_5' 和 A_5 重合。因而证明了 $A_0A_5 \perp A_3A_4$。

六、证明：因为挖去一个1×1的小方格后，就使一个2×2的方格形成一个“”形。所以也可以证明挖去一个2×2的方格后可以沿格线完整地剪成15个“”形。

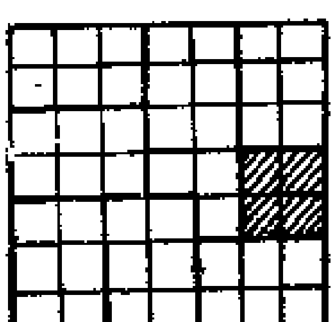
根据图形的对称性，挖去1×1的小方格所在的2×2方格的位置只有三种情况：

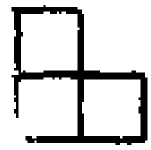
（1） 如图所示：



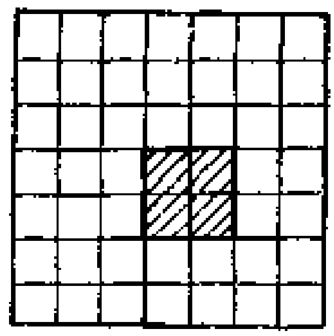
注意到两个“”形构成2×3矩形。图上有7个矩形和2个“”形，共16个“”形。

（2） 如图所示：



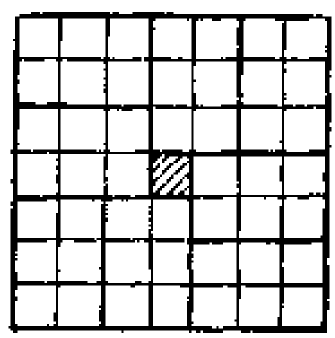
同样，图上有7个2×3矩形和2个“  ”形。

（3） 如图所示：



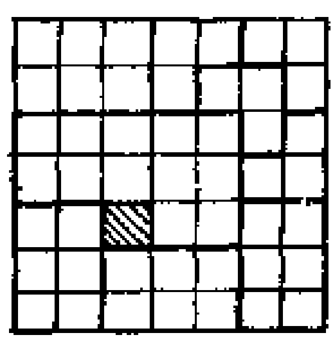
又分三种情况：

第一种情况

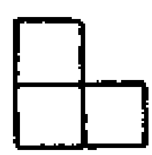


图上有8个 2×3 矩形

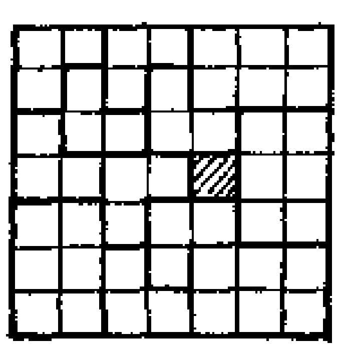
第二种情况



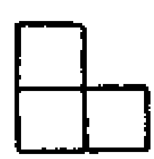
图上有6个 2×3 矩形和

4个“  ”形。

第三种情况



图上有 4个2×3 矩形和

8 个“  ”形。

所有情况都已列完，证毕。

1986年上海市初中数学竞赛

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	B	D	A	D	C

1.解：①当$x<0$时，$2-x=2-x$成立。

②当$0\leqslant x\leqslant 2$时，$2-x=2+x\Rightarrow x=0$。

③当$x>2$时，$x-2=2+x$，不成立。

故实数$x\leqslant 0$，而当$x\leqslant 0$时，$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=1-x$。

2.解：$\lg a=-1+0.02$

$$\Rightarrow \lg 10a=0.02=0.01\times 2$$

$$\Rightarrow \frac{\lg 10a}{2}=0.01$$

$$\Rightarrow \frac{\lg\frac{1}{10a}}{\lg 0.01}=0.01\Rightarrow \log_{0.01}\frac{1}{10a}=0.01$$

$$\Rightarrow 0.01^{0.01}=\frac{1}{10a}.$$

3.解：$\because A=10^5-10^4+1=9\times 10^4+1$，

$\therefore x=9$。

4.解：设追上甲时乙走了x分钟，

$\therefore 72x=65x+90$，

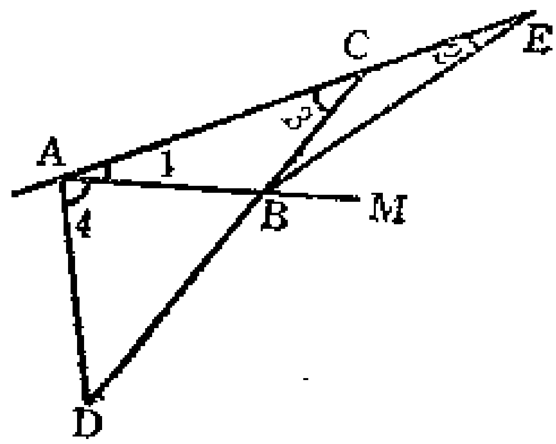
$7x=90$，

$$x=\frac{90}{7}.$$

$$72x=72\times\frac{90}{7}=925\frac{5}{7}=720+180+25\frac{5}{7},$$

故在DA边上。

5.解：设$\angle A=\angle 1$，$\angle C=\angle 3$，$\angle E=\angle 2$，$\angle BAD=\angle 4$，则$\angle 4=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle 1)$。



$\because \angle CBM=\angle 1+\angle 3$，

$\therefore \angle 1=\angle CBM-\angle 3$

$=\angle CBM-\left(\angle 2+\frac{1}{2}\angle CBM\right)$

$=\frac{1}{2}\angle CBM-\angle 1$

$$\Rightarrow \angle 1=\frac{1}{4}\angle ABD=\frac{1}{4}\left(\frac{180^\circ-\angle 4}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(180^\circ-90^\circ+\frac{1}{2}\angle 1\right)$$

$$=\frac{1}{8}\times 90^\circ+\frac{1}{16}\angle 1$$

$$\Rightarrow \frac{15}{16}\angle 1=\frac{1}{8}\times 90^\circ\Rightarrow \angle 1=12^\circ.$$

二、填充题

1.解：$x^4-5x^3+6x^2-5x$

$=x[x(x-2)(x-3)-5]$

$=x[x\cdot\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)-5]$

$=x(3x+\sqrt{3}x-5)$。

$=x(6-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3-5)$

$=x(-\sqrt{3}-2)=-1$.

2.解：由规定演算法则：

$(a*a)*(a+1)=(a+1)*(a*a)$

$\Rightarrow(a*a+1)(-a)=(a+1+1)(1-a*a)$

$-a\times(a*a)-a=(a+2)-(a+2)(a*a)$

$\Rightarrow -a=a+2-2\times a*a$

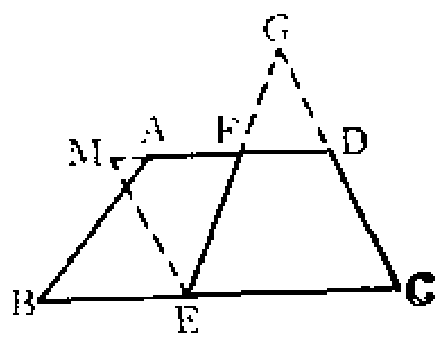
$\Rightarrow a*a=a+1$

$\Rightarrow(a+1)(1-a)=a+1$

$\Rightarrow a(a+1)=0$

$\Rightarrow a=0$或$a=-1$.

3.解：设$AF=a$，则$FD=a$，$AD=2a$，$BE=2a$，$EC=3a$，$BC=5a$.



则 $$\frac{S_{\Delta FED}}{S_{\Delta DEC}}=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}.$$

作$EM\parallel CD$交AD于M.

$\because$ $MD \mathrel{\underline{\parallel}} EC \Rightarrow MECD$为平行四边形.

$MD=EC$，$ME\parallel GC\Rightarrow\triangle GFD\backsim\triangle MEF$

$\Rightarrow EF:FG=MF:FD=2:1(\because MD=3a)$

$\therefore$ $$S_{\Delta GFD}=\frac{1}{2}S_{\Delta FED}.$$

故 $S_{\Delta GFD}:S_{\Delta FED}:S_{\Delta DEC}=1:2:6$.

4.解：$36=2\times2\times3\times3\times1$.

$\because$小张最高环不为9，

$\therefore$小张三次可能为2、3、6或4、3、3或6、6、1.

$\therefore 2+3+6=11$，$4+3+3=10$，$6+6+1=13$.

而小王三次可能为9、4、1或9、2、2。

$9+4+1=14$不可能，$9+2+2=13$可能。

故小王的三次环数为2、2、9。

5.解：由已知$\log_a b^{\lg bx}=\lg ax$

$$\Rightarrow \lg bx\cdot\log_a b=\lg ax$$

$$\Rightarrow(\lg b+\lg x)\cdot\lg b=\lg a(\lg a+\lg x)$$

$$\Rightarrow\lg^2 b+\lg b\cdot\lg x=\lg^2 a+\lg a\cdot\lg x$$

$$\Rightarrow\lg x\cdot\lg\frac{a}{b}=\lg ab\cdot\lg\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow\lg x=-\lg ab$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{ab}\Rightarrow abx=1$$

$$\Rightarrow\lg(abx)=\lg 1=0,$$

故 $ab^{\lg(abx)}=(ab)^0=\underline{1}$。

三、解：设100个正整数$a_1,a_2,\cdots,a_{100}$的最大公约数为d，并令$a_j=d\cdot a'_j\ (1\leqslant j\leqslant 100)$。

$$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=d(a'_1+a'_2+\cdots+a'_{100})=101101$$
$$=101\times 1001.$$

知a'_1、a'_2、$\cdots$、a'_{100}不可能都是1。

从而$a'_1+a'_2+\cdots+a'_{100}\geqslant 1\times 99+2=101\ (d\leqslant 1001)$。

另一方面，若取$a_1=a_2=\cdots=a_{99}=1001$，$a_{100}=2002$。

则满足$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=1001\times 101=101101$，

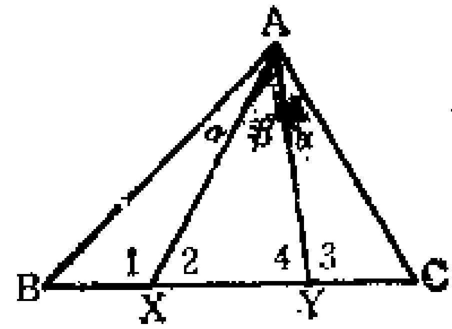
且$a_1,a_2,\cdots,a_{100}$的最大公约数为1001，

故$a_1,a_2,\cdots,a_{100}$最大公约数的最大可能值为1001。

四、证明：令$\angle XAB=\angle YAC=\alpha$，$\angle XAY=\beta$，则在$\triangle ABX$与$\triangle ABY$中用正弦定理得

$$\frac{BX}{\sin\alpha}=\frac{AB}{\sin\angle 1}=\frac{AB}{\sin\angle 2}\qquad(1)$$

$$\frac{BY}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AB}{\sin\angle 4}\quad(2)$$



同理，
$$\frac{CY}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\angle 4}\quad(3)$$

$$\frac{CX}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AC}{\sin\angle 2}\quad(4)$$

(1)×(2)及(3)×(4)得

$$\frac{BX\cdot BY}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AB^2}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4}\quad(5)$$

$$\frac{CX\cdot CY}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AC^2}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4}\quad(6)$$

(5)÷(6)得 $\dfrac{BX\cdot BY}{CX\cdot CY}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$，

∴原题得证。

五、解：由题设知：

$$\begin{cases}a>0\\ b<0\\ b^2-4ac>0\\ \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ b<-2\sqrt{a}\\ \sqrt{b^2-4a}<2a+b\\ b>-2a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a>0\\ b<-2\sqrt{a}\\ b>-(a+1)\\ b>-2a\end{cases}$$

故 $-(a+1)<b<-2\sqrt{a}$

当$a=1$时，$-2<b<-2$，b不存在。

当$a=2$时，$-3<b<-2\sqrt{2}$，b不存在；

当$a=3$时，$-4<b<-2\sqrt{3}$，b不存在；

当$a=4$时，$-5<b<-4$，b不存在；

当$a=5$时，$-6<b<-2\sqrt{5}$，$b=-5$，此时方程为

$$5x^2-5x+1=0.$$

$$x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{10}$$适合条件。

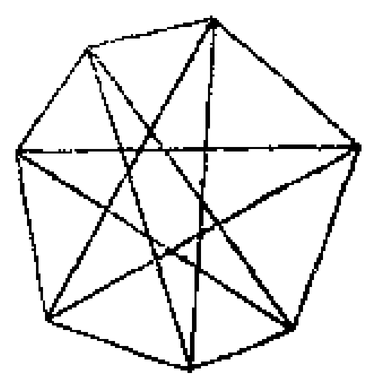
故a的最小值为5。

1987年上海市初中数学竞赛

一、选择题

题号	1	2	3	4	5
答案	C	A	C	B	D

1．解：如图所示，其他对角线未画出．此七边形可以看成是由七个顶点各引一条射线围成的，因而可能的边数不会超过7。



2．解：由$\begin{cases}x+y=2\\xy-z^2=1\end{cases}$容易观察

有解$\begin{cases}x=1\\y=1\\z=0.\end{cases}$

由$x+y=2$和$xy=1+z^2$知$xy>0$，且$x>0$，$y>0$。

$$xy-1=(2-y)y-1=2y-y^2-1=0-(y-1)^2<0$$
$$(y\neq 1)。$$

由此可见，对于其他 x、y 值，$xy-1=z^2>0$ $(z\neq 0)$ 不可能成立。

3． 解：$(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{64}+1)$

$$=\frac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{64}+1)$$

$$=\frac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{64}+1)$$

$$=\frac{1}{2}(3^{128}-1)=\frac{1}{2}\cdot 3^{128}-\frac{1}{2},$$

故原式$=\log_3\left(\frac{1}{2}\cdot 3^{128}\right)+\log_3 2$

$$=\log_3\frac{1}{2}+\log_3 3^{128}+\log_3 2=128。$$

4． 解：只需看不是$2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times11\times12\times13$的因数的最小质数，显然13是因数，17不是因数，且为最小质数。

5． 解：1—99页需用数字189个（前19页需29个数字）；100—199页需300个，200—299页需 300 个，以此类推，100—999页需用数字 2700 个；1000—1090页需用数字 364 个；1091—1095需用数字20个；由此可得1—1095页需

$$189+2700+364+20=3273(\text{个});$$

1—1096页需3277(个)；

1—1097页需3281(个)。

二、填空题

1． 解：方程变为 $(\lg 2+\lg x)(\lg 3+\lg x)=-a^2$，

$\lg^2x+\lg6\cdot\lg x+\lg2\cdot\lg3+a^2=0$。

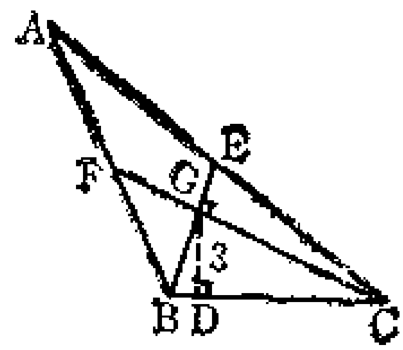
$\because$ 方程有两相异实数解，

$\therefore$ $\lg^26-4(\lg2\cdot\lg3+a^2)>0$，

$(\lg2+\lg3)^2-4\lg2\cdot\lg3-4a^2>0$，

$(\lg2-\lg3)^2-4a^2>0$，

$\left(\lg\frac{2}{3}\right)^2>4a^2$，故 $|a|<\lg\frac{2}{3}$。



2．解：如图，$BC=10$，$GD=3$。

设$BD=x$，$3^2=x(10-x)$，

解得$x=1$或9（舍去，$\because AB<AC$），

故 $BD=1$，$DC=9$。

由勾股定理，$GB=\sqrt{10}$，$GC=\sqrt{90}$。

$\because$ G为重心，$\therefore$ $GE=\frac{1}{2}\sqrt{10}$，$FG=\frac{1}{2}\sqrt{90}$，

故$AB=2FB=2\sqrt{BG^2+FG^2}=\sqrt{130}$，

$AC=2EC=2\sqrt{GE^2+GC^2}=\sqrt{370}$。

3．解：六位数能被33整除，即六位数既能被3整除，又能被11整除；被11整除要求六位数$\overline{19xy87}$的奇位数字的和与偶位数字的和之差能被11整除，即 $9+y+7=1+x+8$ 或 $9+y+7=1+x+8+11$（注意到 $0\leqslant x,\ y\leqslant9$），即 $x=y+7$ 或 $y=x+4$。不难看出有：$\begin{cases}y=0\\x=7\end{cases}$；$\begin{cases}y=1\\x=8\end{cases}$；$\begin{cases}y=2\\x=9\end{cases}$。

$\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}$；$\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$；$\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$；$\begin{cases}x=3\\y=7\end{cases}$；$\begin{cases}x=4\\y=8\end{cases}$；$\begin{cases}x=5\\y=9\end{cases}$。即

197087；198187；199287；190487；191587；192687；193787；194887；195987。

上述九个数中能被3整除要求各位数字之和能被3整除。

显然是以下三个数（即个数是<u>3</u>）

199287，192687，195987。

4．解：∵ 每个名次都有人猜对，而第2名只有丁说的是乙，∴ 乙是第2名，乙不是第3名⇒甲是第3名，甲不是第1名⇒丙是第一名，丙不是第5名⇒丁是第5名，丁不是第4名⇒第4名是<u>戊</u>。

	甲	乙	丙	丁	戊
甲		3	5		
乙				⑤	④
丙	1				④
丁		②	①		
戊	③			4	

5．解：$x^2-y^2=105$，

$(x+y)(x-y)=1\times3\times5\times7$。

$$\begin{cases} x+y=105, 1, 35, 3, 15, 7, 21, 5, \\ x-y=1, 105, 3, 35, 7, 15, 5, 21. \end{cases}$$

∵ 整数点 (x, y) 在第一象限内，

∴ 由 $\begin{cases} x+y=105, & 35, & 21, & 15 \\ x-y=1, & 3, & 5, & 7 \end{cases}$ 可求得第一象限的

整数点为 $\begin{cases} x=53, & 19, & 13, & 11. \\ y=52, & 16, & 8, & 4. \end{cases}$ 共四个点

故个数是<u>4</u>。

三、解：设 $\frac{AD}{AB}=x$，则

$$S_{\triangle ADE}=x^2S, \quad S_{\triangle ABE}=xS.$$

由题意有 $xS-x^2S=k^2$，

即 $Sx^2-Sx+k^2=0$。

此方程有实数解的条件是

$$\triangle=S^2-4Sk^2\geqslant0, \text{ 即 } S\geqslant4k^2.$$

此时方程的两解x_1，x_2满足$x_1+x_2=-\left(\frac{-S}{S}\right)=1$，

$$0<x_1x_2=\frac{k^2}{S}<1，\ \therefore\ 1<x_1，\ x_2<1.$$

故当$S>4k^2$时，本题有两解；

当$S=4k^2$时，本题有一解。

四、解：$\because\ \angle B'BC=30°$，$\therefore\ \angle BB'C=60°$.

$\angle A'B'B=\angle ABB'=60°$，

$\angle A'B'D=180°-2\times60°=60°$，

$\angle DCB'=90°-60°=30°=\angle A'GE$.

设$B'C=X$，则$BB'=2X$。由勾股定理有

$(2X)^2-X^2=BC^2=9$，$\therefore\ X=\sqrt{3}$.

于是$DB'=3-\sqrt{3}$，$GB'=2DB'=6-2\sqrt{3}$.

$\because\ A'B'=AB=3$，$\therefore\ A'G=3-(6-2\sqrt{3})=2\sqrt{3}-3$.

设$A'E=y$，则$EG=2y$.

$$(2y)^2-y^2=(2\sqrt{3}-3)^2，$$

$$y=\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-3)=2-\sqrt{3}.$$

于是$S_{\triangle A'EG}=\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3)=\frac{7\sqrt{3}}{2}-6$.

五、证：变换题设不等式，可得

$$z(x^2+y^2-z^2)+x(y^2+z^2-x^2)+y(z^2+x^2-y^2)-2xyz>0，$$

即 $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)>0$，

$\therefore$ $y+z-x$，$z+x-y$，$x+y-z$都是正数，或二负一正.

若二负一正，不妨设 $y+z-x<0$，$z+x-y<0$，

相加有 $2z<0$，$z<0$，这与 z 为正数的假定矛盾。故只能 $y+z-x>0$，$z+x-y>0$，$x+y-z>0$，即

$y+z>x$，$z+x>y$，$x+y>z$。故以 x、y、z 为长度的三条线段可以构成一个三角形，

命题得证。

1987年上海市中学生业余数学学校首届招生（初一）

一、选择题

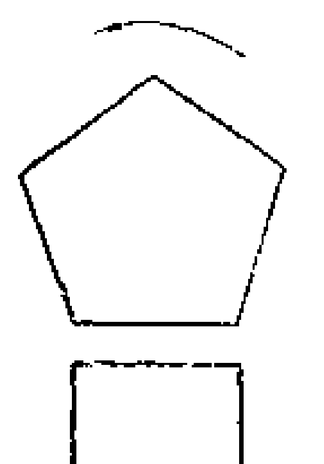
题号	1	2	3	4	5
答案	B	B	C	D	D

1. 解：设最小的一个偶数为x，

$x+x+2+x+4+x+6+x+8=1990$，

$\therefore$ $5x=1970$，故 $x=394$。

2. 解：设正方形转x圈，正五边形转y圈，



则 $4x=5y$，

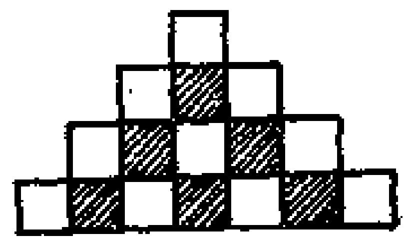
$\therefore$ $x=5$，$y=4$为最小正整数解。

故正方形旋转的圈数为5。

3. 解：由观察知

层　数	1	2	3	4	…	n	…
黑色方形数	0	1	2	3	…	$n-1$	…

故第1987层黑色正方形数目是1986。

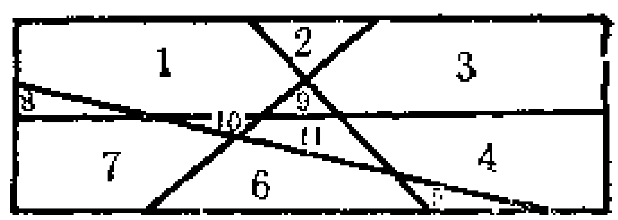


4．解：设原价为x，降价10%后价为$0.9x$，

要恢复原价应提价

$$\frac{0.1x}{0.9x}=\frac{1}{9}=11.\dot{1}\%.$$

5．解：如图，



二、填充题

1．解：原式$=1987\times(20000000+2000)$

$-2000(19870000+1987)$

$=1987\times2000-1987\times2000=\underline{0}$。

2．解：设这两位数为x。

$xn+4=109$，$n\in N$

∴　$nx=105$，$105=5\times3\times7$，

∴　$x=5\times3=15$，或 $x=5\times7=35$，

或 $x=3\times7=21$。

故所有两位数是$\underline{15}$、$\underline{21}$和$\underline{35}$。

3．解：由 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=1$

知 a、b、c 三数中有且仅有一个小于0，

∴　$abc<0$，

故 $\frac{|abc|}{abc}=\underline{-1}$。

4．解：设2分的x枚，5分的y枚。

$$\begin{cases}x+y=30\\2x+5y=99,\end{cases}$$

解得 $x=17$，$y=13$。

故 $xy=\underline{221}$。

5．解：∵ $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{3}$，

∴ $\frac{A+B}{AB}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 3(A+B)=AB\Rightarrow A(3-B)=-3B$

$\Rightarrow A=\frac{3B}{B-3}$。

∴ B必为3的倍数，设$B=3K$，

则 $A=\frac{9K}{3(K-1)}$，$\frac{3K}{K-1}$欲为整数，

$K-1$必为1或3，即K为2或4。

当$K=2$时，$A=B=6$。(舍去，∵ $A\neq B$)

当$K=4$时，$A=4$，$B=12$。

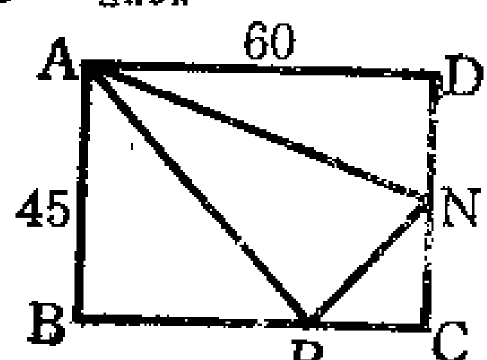
故 $A+B=\underline{16}$。

6．解：设$BP=x$

$S_{\triangle APN}=60\times45-S_{\triangle ABP}-S_{\triangle NPC}-S_{\triangle ADN}$

$=2700-\frac{45}{4}x-60\times\frac{45}{2}$

$=1350-\frac{45}{4}x$。

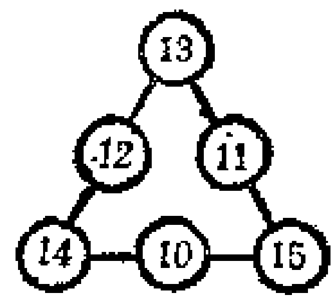


由假设 $S_{\triangle APN}\leqslant900$，

有 $1350-\frac{45}{4}x\leqslant 900$，

∴ $\frac{45}{4}x\geqslant 450$，故 $x\geqslant \underline{40}$。

7．解：欲使 S 取最大值，必须将13、14、15这三个数排在三角形三个顶点上，这样加起来的数较大。故有如下排法：



故 S 的最大值可能是 $\underline{39}$。

8．解：① 1在百位出现次数为 $\underbrace{100、\cdots、199}_{\text{共}100\text{次}}$

② 1在十位出现次数：

$\underbrace{10、\cdots、19}_{10\text{次}}$ 共 $10\times5=50$ 次。

③ 1在个位出现次数：

$\underbrace{01、11、\cdots、91}_{10\text{次}}$

共 $10\times5=50$ 次。

故1出现次数共为

$100+50+50=\underline{200}$（次）。

9．解：设大盒 x 只，小盒 y 只。

$$\begin{cases} x+y>10 \\ 12x+5y=99 \quad (*) \\ x<8 \end{cases}$$

∵ $99-12x$ 必为5的倍数

∴ $12x$ 尾数必为4或9，

∴ $x=2$ 或 $x=7$

代入 * 式得 $y=15$ 或 $y=3$（舍去，∵ $x+y>0$）。

故　$x=\underline{2}$，$y=\underline{15}$。

10．解：设各队比赛情况如下：

$$A:B=a:b$$

$$A:C=d:c$$

$$B:C=x:x$$

由表知：$b+c=1$①　$x+b=2$

$x+c=3$　　$c-b=1$②

综合①②得 $b=0$，$c=1$，$x=2$。

又 $a+x=4$，∴ $a=2$。

$a:b=\underline{2:0}$。

1988年上海市初一数学竞赛

1．答：$\underline{3^5\times7\times11\times13\times37}$。

2．解：由题意知 $a=k_1c+1$，$b=k_2c+2$（k_1，$k_2\geqslant1$），则

$$ab=(k_1c+1)(k_2c+2)=(k_1k_2c+2k_1+k_2)c+2.$$

故 ab 除以 c 的余数是 $\underline{2}$。

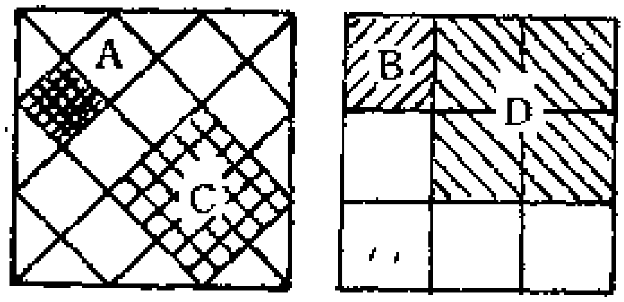
3．解：设相同结果为a，则四个数分别为：$a-3$、$a+3$、$\frac{a}{3}$、$3a$，

由题意　$a-3+a+3+\frac{a}{3}+3a=64$，

即　$\frac{16}{3}a=64$，$a=\underline{12}$。

4．解：见图，A 类大小的正方形有12个，B 类大小的

正方形有 9 个，C 类大小正方形有 5 个，D 类大小正方形有4 个，外面最大正方形 1个。



$12+9+5+4+1=31$。

5. 解：设底楼房间数为 x，则二楼房间数为 $x+5$。由题意知 $\frac{48}{5}<x<\frac{48}{4}$，　$9.6<x<12$，

则　x 为10或11。

又由题意知 $\frac{48}{4}<x+5<\frac{48}{3}$，即$7<x<11$，故$x=\underline{10}$。

6. 解：∵ $1988=1\times2\times2\times7\times71$。

又要求 a，b，c，d 四个数互不相同。

∴ 只可能有三种：1、4、7、71；1、2、14、71；1、2、7、142。

故其中最大值为 $a+b+c+d=1+2+7+142=\underline{152}$。

7 解：甲为了保证占领最后一格而获胜，甲必须占领第1984格，要占第1984格，就必须占第1980格，要占第1980格，就必须占第1976格，以此类推，凡 4 的倍数的空格甲必须占领，因此甲第一步必须把棋子向右移 $\underline{3}$ 格。

8. 解：由题意知 $150\leqslant$身高$\leqslant160$，身高为 150cm、151cm、152cm、…、160cm 共有11个数，根据抽屉原则，至多从任意的12个人中至少能找到 2 个人身高相同（11个人中可能有 2 个人身高相同，也可能每人身高都不相同），以此类推，至多从任意的23个人中至少能找到 3 个人的身高相同；至多从任意的$\underline{34}$个人中至少能找到 4 个人的身高相同。

9. 解：$|a-1|+(ab-2)^2=0\Rightarrow a-1=0$，$ab-2=0\Rightarrow$

$a=1$，$b=2$，代入原式得

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{1987\times1988}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1987}-\frac{1}{1988}$$

$$=1-\frac{1}{1988}=\frac{1987}{1988}.$$

10．解：∵ $23\times3=69$，∴ 个位数为9，十位数进6，∵ $22\times3=66$，∴ 十位数为2，百位数进7，∵ $21\times3=63$，∴ 百位数为0，千位数进7，∵ $20\times3=60$，∴ 千位数为7。

故所得的和的末四位数字是7029。

11．解：从1到10000这一万个自然数中，能被5整除的数有2000个，能被7整除的数有1428个（$10000=1428\times7+4$），其中能同时被5整除的数，如35、70、…有285个（$1000=285\times35+25$），因此，只能被7整除的数有$1428-285=1143$个。

故有$2000+1143=3143$个数能被5或7整除。

12．解：由偶数码（零除外）组成的最小五位数是22222。∵ $22222=1388\times16+14$

故22224是能被16整除的最小五位数。

13．解：若三位数为100、200、…、900时，比值为$\frac{100}{1+0+0}=\frac{200}{2+0+0}=\cdots=\frac{900}{9+0+0}=100$，若末两位数不全为0，则比值$\frac{abc}{a+b+c}<\frac{(a+1)100}{a+1}=100$，

故M的最大值是100。

14. 解：甲、乙两人首次相遇时间花了$\frac{90}{2+3}=18$(秒)，以后每次相遇均需$\frac{90\times 2}{2+3}=36$(秒)，

$$(12\times 60-36)\div 36=19.5,$$

故他们在这段时间内共相遇$1+19=\underline{20}$次

1988年上海市初二数学竞赛

1. 解：利用$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$，
$10^3=100+3xy\cdot 10$，解得$xy=30$，
再有 $x^2+y^2+2xy=(x+y)^2=100$，
故得 $x^2+y^2=40$。

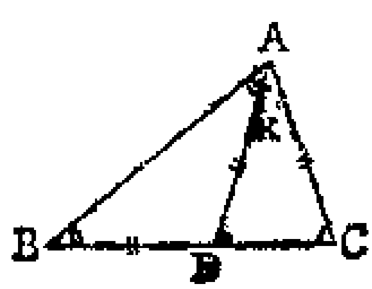
2. 解：因$x^2=\frac{5+2\sqrt{5}+1}{4}$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1=x+1 \quad (x\neq 0),$$

故 $\frac{x^3+x+1}{x^5}=\frac{x^3+x^2}{x^5}=\frac{x^2(x+1)}{x^5}$

$$=\frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\underline{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

3. 解：如图，由$\angle ADC=2\angle BAD$



得 $\frac{180^\circ-x}{2}=2(63^\circ-x)$，

解得 $x=\angle DAC=\underline{24}$度。

4． 解：因两车相向行驶的相对速度是相同的，故坐在车上看另一车驶过窗口的时间与车长成正比。设坐在快车上看慢车驶过窗口的时间为 x，则 $6:x=150:200$，$x=\underline{8}$(秒)。

5． 解：∵ $2\angle B=5\angle A$，∴ $\dfrac{\angle A}{2}=\dfrac{\angle B}{5}=x$，

则 $\angle A=2x$，$\angle B=5x$。

∵ $\angle A$是最小角，$\angle B$是最大角，

∴ $\angle A\leqslant\angle C\leqslant\angle B$。

由此可知，当 $\angle C=\angle A=2x$ 时可得$\angle B$的最大值，$2x+2x+5x=9x=180^\circ$，$x=20^\circ$，

故 $\angle B$的最大值 $m^\circ=5x=100^\circ$。

当 $\angle C=\angle B=5x$时，可得$\angle B$的最小值，

$2x+5x+5x=180^\circ$，$x=15^\circ$，

故$\angle B$的最小值 $n^\circ=5x=75^\circ$。

则 $m+n=\underline{175^\circ}$。

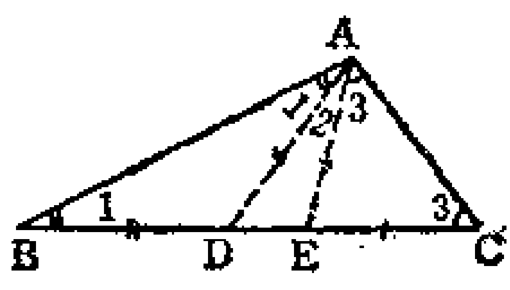
6． 解：见1988年上海市初一数学竞赛试题解答第8题。(答：$\underline{34}$)

7． 解：我们首先分析这个商只可能是两位数。∵$30\times236=7080$，∴十位数只能是2，而且不难看出，个位数只能是3或8。不妨试一试：

$23\times236=5428$，　$28\times236=6608$。

由此可见，商是$\underline{28}$。

8． 解：如图，由题设



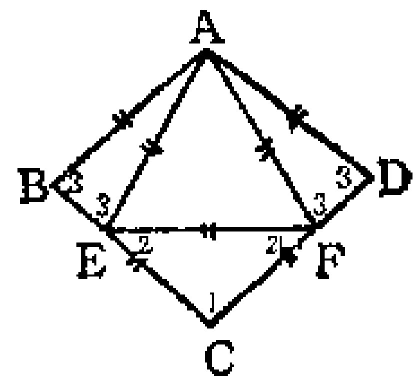
$\angle1+2\angle2+\angle3=150^\circ$ (1)

∵ $\angle ADE=2\angle1$，$\angle AED=2\angle3$。

∴ $2\angle1+\angle2+2\angle3=180^\circ$ (2)

(1)×2－(2)得　$3\angle 2=120^\circ$，$\angle 2=40^\circ=\angle DAE$，

故　$\angle BAC=150^\circ-40^\circ=\underline{110^\circ}$。



9．解：如图。

$$\angle 2+\angle 3=180^\circ-60^\circ=120^\circ \qquad (1)$$

$$\angle 1+2\angle 2=180^\circ \qquad (2)$$

$\angle A=\angle 1=60^\circ+2(180^\circ-2\angle 3)=60^\circ+360^\circ-4\angle 3$，

$$\angle 1+4\angle 3=420^\circ \qquad (3)$$

(1)×2－(2) 得　$2\angle 3-\angle 1=60^\circ$　(4)

(3)＋(4)　得　$6\angle 3=480^\circ$，$\angle 3=80^\circ$，代入(4)式，得　$160^\circ-\angle 1=60^\circ$，则$\angle C=\angle 1=\underline{100^\circ}$。

10．解：$x^2-y^2=1988$，

$(x+y)(x-y)=1\times 2\times 2\times 7\times 71$。

显然有不同整数解的方程组是：

$\begin{cases}x+y=2\\x-y=994;\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=-2\\x-y=-994;\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=14\\x-y=142;\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=-14\\x-y=-142;\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=994\\x-y=2;\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=-994\\x-y=-2;\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=142\\x-y=14;\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=-142\\x-y=-14.\end{cases}$

故共有八组不同的整数解。

11．解：∵三角形的周长必须满足以下条件：

(1)　三边长之和为30；

（2） 三边互不相等，且为整数；

（3） 两边之和大于第三边；

（4） 三角形不全等。

∴ 三边长(a,b,c)只可能有以下情况：

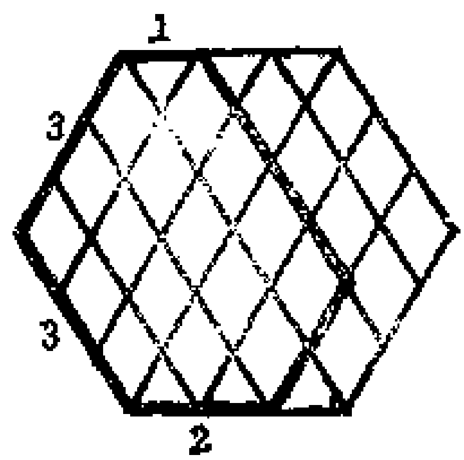
(3,13,14)；(4,12,14)；(5,12,13)；(5,11,14)

(6,11,14)；(6,10,14)；(7,11,12)；(7,10,13)

(7,9,14)； (8,10,12)；(8,9,13)； (9,10,11)

故不全等的三角形共有<u>12</u>个。

12． 解：作正六边形，将每边三等分，按右图连接。



注意粗线条围成的六边形的六个内角都是120°，连续四边长依次是1,3,3,2,显然另两边长依次为2,4；故此六边形的周长是<u>15</u>。

13． 解：图见原题，设$\angle BFE=a$，则不难求出$\angle BDE=2a-180°$，$\angle BDA=4a-360°$，

又∵ $\angle BCA=2\angle BDA-180°=8a-900°>0$

$a>\dfrac{900°}{8}$，故$\angle BFE$至少是<u>113°</u>。

14． 解：在1～1988中，取末两位数为00的数，即100，200，300，…，1900，显然满足条件，这样的数有19个。

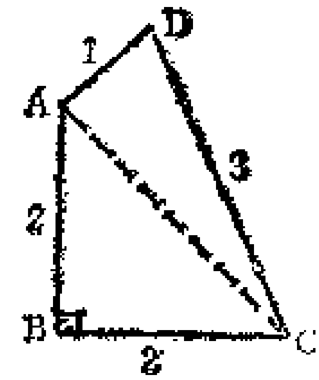
在1～1988中，取末两位数为50的数，即50，150，250，…，1950，显然也满足条件，这样的数有20个。除此之外没有了。

故在1～1988中，最多能取<u>20</u>个数，使在所取的数中，任意两个数之和能被100整除。

1988年上海市初三数学竞赛

一、填空题

1. 解：要使 n 最小，则需 n 的位数最少，要使位数最少，则各位数码要取最大。考虑到 $1988=9\times220+8$，故 n 的最小值是 $8\underbrace{99\cdots9}_{220个}$。



2. 解：因本题的凸四边形的内角度数与边长无关，不妨设 $AB=BC=2$，$CD=3$，$DA=1$。$\because$ $\angle ABC=90^\circ$，

$\therefore$ $AC=2\sqrt{2}$。又$\because$ $AD^2+AC^2=1^2+(2\sqrt{2})^2=9=3^2=CD^2$。

由勾股定理的逆定理知 $\angle DAC=90^\circ$。故 $\angle DAB=135^\circ$。

3. 解：$\because n^{50}$ 为1000位数，$\therefore \lg n^{50}=999.\cdots$，

$$则\lg\frac{1}{n}=-\frac{1}{2}\lg n=-\frac{1}{100}\lg n^{50}$$

$$=-9.99\cdots=-10+0.00\cdots$$

故 $\sqrt{\frac{1}{n}}$ 的值在小数点后连续有9个零。

4. 解：设 $x=[x]+a$，其整数部分为 $[x]$，由题意有 $[x]^2=x\cdot a$；

若 $[x]=2$，则 $[x]^2=4$。又 $0<a<1$，则 $x\cdot a<3$，这与 $[x]^2=x\cdot a$ 矛盾，故 $[x]\neq2$。同理可验证 $[x]>2$ 时均不成立，那么必有 $[x]=1$，则 $x=1+a$。

$[x]^2 = x \cdot a \Rightarrow a\ (a+1) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a+1} = a \Rightarrow \dfrac{1}{x} = a$，

故$x - \dfrac{1}{x} = x - a = 1 + a - a = 1$。

5． 解：观察$x^2 - 2y^2 = 1$，显然，$2y^2$为偶数$\Rightarrow x^2$必为奇数$\Rightarrow x$为奇数。

将方程变形为$y^2 = \dfrac{x^2-1}{2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{2}$，$(x+1)$、$(x-1)$均为偶数$\Rightarrow y^2$为偶数$\Rightarrow y$为偶数。

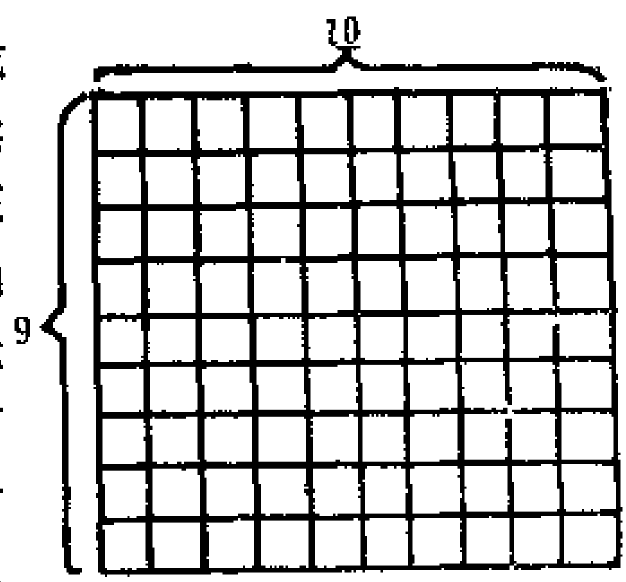
一个数既是偶数又是质数，这个数必为2，

则$y=2$。代入原方程得$x=3$。

故$x=3$，$y=2$。

6． 解：示意图如右．我们知道在水平线上取两点，然后以这两点的连线作为这个正方形的上边，再向下延伸来确定左边、右边和底边，这样就可以确定一个满足条件的正方形，因此，解题的关键就在于这样的两点能取多少组。显然，对于边长为1的正方形，有10×9个；对于边长为 2 的正方形，在水平线上取相距为2的两点可取9组，在垂直方向上有8条这样的线可取，故边长为2的正方形总数为9×8。依次类推，满足条件的正方形总数$= \underbrace{10 \times 9}_{\text{边长为1}} + \underbrace{9 \times 8}_{\text{边长为2}} + \underbrace{8 \times 7}_{\text{边长为3}} + \cdots$

$+ \underbrace{3 \times 2}_{\text{边长为8}} + \underbrace{2 \times 1}_{\text{边长为9}} = 330$。



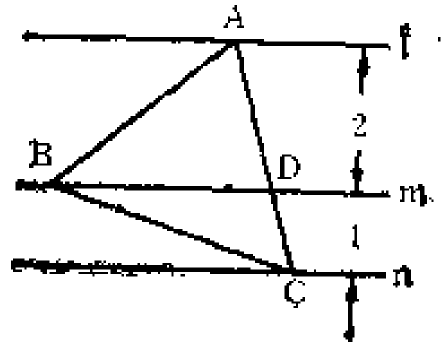
7．解：由题意知：

$[(4n+2)-2]\cdot 180^\circ=90^\circ\times 3+[(4n+2)-3]\cdot 30^\circ\cdot k$，

k为正整数，$\therefore 24n=9+(4n-1)k$，$k=\dfrac{24n-9}{4n-1}=6-\dfrac{3}{4n-1}$。

$\because$ k为正整数，$\therefore$ $4n-1\leqslant 3$，又n为自然数，

故 $n=1$。



8．解：如图．设正$\triangle ABC$边长为a，则$AD=\dfrac{2}{3}a$，$CD=\dfrac{a}{3}$。

在$\triangle BCD$中，由余弦定理：

$$BD^2=a^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2-\frac{2}{3}a^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{9}a^2，\therefore\ BD=\frac{\sqrt{7}}{3}a。$$

$$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}a\cdot 1=\frac{\sqrt{7}}{6}a。$$

又 $S_{\triangle BCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}BC\cdot CD=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a^2}{3}$，

$\therefore$ $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2=\dfrac{\sqrt{7}}{6}a$，故$a=\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$。

9．解：由韦达定理有$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\cdot\beta=1-m。\end{cases}$

$|\alpha|+|\beta|\leqslant 5\Rightarrow 0\leqslant(|\alpha|+|\beta|)^2\leqslant 25\Rightarrow 0\leqslant\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|\leqslant 25\Rightarrow 0\leqslant 1-2(1-m)+2|1-m|\leqslant 25\Rightarrow -1\leqslant 2|1-m|-2(1-m)\leqslant 24$，

则$-\dfrac{1}{2}\leqslant|1-m|-(1-m)\leqslant 12$。

$m\geqslant 1$时，有$\dfrac{3}{4}\leqslant m\leqslant 7$，则$1\leqslant m\leqslant 7$；

$m<1$时，不等式恒成立。

再研究$\Delta\geqslant 0$．$\therefore\ \Delta=1-4(1-m)\geqslant 0$，即$m\geqslant\frac{3}{4}$，

故 $\frac{3}{4}\leqslant m\leqslant 7$。

10． 解：设有x条蜈蚣，y条龙，龙有m支脚，由已知有：

$$\begin{cases}x+3y=26 & ①\\40x+my=298 & ②\end{cases}$$

$40\times①-②$得 $y=\frac{742}{120-m}$．

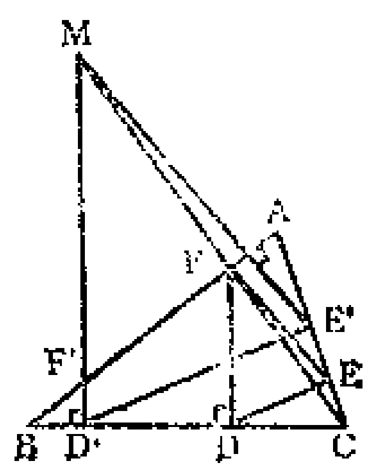
由①有 $3y<26$，$y\leqslant 8$，$\therefore\frac{742}{120-m}\leqslant 8$，则$93\leqslant 120-m\leqslant 120$。

又$\because$ $742=2\times 7\times 53$，必有$120-m=2\times 53$，$\therefore m=14$。

故龙有14支脚。

二、解：存在。

具体作法如下：在AB上任取一点F'，作$F'D'\perp BC$，D'为垂足，作$D'E'\perp AC$，E'为垂足，作$E'M\perp AB$，与$D'F'$（或其延长线）相交于M。



连CM，交AB于F，过F分别作MD'、ME'的平行线交BC、AC于D、E。由相似三角形易得：

$$\frac{CD}{CD'}=\frac{CF}{CM}=\frac{CE}{CE'},$$

则 $DE\parallel D'E'$。

因此，$FD\perp BC$，$DE\perp AC$，$EF\perp AB$，故D、E、F满足题意。

1989年上海市初一数学竞赛

1. 解：有1234，1243，1324，1342，1423，1432共6个。

2. 解：研究各段线段长度和对应序号的关系，不难发现，序号为偶数$2n$的线段长度是n。

故㉔号线段的长度是$24\div 2=12$。

3. 解：$abc\neq 0$表示a、b、c都不等于0。

观察方程$\dfrac{x-a-b}{c}+\dfrac{x-b-c}{a}+\dfrac{x-c-a}{b}=3$。

根据a、b、c位置上的循环性，可假设

$$\frac{x-a-b}{c}=\frac{x-b-c}{a}=\frac{x-c-a}{b}=1,$$

则 $x=a+b+c$。

经检验，$x=a+b+c$满足方程。

4. 解：观察各括号内数的和，不难看出有如下关系：

括号	1	2	3	4	……	59
和数	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	……	$\frac{59}{2}$

故总和为$\dfrac{1}{2}(1+2+3+\cdots+59)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(1+59)59}{2}=885$。

5. 解：$3x-a\leqslant 0\Rightarrow x\leqslant\dfrac{a}{3}$。

要使x只有三个正整数解1、2、3，

则必有$3\leqslant\frac{a}{3}<4$，故 $9\leqslant a<12$。

6． 解：$6\oplus8=6+8-1=13$，$3\otimes5=15-1=14$。

$13\oplus14=27-1=26$，则$4\otimes26=103$。

7． 解：由于76^n的末两位数码恒为76，25^n的末两位数码恒为25，$76+25=101$，故末两位数码是01。

8． 解：要保证取出必有10只同色球，从可能出现的最坏情况考虑，若黑球和白球共10个均取完，在另四种颜色中，有三种各取了9个，另一种取了10个，故至少必须取出$10+10+9\times3=47$只球。

9． 解：注意到平方数的尾数为0、1、4、5、6、9，

设两位数各位数字之和为S，则$1\leqslant s\leqslant18$。

（1） 设s^3的尾数为0，则$s=10$，$s^3=1000$，但$\sqrt{1000}$非整数；

（2） 设s^3的尾数为1，则$s=1$或11（质数，不合条件）；

（3） 设s^3的尾数为4，则$s=4$或14，$\sqrt{4^3}=8$非两位数，$\sqrt{14^3}$非整数，不合条件；

（4） 设s^3的尾数为5，则$s=5$或15，$\sqrt{15^3}$与$\sqrt{5^3}$均非整数，不合条件；

（5） 设s^3的尾数为6，则$s=6$或16，$\sqrt{6^3}$非整数，$\sqrt{16^3}=64$，但$6+4\neq16$，不合条件；

（6） 设s^3尾数为9，则$s=90$，$\sqrt{9^3}=27$，又$2+7=9$。

故这样的两位数是27。

10． 解：设九位数$x=32a357176$，若x可被72整除，则x一定能被9和8整除，x要被9整除，需各位数字之和能被9整除，即$(28+a+b)$能被9整除，则$a+b=8$或$a+b=17$。

又x要被8整除，$x=32a357\times10^3+17b$，$\because$ 1000能被8整除，$\therefore 17b$应能被8整除，则$b=6$，因此$a=2$。

故此数为322357176。

11．解：由题意知，此数除以5余1，尾数为1、6。又除以2余1，故尾数为奇数。$\therefore$ 此数尾数为1。又为7的倍数，此数可能是以下几种情况（小于500）：

a	13	23	33	43	53	63
$7a$	91	161	231	301	371	441

只有301满足全部条件。故篮子中共有苹果301个。

12．解：设甲、乙班人数分别为$a+1$、$b+1$，则由题意知 $100<13a+6=10b+5\leqslant200$。

欲使$13a+6$尾数是5，需$13a$尾数是9，则a尾数为3，故$a=13$。

代入，$13\times13+6=10b+5$，$b=17$。

故甲班有14人，乙班有18人。

1989年上海市初二数学竞赛

1．解：若x为斜边，$x=\sqrt{6^2+8^2}=10$。

若x为直角边，$x=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$。

$\therefore$ $x=10$或$2\sqrt{7}$。

2．解：见1987年桂林市初中数学竞赛试题第四题解答。

3．解：$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}=1.5+\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$(\sqrt{7}\approx 2.645)$,

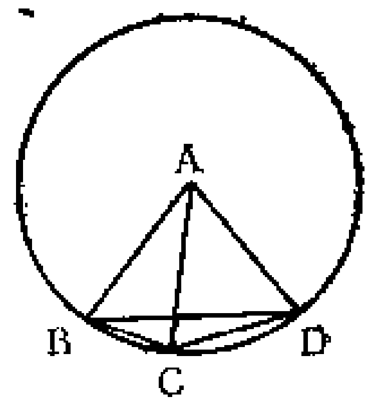
$\therefore\quad x=1+1=2$,

$$y=\frac{3+\sqrt{7}}{2}-2=\frac{\sqrt{7}-1}{2}.$$

则$x^2+(1+\sqrt{7})\times y=4+(1+\sqrt{7})\times 2\times\frac{\sqrt{7}-1}{2}$

$=10$。

4. 解：因$AB=AC=AD$，故可以A为圆心，AB为半径作圆，那么圆必过C、D两点，$\therefore\ \angle DAC=2\angle CBD$，$\angle BAC=2\angle BDC$。



$\because\quad \angle DAC=k\angle BAC$，$\therefore\angle CBD=k\angle BDC$。

5. 解：

$$\begin{cases}2x+3y=2k+1 & (1)\\ 3x-2y=4k+3 & (2)\\ x+y=6 & (3)\end{cases}$$

由(1)和(2)得 $x=\frac{1}{13}(16k+11)$，$y=\frac{1}{13}(-2k-13)$，

代入(3)得$k=5$。

6. 解：$(2a-b)x>5b-a$。$\because\ x<\frac{10}{7}$，

$$x<\frac{5b-a}{2a-b}\ (2a-b<0),\ \frac{10}{7}>0,\ \therefore 5b-a<0,$$

$\therefore\ x<\frac{a-5b}{b-2a}$。设$\begin{cases}a-5b=10\\ b-2a=7\end{cases}$，则$\begin{cases}a=-5\\ b=-3.\end{cases}$

$\therefore\ ax>b$的解是$x<\frac{3}{5}$。

7． 解：$\because\ x=2-\sqrt{3}$，$\therefore\ (x-2)^2=3$。

$x^2-4x+5=(x-2)^2+1=4$，

$$
\begin{aligned}
x^4-4x^3-x^2+9x-1&=x^2(x-2)^2-5x^2+9x-4\\
&=3x^2-5x^2+9x-4\\
&=-2x^2+9x-4\\
&=-2(x-2)^2+x+4\\
&=x-2=-\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

故原式$=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。

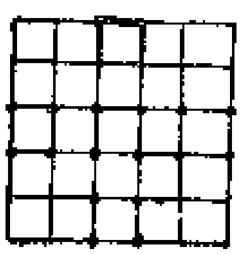
8． 解：$\overline{xy}-\overline{yx}=10x+y-10y-x=9(x-y)$。

欲使$9(x-y)$为立方数，则$x-y=3$，

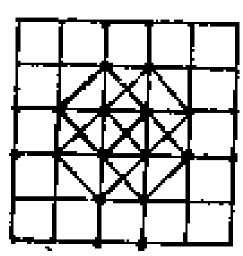
$\therefore\ x=3$、4、5、6、7、8、9。

故这样的两位数共有7个。

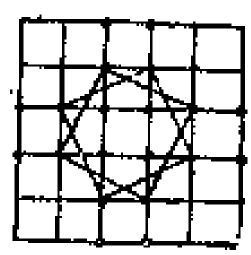
9． 解：有如下五种边长的正方形，总共有$9+4+2+4+2=21$个。



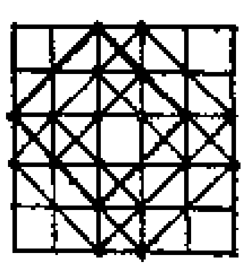
9个



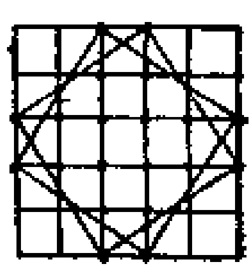
4个



2个



4个



2个

10． 解：利用整数的性质：一数能被11整除，当且仅当该数的偶数项的和与奇数项的和之差能被11整除。该数的奇

数项之和为$10+9n$，该数的偶数项之和为$2+18n$，两者之差为$2+18n-10-9n=9n-8$。要使$9n-8$为11的倍数，不难看出$n=7$。

故最小数为 $\overbrace{1989\cdots\cdots1989}^{7个1989}129$。

11. 解：任何数都可以分解为质因数的幂的乘积的形式：$1\cdot2\cdot3\cdots\cdots98\cdot99\cdot100=2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^d\cdots\cdots97^1$。

易得，$a=50+25+12+6+3+1=97$，

$b=33+11+3+1=48$。

$$\therefore\quad \frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots98\cdot99\cdot100}{6^{100}}=\frac{2^{97}\cdot3^{48}\cdots\cdots97^1}{6^{100}}$$

$$=\frac{5^c\cdot7^d\cdots\cdots97^1}{2^3\cdot3^{52}},$$

故分母是$2^3\cdot3^{52}$。

12. 解：方程$(10-x)(8-x)=2^y$改写为：

$(8-x)[(8-x)+2]=2^y$。令$8-x=z$，则$z(z+2)=2^y$。

不难看出，当$y=3$，$2^y=8$时，$z=2$或$z=-4$均满足方程。即$x=8-z=6$或$x=8-z=12$。

故$x=6$，$y=3$，或$x=12$，$y=3$。

1986年"缙云杯"初中数学邀请赛

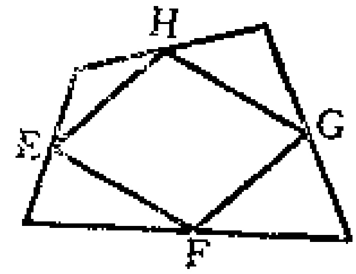
一、判断正误。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	✓	✓	✓	×	×	✓	×	✓	×	✓

1. 证：容易证明（略）。

2. 证：因为三角形的三条边的垂直平分线交于一点（即外心），所以对直角三角形也不例外。

因为外心到各顶点的距离相等，而斜边中点到直角三角形各顶点的距离也相等，故外心必为斜边的中点。



3. 证：容易证明 $EFGH$ 为一平行四边形，而平行四边形是中心对称图形，所以$EFGH$是中心对称图形。

4. 解：因为当 $a=b=c=0$ 时，$a^2+b^2=c^2$ 成立，但不是直角三角形的三边的长。

5. 解：因为当$a<x$时，等式无意义。

6. 解：当n为正奇数时，$[1-(-1)^n]=2$；

当n为正偶数时，$[1-(-1)^n]=0$。

故当n为正整数时，$[1-(-1)^n](n^2-1)$必为偶数。

7. 解：因为当$a=2$，$b=-2$时，

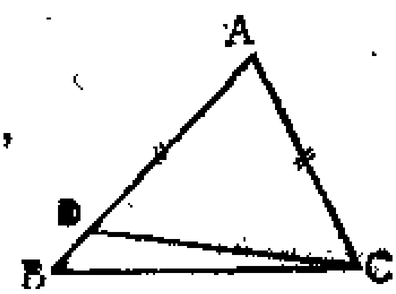
$a^2+b^2=2|ab|$成立。

8. 证：$\because$ $AD=AC$，

$\therefore$ $\angle ADC=\angle ACD$，

即 $\angle BCD+\angle B=\angle BCA-\angle BCD$，

故 $\angle BCD=\frac{1}{2}(\angle BCA-\angle B)$。



9. 解：设$1987=x$，

则 $\sqrt{1986\times1987\times1988\times1989+1}$

$=\sqrt{x(x-1)(x+1)(x+2)+1}$

$=\sqrt{(x^2+x)(x^2+x-2)+1}$

$=\sqrt{(x^2+x)^2-2(x^2+x)+1}$

$=\sqrt{(x^2+x-1)^2}=\sqrt{(1987^2+1987-1)^2}$

$=1987^2+1987-1$。

故这个数是一整数。

10． 解：因为得分情况只有三种，$1986\div3=662$，所以若每种得分相同的题数都小于662，则题目总和就小于1986，产生矛盾，故一定可以找到662道题，它们的得分都相同。

二、选择题

题 号	1	2	3	4	5
答 案	A	B	A	D	A

1． 解：方程$ax^2+bx+c=0(a<0)$的二实根为

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_1-x_2=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}.$$

$\because\ \sqrt{b^2-4ac}\geqslant0$，$a<0$，$\therefore\ x_1-x_2\leqslant0$。

即$x_1\leqslant x_2$，故 $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\geqslant\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

2． 解：$x^2-y^2=12$，$(x+y)(x-y)=12$，

$\because\ x$、y为整数，$\therefore\ x+y$，$x-y$也为整数，且同为奇数或偶数，因此

$(x+y)(x-y)=2\times6$或$(x+y)(x-y)=(-2)(-6)$。

$\begin{cases}x+y=2\\x-y=6;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=6\\x-y=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-6\\x-y=-2;\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=-2\\x-y=-6.\end{cases}$

解得

$$\begin{cases} x=4 \\ y=-2; \end{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=2; \end{cases} \begin{cases} x=-4 \\ y=-2; \end{cases} \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases},$$

故方程$x^2-y^2=12$的整数解有4组.

3. 解: $\sqrt{\dfrac{1\cdot2\cdot3+2\cdot4\cdot6+\cdots+n\cdot2n\cdot3n}{1\cdot5\cdot10+2\cdot10\cdot20+\cdots+n\cdot5n\cdot10n}}$

$$=\sqrt{\frac{6(1^3+2^3+\cdots+n^3)}{50(1^3+2^3+\cdots+n^3)}}$$

$$=\sqrt{\frac{6}{50}}=\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

4. 解: $x^2+2ax+b^2=0$, $x^2+2cx-b^2=0$.

将两方程两减得 $2ax-2cx+2b^2=0$,

显然, $c\neq a$,(否则, $b=0$, 与题设矛盾)

故 $x=\dfrac{b^2}{c-a}$.

将两方程相加得 $x^2+(a+c)x=0$.

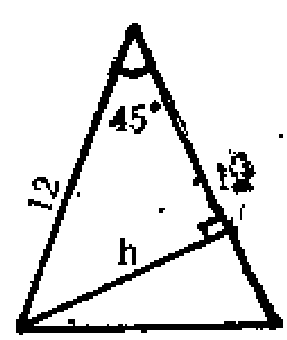
$\because$ $x\neq0$, $\therefore$ $x=-(a+c)$.

$\because$ 两方程有一个相同的根.

$\therefore$ $\dfrac{b^2}{c-a}=-(a+c)$, $b^2=-(c^2-a^2)$,

即 $b^2+c^2=a^2$.

故 此三角形为以a为斜边的直角三角形.

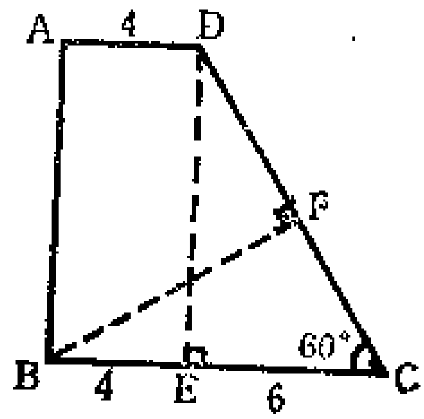


5. 解: 先研究甲板. 因是等腰三角形, 顶角为45°, 故底角大于45°, 由正弦定理知, 腰长大于底长, 从而可推断腰上的高h小于底上的高. 由勾股定理知

$h=\sqrt{12^2-(12\cos45^\circ)^2}=\sqrt{144-72}=\sqrt{72}<\sqrt{72.25}$
$=8.5$,

由此可见，甲板能穿过。

再研究乙板（直角梯形$ABCD$）。



斜腰$CD=2(10-4)=12$，

梯形的高 $DE=12\cdot\sin60^\circ=6\sqrt{3}$，

过B作CD的垂线BF，

则$BF=10\sin60^\circ=5\sqrt{3}=\sqrt{75}>\sqrt{72.25}=8.5$。

故乙板不能穿过。

三、填空题

1．解：∵ $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{3^2-6\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}$
$=3-\sqrt{2}$，

∴ $a=1$，$b=2-\sqrt{2}$。

故 $a+b+\dfrac{2}{b}=3-\sqrt{2}+\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}=\underline{5}$。

2．解：令$\sqrt{x+y+z+1}=u(u\geqslant0)$。

将 $x+y+z=\sqrt{x+y+z+1}+5$变形为$u^2-u-6=0$。

解得 $u=3$，$u=-2$(舍去)。

故 $\sqrt{x+y+z+1}=3$，即$x+y+z=8$。

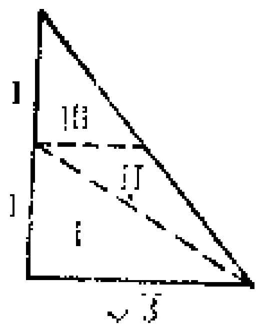
由第二个式子得 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}=\dfrac{x+y+z}{9}$，

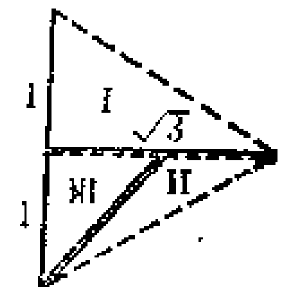
故 $x=\dfrac{2}{9}(x+y+z)=\dfrac{2}{9}\times8=\underline{\dfrac{16}{9}}$，

$y=\dfrac{3}{9}(x+y+z)=\dfrac{1}{3}\times8=\underline{\dfrac{8}{3}}$，

$$z=\frac{4}{9}(x+y+z)=\frac{4}{9}\times 8=\frac{32}{9}.$$

3．解：见图示。





4．解：令$m=x-2y$，则 $x=m+2y$，

代入方程得　$(m+2y)^2-2(m+2y)-4y-5=0$，

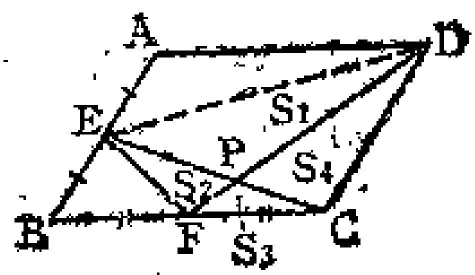
化简得　$4y^2+4(m-2)y+m^2-2m-5=0$.

判别式　$\triangle=16(m-2)^2-16(m^2-2m-5)\geqslant 0$，

即　$-4m+4+2m+5\geqslant 0$，　$m\leqslant\frac{9}{2}$，

故　$x-2y\leqslant\frac{9}{2}$.

5．解：连结ED.



设平行四边形面积为S.

$S_{\triangle DEF}=S_{\square ABCD}-S_{\triangle AED}-S_{\triangle EBF}-S_{\triangle DFC}$

$$=S-\frac{S}{4}-\frac{S}{8}-\frac{S}{4}=\frac{3}{8}S.$$

令　$S_{\triangle EPD}=S_1$，$S_{\triangle EFP}=S_2$，$S_{\triangle PFC}=S_3$，$S_{\triangle PCD}=S_4$.

则有

$$\begin{cases} S_1+S_2=S_{\triangle DEF}=\dfrac{3}{8}S, \\ S_2+S_3=S_{\triangle EFG}=\dfrac{1}{8}S, \\ S_3+S_4=S_{\triangle DFG}=\dfrac{1}{4}S, \\ S_1:S_2=S_4:S_3. \end{cases}$$

$$S_3=\frac{S_2\cdot S_4}{S_1}=\frac{\left(\dfrac{S}{8}-S_3\right)\left(\dfrac{S}{4}-S_3\right)}{\dfrac{3}{8}S-\dfrac{1}{8}S+S_3}.$$

解得 $S_3=\frac{1}{20}S$,

故 $S_{\triangle FPG}:S_{\square ABCD}=\underline{1:20}$.

6．解：设x_1、x_2是方程$(k-1)x^2-px+k=0$的正整数解，则 $x_1\cdot x_2=\frac{k}{k-1}=1+\frac{1}{k-1}$.

∵ $x_1,x_2\in N$，∴ $x_1\cdot x_2\in N$，则$\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\in N$.

∵ $k\neq 1$，∴ $k-1=1$，$k=2$.

则 $x_1\cdot x_2=2$.

∵ $x_1,x_2\in N$，∴ $x_1+x_2=3=p$,

故 $k^{kp}(p^p+k^k)+k^{k+2-p}=2^6(3^3+2^2)+2^{2+2-3}=\underline{1986}$.

四、综合题

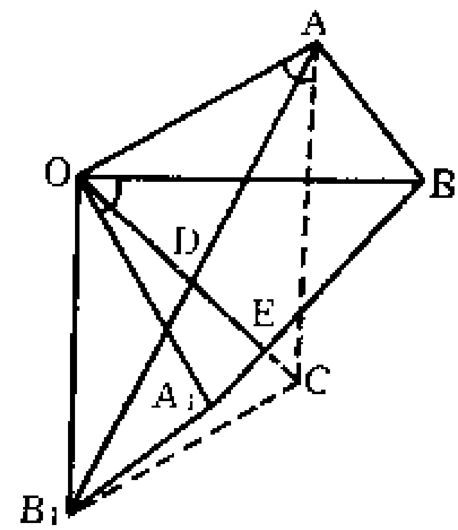
1．证明：由已知得

$OA\perp OA_1$，$OB\perp OB_1$，$AB\perp A_1B_1$；

且 $OA=OA_1$，$OB=OB_1$，$AB=A_1B_1$.

作$\triangle AOB_1$的AB_1边上的中线OD，并延长到C，使$DC=$

OD，OC交A_1B于E，连结AC、B_1C，得四边形AOB_1C是平行四边形。



∵ $AC=OB_1=OB$，且 $AC\perp OB$，

在$\triangle AOC$与$\triangle OA_1B$中，$AO=OA_1$，$AC=OB$，$\angle OAC=90^\circ-\angle BOA=\angle A_1OB$，

∴ $\triangle AOC\cong\triangle OA_1B$，

则$\angle AOC=\angle OA_1B$。

又 $\angle OEB=\angle A_1OE+\angle OA_1E$

$=\angle A_1OE+\angle AOE=90^\circ$，

故$OE\perp A_1B$，即OE是$\triangle OA_1B$的A_1B边上的高。

*说明：(1)此题的“中线和高”指的是它们“所在的直线”，即“……AB_1边上的中线（所在直线）是$\triangle OA_1B$的A_1B边上的高（所在直线）。”

（2） $90^\circ<\angle AOB<180^\circ$时，利用同角的补角相等，同样可证$\triangle AOC\cong\triangle OA_1B$，并推出$OC\perp A_1B$。

（3） $\angle AOB=90^\circ$时，视为退化三角形，根据三角形中线和高的定义，本题仍然成立。

2. 解：设矩形的一组对边长度为x，另一组对边长度为y。

依条件，设x、y组成的四位数为N。

则 $N=1000x+100x+10y+y$

$=11(99x+x+y)$。

∵ N是完全平方数，11为素数，

∴ $x+y$能被11整除。

又 $1\leqslant x\leqslant 9$，$1\leqslant y\leqslant 9$，

∴ $2\leqslant x+y\leqslant 18$，

得　$x+y=11$。

∴　$N=11\cdot(99x+x+y)$

$=11^2(9x+1)$，

则$9x+1$是一个完全平方数。

而$1\leqslant x\leqslant 9$，验算得$x=7$时满足题意。

又由$x+y=11$得$y=4$，

故　$S=x\cdot y=7\times 4=28(\text{cm}^2)$。

1986年"缙云杯"数学邀请赛（初二）

一、判断是非题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	✓	×	×	×	✓

1　解：因为$[-0.1^2]^3=(-0.01)^3=0.00001$。

2．解：因为当$a=0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$时，

$a^2+(bc)^2>0$仍成立。

3．解：因为当$a=0$时，不等式不成立。

4　解：设某项工程为1，则一人一天可完成工程量的$\frac{1}{aS}$，$(a+b)$个人一天可完成工程量的$\frac{a+b}{aS}$，故$(a+b)$个人完成此项工程需$\frac{aS}{a+b}$天。

5．解：原式$=\dfrac{\dfrac{1}{(a-b)^2}-\dfrac{2}{(a^2-b^2)}+\dfrac{1}{(a+b)^2}}{\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{2}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{(a+b)^2}}$

$$\frac{\dfrac{1}{(a^2-b^2)^2}-\dfrac{2}{a^4-b^4}+\dfrac{1}{(a^2+b^2)^2}}{\dfrac{1}{(a^2-b^2)^2}+\dfrac{1}{a^4-b^4}+\dfrac{1}{(a^2+b^2)^2}}.$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}\right)^2}\div\frac{\left(\dfrac{1}{a^2-b^2}-\dfrac{1}{a^2+b^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{2b}{a^2-b^2}\right)^2}{\left(\dfrac{2a}{a^2-b^2}\right)^2}\div\frac{\left(\dfrac{2b^2}{a^4-b^4}\right)^2}{\left(\dfrac{2a^2}{a^4-b^4}\right)^2}$$

$$=\frac{4b^2}{4a^2}\div\frac{4b^4}{4a^4}=\frac{a^2}{b^2}.$$

二、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6
答　案	C	B	B	A	D	C

1．解：1、9、8、6四个数中，1和9是完全平方数，1和9是奇数，9、8、6均是合数，无质数。

2．解：因为当$a<0$时，不等式(A)、(C)、(D)不成立。

3．解：要使分式$\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$的值为零，x必须满足

$x^2-7x+10=0$，$x^2-4\neq0$。

解第一式得　$(x-5)(x-2)=0$，$x=5$，$x=2$。

因$x=2$不满足第二式，故$x=5$。

4．解：设小王所走路程为$2S$，

则平均速度为$\dfrac{2S}{\dfrac{S}{3}+\dfrac{S}{5}}=\dfrac{15}{4}=3.75$（公里/小时）。

5　解：∵　$[\pi]=3$，$[-\pi]=-4$，

∴　$(-4)^3=-64$。

6．解：设　$M=10a+b$。

由题意得　$10a+b=10b+a+18$，

∴　$a=b+2$，则$M=10(b+2)+b=11b+20$。

当$b=1,2,3,4,5,6,7$时，M满足$10<M<100$，

故这样的整数M的个数有7个。

三、填空题

1．解：$\left.\begin{array}{r} ab<0\Rightarrow a,b\text{异号} \\ a<b \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a<0 \\ b>0 \\ a+b\leqslant 0 \end{array}\right\}\Rightarrow |a|\geqslant|b|$。

故　$\underline{a<0，b>0，|a|\geqslant|b|}$。

2　解：设除式为$f(x)$，

则　$x^3+4x^2+5x+2=(x+1)f(x)+x+1$，

$f(x)=(x^3+4x^2+4x+1)\div(x+1)$

$=\underline{x^2+3x+1}$。

3．解：∵　$3^1=3$，$3^2=9$，$3^3=27$，$3^4=81$，

$3^5=243$，$3^6=729$，$3^7=2187$，

$3^8=6561$。

∴　3^{4n+1}的个位数字为3，

3^{4n+2}的个位数字为9，

3^{4n+3}的个位数字为7，

3^{4n}的个位数字为1。（n为自然数）

∵　$3^{1986}=3^{4\times 496+2}$

∴　3^{1986}的个位数字是$\underline{9}$。

4．解：设这两个自然数为$6m$与$6n$（m,n互质），

则由题意知　$6mn=84$，$mn=14$。

$\because$ m,n互质，$\therefore$ $m=1$，$n=14$；或$m=2$，$n=7$。

故这两个数是6和84或12和42。

5. 解：设x_1，x_2是使分式$\dfrac{ax+7}{bx+11}$有意义，且使这分式的值为一定值的任意两个不同的x值。

则 $\dfrac{ax_1+7}{bx_1+11}=\dfrac{ax_2+7}{bx_2+11}$，

$abx_1x_2+11ax_1+7bx_2+77=abx_1x_2+11ax_2+7bx_2+77$，

$11a(x_1-x_2)=7b(x_1-x_2)$。

$\because$ $x_1\neq x_2$，$\therefore$ $11a=7b$。

6 解：设两个动点为P和Q，它们的速度分别为v_P和$v_Q(v_P<v_Q)$。

当P、Q同时从A点沿五边形的边界反向运动时，每相遇一次，两个动点共走的路程必等于五边形的周长，两个点第五次相遇在A点，则表明：

（1） 两个点共走的路程等于五边形周长的5倍；

（2） 两个点各走的路程都是五边形周长的整数倍。

若点P运动所走的路程为五边形的周长，则点Q所走的程路必为五边形周长的4倍，这时$v_P:v_Q=1:4$。

若点P所走的路程为五边形周长的2倍，则点Q所走的路程必为五边形周长的3倍，这时$v_P:v_Q=2:3$。

由于$v_P<v_Q$，故其他情况不可能发生。

7 解：把$x_2=ax_1+b,\cdots,x_{10}=ax_9+b$改写成

$$x_1=\frac{x_2-b}{a},\cdots,x_8=\frac{x_9-b}{a},\ x_9=\frac{x_{10}-b}{a}.$$

$\because$ $x_{10}=0$，$\therefore$ $x_9=-\dfrac{b}{a}$。

$$x_8=\frac{x_9-b}{a}=\frac{-\frac{b}{a}-b}{a}=-\frac{b(1+a)}{a^2},$$

$$x_7=\frac{x_8-b}{a}=\frac{-\frac{b(1+a)}{a^2}-b}{a}=-\frac{b(1+a+a^2)}{a}.$$

$\cdots\cdots$.

不难推得：

$$x_1=\frac{x_2-b}{a}=\frac{-\frac{b(1+a+a^2+\cdots+a^7)}{a^8}-b}{a}$$

$$=-\frac{b(1+a+a^2+\cdots+a^8)}{a^9}.$$

8. 解：$\because$ $ABC<0$，$\therefore$ A、B、C中只可能有1个或3个为负数。

若A、B、C都为负数。

$$\because\quad \frac{x-y}{A}<0,\quad \frac{y-z}{B}<0,\quad \frac{z-x}{C}<0.$$

$\therefore$ $x-y>0$，$y-z>0$，$z-x>0$.

三式相加得矛盾不等式$0>0$。

因而A、B、C不可能同为负数，

故A、B、C中只能有 1 个负数。

四、解：由条件知

$$\frac{-x+6}{4x+y}=\frac{3}{1},\quad \frac{x-y}{4x+y}=\frac{14}{1},$$

化简得
$$\begin{cases}13x+3y=6\\55x+15y=0.\end{cases}$$

解得 $x=3$，$y=-11$，

故　$x+y=-8$。

五、解：设木排从重庆顺流漂到上海要x天，轮船在静水中的速度为v_1公里/天，水流的速度为v_2公里/天（即木排的速度）。

根据题意有

$$5(v_1+v_2)=7(v_1-v_2),$$

$$5(v_1+v_2)=v_2x.$$

由第一式得：$v_1=6v_2$，代入第二式

得　$x=35$(天)。

故需个35昼夜。

六、解：将方程$4x+y=3xy$变形得

$$x=\frac{y}{3y-4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3y-4+4}{3y-4}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{3y-4}\right),$$

即　$3x=1+\dfrac{4}{3y-4}$.

$\because$　$3x$为整数，$\therefore$　$3y-4$必为4的因数，

但由计算知：

当$3y-4=1,-2,4$时，y不为整数。

当$3y-4=-1$时，$y_1=1$；

当$3y-4=2$时，$y_2=2$；

当$3y-4=-4$时，$y_3=0$。

将y_1,y_2,y_3的值分别代入　$x=\dfrac{y}{3y-4}$，

得　$x_1=-1$，$x_2=1$，$x_3=0$。

故方程$4x+y=3xy$的一切整数解为

$$\begin{cases}x_1=-1\\y_1=1\end{cases};\quad\begin{cases}x_2=1\\y_2=2\end{cases};\quad\begin{cases}x_3=0\\y_3=0.\end{cases}$$

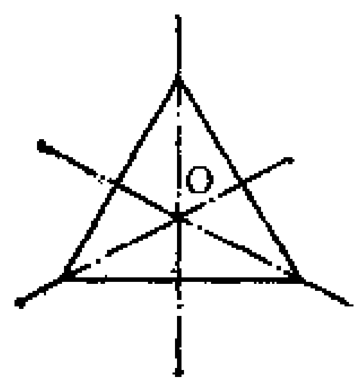
1987年"缙云杯"初中数学邀请赛

一、判断正误

题　号	1	2	3	4	5
答　案	√	×	×	×	×

1．　解：因为任何凸多边形的外角和都是360°。

2．　解：因为$|x-y+3|+|x+y-1|=0$的解是联立方程$\begin{cases}x-y+3=0\\x+y-1=0\end{cases}$的解$\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$，而$(x-y+3)(x+y-1)=0$的解是方程$x-y+3=0$的解或$x+y-1=0$的解，有无穷多组解。



3．　解：根据中心对称图形的定义，由图显然可见O不是对称中心。

4．　解：因为关于x的方程$(a+1)x=a^2-1$有唯一解$x=0$，则$a=1$；若$a=-1$，则x有无穷多解。

5．　解：因为当$k^2-1=0$即$k=\pm1$时，方程变成一次方程，只有一个实根。

二、选择题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	D	A	A	C	B

1．　解：$3^{555}=(3^5)^{111}=(243)^{111}$，

$4^{444}=(4^4)^{111}=(256)^{111}$，

$$5^{333}=(5^3)^{111}=(125)^{111},$$

故 $$5^{333}<3^{555}<4^{444}.$$

2． 解：$\dfrac{\text{阴影部分的面积}}{\text{未画阴影部分的面积}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}h(AA_1+A_2A_3+\cdots+A_kB)}{\frac{1}{2}h(DB_1+B_1B_2+\cdots+B_{k-1}C)}=\frac{a}{b}.$$

3． 解：4个人中，每一个人每天工作4小时，4天（工作16小时）能粉刷1间教室；若每一个人每天工作8小时，2天（工作16小时）能粉刷1间教室；故8个人每人每天工作8小时粉刷8间教室所需的天数为2天。

4． 解：方程 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 的整数解只有以下四种情况：

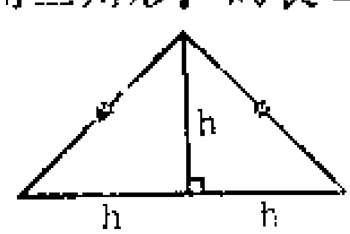
$$\begin{cases}x+1=0\\y-2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases};$$

$$\begin{cases}x+1=0\\y-2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases};$$

$$\begin{cases}x+1=1\\y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases};$$

$$\begin{cases}x+1=-1\\y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}.$$

5． 解：由条件可知三角形为等腰直角三角形．周长 $L=2h+2\sqrt{2}h=2(1+\sqrt{2})h$．若高 h 为有理数，则 L 不可能为有理数．（C 和 D 显然应排除）

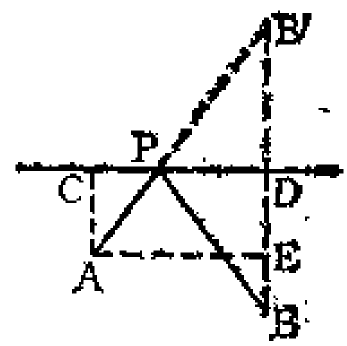


三、填空题

1． 解：原式$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

$$+\cdots+\frac{\sqrt{1001}-\sqrt{999}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{1001}}{2}-\frac{1}{2}.$$



2． 解：延长BD，使$B'D=BD$，连结AB'交CD于P，连结AP、BP，容易证明APB为最近路程。作$AE\parallel CD$。

$AP+PB=AB'=\sqrt{AE^2+B'E^2}=\sqrt{600^2+800^2}$
$=1000(\text{m})$。

3． 解：x^3+2x^2+2x+3
$=x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)+2=2$。

4． 解：①当$a-1=1$，即$a=2$时，显然成立。

②当$\begin{cases}a^2-1=0\\a-1\neq0\end{cases}$时，即$a=-1$时也成立。

5． 解：显然$S_1=\frac{16}{4}$，$S_2=\frac{16}{4^2}$，……，$S_{1987}=\frac{16}{4^{1987}}$
$=\frac{1}{4^{1985}}$。

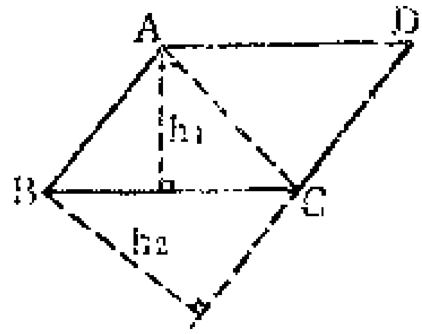
6． 解：$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$，

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-2q$。

$S_4=\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(p^2-2q)^2-2q^2$。

7． 解：如图所示，$AB\cdot h_2=BC\cdot h_1\Rightarrow\frac{h_2}{h_1}=\frac{BC}{AB}\Rightarrow\frac{h_1+h_2}{h_1}$

$=\dfrac{AB+BC}{AB}=\dfrac{p}{AB}\Rightarrow AB=\dfrac{ph_1}{h_1+h_2}$，故



$S_{\square ABCD}=AB\cdot h_2=\dfrac{ph_1h_2}{h_1+h_2}$。

8．解：原式 $=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt[6]{(a-\sqrt{b})^2}$

$=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt[6]{(\sqrt{b}-a)^2}$

$=\sqrt[3]{\sqrt{b}+a}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{b}-a}$

$=\sqrt[3]{b-a^2}$.

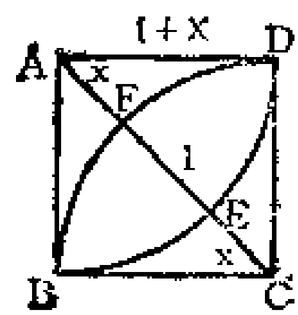
9．解：设 $CF=EA=x$，

则　$CD=1+x$，$AC=1+2x$，

由勾股定理有　$AC=\sqrt{2}CD$，

即　$1+2x=\sqrt{2}(1+x)=\sqrt{2}+\sqrt{2}x$，

$(2-\sqrt{2})x=\sqrt{2}-1$，$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。



故　$CD=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

10．解：$a=\sqrt{17}-1$，$a^2=18-2\sqrt{17}$，

$a^2+2a-17=18-2\sqrt{17}+2\sqrt{17}-2-17=-1$，

$a^2+a-18=18-2\sqrt{17}+\sqrt{17}-1-18=-(\sqrt{17}+1)$。

原式 $=a^3(a^2+2a-17)-a^2+18a-17$

$=-a^3-a^2+18a-17$

$=-a(a^2+a-18)-17$

$=-(\sqrt{17}-1)[-(\sqrt{17}+1)]-17$

$=17-1-17=-1$。

四、综合题

1. 解：设 $u=\frac{x-2}{3}$，$v=\frac{x-3}{2}$，

则 $u+v=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$，即 $uv(u+v)=u+v$，

$\therefore$ $(u+v)(uv-1)=0$，$u+v=0$ 或 $uv-1=0$，

即 $\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}=0$ 或 $\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-3}{2}=1$。

解 得 $x=\frac{13}{5}$ 或 $x=0$ 或 $x=5$。

经检验：$x_1=\frac{13}{5}$，$x_2=0$，$x_3=5$都是原方程的解。

故原方程的解为$x_1=\frac{13}{5}$，$x_2=0$，$x_3=5$。

2. 证：设方程 $x^2+ax+bc=0$ 的两根为 α、m，方程 $x^2+bx+ac=0$的两根为α、n，则有$\alpha^2+a\alpha+bc=0$。

$\alpha^2+b\alpha+ac=0$，解得 $\alpha=c$。

又$\because$ $\left.\begin{cases}\alpha+m=-a\Rightarrow m=-a-c\\ \alpha\cdot m=bc\Rightarrow m=b\end{cases}\right\}\Rightarrow a+b+c=0$

$\left.\begin{cases}\alpha+n=-b\Rightarrow n=-b-c\\ \alpha\cdot n=ac\Rightarrow n=a\end{cases}\right\}\Rightarrow a+b+c=0$，

$\therefore$ $m+n=-a-b-c-c=-(a+b+c)-c=-c$，

$m\cdot n=a\cdot b$。

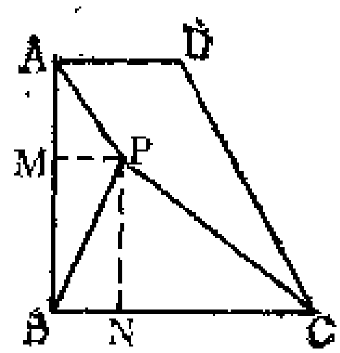
故以m、n 为根的方程为 $x^2+cx+ab=0$，

即证得二方程其它两根为方程

$x^2+cx+ab=0$ 的根。

3 解：作$PM\perp AB$，$PN\perp BC$，M、N为垂足。

设　$AB=m$，$PM=x$，$PN=y$。



则 $\begin{cases} x^2+y^2=4 & (1) \\ x^2+(m-y)^2=1 & (2) \\ (m-x)^2+y^2=9 & (3) \end{cases}$

由(2)得　$x^2+m^2-2my+y^2=1$　(4)

由(3)得　$y^2+m^2-2mx+x^2=9$　(5)

将(1)代入(4)得 $m^2-2my+3=0\Rightarrow y=\dfrac{m^2+3}{2m}$，

将(1)代入(5)得 $m^2-2mx-5=0\Rightarrow x=\dfrac{m^2-5}{2m}$。

把x、y的值代入(1)得

$$\left(\frac{m^2-5}{2m}\right)^2+\left(\frac{m^2+3}{2m}\right)^2=4,$$

整理得　$m^4-10m^2+17=0$，

解得　$m^2=5\pm2\sqrt{2}$。

∵　$x=\dfrac{m^2-5}{2m}>0$，$m>0$。

则　$m^2-5>0$，故　$m^2=5+2\sqrt{2}$。

∴　$AB=m=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$，$BC=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$，

$$AD=\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$

故　$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC)\cdot AB=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{15}{4}+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$。

1988年“缙云杯”初中数学邀请赛

一、判断正误

1． 答：（$\checkmark$）（$\because |-a|^2=|a|^2=a^2$）

2． 答：（×）（$\because (-1^{-1988}+1)^0=(-1+1)^0=0^0\neq 1$）

3． 答：（×）（可能为等腰梯形）

4． 答：（$\checkmark$）（在解方程过程中会出现矛盾等式

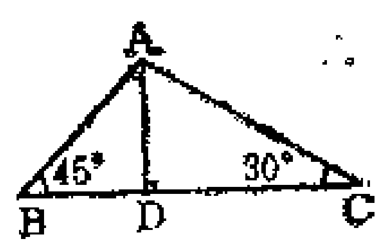
$\sqrt{(x+1)(x+2)}=-3$，当$x\geqslant\frac{3}{2}$时方程有意义）

5． 答：（×）（当$c=0$时，两根均为0）

6． 答：（×）（$\sqrt{2}\approx1.4142$，5，$\sqrt{41}\approx6.4031$，这三条线段满足两边之和大于第三边，能构成三角形）

二、填空题

1． 解：甲一天可加工$\frac{a}{m}$个零件，乙一天可加工$\frac{b}{n}$个零件，甲、乙一天可加工$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}$个零件。故两人共同加p个零件需 $p\div\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\right)=\frac{mnp}{an+bm}$天。



2． 解：过A作BC边上的高，$\because AB=2\sqrt{2}$，$\angle B=45°$，$\therefore BD=AD=2$。$\because\angle C=30°$，$\therefore DC=2\sqrt{3}$，故$BC=BD+DC=2+2\sqrt{3}$。

3． 解：解联立方程$\begin{cases}x+2y=9z\\x-2y=5z\end{cases}$得 $x=7z$，$y=z$，

代入得 $\dfrac{2x^2+3y^2+7z^2}{x^2-4y^2+9z^2}=\dfrac{108z^2}{54z^2}=\underline{2}$。

4．解：$\because -2\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore x+3>0$，$x-2\leqslant 0$，

故 $y=|x+3|+\sqrt{x^2-4x+4}=|x+3|+|x-2|$

$=x+3-x+2=\underline{5}$。

5．解：设 $(m-4)x^2-(2m-1)x+m=0$ 的两根为 x_1 和 x_2，则 $x_1\cdot x_2=\dfrac{m}{m-4}$，$x_1+x_2=\dfrac{2m-1}{m-4}$。

由题意 $\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{2m-1}{m}$，则 $m=2$。

故 $AB=2m=4$，$AD=3AB=12$，$S=AB\cdot AD=4\times 12=\underline{48}$。

6．解：由 $\dfrac{1}{2}|a-b|+\sqrt{2b+c}+\left(c-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$

得 $a-b=0$，$2b+c=0$，$c-\dfrac{1}{2}=0$。

则 $c=\dfrac{1}{2}$，$a=b=-\dfrac{c}{2}=-\dfrac{1}{4}$。

故 $(b+c)^a=\left(-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{4}}=\underline{\sqrt{2}}$。

7．解：数列的规律为 $a_n=n^2-1$。该数为 $\underline{24}$。

三、选择题

题　　号	1	2	3	4	5	6
答　　案	C	A	B	D	B	C

1．解：(A)不对，例如 $-4<-2$，但 $\dfrac{-4}{-2}>1$；　(B)

不对，例如$-\frac{1}{2}<\frac{1}{3}$，但$-2<3$；(D)也不对，例如$-4<-2$，但$(-4)^2>(-2)^2$。故(C)成立。

2．解：由$\begin{vmatrix} 2x & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-2x+2<8$ 得 $x>-3$。

3．解：设$AC=a$，则$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$L=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=2\sqrt{2}a$。设分$AC$为$n$段$a_1$，$a_2$，…，$a_n$，则$n$个小正方形的周长和$P=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}a_1+4\times\frac{\sqrt{2}}{2}a_2+\cdots+4\times\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$

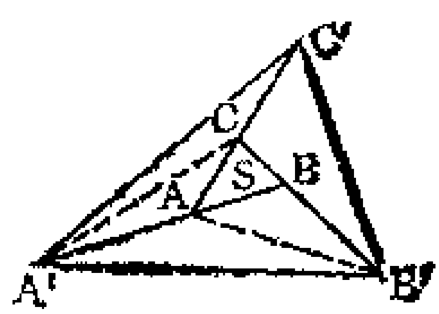
$$=2\sqrt{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=2\sqrt{2}a.$$

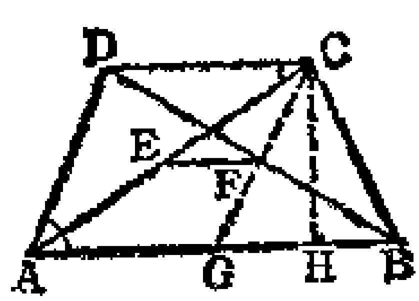
故　$P=L$。

4．解：在(A)和(C)情形各边中点所得的四边形是矩形，是轴对称图形，在(B)情形，各边中点所得的四边形是菱形，也是轴对称图形，故(D)成立。

5．解：$\because ax>2x$的解集为$x<0$，$\therefore a=1$。
故　$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=2$。

6．解：连接CA'，由已知条件不难看出，$S_{\triangle A'AC}=2S$，$S_{\triangle A'CC'}=4S$．$S_{\triangle A'B'B}=2S_{\triangle A'BC}=2\times3S=6S$．连结$AB'$，同理可得$S_{\triangle B'C'C}=6S$，故$S_{\triangle A'B'C'}=19S$。





四、解：连接CF并延长交AB于G，由已知显然有$\triangle DFC\cong\triangle FGB$。

$\therefore$ $CF=FG$，$CD=GB$。则$AG=2EF=2a$。

$\because$ $ABCD$为等腰梯形，$\therefore \angle DAB=\angle ABC=60°$。

$\because$ AC平分$\angle DAB$，$\therefore \angle DAC=\angle DCA$，则$AD=DC=BC$.

故 $\triangle CGB$为等边三角形，$\angle CGB=60°$，则$AD\parallel CG$。

故 $CD=AG=2a$，于是$AB=2AG=4a$。

作 $CH\perp AB$。则 $CH=CB\cdot\sin 60°=2a\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}a$。

故 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(CD+AB)\cdot CH=\frac{1}{2}(2a+4a)\sqrt{3}a=3\sqrt{3}a$。

五、解：由根与系数的关系易知b、c是方程

$x^2-8x+a^2-12a+52=0$ 的两根。

$\because$ a、b、c为实数，$\therefore$判别式$\triangle\geqslant 0$，即

$(-8)^2-4a^2+48a-208=-4a^2+48a-144$

$=-4(a^2-12a+36)$

$=-4(a-6)^2\geqslant 0$，则$a=6$，方程有两等根。

代入方程得 $x^2-8x+36-72+52=0$，即 $x^2-8x+16=0$。

解方程得 $b=c=4$。故$\triangle ABC$为等腰三角形。

六、解：(1) 甲比乙的速度快，要使甲、乙两人在正方形的同一边上行走，则要甲追赶乙，使两人距离小于100米，且甲在某一顶点上。现开始时甲距乙300米，则要求甲比乙多走200米，出发后的时间为偶数。设出发x分钟两人在同一边上走，则 $50x-44x>200$，$x>33\frac{1}{3}$。

故甲乙两人出发34分钟才能第一次在正方形的同一边上

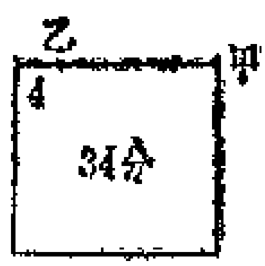
行走。

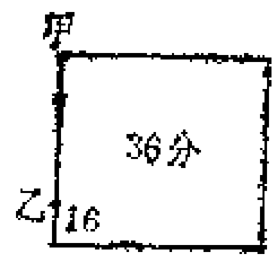
（2） 设出发y分钟后，甲、乙两人第一次相遇（即甲追上乙），则有 $50y+300=44y$，$y=50$(分)。

甲从出发后34分钟开始，每走到一顶点，都要与乙同在一边上行走一段距离，直到乙走到顶点开始转弯。甲从第34分钟开始，要走8边后才能与乙在某一顶点（右上角）相遇。

现分别加以讨论：

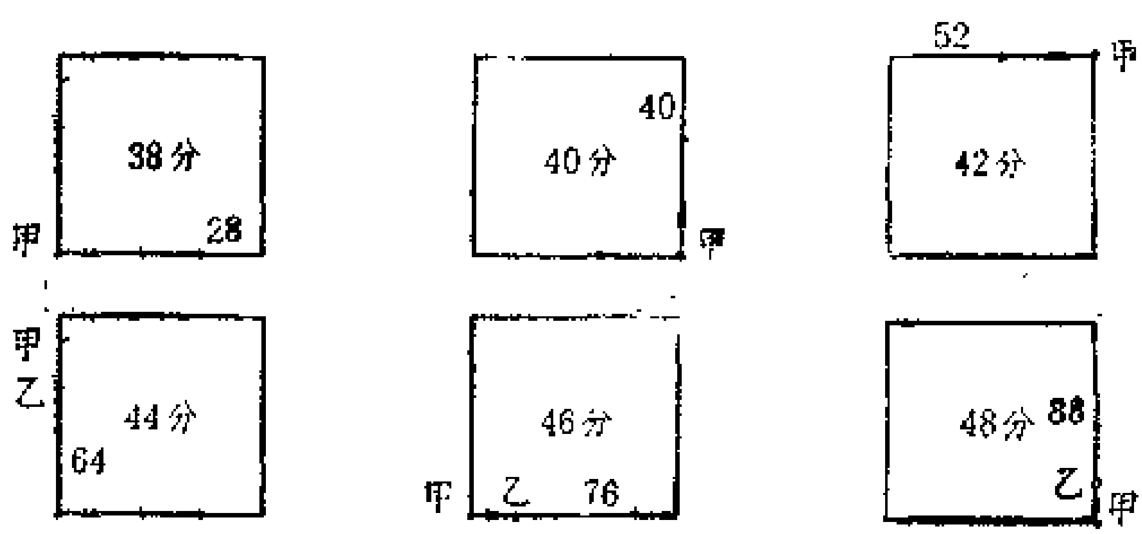
第34分钟时：$34\times50=1700$，$34\times44=1496$。则甲、乙位置如图示。故第一次同行的时间为$\frac{4}{44}$(分)。





第36分钟时：$36\times50=1800$，$36\times44=1584$。则甲、乙位置如图示。故第二次同行的时间为$\frac{16}{44}$(分)。

以此类推，后六次位置如图所示。



故第一次相遇以前，两人在同一边上行走的时间为

$$\frac{4}{44}+\frac{16}{44}+\frac{28}{44}+\frac{40}{44}+\frac{52}{44}+\frac{64}{44}+\frac{76}{44}+\frac{88}{44}$$

$$=\frac{368}{44}=8\frac{4}{11}(分).$$

1989年《祖冲之杯》初中数学邀请赛

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	A	C	C	B	D

1． 解：不难举出例子说明①—④均错，只有⑤正确。

2． 解：$\because a^2+b^2=1$，$ab\neq 0$，$\therefore 0<a^2<1$，$0<b^2<1$。

则　$a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3<a^2+b^2=1$，

　　$a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2<a^2+b^2=1$。

因此，$\sqrt{a^6+b^6}>a^6+b^6$，$\sqrt{a^4+b^4}>a^4+b^4$，

故　$Y<X<Z$。

3． 解：$\begin{cases} x-1988y=n & (1) \\ 11x+27y=m & (2) \end{cases}$

对于(1)，$\because n$为偶数，$1988y$为偶数，

$\therefore$　x 必为偶数。

对于(2)，$\because 11x$为偶数，m为奇数，$\therefore 27y$为奇数，

故　y 为奇数。

4． 解：$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，

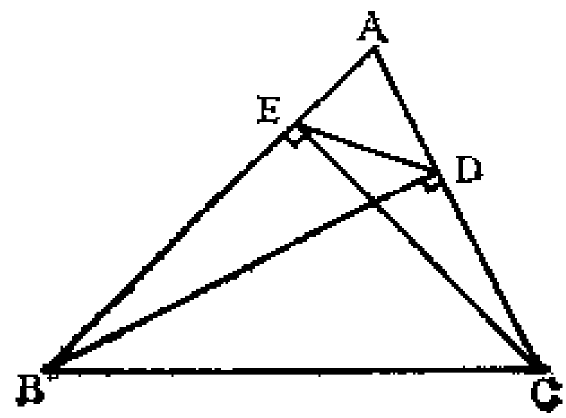
$(a+b)^2-c^2=3ab$，$a^2+b^2-c^2=ab$，

因 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，故 $\angle C=60°$。

5． 解：$AD=AB\cdot|\cos A|$，
$AE=AC\cdot|\cos A|$。

不难证明：$\triangle AED\backsim\triangle ACB$，

故 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=|\cos A|$。



二、填空题

1． 解：方程改写为$|x-1|+(x-1)=0$。
当$x\leqslant1$时，$1-x+x-1=0$，方程恒成立。
当$x>1$时，$x-1+x-1=0$，$x=1$。
故方程的解是$x\leqslant1$。

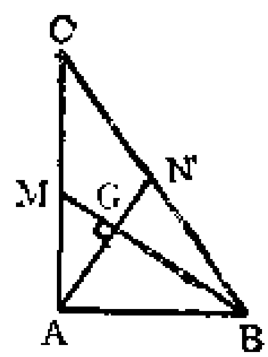
2． 解：$\lg\left[3^{\lg20}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\lg0.3}\right]=\lg20\cdot\lg3+\lg\dfrac{3}{10}\lg\dfrac{1}{2}$

$$=\lg3+\lg2$$
$$=\lg6。$$

故 $3^{\lg20}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\lg0.3}=6$。

3． 解：由二次项和常数项观察，另一因式为$x+y+1$。
则 $(x-y+4)(x+y+1)=x^2-y^2+mx+3y+4$，
$x^2-y^2+5x+3y+4=x^2-y^2+mx+3y+4$。

故 $m=5$。



4 解：$\because G$为重心，$\therefore BG=\dfrac{2}{3}BM$.

在 $Rt\triangle ABM$中，由射影定理得$AB^2=BG\cdot BM$，

$$6=\frac{2}{3}BM^2,\text{ 故 } BM=3.$$

5. 解：这样的三角形边长列表如下：

a	4	4	4	4	4	4	4	4
b	1	2	2	2	3	3	3	3
c	4	3	4	5	3	4	5	6

故这样的三角形共有 8 个。

6. 解：考虑 0+9999，1+9998，2+9997，…，4999+5000，其和均为9999，它们的数码之和都是36，

故所求数码之和为$36\times5000=180000$。

三、解：由题意，$\triangle=16m^2-4(5m^2-6m+8)=-4m^2+24m-32>0$，即$m^2-6m+8<0$，$2<m<4$。因$m$为整数，则$m=3$。由韦达定理得：$x_1+x_2=4m=12$，

$$x_1\cdot x_2=5m^2-6m+8=35.$$

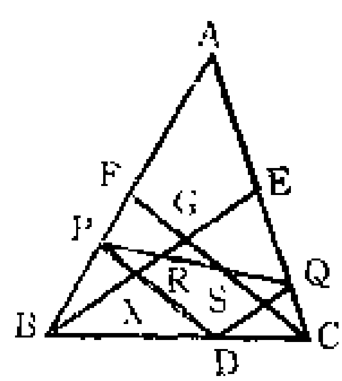
故 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=12^2-35\times2=74$。

四、证明：$\because G$为$\triangle ABC$之重心，$\therefore FG=\frac{1}{3}FC$。

$\because$ $DP\parallel CF$，$\therefore\triangle BPx\backsim\triangle BFG$，$\triangle BDx\backsim\triangle BCG$，

$\therefore$ $\dfrac{Px}{FG}=\dfrac{Bx}{BG}=\dfrac{Dx}{CG}$，$\dfrac{Px}{xD}=\dfrac{FG}{CG}$

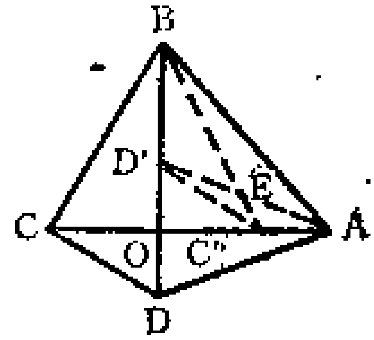
$=\dfrac{1}{2}$。



又在$\triangle PDQ$中，$xR\parallel DQ$，$\therefore PR=\frac{1}{3}PQ$。

同理可证　$QS=\frac{1}{3}PQ$，$\therefore RS=\frac{PQ}{3}$.

五、证：作辅助线（如图），在 OB 上取 $OD'=OD$，在 OA 上取 $OC'=OC$，连 $C'D'$，连 BC'，AD'，交于 E.



$\because$　$C'D'=CD$，$\therefore AD'=AD$，$BC'=BC$.

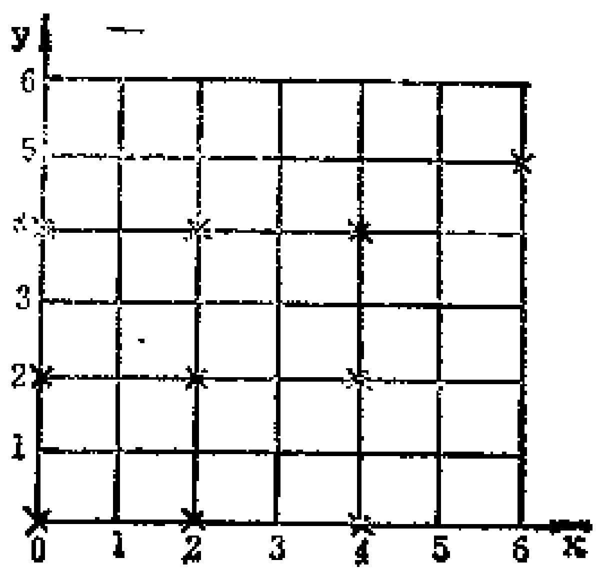
$\therefore$　在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle C'D'E$ 中有

$$\begin{cases} C'E+D'E>C'D' & (1) \\ BE+AE>AB & (2) \end{cases}$$

(1)+(2)得　$BC'+AD'>AB+C'D'$，

故　$AD+BC>AB+CD$.

六、解：能。如下图10个点：



1988年"辽教杯"初二数学竞赛

一、选择题

题　　号	1	2	3	4	5
答　　案	C	C	B	A	B
题　　号	6	7	8	9	10
答　　案	D	B	C	C	D

1　解：由题意得

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=1,$$

即　$\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=1$。$\because a\neq 0$，$\therefore c=a$。

2．解：由 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}$ 得 $x(b-c)=y(a-b)$，

由 $\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$ 得 $z(b-c)=y(c-a)$。

两式相加得　$(x+z)(b-c)+y(b-c)=0$。

$\because b\neq c$，$\therefore x+y+z=0$。

3．解：$M=3^{1987}=3^{4\times 496+3}$，

$N=7^{1988}=7^{4\times 497}$。

$\because 3^m$ 和 7^n 的尾数都只有四种情况，

$\therefore M$ 与 3^3 同尾数，即尾数为7；

N 与 7^0 同尾数，即尾数为1。

故$M\cdot N$的末位数字是7。

4、 解：根据三角形边的关系得

$$\begin{cases} a+b>c \\ a-b<c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k+3k>4 \\ 4k-3k<4 \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{4}<k<4.$$

5 解：$\because -x^3\geqslant 0$，$\therefore x\leqslant 0$，又$x\neq 0$，则$x<0$。

故$\sqrt{-x^3}-x\sqrt{-\frac{1}{x}}=-x\sqrt{-x}+\sqrt{-x}$

$$=(1-x)\sqrt{-x}.$$

6. 解：当$x<0$时，方程为$x^2+3x+2=0$，解得$x_1=-1$，$x_2=-2$；当$x>0$时，方程为$x^2-3x+2=0$，解得$x_3=1$，$x_4=2$。故共有四个实根。

7. 解：设这个内角的度数为x，

由题意有$(3290°+x)=(n-2)180°$，

则 $x=(n-2)180°-3290°$ $(0<x<180°)$。

$\because$ $19\times 180°=3420°$，

$\therefore$ $x=3420°-3290°=130°$，

8. 解：共有五个，即$\triangle DBP$、$\triangle DPC$、$\triangle BCQ$、$\triangle BQD$和$\triangle AQD$。

9、 解：方程分解因式为

$$(3x+1)(x-11)=0，x=-\frac{1}{3}或x=11.$$

前者不合题意，则其中一条直角边长为11。

$\because$有勾股数 $11^2+60^2=61^2$，

$\therefore$这个三角形的面积是$\frac{1}{2}\times 11\times 60=330$。

10. 解：$\because \frac{AC}{\sin 60°}=\frac{2}{\sin 45°}$，$\therefore AC=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{6}$。

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{6}\cdot\sin 75^{\circ}$

$$=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

二、填空题

1. 解：$\because\ x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}$，

$$y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}.$$

$\therefore\ xy=25-24=1$，$x^2+y^2=98$。

故 $3x^2-5xy+3y^2=3\times 98-5=\underline{289}$。

2. 解：$\because(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+2+a^{-1}=3+2=5$，

$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$。

3. 解：$\because -2a<x<-a$，$\therefore x+2a>0$，$x+a<0$，$x-a<0$，故原式$=|x+a|+|x-a|+2|x+2a|$

$$=-x-a-x+a+2x+4a=\underline{4a}.$$

4. 解：由第一个方程得$(x+y)^2=(19-xy)^2$，利用另一方程化简得 $x^2y^2-40xy+12\times 28=0$，$xy=12$或$xy=28$。

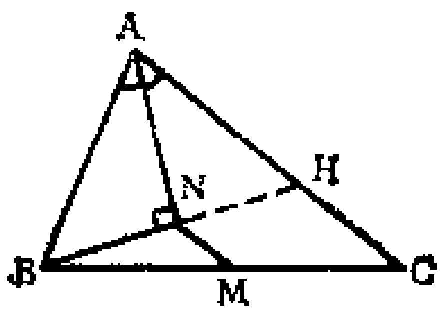
分别代入第一个方程得$\begin{cases}x+y=7\\xy=12\end{cases}$，$\begin{cases}x+y=-9\\xy=28\end{cases}$，后一方程组无实解，前一方程组的解为$\underline{\begin{cases}x_1=3\\y_1=4\end{cases}，\begin{cases}x_2=4\\y_2=3\end{cases}}$。

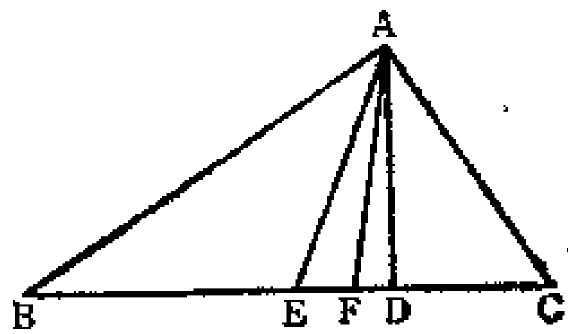
5. 解：设两根为 x_1 和 x_2，则由题意知 $x_1-x_2=2$，又 $x_1+x_2=k-1$，$x_1\cdot x_2=\frac{k^2-7}{4}$。

$\because (x_1-x_2)^2=4$，$\therefore (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$，

$(k-1)^2-k^2+7=4$，解得 $k=\underline{2}$。

6．解：延长BN交AC于H，$\because AN$平分$\angle BAC$，$BN\perp AN$，$\therefore BN=NH$。$\because MN$为$\triangle BCH$的中位线，$\therefore CH=2MN=6$，又$AH=AB=10$，故$\triangle ABC$的周长为$10+15+6+10=\underline{41}$ cm。





7．解：$\angle BAF=\angle CAF$(第一组)，

$\angle ABC=\angle DAC=\angle BAE$(第二组)，

$\angle BAD=\angle ACD=\angle CAE$(第三组)，

$\left.\begin{array}{l}\angle BAF=\angle CAF\\ \angle BAE=\angle CAD\end{array}\right\}\Rightarrow\angle EAF=\angle DAF$（第四组）。

故共有4组。

8．解：$\because |a\cdot b|+1=|a|+|b|$，

$\therefore (|a|-1)(|b|-1)=0$，

$\therefore a=\pm1$，b为任何实数；

或$b=\pm1$，a为任何实数。

9．解：利用$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

则原式$=\dfrac{1987}{1988}$.

10. 解：设平地有x公里，坡路有y公里。

$$\therefore \frac{x}{4}\times 2+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}=9,\quad x+y=18.$$

故这个人往返共走了36公里。

三、证明：原方程变形为$x(x+1)(x-1)=1988$。

若原方程有整数解，这时$x(x+1)(x-1)$必能被3整除，而1988不能被3整除，故原方程没有整数解。

四、解：设A、B两地距离为x公里，甲、乙两人的速度分别为u、v。由题意得

$$\frac{\frac{x}{2}}{u}=\frac{x-24}{v},\quad \frac{x-15}{u}=\frac{\frac{x}{2}}{v},$$

$$\text{则}\frac{u}{v}=\frac{x-24}{\frac{x}{2}}=\frac{\frac{x}{2}}{x-15},$$

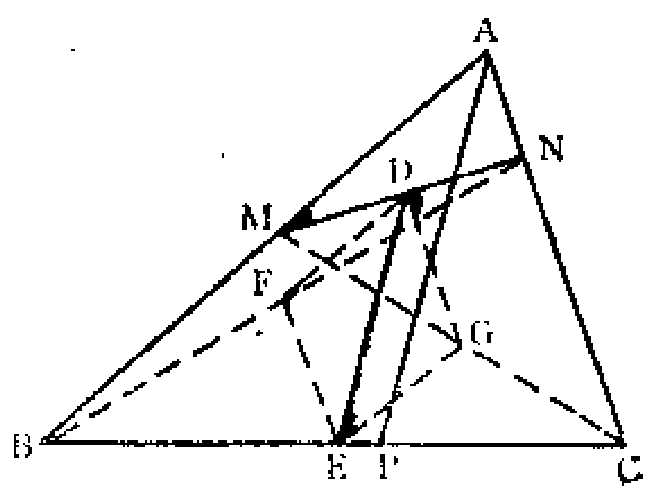
$$\therefore\quad x^2-52x+480=0.$$

解得$x_1=40$，$x_2=12$（不合题意，舍去）。

因甲到达B时，乙走了$2(x-24)$公里。

故乙离A处还有$x-2(x-24)=40-2(40-24)=8$（公里）。

五、证法一：连结BN、CM，取BN，CM的中点F、G，连结DF、FE、EG、GD。



由中位线定理易证：$DF=FE=EG=GD$。

即四边形$DFEG$是菱形。

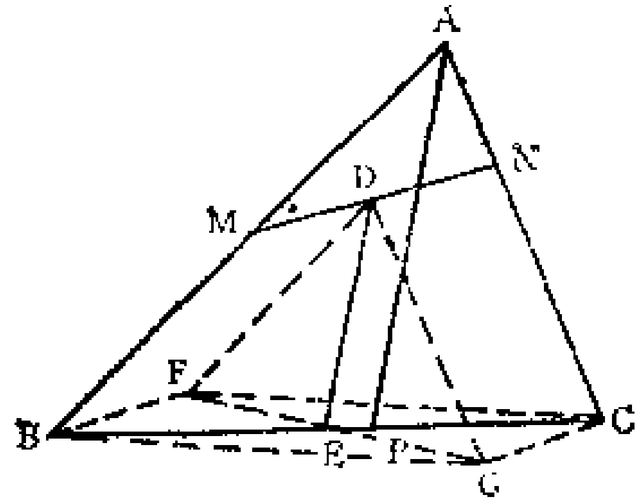
$\therefore\quad \angle FDE=\angle EDG$。

又$\because DF\parallel AB$，$DE\parallel AP$，

$\therefore\quad \angle BAP=\angle FDE$。同理，$\angle PAC=\angle EDG$，

$\angle BAP=\angle PAC$。

证法二：过D点分别作$DF\parallel AB$，$DG\parallel AC$，且在DF上截取$DF=BM$，在DG上截取$DG=CN$，连结FB、BG、CF、GC、FG。



易证：四边形$FBGC$是平行四边形。

故▱$FBGC$的对角线FG必过BC中点E。

$$\left.\begin{array}{r}BM=CN\Rightarrow DF=DG\\ FE=EG\end{array}\right\}\Rightarrow\angle FDE=\angle EDG,$$

$\because$ $DF\parallel AB$，$DE\parallel AP\Rightarrow\angle FDE=\angle BAP$。同理$\angle EDG=\angle PAC$，

$\therefore$ $\angle BAP=\angle PAC$。

1987年湖北省数学奥林匹克函授学校初中数学竞赛

一、选择题

题　　号	1	2	3	4	5
答　　案	A	A	B	C	D
题　　号	6	7	8	9	10
答　　案	D	B	D	B	B

1. 解：$\because 2\times15=30$，$3\times14=42$，$4\times13=52$，

$5\times12=60$，$6\times11=66$，$7\times10=70$，$8\times9=72$。

$\therefore$不难看出乘积的尾数有三个0。

2. 解：在等式两端乘以(1−2−[illegible])即可得知。

3. 解：
$$a=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)$$
$$-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$$
$$-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}=6.$$

4. 解：$\because a<b$，$\therefore -a>-b$。

原式$=\sqrt{(x+a)^2[-(x+a)(x+b)]}$。

要使根式有意义，必有$(x+a)(x+b)<0$。

解不等式，考虑到$-b<-a$，得$-b<x<-a$。

即 $x+a<0$，$x+b>0$。

故原式$=-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$。

5. 解：见1985年吉林省初中数学竞赛试题。

6. 解：见1986年无锡市初中数学竞赛试题解答。

7. 解：本题只考虑 $n=4$ 就可断定。凸四边形的内角中，锐角的个数显然最多是 3 个，若锐角为 4 个，内角和不可能为360°。而四边形的内角不会多于4个。

8. 解：这样的四边形不能作，因若能作，作辅助线就要与三角形的三边关系发生矛盾。

9. 解：容易推出$\triangle LMN$中任一内角，例如$\angle L=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$。$\because \angle A+\angle B<180°$，$\therefore \angle L<90°$。

10. 解：过P作$PM\perp AB$，$PN\perp BC$，利用勾股定理和余弦定理可得$\angle APB=135°$。

二、填空题

1. 解：因分子中有1728个数能被11整除，157个数能被11^2整除，15个数能被11^3整除，1个数能被11^4整除，故n的最大值是

$$1728+157+15+1=\underline{1901}。$$

2. 解：$\because(\sqrt{5}+1)^2-2(\sqrt{5}+1)-4=6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2-4=0$，

$\therefore$原式前三项的代数和为 0。故原式$=\underline{1987}$。

3. 解：$$\begin{aligned}原式&=|x-|x-2|-2|x-1||\\&=|x+(x-2)+2(x-1)|=|4(x-1)|\\&=\underline{4(1-x)}。\end{aligned}$$

4. 答：$\underline{x=2,\ y=2,\ z=5}$。

5. 解：原式两边平方得$x+x^{-1}+2=a^2$，

故$\frac{x^2+1}{x}=\underline{a^2-2}$。

6. 答：$\underline{\sqrt{3}}$。

7. 解：$\because x^\circ+\angle B+\angle C=180^\circ$，$y^\circ+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=180^\circ$，

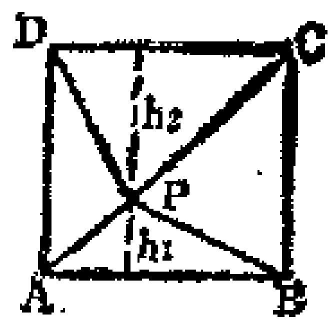
$\therefore\ y^\circ=90^\circ+\frac{x}{2}$。

故x增加1°，y增加<u>0.5</u>度。

8. 答：<u>4</u>。

9. 答：<u>15</u>。

解：见1985年上海市初中数学竞赛试题。



10. 解：由 $S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}h_1$，$h_2=1-h_1$，$S_{\triangle CPD}=\frac{1}{2}h_2$容易计算得出。

$S_{\triangle CPD}=0.3013$

三、解：记$x^2-px+2q=0$ (1)

$x^2-qx+2p=0$ (2)

$4x^2+mx+n=0$ (3)

$\because p<q$，由(1)—(2)可求得公共根-2，故$p+q=-2$。对(3)而言，$p+q=-\frac{m}{4}$，$\therefore m=8$。且(3)中$\triangle=m^2-16n>0$，即$n<\frac{64}{16}=4$。

$\because n$为正整数，且△必须为完全平方根，则只能取$n=3$。故由$p+q=-2$，$pq=\frac{3}{4}$得$p=-\frac{3}{2}$，$q=-\frac{1}{2}$，则方程(1)可化为$2x^2+3x-2=0$，得另一根为$\frac{1}{2}$。

四、解：设跑道短x米，就机器人而言，速度是均匀的，故速度之比等于距离之比，得方程$\frac{110-x-1}{110-x-2}=\frac{1}{2-1.01}$，解得$x=9$（米）。

五、解：原方程化为$x^2-(a+b)x+ab=0$，得$x_1=a$，$x_2=b$。

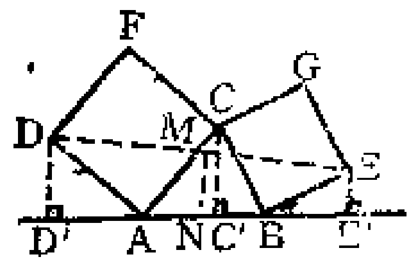
∵方程无解，说明a、b为增根，即$a=\pm1$，$b=\pm1$。

又$a\neq b$，则(a,b)的取值只可能为$(1,-1)$，$(-1,1)$，$(1,0)$，$(0,1)$，$(-1,0)$，$(0,-1)$六种情况之一，无论哪种情况，均有$a^2+ab+b^2=1$。

六、证：(1)由C作AB之垂线，C'为垂足，

可证$\triangle ADD'\cong\triangle CC'A$，

$\triangle BC'C\cong\triangle EE'B$。



于是$DD'=AC'$，$EE'=BC'$，

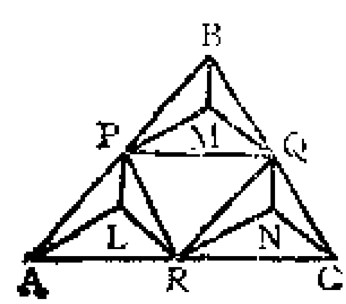
$\therefore DD'+EE'=AC'+C'B=AB$（定值）。

同时还有　$AD'=BE'=CC'$。

（2）取AB的中点N，无论C怎样变动，可证$DD'E'E$为直角梯形，MN为其中位线。

$\therefore$　$MN=\frac{1}{2}AB$。故M为定点。

七、证：设P、Q、R分别为三边之中点，不难证明$\triangle BPQ\cong\triangle PAR\cong\triangle QRC\cong\triangle RQP$。且它们均与$\triangle ABC$相似，即都是锐角三角形，故各小三角形三条高的交点$L$、$M$、$N$均在各自的三角形内。



又$\triangle BPM\cong\triangle QRN$，同理

$\triangle BMQ\cong\triangle PLR$。

故六边形$LPMQNR$的面积

$$S=S_{\triangle BPQ}+S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

1986年吉林省八地、市初中数学竞赛

一、选择题

题号	1	2	3	4
答案	B	B	C	D

1．解：$\because a+b>c>0$，$|a-b|<c$，

$\therefore a、b、c$可看作$\triangle ABC$的三边．

判别式$\triangle=b^4+a^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2$

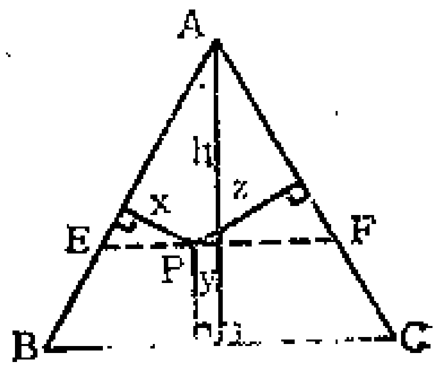
$$=a^2(a^2-b^2-c^2)+b^2(b^2-a^2-c^2)+c^2(c^2-b^2-a^2)=-a^2\cos A\cdot 2abc-b^2\cos B\cdot 2ac-c^2\cdot\cos C\cdot 2ab.$$

（1）当$\triangle ABC$为锐角三角形时，$\cos A$、$\cos B$、$\cos C$均为正，则$\triangle<0$，无实根．

（2）当$\triangle ABC$为钝角三角形时，不失一般性设C为钝角，则$\cos C<0$，$\cos(A+B)=\cos(180^\circ-C)=-\cos C$．

$$\begin{aligned}\triangle&=2abc[c\cos(A+B)-b\cos B-a\cos A]\\&<2abc[(a+b)\cos(A+B)-b\cos B-a\cos A]\\&=2abc[a(\cos(A+B)-\cos A)+b(\cos(A+B)-\cos B)]\\&<0(\because\cos(A+B)<\cos A,\ \cos(A+B)<\cos B).\end{aligned}$$

综合(1)、(2)知方程无实根。



2. 解：如图，P为等边$\triangle ABC$内任一点，P到AB、BC、CA的距离分别为x、y、z，过P作$EF \parallel BC$。

$\because \triangle AEF \backsim \triangle ABC$，

$$\therefore \frac{EF}{BC}=\frac{h-y}{h} \Longrightarrow \frac{\frac{x}{\sin 60^\circ}+\frac{z}{\sin 60^\circ}}{\frac{h}{\sin 60^\circ}}=\frac{h-y}{h} \Longrightarrow \frac{x+z}{h}$$

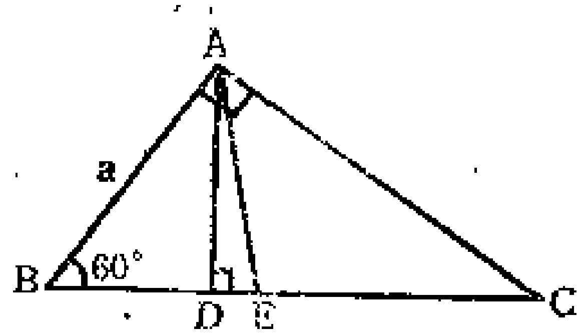
$$=\frac{h-y}{h} \Longrightarrow x+z=h-y.$$

$\because x$、y、z可以构成一个三角形，$\therefore x+z>y$。

故 $h-y>y$，即 $y<\frac{h}{2}$。

同理可证：$x<\frac{h}{2}$，$z<\frac{h}{2}$。

3. 解：由已知，在$Rt\triangle ABC$中，$BC=2a$，$AC=\sqrt{3}a$，$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{EC}$，即$\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{BE}{2a-BE}$，



$$\therefore \quad BE\cdot\sqrt{3}=2a-BE,\ BE=\frac{2}{\sqrt{3}+1}a。$$

$$故\quad DE=BE-BD=\frac{2}{\sqrt{3}+1}a-\frac{1}{2}a$$

$$=\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)a.$$

4． 解：（用排除法）

$\because |y|=x^2-1$，$\therefore$对同一个x值，有两个y值对应，故应排除A、B、C；

又 $x^2-1=|y|\geqslant 0 \Longrightarrow x^2\geqslant 1 \Longrightarrow x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$，故应排除E。

（或对同一个y值，有且只有两个x值对应，故应排除E）

二、填空题

1． 解：将$x=10$，$y=-1$ 代入方程组得

$$\begin{cases} 10a+b=391 & (1) \\ 10a^2-b=29 & (2) \end{cases}$$

(1)+(2)得 $10a^2+10a=420$，即 $a^2+a-42=0$，

$(a+7)(a-6)=0$，$a=6$，$\therefore b=331$。

故　$ab=6\times 331=\underline{1986}$。

2． 解：由已知条件得$a+c=3+\sqrt{3}-(3-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$，

故　$a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc$

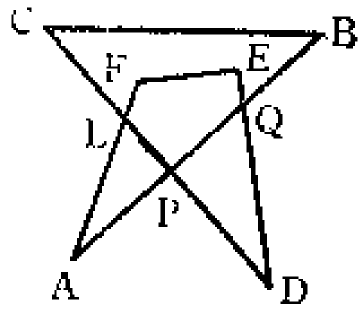
$$=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a+c)^2+(b-c)^2]$$

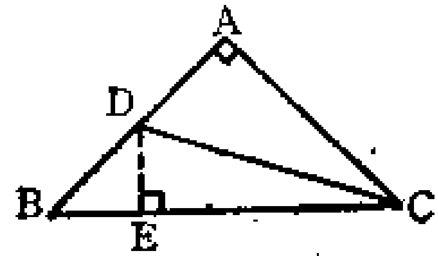
$$=\frac{1}{2}[12+6\sqrt{3}+12-6\sqrt{3}+12]=\underline{18}.$$

3． 解：$\angle B+\angle C=180^\circ-\angle CPB=180^\circ-(540^\circ-\angle F-\angle E-\angle FLP-\angle PQE)=-360^\circ+\angle F+\angle E+\angle A+\angle LPA+\angle D+\angle QPD=-360^\circ+\angle F+\angle E+\angle A$

$+\angle B+\angle C+\angle D+\angle B+\angle C$,

故 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=\underline{360^\circ}$.





4． 解：如图，等腰 $Rt\triangle ABC$，CD 为中线，设 $BD=DA=a$，则 $AC=2a$，$CD=\sqrt{5}a$，作 $DE\perp BC$，则 $DE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$。

$$\therefore \sin\angle DCE=\frac{DE}{CD}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\underline{\frac{\sqrt{10}}{10}}.$$

5． 解：$\log_{16}(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})$

$$=\frac{1}{2}\log_{16}(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^2$$

$$=\frac{1}{2}\log_{16}2=\underline{\frac{1}{8}}.$$

6． 解：设 $2^x=X$，$3^y=Y$，$5^z=Z$，则

$$X+Y+Z=7 \qquad (1)$$

$$\frac{X}{2}+Y+5Z=11 \qquad (2)$$

由(1)、(2)得

$X=-8+8Z \quad (3) \qquad Y=15-9Z \quad (4)$

这时，$2^{x+1}+3^y+5^{z-1}=2X+Y+\frac{Z}{5}=\frac{36}{5}Z-1 \qquad (5)$

$\because$ $X>0$，由(3)有$Z>1$。

$Y>0$，由(4)有$Z<\frac{5}{3}$。 $\therefore$ $1<Z<\frac{5}{3}$。

由(5)有$\underline{\frac{31}{5}<2^{x+1}+3^y+5^{z-1}<11}$。

三、证明：设$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$B'C'=a'$，$C'A'=b'$，$A'B'=c'$，

由已知条件有$a<a'$，$b<b'$，$c<c'$ ①

由条件知$0<A'<90°$。按$\angle A$与$\angle A'$的大小关系分两种情况研究：

1　当$\angle A'\geqslant\angle A$时：

在$0<\angle A\leqslant\angle A'<90°$范围内，有$\sin A\leqslant\sin A'$ ②

又$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$，$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}b'c'\sin A'$。

由①，$bc<b'c'$ ③

由(2)、(3)可知$S_{\triangle ABC}<S_{\triangle A'B'C'}$。

2．当$\angle A'<\angle A$时：

$\angle A+\angle B+\angle C=180°$ ④

$\angle A'+\angle B'+\angle C'=180°$ ⑤

由④、⑤与$\angle A'<\angle A$有：$\angle B'+\angle C'>\angle B+\angle C$ ⑥

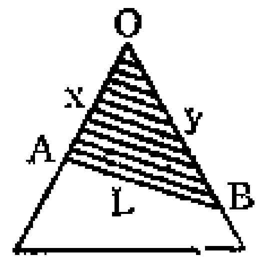
由⑥知，$\angle B'>\angle B$ 或 $\angle C'>\angle C$必至少有一个成立。

（1）当$\angle B'>\angle B$时，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$，$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}a'c'\sin B'$，

由①有$ac<a'c'$，由$0<\angle B\leqslant\angle B'<90^\circ$有
$\sin B<\sin B'$，故$S_{\triangle ABC}<S_{\triangle A'B'C'}$。
（2） 当$\angle C'>\angle C$时，同理可证$S_{\triangle ABC}<S_{\triangle A'B'C'}$；
因此，总有$S_{\triangle ABC}<S_{\triangle A'B'C'}$。

四、解：设$AB=L$，$OA=x$，$OB=y$。
如图，由余弦定理有



$$L^2=x^2+y^2-2xy\cos60^\circ$$
$$=x^2+y^2-xy=(x-y)^2+xy.$$

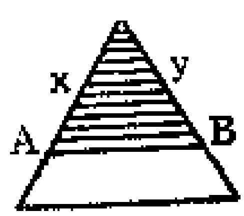
而原三角形面积$\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$之半为$\frac{\sqrt{3}}{8}$

阴影部分面积为$\frac{1}{2}x\cdot y\cdot\sin60^\circ$，故得 $x\cdot y=\frac{1}{2}$。

因此 $L^2=(x-y)^2+x\cdot y=(x-y)^2+\frac{1}{2}$。

当$x=y$时，L 取最小值为 $L=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故截下一个边长为

$\frac{\sqrt{2}}{2}$的等边三角形截口线段AB最短。



五、1.解：设小数点右边第1986位上的数字为 y，把小数点右边的一列数字（到1986位）分成三段，即：

$$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9}_{A}\quad\underbrace{10\ 11\ 12\cdots98\ 99}_{B}$$

$$\underbrace{100\ 101\ 102\cdots y}_{C}$$

在A段中有9个数字，B段中有$2\times90=180$个数字，则C段中有$1986-(9+180)=1797$个数字。

$\because C$段都由三位数组成，$\therefore 1797\div3=599$。

可知C段是由前599个三位数组成的。

$\because$第一个三位数是100，$\therefore$第599个三位数为693，$\therefore y=8$。即小数点右边第1986位上的数字是8。

2． 证明：以 $x=\sqrt{2}$，$y=0$ 代入$y=ax+b$，

得 $b=-\sqrt{2}a$。$\therefore$ $y=a(x-\sqrt{2})$ ①

设此函数存在两组不同的有理数对应值

(x_1,y_1)、(x_2,y_2)，代入①式得

$$\begin{cases} a(x_1-\sqrt{2})=y_1 \\ a(x_2-\sqrt{2})=y_2 \end{cases}$$

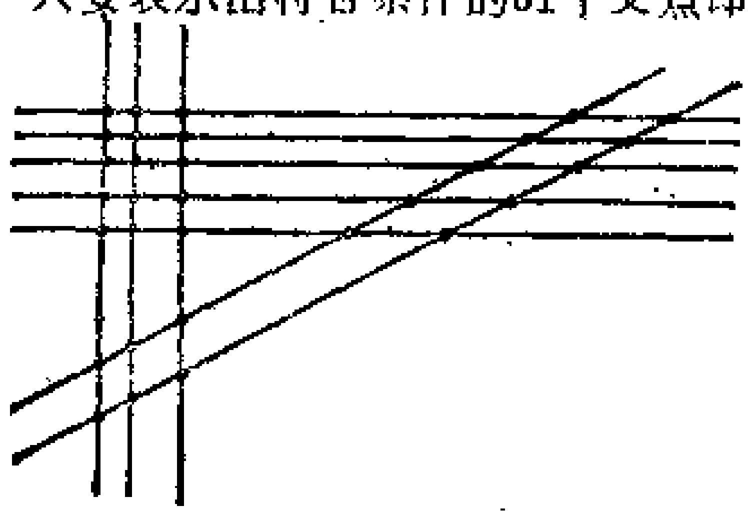
消去a，得$\sqrt{2}=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}$

$\because(x_1,y_1)$、(x_2,y_2)不同，所以$x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$。

故上式右端是有理数，它不可能等于无理数$\sqrt{2}$。

故$y=ax+b$不可能有两组以上有理数的对应值。

六、解：只要表示出符合条件的31个交点即可。



1986年江苏省初中数学竞赛

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6
答　案	D	C	C	B	A	D

1　解：∵　$1+2+3+4+5=15$是 3 的倍数，

∴　由 1、2、3、4、5 组成的五位数始终是 3 的倍数．故不可能是质数。

2．解：设观察了 x 天。

由(1)知　共有 $x-7$ 个上午是雨天；

由(2)知　共有 $x-5$ 个下午是雨天；

由(4)知　$x-5<7$；

由(3)知　$x-7+x-5=8$，

即 $2x=20$，故 $x=10$。

3．解：由$2x^2-23x+11=0$　得$(2x-1)(x-11)=0$，

$$x=\frac{1}{2}，或\ x=11，$$

∵　$\frac{1}{2}$不是整数，∴　一条直角边长为11。

观察　$x^2+y^2=z^2$。

∵　一个数的平方数的尾数只可能是 0、1、4、6、9 五种情况，而 x^2 的尾数为 1，

∴　y^2 的尾数只可能是 0、9，z^2的尾数只可能是1、0。

设 y^2 的尾数为 0，由计算知 $11^2+60^2=61^2$，

故这三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times 11\times 60=330$。

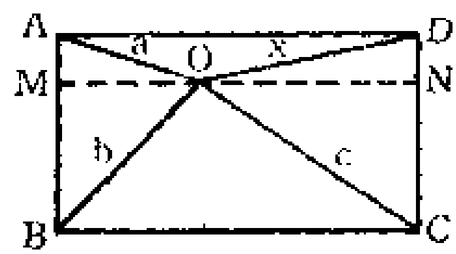
4．解：设所有两位数用 $10x+y(x\neq y)$ 表示，

$$\frac{10x+y}{x+y}=1+\frac{9x}{x+y}$$

要使 $\frac{9x}{x+y}$ 最小，只有 x 取 1，y 取 9，

故有最小值 $1-\frac{9}{10}=1.9$。

5．解：如图 $OA=a$，$OB=b$，$OC=c$。设 $OD=x$，



则 $a^2=AM^2+OM^2$，

$b^2=OM^2+MB^2$，

$C^2=CN^2+ON^2$，

$x^2=DN^2+ON^2$。

∵ $AM=DN$，$BM=CN$，

∴ $x^2+a^2+b^2+c^2=2(AM^2+OM^2+CN^2+ON^2)$

$=2(a^2+c^2)$。

故 $x^2=a^2+c^2-b^2$。

$x=\sqrt{a^2+c^2-b^2}$，x 可以确定，与场地的边长无关。

6．解：∵ $\frac{n^3+p}{n+q}=n^2-qn+q^2+\frac{p-q^3}{n+q}$。

∴ 当 $p-q^3=n+q$ 时，n^3+p 能被 $n+q$ 整除。

观察 $n=q^3+q-p$。

将 $p=100$，$q=10$ 代入上式，得 $n=910$；

将 $p=5000$，$q=20$ 代入上式，得 $n=3020$；

将 $p=50$，$q=12$ 代入上式，得 $n=1690$；

将 $p=300$，$q=15$代入上式，得 $n=3090$。

由此可见，当 $n=3090$ 为最大，相应的 $p=300, q=15$。

[注]当 $p=q^3$ 时，n^3+p 总能被 $n+q$ 整除，n 无最大值。

二、填空题。

1. 解：$x^4+1987x^2+1986x+1987$

$$=x^4-x+1987(x^2+x+1)$$

$$=x(x-1)(x^2+x+1)+1987(x^2+x+1)$$

$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1987).$$

2. 解：$\because$ $3317=31\times107$，$10<31<40$。

$\therefore$ 降价后，31个鸡蛋可换一个热水瓶。

3. 解：将正方形等分为九个小正方形（每个边长为10米），根据抽屉原则，10个小学生必有2个小学生落在某个小正方形中，所以，这两个小学生的距离必小于小正方形的对角线长$10\sqrt{2}$，故 d 的取值范围是 $0<d<10\sqrt{2}$。

4. 答：取 BC 的中点 M，连结 AM，在 AM 上取点 P，使得 $MP:PA=1:14$，则 P 即为所求点。

解：要使 $S_{\Delta PAB}:S_{\Delta PAC}=7:7$，即 $S_{\Delta PAB}=S_{\Delta PAC}$，则 P 点必须取在 BC 边的中线上。

要使 $S_{\Delta PAC}:S_{\Delta PBC}=7:1$，即 $S_{\Delta PAC}:S_{\Delta PMC}=14:1$，

由于三角形面积之比等于底边长之比（高相等时），故 $MP:PA=1:14$。

5. 解：$\because$ P_1、P_2 分别在 l_1 和 l_2 上，

$$\therefore \begin{cases} m=3n_1+2 \\ m=4n_2+1 \end{cases}$$

即 $m-2=3n_1$，$m-1=4n_2$，

也就是说，$m-5$ 既是 3 的倍数，又是 4 的倍数，则 $m-5$ 必

为12的倍数，故 $m-5=12k$。

即 $m=12k+5$ $(k=0, 1, 2, 3, \cdots)$

6．解：将 $a_{100}=199$ 代入

$(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}+1=0$，

得 $(100-2)a_{100}-(100-1)a_{99}+1=0$，

$98\times199-99a_{99}+1=0$，

解得 $a_{99}=197$。

同理，将 a_{99} 代入上式可得 $a_{98}=195$。

于是，可猜想 $a_n=2n-1$。

代入上式得 $(n-2)(2n-1)-(n-1)(2n-3)+1$

$=2n^2-n-4n+2-2n^2+3n+2n-3+1=0$，猜想正确，因此 $a_n=2n-1$。

故 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$

$=1+3+5+\cdots+197+199$

$=\dfrac{100(1+199)}{2}$

$=10000$。

三、解：p 和 q 都是大于 5 的质数，

∴ 它们都是奇数。

设 $p=2m+1$，$q=2n+1$（m，n 都是大于 2 的正整数），

则 $p^4-q^4=(p^2+q^2)(p+q)(p-q)$

$=8(2m^2+2n^2+2m+2n+1)$

$\times(m+n+1)\times(m-n)$

故 p^4-q^4 能被 8 整除。

由于 $m+n$、$m-n$ 同为奇数或同为偶数，

∴ $m+n+1$ 和 $m-n$ 两数中必有一个偶数，

∴ p^4-q^4 能被16整除。

∵ p、q都是大于5的质数，

∴ 其末位数只能是1、3、7、9之一。

又 ∵ 1^4、3^4、7^4、9^4的末位数都是1，

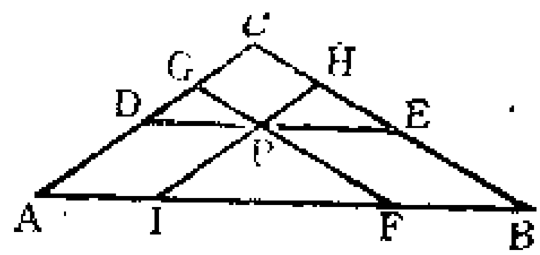
∴ p^4-q^4的末位数为0，

故能被5整除。

∵ 16和5互质，

∴ p^4-q^4能被80整除。

四、证明：∵ $DE \parallel AB$，$FG \parallel BC$，$HI \parallel CA$，



∴ $\triangle DPG \backsim \triangle ABC$，$\triangle IFP \backsim \triangle ABC$，

$\triangle PEH \backsim \triangle ABC$。

设上述三个相似比依次为x、y、z，

则有$DP=12x$，$PG=8x$，$GD=6x$；$IF=12y$，$FP=8y$，$PI=6y$；$PE=12z$，$EH=8z$，$HP=6z$。

∵ $AB=AI+IF+FB=DP+IF+PE$，

即 $12=12x+12y+12z$，

∴ $x+y+z=1$ （1）

又∵ $DE=FG=HI$，即 $DP+EP=FP+PG$

$=HP+PI$，

∴ $12x+12z=8y+8x=6z+6y$。

整理得 $x-2y+3z=0$ （2）

$2x-y+z=0$ （3）

从（1）、（2）、（3）解得 $x=\frac{1}{9}$，$y=\frac{5}{9}$，$z=\frac{1}{3}$，

∴ $AI:IF:FB=DP:IF:PE=x:y:z=1:5:3$。

∴ 原题得证。

五、证明：在5个点中任取三个点，它们是一三角形的顶点。

（一） 如果余下的两点在该三角形的内部（不会落在该三角形的周界上），则结论(2)已成立。

（二） 如果不是（一）中所说的情况，则有两种可能：

(i) 余下的都在该三角形的外部，这时如图1和图2

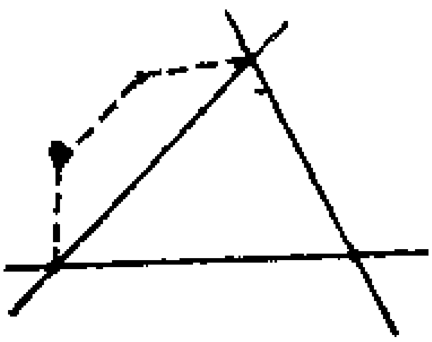


图 1

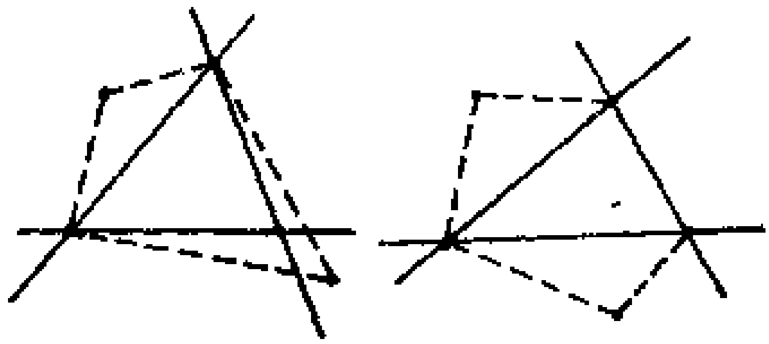


图 2

的情况不会发生，否则与已知矛盾。所以余下两点可能位置只能如图3、图4和图5之一所示，可以看出在图3、图4的情况下结论(1)成立，而在图5情况下结论(2)成立。

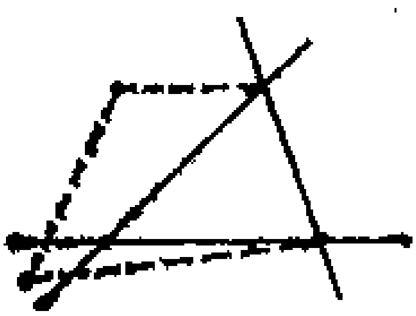


图 3

图 4

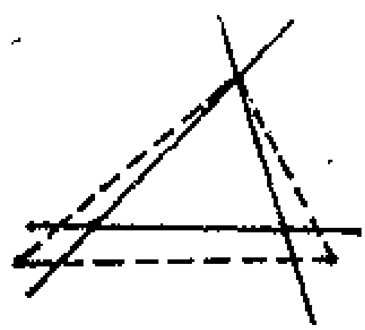


图 5

(ii) 余下两点中的一点在该三角形的内部，另一点在

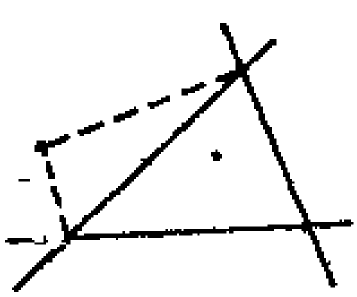


图 6

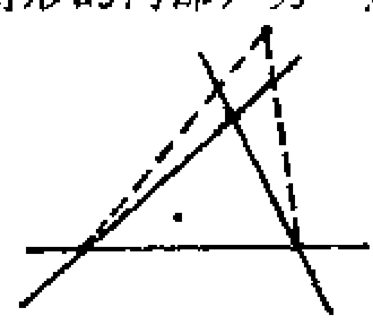


图 7

该三角形的外部，这时，可能情况只能如图6或图7所示。

在图6的情况下结论(1)成立，而图7的情况下结论(2)成立。

综合上述(1)、(2)中必有一个成立。

六、证明：从假设知，每个点至多和$40-(27+1)=12$个点无线段相连结。

在40个点中任取一点记为A，将A点以及那些和A点有线段相连结的点合称为第一组，则第一组点中至少有$27+1=28$个点。

在第一组点中，取不同于A的B点，将第一组中哪些和B有线段相连的点（包括B点）合称第二组，则第二组中至少有$28-12=16$个点。

再在第二组中取不同于A、B的一点记为C，将第二组中那些和C点有线段相连接的点（包括C点）合称为第三组点，则第三组点中至少有$16-12=4$个点。

因为第三组点中至少有4个点，所以第三组点中必有一不同于A、B、C的点D。

由A、B、C、D四个点的取法可知，B和A有线段连结，C分别与A、B有线段相连结，D分别与A、B、C有线段连结。

故A、B、C、D四个点中任何两点之间都有线段相连结。

1987年江苏省初中数学竞赛

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	B	C	C	B	B

1　解：可通过绘图得出结论，见1985年上海市初中数学竞赛试题解答。

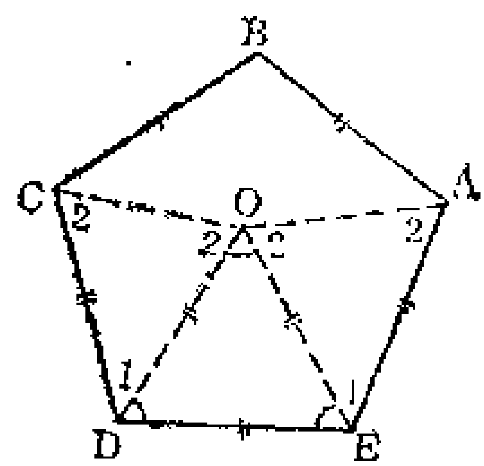
2．解：显然（1）、（3）正确，（2）不正确，因为存在5个数5、6、7、8、9使得其中任何一个数都不是其他任何数的倍数。

3．解：见1988年上海市初二数学竞赛试题解答。

4．解：因各组人数之和为158人，除1个小组外，听语文讲座是听数学讲座人数的6倍，所以，总人数去掉这一组的人数，应能被7整除。对4个答案不妨试一试。第4组7人，158－7＝151人，显然不能被7整除。第7组11人，158－11＝147人，显然能被7整除，故(B)成立。第9组、第12组显然不成立。

5．解：见1985年省市自治区联合竞赛试题参考解答。

二、填空题



1．解：如图，有两种情况：

（1）　O在正五边形的内部。

∵　正五边形的每一内角都等于108°，

∴　$\angle 1=108°-60°=48°$，

$$\angle 2=\frac{1}{2}(180°-48°)=66°，$$

故　$\angle AOC=360°-2\angle 2-60°=300°-132°=\underline{168°}$

（2）　O在正五边形的外部。

$\because\ \angle AEO=\angle CDO$

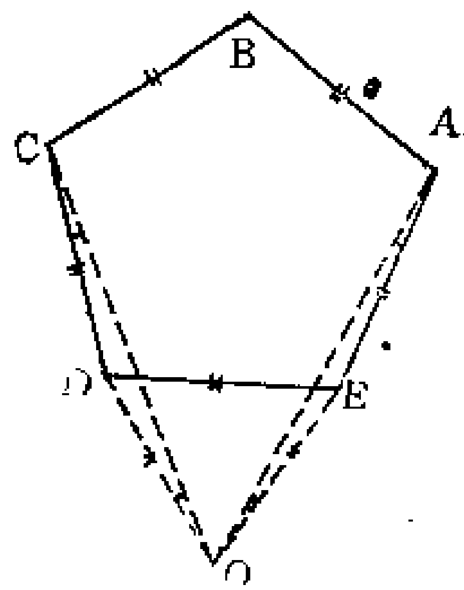
$=108°+60°=168°$,

$\therefore\ \angle COD=\angle AOE$

$=\frac{1}{2}(180°-168°)=6°$,

故 $\angle AOC=60°-2\angle COD$

$=\underline{48°}$。



2. 解：由题设 $k=1, 2, 3, \cdots, 1986, 1987$。

直线 $kx+(k+1)y-1=0$ 与两坐标轴的交点坐标分别为：$\left(0, \frac{1}{k+1}\right)$；$\left(\frac{1}{k}, 0\right)$。

则 $S_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k+1}$,

故 $S_1+S_2+\cdots+S_{1987}$

$$=\frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{1987\cdot1988}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1987}-\frac{1}{1988}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1988}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1987}{1988}=\underline{\frac{1987}{3976}}.$$

3. 解：由题设，令一边 $c=21$，

则 $a+b+c=54$，$a+b=33$ （1）

利用面积公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$。

这里　$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=27$，

因题目要求 $S=\sqrt{27\times6(p-a)(p-b)}$

$=9\sqrt{2(p-a)(p-b)}$ 为整数，只需 $27-a=2(27-b)$，

即　$a-2b=-27$　　(2)

(1)－(2)得 $3b=60, b=\underline{20}$，代入(1)得 $a=\underline{13}$。

三边都是整数合于题目要求。

4. 解：见1986年宿州市初中数学竞赛试题参考解答。

5. 解：由已知　$\alpha+\beta=2-p$，$\alpha\cdot\beta=1$。

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2+2$$
$$=(2-p)^2=4-4p+p^2.$$

则　$\alpha^2+\beta^2=2-4p+p^2$　　(1)

由 $\alpha+\beta=2-p$ 得 $p+\alpha=2-\beta$，$p+\beta=2-\alpha$。

代入　$[1+\alpha(p+\alpha)-\beta][1+\beta(p+\beta)-\alpha]=-\frac{7}{2}$，

得　$[1+\alpha(2-\beta)-\beta][1+\beta(2-\alpha)-\alpha]=-\frac{7}{2}$。

将 $\alpha\cdot\beta=1$ 代入得　$(2\alpha-\beta)(2\beta-\alpha)=-\frac{7}{2}$，

化简得　$5\alpha\beta-2\alpha^2-2\beta^2=-\frac{7}{2}$，

则　$\alpha^2+\beta^2=\frac{17}{4}$　　(2)

由(1)和(2)知　$p^2-4p+2=\frac{17}{4}$，

即　$4p^2-16p-9=0$，

$(2p+1)(2p-9)=0$，

$$p=-\frac{1}{2} \text{ 或 } p=\frac{9}{2}.$$

三、解：$S_{\Delta DOA}=S_{\Delta DAB}-S_{\Delta OAB}=S_{\Delta CAB}-S_{\Delta OAB}$

$=S_{\Delta COB}=\frac{2}{9}S$，则$S_{\Delta AOB}+S_{\Delta COD}=S-2\cdot\frac{2}{9}S=\frac{5}{9}S$ （*）

$$\because\quad \frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta COB}}=\frac{AO}{OC}=\frac{b}{a},$$

$$\therefore\quad S_{\Delta AOB}=\frac{b}{a}S_{\Delta COB}=\frac{b}{a}\cdot\frac{2}{9}S.$$

$$\because\quad \frac{S_{\Delta COD}}{S_{\Delta COB}}=\frac{DO}{OB}=\frac{a}{b},$$

$$\therefore\quad S_{\Delta COD}=\frac{a}{b}S_{\Delta COB}=\frac{a}{b}\cdot\frac{2}{9}S.$$

代入（*）得 $\frac{2}{9}S\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=\frac{5}{9}S$，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{5}{2}$，

解得$\frac{a}{b}=2$ 或$\frac{1}{2}$，由已知 $a<b$ 得$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$.

四、解：设所求的三位数为 xyz，经过排列所得最大数设为 ABC（$A\geqslant B\geqslant C$，其中两个等号不能同时成立），则最小数必为 CBA。由题意应有 $ABC-CBA=xyz$，由于$C<A$，则从上式得

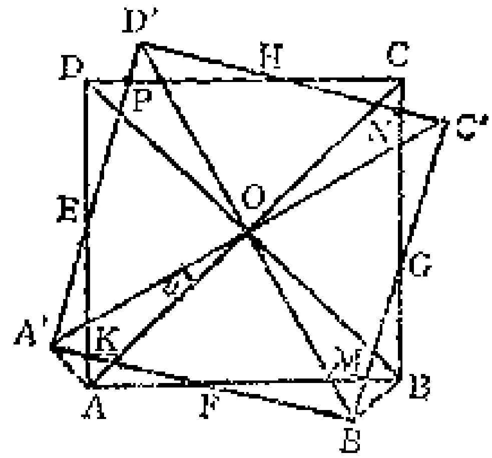
$$\begin{cases}10+C-A=z & (1)\\ 10+(B-1)-B=y & (2)\\ (A-1)-C=x & (3)\end{cases}$$

由（2）式得 $y=9\Rightarrow A=9$ 代入(1)式得$z=C+1\Rightarrow C\Rightarrow z=B$，$x=C$。代入（3）式得 $x=4\Rightarrow C=4\Rightarrow z=5$。故所求三

位数为495。

五、解：连结AA'，BB'。不难看出，

$\triangle A'OA \cong \triangle B'OB$，



$\therefore \quad \angle OA'A = \angle OAA' = \angle OB'B = \angle OBB'$。

将上面等角各减45°得

$\angle KA'A = \angle KAA' = \angle MBB' = \angle MB'B$。

$\therefore \quad \triangle A'KA \cong \triangle B'MB$，

$\therefore \quad A'K = AK = B'M = BM$。

则得 $\quad Rt\triangle EA'K \cong Rt\triangle FAK \cong Rt\triangle MB'F$。

$\therefore \quad EK = FK = FM$。

同理可证，八个小直角三角形$\triangle FAK$，$\triangle B'MF$、$\triangle MBG$、$\triangle C'NG$，$\triangle NCH$，$\triangle PD'H$，$\triangle PDE$，$\triangle A'KE$都全等。

又$\because \quad \angle EA'O = \angle EAO = 45°$，

$\therefore \quad O$、E、A'、A四点共圆。

因而$\angle A'EA = \angle A'OA = \alpha$，则$\angle AFK = \alpha$。

设$FK = x$，则$AF = x\cos\alpha$，$FM = x$，$MB = AK = x\sin\alpha$。

$\therefore \quad x\cos\alpha + x + x\sin\alpha = 1$，

$$x = \frac{1}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

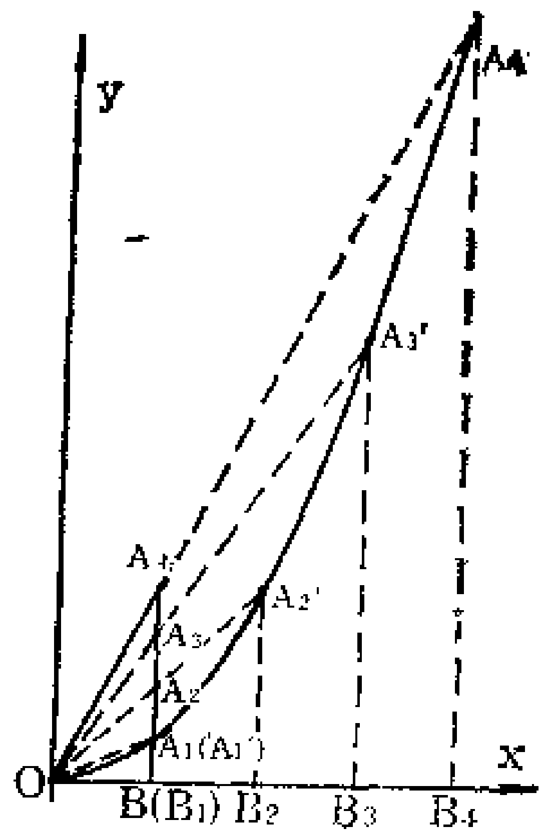
$$S_{\triangle KAF} = \frac{1}{2}AF\cdot AK = \frac{1}{2}x\cos\alpha\cdot x\sin\alpha$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha+\sin\alpha)^2},$$

故重叠部份的面积

$$S=1-4S_{\Delta KAF}=1-\frac{4\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2(1+\cos\alpha+\sin\alpha)^2}$$

$$=\frac{2}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}.$$



六、证明：(1)以O为原点，以OB所在直线为x轴建立直角坐标系。不妨取OB为长度单位，于是可设B、A_n的坐标分别是$(1,\ 0)$、$(1,\ h)$（这里$h>0$），则A_1，A_2，$\cdots$，A_{n-1}的坐标分别为$\left(1,\ \frac{1}{n}h\right)$，$\left(1,\ \frac{2}{n}h\right)$，$\cdots$，$\left(1,\ \frac{n-1}{n}h\right)$。

连结OA_i且延长OA_i到$A_i'$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，使得$OA_1'=OA_1$，$OA_2'=2OA_2$，$\cdots$，$OA_n'=nOA_n$。为了清楚起见，就$n=4$画图示意。(见图)

分别过A_1'，A_2'，$\cdots$，A_n'作x轴的垂线，设垂足分别是$B_1(B)$，B_2，$\cdots$，B_n，由$\frac{A_n'B_n}{A_nB}=\frac{OB_n}{OB}=\frac{OA_n'}{OA_n}=n$，

得$A_n'B_n=nAB=nh$，$OB_n=nOB=n$。

则A_n'的坐标为$(n,\ nh)$，同理A_1'，A_2'，$\cdots$，A_{n-1}'的坐标分别为$\left(1,\ \frac{1}{n}h\right)$，$\left(2,\ \frac{4}{n}h\right)$，$\cdots$，$\left(n-1,\ \frac{(n-1)^2}{n}h\right)$。显然，这些点的坐标都满足关系式$y=\frac{1}{n}hx^2$，这是二次函数，

图象为抛物线，故A'_1，A'_2，…，A'_n在同一条抛物线上。

（2） 当$OB=1$，$BA_n=h=n$时，A'_1，A'_2，…，A'_n的坐标分别是$(1,1)$，$(2,4)$，…，(n,n^2)。

在A'_1，A'_2，…，A'_n中任取两点A'_i，A'_{i+k} $(1\leqslant i<i+k\leqslant n)$（$k$是自然数）

$$|A_iA_{i+k}|=\sqrt{[(i+k)-i]^2+[(i+k)^2-i^2]^2}$$
$$=\sqrt{k^2+k^2(2i+k)^2}=k\sqrt{(2i+k)^2+1},$$

$\because$ $(2i+k)^2<(2i+k)^2+1<(2i+k+1)^2$,

$\therefore$ $|A_iA_{i+k}|$是无理数。

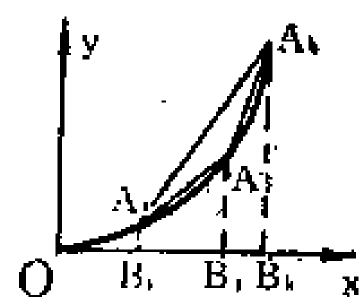
（3） 因为一条直线与抛物线至多有两个交点，所以A'_1，A'_2，…，A'_n中任何三点不共线。

任取三点A'_i，A'_j，A'_k，不妨设$i<j<k$（如图），

则 $S_{\triangle A_iA_jA_k}=S_{\triangle A_iB_iB_kA_k}-S_{\triangle A_iB_iB_jA_j}-S_{\triangle A_jB_jB_kA_k}$

$$=\frac{1}{2}(i^2+k^2)(k-i)-\frac{1}{2}(i^2+j^2)(j-i)$$

$$-\frac{1}{2}(j^2+k^2)(k-j).$$



因为i、j、k都是自然数，所以$S_{\triangle A_iA_jA_k}$为有理数。

1988年江苏省初中数学竞赛

一、选择答案题

题　号	1	2	3	4	5	6
答　案	D	C	C	C	C	D

1、 解：因为$10=8\times1.25$，

2. 解：注意到$[-77.66]=-78$，

$[-77.66x]=[-77.66]x+1$，

$[-78x+0.34x]=-78x+1$。

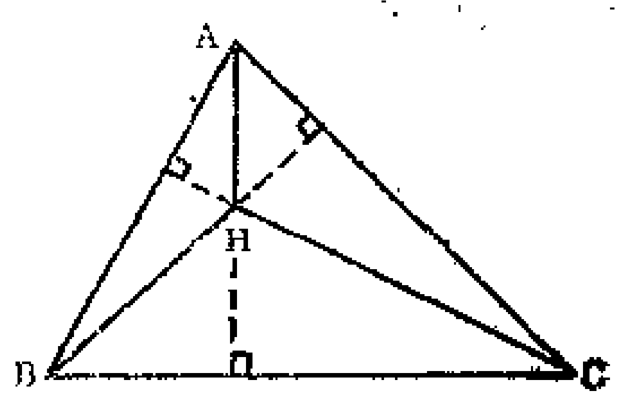
∵ x为整数，∴ 写成$[-78x]+[0.34x]=-78x+1$，

$-78x+[0.34x]=-78x+1$，

即 $[0.34x]=1$，

$x=3$、4、5均成立。

故满足方程的整数x的个数是3。



3. 解：不妨设$\angle A=75°$，$\angle B=60°$，$\angle C=45°$，由正弦定理得

$$AC=\frac{\sqrt{6}}{2}(\sqrt{3}-1)BC,\ AB=(\sqrt{3}-1)BC.$$

令$BC=\sqrt{3}+1$，则$AB=2$，$CA=\sqrt{6}$。

不难求出：$AH=\sqrt{3}-1$，$BH=\sqrt{2}$，$CH=2$。

(A)$HC+CA+AB+BH=2+\sqrt{6}+2+\sqrt{2}$

$=4+\sqrt{6}+\sqrt{2}\approx 7.86$，

(B)$HA+AB+BC+CH=\sqrt{3}-1+2+\sqrt{3}+1+2$

$=4+2\sqrt{3}\approx 7.46$，

(C)$HB+BC+CA+AH=\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{6}$

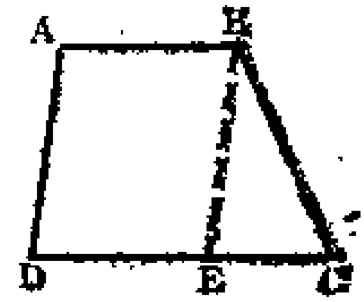
$+\sqrt{3}-1=\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{3}\approx 7.32$。

故行程最短的路线是(C)。

4. 解：方程$x^2-px-580p=0$的两根为整数的必要条件是$\Delta=p^2+4\times 580p$为完全平方数。因p是质数，Δ含有因数p，故Δ必须含有因数p^2。因此，$4\times 580p$中必含有因数

p^2，即4×580必含有因数p。因$4\times580=2^4\times5\times29$，故$p=2$或5或29。经检验，仅当$p=29$时，原方程的根才是整数。

5．解：在DC上取$DE=AB$，若E和C不重合，连结BE，则$DA=BE$。由已知$AB+BC=CD+DA=DE+EC+BE$，则$BC=EC+BE$与三角形三边之间关系矛盾，故E和C重合，即$AD=BC$。



6．解：对任何正整数a，考虑方程组

$$\begin{cases}x+y=a^2\\x-y=a\end{cases}，其解为x=\frac{a(a+1)}{2}，y=\frac{a(a-1)}{2}。$$

因a与$a+1$，或a与$a-1$均是连续的两个整数，故其积被2整除，这表明x、y均为整数。这样的x、y以及$-x$、$-y$都是原方程的整数解。

二、填空题

1．解：考虑条件$m\leqslant n\leqslant p$，$m+n+p=15$及三角形三边之间的关系$m+n>p$，则$m+n\geqslant8$，$p\leqslant7$这样的三角形有以下7个：

p	7	7	7	7	6	6	5
n	7	6	5	4	6	5	5
m	1	2	3	4	3	4	5

2．解：设$u\lg a=v\lg b=x\lg c=y\lg d=k$，

计算：$uvxy\lg(abcd)$

$$=uvxy(\lg a+\lg b+\lg c+\lg d)$$

$$=k(vxy+uxy+uvx+uvy)=0。$$

$\because$ $uvxy\neq0$，$\therefore$ $\lg(abcd)=0$，故$abcd=1$。

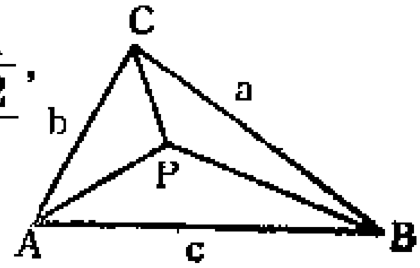
3． 解：设$S_{\Delta ABC}=6$，则$S_{\Delta PBC}=1$。

∵ $\triangle_{ABC}$和$\triangle_{PBC}$同以BC为底边，

∴ $h_{\Delta PBC}:h_{\Delta ABC}=1:6$。已知$h_{\Delta ABC}=h_a=3$，

因此 P到BC的距离为$h_{\Delta PBC}=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，

同理可求P到AC和AB的距离为$\frac{5}{3}$和2。



4． 解：当$|x|\geqslant 4$时，方程化为

$\lg\frac{|x|}{4}+\lg 2=\lg x^2$，

$\lg|x|-\lg 2=2\lg|x|$，$\lg|x|=-\lg 2$，

$|x|=\frac{1}{2}$（与$|x|\geqslant 4$不合）；

当$1\leqslant|x|<4$时，方程化为

$-\lg\frac{|x|}{4}+\lg 2=\lg x^2$，

$3\lg|x|=3\lg 2$，$|x|=2$，$x=\pm 2$，

当$0\leqslant|x|<1$时，方程化为

$-\lg|x|+3\lg 2=-2\lg|x|$，

$\lg|x|=\frac{1}{8}$，$x=\pm\frac{1}{8}$。

故解$x=\pm 2$和$\pm\frac{1}{8}$。

5． 解：取坐标系如图，设等边$\triangle ABC$的边长为a，则$Q(x, y)$到点$C(0, 0)$、$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2}\right)$、$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}\right)$的距离的平方分别为

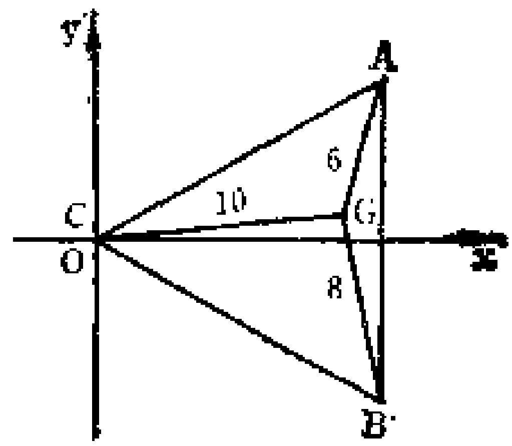
$x^2+y^2=10^2$ (1)

$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}a\right)^2=8^2$

(2)

$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}a\right)^2=6^2$

(3)



由(2)－(3)得$2ay=28$，即$ay=14$ (4)

利用(1)和(4)，方程(2)变为

$a^2+50=\sqrt{3}\,ax$或$ax=\frac{1}{\sqrt{3}}(a^2+50)$ (5)

将(4)、(5)代入(1)，并化简得

$a^4-200a^2+3088=0$，

解得 $a^2=100\pm48\sqrt{3}$，因$a=AC>QC=10$，

故应取 $a^2=100+48\sqrt{3}$。

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=36+25\sqrt{3}\approx\underline{79}$。

6． 解：设此数为$\overline{abcde}$，则有

$a+b+c+d+e=43$ (1)

$a+c+e-b-d=11k$ （k为整数） (2)

由(1)知 $7\leqslant a,\ b,\ c,\ d,\ e\leqslant9$。

由(1)－(2)得$2(b+d)=43-11k$，由此可见k必为奇数，又$14\leqslant b+d\leqslant18$，则可得

$0\leqslant43-11k\leqslant36\Rightarrow43\geqslant11k\geqslant7\Rightarrow k=1,\ 3$。

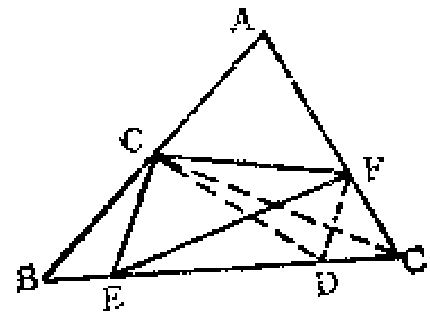
则$b+d=16$或5（不合要求）。

由(1)得$a+c+e=27$，

因此$a=c=e=9, b=d=8$或$b=7, d=9$，或$b=9, d=7$。

故所求的五位数为98989，97999，99979。

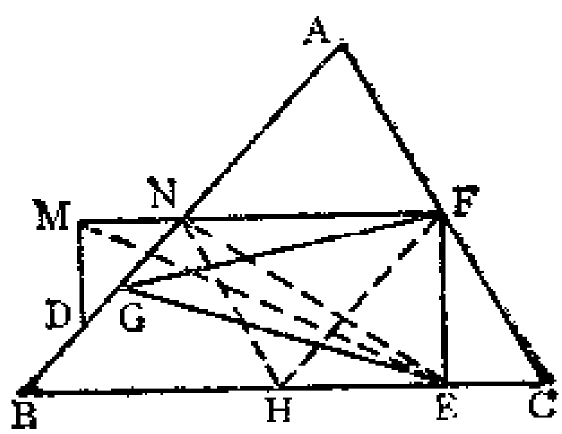
三、作法一：如图，在BC上取$BE=CD=\frac{1}{5}BC$，在AB上取中点G，连结EG，过D作$DF\parallel EG$，交AC于F，连结GF、EF，则$\triangle EFG$即为所求。



证：连结GD、GC，显然有

$$S_{\triangle EFG}=S_{\triangle DEG}=\frac{3}{4}S_{\triangle GBD}=\frac{3}{5}S_{\triangle GBC}=\frac{3}{10}S_{\triangle ABC}=\frac{3}{10}.$$

因$\frac{1}{4}<\frac{3}{10}<\frac{1}{3}$，故证毕。



作法二：如图，作$\triangle ABC$的中位线FN并延长至M，使$MF=\frac{4}{3}NF$，作$FE\perp BC$，垂足为E（当$\angle A$为$\triangle ABC$的最大内角时，E必为BC的内点）；作$MD\parallel FE$，交AB于D，取DN的任一内点G，连结GF、GE，则$\triangle EFG$即为所求。

证：设H为BC的中点，连结HF、HN、EN、EM，

则$S_{\triangle EFN}=S_{\triangle HFN}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}$，$S_{\triangle EFM}=\frac{4}{3}S_{EFN}=\frac{1}{3}$，

由点G的取法可知，$\triangle EFG$在EF边上的高大于NF，而小于MF，故有$S_{\triangle EFN}<S_{\triangle EFG}<S_{\triangle EFM}$，即$\frac{1}{4}<S'<\frac{1}{3}$。

四、解：由(1)－(2)得$(x-t)(y+z)=0$　　（5）

(2)－(3)得$(y-x)(z+t)=0$　　（6）

(3)－(4)得$(z-y)(t+x)=0$　　（7）

若$y+z=0$，即$z=-y$，代入(1)得$-y^2=1$，无实数解，故$y+z\neq0$；同理由(2)得$z+t\neq0$，由(3)得$t+x\neq0$。从而由(5)、(6)、(7)得$x-t=0$，$y-x=0$，$z-y=0$。

因此$x=y=z=t$。代入(1)得$3x^2=1$，$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。故得到原方程组的两组解：

$$x_1=y_1=z_1=t_1=\frac{\sqrt{3}}{3};\ x_2=y_2=z_2=t_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

五、解：$\triangle PQR$第一次绕点R转过120°$\left(\frac{1}{3}\text{圆周}\right)$，第二次绕点$B(P)$转过30°$\left(\frac{1}{12}\text{圆周}\right)$，然后沿正方形的边作同样的转动。$\triangle PQR$沿正方形的边转动一周（可称为公转一周），共要作8次转动，这时共转过了$4\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)=\frac{5}{3}$（圆周），虽然$\triangle PQR$已在原来位置上，但顶点并没有恢复原位；要使顶点全部复原，必须再继续公转2周。这时，$\triangle PQR$共经过$8\times3=24$次自转，其中有$\frac{24}{3}=8$次是绕点P自转的，即点P没有移动，而在余下的16次自转中，有8次是点P走了以2为半径的$\frac{1}{3}$圆周，另外8次是走了此圆周的$\frac{1}{12}$。因此，点P所

走路程为$8\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\cdot 4\pi=\frac{40}{3}\pi$。

证明：在无限次的连续自转中，总是两个顶点动，一个顶点不动，且保持不动的点依次为：

$$\cdots\cdots R、P、Q、R、P、Q\cdots\cdots R、P、Q、R、P\cdots\cdots$$

$$\longrightarrow\cdots 100\text{次自转}\longrightarrow$$

现在考察任一100次的连续自转。为确定起见，假设第一次不动的点是Q，可以看出，在这样的100次自转中，点R与点P各是33次保持不动，而第100次自转中，则Q保持不动。所以，在这样的100次连续自转中，点R与点P各是33次不动，而点Q是34次不动。于是可以明白，在任意的100次连续自转中，第一次保持不动的($\triangle PQR$的)顶点保持不动的次数是34，而其余两个顶点保持不动的次数是33。

六、解：将十个英文字母A、B、C、D、E、F、G、X、Y、Z，依次对应十个数字0、1、2、3、4、5、6、7、8、9，则每一个"词"对应一个"五位数"，例如：$AAAAA$对应00000，$AAABC$对应00012。这样，"词表"可改写为"五位数"表：00000，00001，00002，……，00009，00010，……，99999。

因为$CYZGB$对应28961、$XEFDA$对应74530，所以，这两个词之间词的个数，等于五位数28961与74530之间的五位数的个数，即

$k=74530-28961-1=45568$。

注意到00000是数表中的第一个数，故数表中的第k个"五位数"是$45568-1=45567$，它对应"词表"中的第k个词就是$EFFGX$。

1986年无锡市初中数学通讯赛

1．解：∵ [illegible] $=1$，∴ [illegible] $=$ [illegible]．

2．解：[illegible] -2，$a=-1$，[illegible] c [illegible] 1，

∴ [illegible] $+a<0$，$c-a>0$，$b+c<0$．

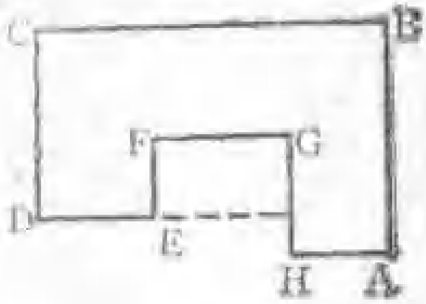
故 $\sqrt{a}$ [illegible] $-b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c|$

$=$ [illegible] $(-a-b)+c-a-(b+c)=1$．

3．解：[illegible] 个数的平均数为

$(2000\times1986+2000)\div1987=2000$．

4．解：∵ $DE+FG+HA$



$=CB$，

$CD+FE+GH=AB+2FE$，

∴ [illegible] AB和FE [illegible]

条边就可求 [illegible]．

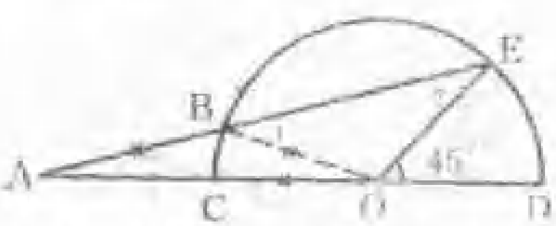
5．解：方程为 $x^2-(m+2)x+4=0$．

若无实根，则$(m+2)^2-4\times4<0$，

即 $(m+2)^2<16$，$-4<m+2<4$，

故有 $-6<m<2$，则m的最大整数值为1．

6．解：如图，连结BO．



∵ $AB=CO=BO$，∴ $\angle2=\angle1=2\angle A$，

故 $\angle EOD=\angle2+\angle A=3\angle A=45^\circ$．

因此，$\angle A=15^\circ$.

7．解：设有苹果x只，由题意知

$$\frac{x}{2}-1+\left[x-\left(\frac{x}{2}-1\right)\right]\times\frac{1}{2}+1+8=x,$$

解得$x=\underline{34}$.

8．解：$x=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2n+1-2\sqrt{n(n+1)}$.

$$y=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=2n+1+2\sqrt{n(n+1)},$$

∴ $x+y=4n+2$，$xy=(2n+1)^2-4n(n+1)=1$,

故 $x^2+1504xy+y^2=(x+y)^2+1502xy$

$=(4n+2)^2+1502=1986$,

解得 $n=\underline{5}$.

9．解：由$x^2+2x+y^2-6y+10=0$,

变形得 $(x+1)^2+(y-3)^2=0$,

故 $x=-1$，$y=3$.

∴ $\log_2(y-x)\cdot\log_2(y+x)=\log_2 4\cdot\log_2 2=\underline{2}$.

10．解：∵$|x-|2x+1||=3$,

∴$x-|2x+1|=\pm3$.

∴$|2x+1|=x\pm3$.

当$x\geqslant-\dfrac{1}{2}$时，$2x+1=x\pm3$,

解得$x=2$或$x=-4$（舍去），

当$x<-\dfrac{1}{2}$时，$-2x-1=x\pm3$,

解得$x=-\dfrac{4}{3}$或$x=\dfrac{2}{3}$（舍去）.

故有2个不同的根。

11．解：设两根为x_1，x_2。

则 $x_1+x_2=s_1=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，

$$S_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a},$$

$$S_3=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}-\frac{c}{a}\right)$$

$$=-\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right),$$

故 $aS_3+bS_2+cS_1=-b\left(\frac{b^2-3ac}{a^2}\right)+b\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)$

$$-\frac{bc}{a}=\underline{0}.$$

12．解：两边平方得$(x-2)(2x-4+2\sqrt{x-1}\sqrt{x-3})$
$=2$，

化简得$x^2-4x+3=(2-x)\sqrt{x^2-4x+3}$。

两边平方得$(x^2-4x+3)^2=(2-x)^2(x^2-4x+3)$。

当$x^2-4x+3\neq0$时，

$x^2-4x+3=(2-x)^2=x^2-4x+4$，不成立；

当$x^2-4x+3=0$时，$x=1$或3。

故大根是小根的$\underline{3}$倍。

13．解：设跑道长为x，甲、乙、丙的速度分别为$v_甲$、$v_乙$、$v_丙$，甲、乙到达终点的时刻为$t_甲$、$t_乙$。则$v_甲\cdot t_甲=x$，$v_乙\cdot t_甲=x-1$，$v_丙\cdot t_甲=x-2$；故 $v_乙=\frac{x-1}{x}v_甲$，

$v_丙=\frac{x-2}{x}v_甲$，

$\therefore \quad \dfrac{v_{乙}}{v_{丙}} = \dfrac{x-1}{x-2}$.

又$\because v_{乙}\cdot t_{乙}=x$，$v_{丙}\cdot t_{乙}=x-1.01$，

$\therefore \quad \dfrac{v_{乙}}{v_{丙}} = \dfrac{x}{x-1.01}$，则有$\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x}{x-1.01}$.

解得 $x=101$米，比110米少$\underline{9}$米。

14．解：由对数方程得$(x-2y)^2=xy$，

化简得 $x^2-5xy+4y^2=0$，

分解因式 $(x-y)(x-4y)=0$，

由已知$x\neq y$，$\therefore x-4y=0$，故$x:y=\underline{4}$。

15．解：$\because \dfrac{w}{x}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{z}{w}$，

$\therefore x^2=wy$，$y^2=xz$，$z^2=yw$，$w^2=xz$，

则 $x^2=z^2=yw$，$y^2=w^2=xz$。

$\because \quad yw>0$，$\therefore \quad y=w$。

$\because \quad xz>0$，$\therefore \quad x=z$，故$x^2=z^2=y^2=w^2$。

$\because \quad x^2=w^2$，$x\neq w$，$\therefore \quad x=-w$，

$\therefore \quad x=z=-y=-w$。

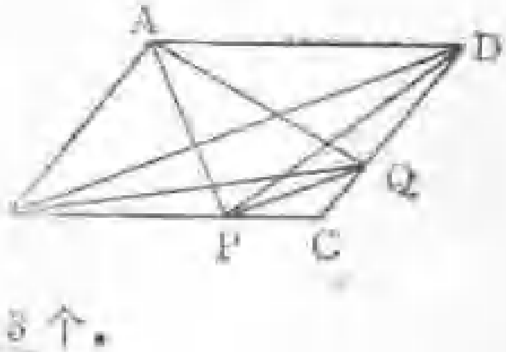
若 $\dfrac{w+x+y+z}{x+y+z-w} = \dfrac{0}{4x} = \underline{0}$ $(\because x\neq 0)$。

16．解：$\because AD \parallel BC$，

$\therefore S_{\triangle ABP}=S_{\triangle DBP}$。

$\because \quad PQ \parallel BD$，$\therefore S_{\triangle DBP}=S_{\triangle DBQ}$。

$\because \quad AB \parallel CD$，$\therefore S_{\triangle DBQ}=S_{\triangle DAQ}$。



故与$\triangle ABP$面积相等的三角形有$\underline{3}$个。

17．解：$\because \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=1$，

即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}\right)=1$.

由已知，x、y、z、a、b、c都不为0。

用$\frac{abc}{xyz}$乘上式两端，得

$$\frac{abc}{xyz}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+2\left(\frac{c}{z}+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=\frac{abc}{xyz}.$$

$\because$ $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$,

$\therefore$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

18．解：$y=x^2*(2x)+2*4$

$$=\frac{1}{3}[x^2+2(2x)]+\frac{1}{3}(2+2\times4)$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+4x+10)$$

$$=\frac{1}{3}(x+2)^2+2.$$

故当$x=-2$时，$y_{min}=2$.

19．解：如图，$AB=\sqrt{4^2+3^2}=5$,

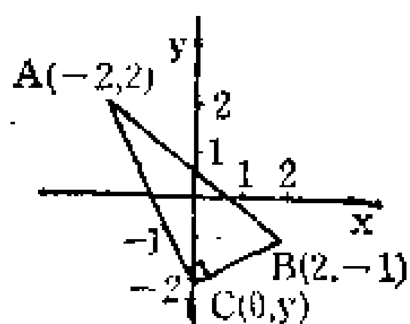
$BC=\sqrt{4+(1+y)^2}$，$CA=\sqrt{4+(y-2)^2}$.

$\because$ $\angle ACB=90°$，$\therefore$ $BC^2+CA^2=AB^2$,

即 $4+(1+y)^2+4+(y-2)^2=25$.

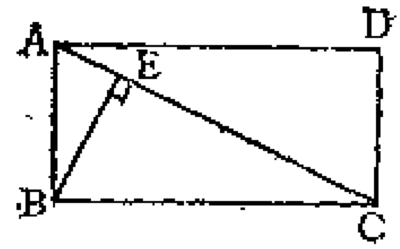
化简得 $y^2-y-6=0$,

解得 $y=-2$，$y=3>0$（舍去）。



故　$(1+y)^2=(1-2)^2=\underline{1}$.

20．解：由已知$AC=5AE=50$，



$AB^2=AC\cdot AE=50\times10=500$，$AB=10\sqrt{5}$.

$BC^2=AC^2-AB^2=2500-500=2000$，$BC=20\sqrt{5}$.

$S=AB\times AC=10\sqrt{5}\times20\sqrt{5}=\underline{1000}$.

21．解：$\because x$与y^2成反比例，$\therefore xy^2=m$.

$\because y$与z^2成正比例，$\therefore y=nz^2$.

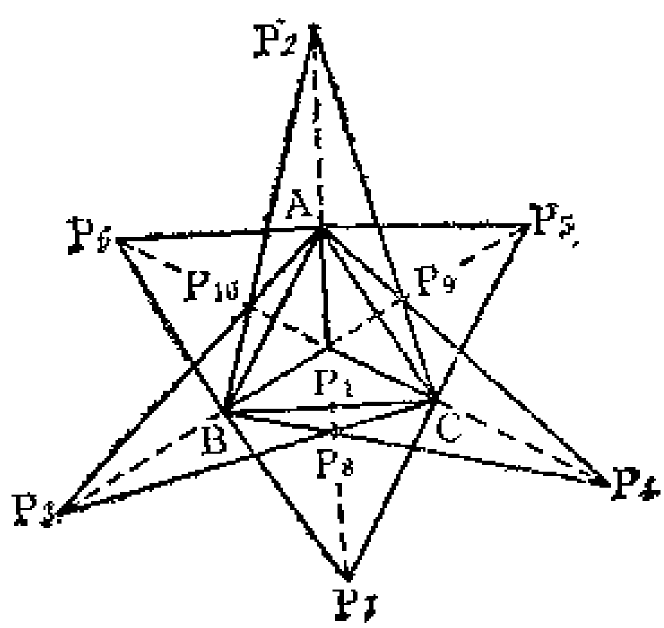
$\because$　$x=24$，$y=2$，$\therefore$　$m=96$.

$\because$　$y=18$，$z=3$，$\therefore$　$n=2$.

故当$z=1$时，$y=2$，$x=\dfrac{96}{4}=\underline{24}$.

22．解：(1)正$\triangle ABC$的内心P_1.

(2)在P_1A的延长线上取$AP_2=AB$，则$\triangle P_2BA$、$\triangle P_2AC$和$\triangle P_2BC$均为等腰三角形．同理，在P_1B和P_1C的延长线上取$BP_3=CP_4=AB$，则P_2、P_3、P_4即为所求．

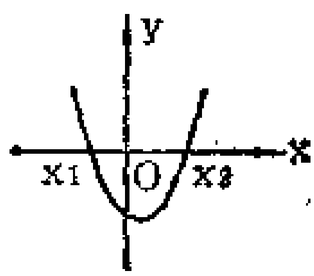


(3)　以A为圆心，AB长为半径画弧，交BP_1的延长线于P_5，则$\triangle P_5AB$、$\triangle P_5BC$、$\triangle P_5AC$均为等腰三角形；同理可取P_6、P_7，

则P_5、P_6、P_7即为所求。

(4) 在AP_1的延长线上取$AP_8=AB$，则$\triangle P_8AC$、$\triangle P_8AB$、$\triangle P_8BC$均为等腰三角形，同理可取P_9、P_{10}，则P_8、P_9、P_{10}即为所求。

故共有10个点符合条件。



23 解：设$x^2+bx-4=0$的两根为x_1、x_2，$x_1\cdot x_2=-4$，则两根异号，由已知条件$|x_2-x_1|=5$，则$(x_2-x_1)^2=25$，

即 $(x_2+x_1)^2-4x_1x_2=25$，$b^2+16=25$，

故 $b^2=9$，$|b|=3$。

24．解：
$$\begin{cases}x^2-3xy+2y^2+x-y=0 & (1)\\ x^2-2xy+y^2-5x+7y=0 & (2)\end{cases}$$

(1)－(2)得 $-xy+y^2+6x-8y=0$ (3)

(1)×2－(2)得 $x^2-xy-11x+15y=0$ (4)

由(3)得 $x=\dfrac{y(y-8)}{y-6}$ (5)

(5)代入(4)得

$$\frac{y^2(y-8)^2}{(y-6)^2}-\frac{y^2(y-8)}{y-6}-11\frac{y(y-8)}{y-6}+15y=0,$$

化简得 $y^3-5y^2+6y=0$，

解得 $y_1=0$，$y_2=2$，$y_3=3$。

代入(5)式得 $x_1=0$，$x_2=3$，$x_3=5$。

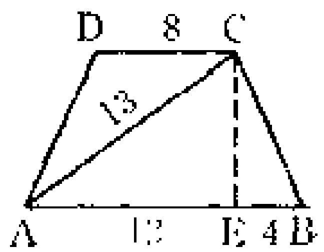
故方程组的解为$\begin{cases}x_1=0\\y_1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3\\y_2=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=5\\y_3=3.\end{cases}$

将这三组值代入 $xy-12x+15y+10$，都得同一个值10，即

$$xy-12x+15y+10=\underline{10}.$$

25．解：如图，过 C 作 $CE\perp AB$。由已知，$AE=12$，$CE^2=13^2-12^2=25$，$\therefore CE=5$，故梯形面积为

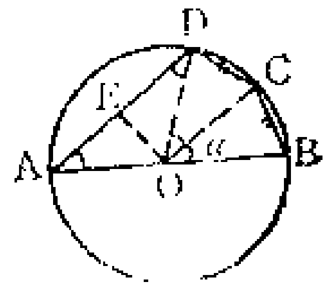
$$S=\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot CE=\underline{60}.$$



26．解：连结OC、OD，作$OE\perp AD$。

设$\angle BOC=\alpha$，则$\because BC=CD$，$\therefore\angle DOC=\alpha$.

又$\because OA=OD$，$\therefore\angle DAO=\angle ADO=\alpha$.



在$\triangle BOC$中，$BC^2=OB^2+OC^2-2OB\cdot OC\cdot\cos\alpha$，

代入有 $2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{4}$，

故 $AD=2ED=2OD\cdot\cos\alpha=2\times2\times\frac{3}{4}=\underline{3}.$

27．解：设这个自然数为n。

由题意得 $n-50=a^2$，$n+39=(a+b)^2$。

$\because$ n为自然数，$\therefore$ a、b均为非零的整数。

两式相减得 $89=b(2a+b)$。

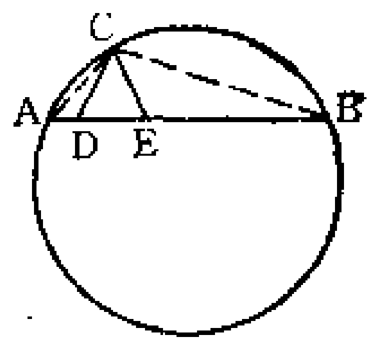
$\because$ 89为质数，$\therefore$ 只能有两种情况：

（1） $b=1$，$2a+b=89\Rightarrow a=44$；

(2) $b=89$，$2a+b=1 \Rightarrow a=-44$.

故 $n=a^2+50=(\pm 44)^2+50=1986$.

28．解：连结CA、CB，设等边三角形的边长为a.



∵ $\overset{\frown}{ACB}$为$120°$，

∴ $\angle ACB=\frac{1}{2}(360°-120°)=120°$.

∵ $\triangle ABC \backsim \triangle EBC$，∴ $\frac{BC}{13\sqrt{3}+a}=\frac{12\sqrt{3}}{BC}$，

即 $BC^2=12\sqrt{3}(13\sqrt{3}+a)$　　(1)

又在$\triangle CEB$中，$BC^2=CE^2+EB^2-2CE\cdot EB\cos 12°$

$$=a^2+(12\sqrt{3})^2+12\sqrt{3}a \quad (2)$$

由(1)和(2)得　$a^2=36$，

故　$a=6$ 厘米（$a=-6$不合题意）.

29．解：$\begin{cases} x+ky=10 & (1) \\ kx-y=10k+2 & (2) \end{cases}$

(1)×k−(2)得　$(k^2+1)y=-2$，$y=-\frac{2}{k^2+1}$.

(1)+(2)×k得　$(1+k^2)x=10+10k^2+2k$

$$x=\frac{10k^2+2k+10}{k^2+1}.$$

∵ 方程組有且只有三组整数解，

∴ 由$y=-\frac{2}{k^2+1}$知必有$k=0$，1，−1.

代入得$\begin{cases} x_1=m_1=9 \\ y_1=n_1=-1 \end{cases}$；$\begin{cases} x_2=m_2=10 \\ y_2=n_2=-2 \end{cases}$，$\begin{cases} x_3=m_3=11 \\ y_3=n_3=-1 \end{cases}$.

则 $m_1 n_2 + m_2 n_3 - m_3 n_1 =$ [illegible] $9-11+20=0$.

20. 解：∵m, n是自然数，∴x, y都是非负整数。

故不定方程$x^2+y^2=5$的非负整数解只能是

$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，则有$x+y=3$。

由已知$\lg mn=\lg m+\lg n=x+y+a+b=3+1=4$，

故 $mn=10^4$。

由$0<m<n$知$m^2<mn=10^4$，则$m<10^2$。

故$\lg m$的首数$x=1$. ∵$a+b=1$，且a、b是小于1的非负实数，故$a>0$。

因此 $\lg m=1+a>1$，$m>10$。

故 $10<m<100$。

由$mn=10^4$知m是10^4的约数，故在10与100之间的一切可能值只能是以下六个：

16，20，25，40，50，80。

故m的最大值为80。

1986年扬州市初一数学竞赛

一、填空题

1．解：因为4^{2m-1}的个位数为4，4^{2m}的个位数为6．故1984^{1986}的个位数是6．

2．解：方程可变形为

$$acx^2-(ac^2+b)x+bc=0,$$

即 $(acx-b)(x-c)=0$．故解为$x=c$或$x=\dfrac{b}{ac}$

3. 解：$a<0$，$ab>0$，$ab^2<0$，且$|ab^2|<|a|$，

故 $\underline{a<ab^2<ab}$。

4. 解：注意到 $24\times25=600$，$72\times75=5400$

故末尾零的个数是$\underline{22}$。

5. 解：由$\begin{cases}m+3=5n\\m-3=6p\end{cases}$列表

n	1	2	3	4	5	6	…
m	2	7	12	17	22	27	…
p	1	2	3	4			…
m	9	15	21	27			…

故这样的自然数中最小的是$\underline{27}$。

6. 解：设甲、乙相遇时间为x，

则 $2.5x+5x=22.5$，$x=3$。

故小狗所走路程为 $7.5\times3=\underline{22.5}$。

7. 解：

甲	3	4	1	2	1
乙	7	10	3	6	1
丙	1	1	0	0	1
	3.15	4.20	1.05	2.10	1.05

故购甲、乙、丙各一件共需$\underline{1.05}$元。

二、解：由已知可得

$$T=(x-p)+(15-x)+(p+15-x)$$
$$=30-x。$$

∵ $p\leqslant x\leqslant 15$，上式中当x取最大值时T最小。∴ 当$x=15$时，$T=30-15=15$。

故T的最小值是15。

三、解：原式

$$
\begin{aligned}
&=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-2(1+y)x^2(1-y)-2x^2(1+y^2)\\
&=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-(2x)^2\\
&=[(1+y)+x^2(1-y)+2x]\cdot[(1+y)+x^2(1-y)-2x]\\
&=(x^2-x^2y+2x+y+1)(x^2-x^2y-2x+y+1)\\
&=[(x+1)^2-y(x^2-1)]\cdot[(x-1)^2-y(x^2-1)]\\
&=(x+1)(x+1-xy+y)(x-1)\cdot(x-1-xy-y).
\end{aligned}
$$

四、解：设A、B、C三人原来各有x、y、z粒豆，可列出下表：

	A	B	C
原有	x	y	z
第一次赠送后	$x-y-z$	$2y$	$2z$
第二次赠送后	$2(x-y-z)$	$2y-(x-y-z)-2z$	$4z$
第三次赠送后	$4(x-y-z)$	$4y-2(x-y-z)-4z$	$4z-2(x-y-z)-2y+(x-y-z)+2z$

则有
$$\begin{cases}4(x-y-z)=64\\4y-2(x-y-z)-4z=64\\4z-2(x-y-z)-2y+(x-y-z)+2z=64,\end{cases}$$

解得 $x=104$， $y=56$， $z=32$。

答：原来甲有豆104粒，乙有56粒，丙有32粒。

五、证明：因为任何正整数被3除所得的余数有0、1、2三种情况，五个数分属这三类，至少有一类的数不少于2个。

若有三个数属同一类，这三个数的和必能被3整除；

若无三个数属于同一类，则每类至少有一个数，这时在三类中各取一个数，这三个数的和必能被3整除。

1986年宿州市初中数学竞赛

第 一 试

一、解：1. 设$10^{3.2980}=x$，则$\lg x=3.2980$。

故 $x=1986$，即$10^{3.2980}=1986$。

2. $x^3+2x^2+1985=(x^2+x-1)x+x^2+x-1+1986=1986$

二、解：

1. 原式$=\dfrac{(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

2. 原式$=\Big(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$

$$+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}$$

$$+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}\Big)(x+1)(x+6)$$

$$=x+6-(x+1)=5.$$

3．原式$=\sqrt[3]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{(\sqrt{7}+2\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt[3]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}$

$=\sqrt[3]{(\sqrt{7})^2-(2\sqrt{2})^2}$

$=-1.$

三、解：1． $abx^2+ab-(a^2+b^2)x=0.$

当$a=b=0$时，x可为任意实数；

当$a=0$，$b\neq0$，或 $b=0$，$a\neq0$时，$x=0$；

当$a\neq0$且$b\neq0$时，$(ax-b)(bx-a)=0.$

∴ $ax-b=0$ 或 $bx-a=0.$

∴ $x=\dfrac{b}{a}$或 $x=\dfrac{a}{b}.$

2． $\sqrt{(x-3)^2}=3-x.$

当 $3-x\geqslant0$时，上式总成立。

故 方程的解为 $x\leqslant3.$

四、解：$xyz=1\cdot2\cdot3=1\cdot1\cdot6$，

∴ 方程共有9组解：

$\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=1\\z=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=3\\z=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=3\\z=1;\end{cases}$

$\begin{cases}x=3\\y=2\\z=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=6\\y=1\\z=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=6\\z=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=6.\end{cases}$

五、解：$(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$，

即 $x^2+z^2-2xz-4xy+4y^2+4xz+4yz=0$，

$(x+z)^2-4(x+z)y+4y^2=0$，

$[(x+z)-2y]^2=0$，

$\therefore\ \ x+z=2y$。

六、作法：

1． 找矩形的对角线交点A。

2． 找圆的圆心B。

过AB的直线即为所求。

七、解：$\because\ \ t+2>t+1>t$，

$\therefore$ 边$t+2$所对的角为钝角。设其为α，则

$(t+2)^2=(t+1)^2+t^2-2t(t+1)\cos\alpha$。

得 $2t(t+1)\cos\alpha=t^2-2t-3$，

即 $2t(t+1)\cos\alpha=(t-3)(t+1)$。

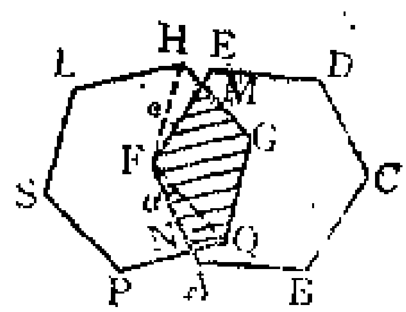
$\because\ \ t>0$，$\therefore\ \ \cos\alpha=\dfrac{t-3}{2t}$。

$\because\ \ \alpha$ 为钝角，$\therefore\ \ \dfrac{t-3}{2t}<0$，$t-3<0$。

故 $0<t<3$。

八、解：面积不变，等于原六边形面积的$\dfrac{1}{3}$。

因为当正六边形 GHLSPQ 绕F转α角时（如图），原来被正六边形ABCDEF 盖住的△HFM 不再被盖住，原来没有被盖住的 △QFN 现在被盖住，而这两个三角形全等，所以两个正六边形重叠部分面积不变。



第二试

一、解：当$a=b$时，$2a^3=2$，$a=1$，$b=1$；

当$a\neq b$时，不妨设$a>b>0$。

$\because a^3+b^3=2$，$\therefore 1-b^3=a^3-1$，

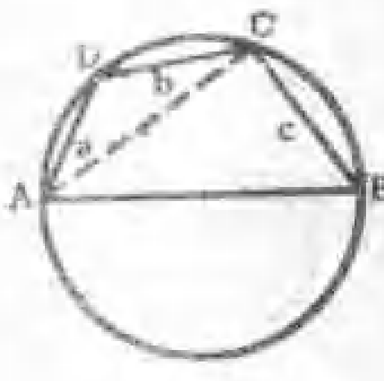
即 $(1-b)(b^2+b+1)=(a-1)(a^2+a+1)$。

$\because b\neq 1$（否则$a=b=1$），$\therefore \frac{a-1}{1-b}=\frac{b^2+b+1}{a^2+a+1}<1$，

$\because b<1$（否则 $a>b>1$，$a^3+b^3>2$），即$1-b>0$。

$\therefore a-1<1-b$，$a+b<2$。

综上得 $a+b\leq 2$。



二、证：连结AC，则 $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos D$。

$\because ABCD$内接于圆，$\therefore \angle D+\angle B=180^\circ$，$\cos\angle D=-\cos B$。

又$\because AB$是直径，$\therefore \angle ACB=90^\circ$，$\cos B=\frac{c}{AB}$。

$AB^2=AC^2+BC^2=a^2+b^2-2ab\cos D+c^2=a^2+b^2+c^2+\frac{2abc}{AB}$。

令$AB=x$，则$x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$。

故直径AB是所给方程的根。

三、证：$\because$正m边形的一个内角为$\frac{180^\circ(m-2)}{m}$，又BC为正m边形的一边，$\therefore \angle BOC=180^\circ-\frac{180^\circ(m-2)}{m}=\frac{360^\circ}{m}$。

同理 $\angle AOC=\frac{360^\circ}{n}$，$\angle AOB=\frac{360^\circ}{t}$.

$\because \angle BOC+\angle AOC+\angle AOB=360^\circ$，

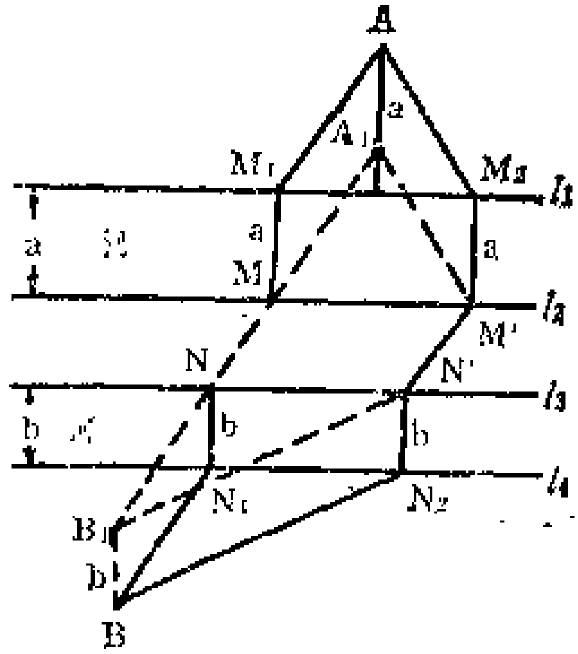
$\therefore \frac{360^\circ}{m}+\frac{360^\circ}{n}+\frac{360^\circ}{t}=360^\circ$，

故 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{t}=1$.

四、设河岸分别为 l_1、l_2、l_3、l_4。

1．过A作$AA_1\perp l_1$，使$AA_1=a$，过B作$BB_1\perp l_4$，使$BB_1=b$.

2．连结A_1、B_1，分别交l_2、l_3于M、N，则M、N便是修桥地点。设垂直于河岸的桥分别为MM_1、NN_1，则从A到B可沿折线AM_1MNN_1B行走，折线为从A到B的最短路线。



证明：设另选修桥地点，如在M'、N'处。所修垂直于河岸的桥是$M'M_2$、$N'N_2$，则从A到B需经折线$AM_2M'N'N_2B$。连结A_1M'、B_1N'。显然$A_1M'=AM_2$，$B_1N'=BN_2$，因此，折线$AM_2M'N'N_2B$=折线$AA_1M'N'B_1B$。而折线AM_1MNN_1B=折线AA_1MNB_1B，又折线$A_1M'N'B_1$>直线A_1B_1，故折线$AM_2M'N'N_2B$>折线AM_1MNN_1B。

即折线AM_1MNN_1B为从A经过两座垂直于河岸的桥到达B点的最短路线。

五、证：$\because$ 1的任何次方都是1，$\therefore$ 1^{1986}为奇数。$\because$ 9的偶次幂末位数字是1，$\therefore$ 9^{1986}的末尾数字也是奇数。而偶

数的任何次幂的末位数字均为偶数，∴ 8^{1986}、6^{1986}都是偶数。

故 $1^{1986}+9^{1986}+8^{1986}+6^{1986}$是一个偶数。

1986年齐齐哈尔市初中数学竞赛

一、选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答 案	A	C	C	C	D	B	B	C	B	C

1. 解：∵ 有等根， ∴ 判别式$\Delta=8-8\mathrm{tg}\alpha=0$，

故 $\mathrm{tg}\,\alpha=1$。

∵ $0°<\alpha<180°$， ∴ $\alpha=45°$

2. 解：由 $\begin{cases}2x-3y=11-4m\\x+3y=20-7m\end{cases}$

知 $x=\dfrac{31-11m}{3}$，

∴ $3y=20-7m-x$

$=\dfrac{1}{3}(60-21m-31+11m)$，

故 $y=\dfrac{1}{9}(29-10m)$。

代入$3x+2y=21-5m$，

得 $31-11m+\dfrac{2}{9}(21-5m)=21-5m$，

∴ $m=2$。

3. 解：$\because\ |a|=-a>0\quad\therefore\ a<0$。

$\therefore\ |ab|=ab>0\quad\therefore\ b<0$。

$|c|=c>0\quad\therefore\ c>0$。

故原式$=|b|+a+b-|c-b|+|a-c|$

$=-b+a+b-c+b+c-a$

$=b$。

4. 解：$\because$ $\sin A$和 $\operatorname{tg} B$异号。

$0^\circ<A<180^\circ$，$0^\circ<B<180^\circ$。

$\therefore$ $\sin A>0$，$\operatorname{tg} B<0$。

故 $90^\circ<\angle B<180^\circ$。

5. 解：$\because \lg\frac{1}{N}=a+b$

$\therefore\ -\lg N=a+b$

故 $\lg N=-a-b$

$=(-a-1)+(1-b)$。

6. 解：原式$=\dfrac{\lg 12}{1+\lg 0.6\times 2}\cdot\left(3^{\log_3\frac{1}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{4}$。

7. 解：1986^n的末位数字为6。

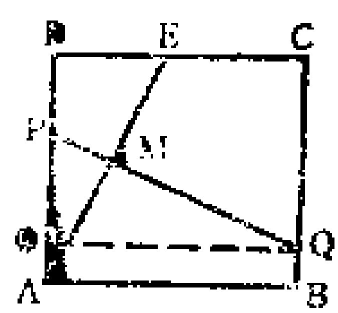
$\because$ 323^m 的末位数字以3、9、7、1 循环出现，

而 $1986=4\times 496+2$，

$\therefore$ 323 的末位数字为9。

故 $1986^{323}+323^{1986}$末位数字为5。

8. 解：$AE=\sqrt{5^2+12^2}=13$。



过Q作$QO\perp DA$，交DA于O。

$\therefore\ \triangle PQO\cong\triangle DAE$。

$PQ=AE=13$，

$\therefore\ \dfrac{PM}{AM}=\dfrac{5}{12}$，$PM=\dfrac{5}{12}\times 6.5$，

$$\therefore \frac{PM}{MQ}=\frac{\frac{5}{12}\cdot 6.5}{13\cdot PM}=\frac{5}{19}.$$

9. 解：连AD。

$\angle BAD=\angle CDA\Rightarrow$等腰$\triangle ADE$。

$\therefore \angle EAD=\frac{1}{2}(180^\circ-40^\circ)=70^\circ$，　$\angle BAD=110^\circ$，

$2\angle ACD=360^\circ-3\angle BAD=30^\circ$，

$\therefore \angle ACD=15^\circ$。

10. 解：$\because CD\parallel AB$，$\therefore \triangle CDO\backsim\triangle ABO$，

$$\therefore \frac{AO}{OC}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}.$$

$\therefore S_{\triangle ADO}=4\times\frac{3}{2}=6$，　$S_{\triangle COB}=4\times\frac{3}{2}=6$，

故梯形面积 $S=6+6+4+9=25$。

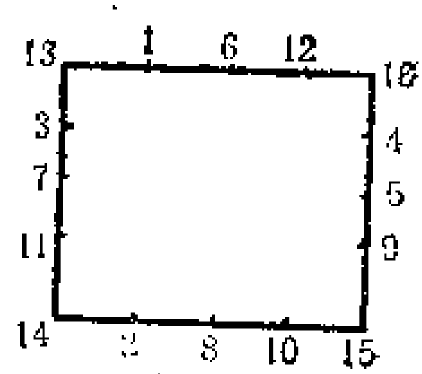
二、解：设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，则 $a=kb$，$c=kd$。

$$左边=\sqrt[1986]{\frac{k^{1986}b^{1986}+b^{1986}}{k^{1986}d^{1986}+d^{1986}}}$$

$$=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}.$$

三、解：把13、14、15、16放在四个角上得出各边"重量"为48、48、49、49。

放置方法如图。



四、解：$7^{83}+8^{163}=7(7^{82}+8^{161})-7\times8^{161}+8^{163}$

$=7(7^{82}+8^{161})+8^{161}(8^2-7)$

$$=7(7^{82}+8^{161})+8^{161}\cdot 57.$$

已知 $7^{82}+8^{161}$ 能被57整除，

故 $7^{83}+8^{163}$ 也能被57整除。

五、解：如图，由题意知

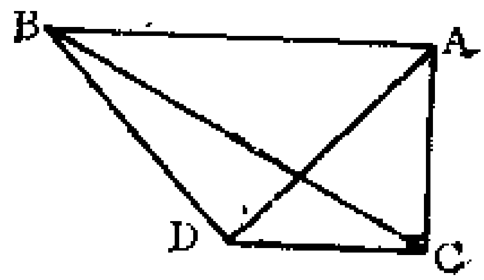
$\angle ACB=60°$，$\angle ADC=\angle DAC=45°$，

$AC=CD=1$，$\therefore$ $AD=\sqrt{2}$。

在$\triangle BDC$中，$\because \angle BCD=30°$，$\angle BDC=135°$，

$\therefore \angle DBC=15°$。

由正弦定理：



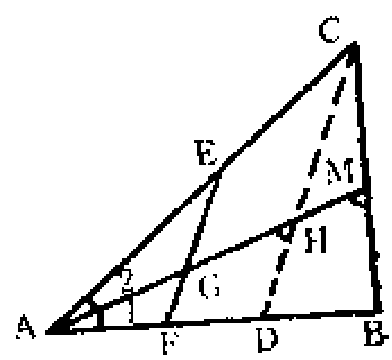
$$\frac{BD}{\sin 30°}=\frac{1}{\sin 15°},$$

$$BD=\frac{\sin 30°}{\sin 15°}=\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},$$

故 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{4+\sqrt{3}}=2.4$(海里)。

六、解一：作$CD\parallel EF$，交AM于H。

已知 $AB=12$，$AC=16$。



在$\triangle ABM$中，$\dfrac{BM}{\sin\angle 1}=\dfrac{12}{\sin\angle 4}$，

在$\triangle ACM$中，$\dfrac{CM}{\sin\angle 2}=\dfrac{16}{\sin(180°-\angle 4)}$。

$\because$ $BM=CM$，$\therefore$ $\dfrac{\sin\angle 2}{\sin\angle 1}=\dfrac{3}{4}$。

$\because\ AE=2AF,\ EF//CD,\ \therefore\ AD=\frac{1}{2}AC=8.$

在$\triangle AHD$中，$\frac{HD}{\sin\angle 1}=\frac{AD}{\sin\angle 3}=\frac{8}{\sin\angle 3}$，

在$\triangle AHC$中，$\frac{HC}{\sin\angle 2}=\frac{AC}{\sin(180^\circ-\angle 3)}=\frac{16}{\sin\angle 3}$，

故 $\frac{EG}{GF}=\frac{HC}{HD}=2\cdot\frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 1}=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}.$

解二：作$CD\parallel EF$，由解一知$AD=8$。

在$\triangle CDB$中，用海涅劳斯定理知

$$\frac{CH}{HD}\cdot\frac{DA}{AB}\cdot\frac{BM}{MC}=1.$$

$\because\ BM=MC,\ AB=12,$

$\therefore\ \frac{EG}{GF}=\frac{CH}{HD}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}.$

1988年山西省初二数学竞赛

一、填空题

1．**解**：将$x=0.5$代入方程，化简得$a=\underline{1}$，

解方程 $2x^2-3x+1=0$，$(2x-1)(x-1)=0$，

得 $\underline{x=\frac{1}{2}}$，$\underline{x=1}$。

2．**解**：$\sqrt{365000}=\sqrt{36.5\times 10^4}$

$=6.042\times 10^2=604.2$，

$\sqrt{0.000365}=\sqrt{3.65\times 10^{-4}}$

$=1.910\times 10^{-2}=\underline{0.0191}$。

3. 解：锐角三角形的六外角都是钝角，没有锐角；钝角三角形（其中一内角为钝角）的外角中，有4个钝角和2个锐角。

4. 解：由图可直接得出$x=2a+c-2b$。

5. 解：$1988^2-1987^2=(1988+1987)(1988-1987)=3975$。

$1999^2+3998=(2000-1)^2+3998$

$=4000000-4000+1+3998=3999999$。

6. 答：$\angle AOE$，$\angle ACD$，$\angle EAF$，$\angle FOB$，$\angle EOC$。

解：由图可直接看出。

7. 解：原式$=2\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{4\sqrt{2}}{1+2\sqrt{3}+3-2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

8. 解：$\because \angle A=\angle ABF=\angle ADF$，

$\therefore 3\angle A+105^\circ=360^\circ$，故$\angle A=85^\circ$。

$\angle C=180^\circ-2\times85^\circ=10^\circ$。

9. 解：$\dfrac{1}{a}\geqslant 1\Rightarrow 0<a\leqslant 1$。

$\dfrac{1}{a^2}<1\Rightarrow a^2>1\Rightarrow a<-1$或$a>1$。

10 答：$1:1$，$1:1$。

解：四个矩形中的阴影部分面积都等于矩形面积之半。

11. 答：$b^2-4ac=0$ 或 $a=0$。

12. 答：四个角都是直角的四边形均为矩形。

13. 解：容易证明，阴影的面积等于正方形 $EFGH$ 的四分之一。故阴影的面积 $=4\text{mm}^2$。

14. 解：配方：$x^2-4x+4+4x-4-2x+2=0$，

$(x-2)^2+2x-4+2=0$，$(x-2)^2+2\underline{(x-2)+2=0}$。

15. 解：$\because\ 1=1^2$，$1+2\times2-1=2^2$，

$1+3+(2\times3-1)=3^2$，

$\therefore\ 1+3+5+\cdots+(2n-1)=\underline{n^2}$；

$\because\ 1+3+5+\cdots+x=19^2$，　$\therefore\ n=19$。

故 $x=2n-1=2\times19-1=\underline{37}$。

二、选择题

题　　号	1	2	3	4	5
答　　案	A	C	C	D	A

1. 解：$\because a<0$，$\therefore \sqrt{a^2}=|a|=-a$。

2. 解：

x	0	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1	0

3. 解：$x^2\sqrt{\dfrac{y}{x}}=|x|\cdot|x|\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

$$=|x|\sqrt{\frac{x^2y}{x}}=|x|\sqrt{xy}.$$

不难看出，(A)、(B)和(D)是错误的。

4. 解：$\because\ b<0$，$\therefore\ b<-b$。

$\because\ a+b>0$，$\therefore\ -a<b$，$-b<a$。

5 解：结论是：x_1和x_2可能有一个是方程的根(如$x^2-2x=0$，$x_1=0$，$x_2=3$)，也可能都不是方程的根（如x^2-2x

$=0$，$x_1=4$，$x_2=-2$)。因此，(A) 错误，(B)、(C)和(D)正确。

三、判断题

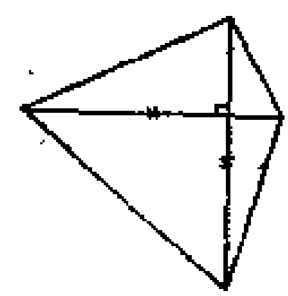
题　　号	1	2	3	4	5
答　　案	×	×	✓	×	×

1． 解：因为内角为钝角时不成立。

2． 解：未说明在同一平面的两条直线。

3． 解：容易通过证明三角形全等来证明四条边相等。

4． 解：容易图示说明。



5． 解：容易图示说明。

四、解：$x=\pm4$不应代入(1)，而应代入(2)。

五、1． 解：$(1+ab)^2-(a+b)^2$

$=(1+ab+a+b)(1+ab-a-b)$

$=(1+a)(1+b)(1-a)(1-b)$。

2． 解：将方程变形为

$$3(x^2-4x+7)-2\sqrt{x^2-4x+7}-8=0.$$

令$y=\sqrt{x^2-4x+7}$，得　$3y^2-2y-8=0$，

$(3y+4)(y-2)=0$，　$y=-\dfrac{4}{3}$（不合），$y=2$。

$\sqrt{x^2-4x+7}=2$，$x^2-4x+7=4$，$x^2-4x+3=0$，

$(x-1)(x-3)=0$，$x=1$ 或 $x=3$。经检验都是方程的

解。

六、解：设甲机单独完成脱粒工作需x天，

则由题意知乙机单独完成脱粒工作需$2x$天。

甲机一天可完成任务的$\frac{1}{x}$，

乙机一天可完成任务的$\frac{1}{2x}$，

甲机完成任务的$\frac{2}{3}$需要的天数为$\frac{2}{3}\div\frac{1}{x}$。

乙机完成任务的$\frac{1}{3}$需要的天数为$\frac{1}{3}\div\frac{1}{2x}$。

两机同时工作完成任务需要天数为$1\div\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\right)$。

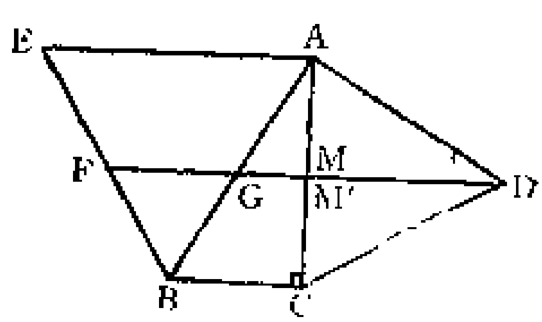
故由题意可得方程

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2x}}-\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}}=4,$$

$$\frac{2x}{3}+\frac{2x}{3}-\frac{2x}{3}=4,\quad x=6。$$

答：甲单独完成需6天，乙单独完成需12天。

七、证明：（先分析一下，要证明$AM=MC$，只要证明$FD\parallel EA$就行了，要证$FD\parallel EA$，只要证明过F作EA的平行线通过D就行了）



过F作EA的平行线交AB于G，∵ $EF=FB$， $AG=GB$（中位线定理），将平行线延长交AC于M'，由条件易

知$EA\perp AC$，故$EA\parallel BC$，则$FM'\parallel BC$，因此，$FM'\perp AC$，$AM'=M'C$，于是FM'是AC的中垂线。∵ $\triangle ACD$为正三角形，∴ FM'通过D。故FD就是过F作的EA的平行线，M和M'重合，$AM=MC$。

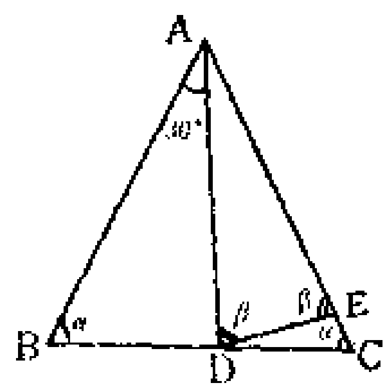
八、解：1　$x*y\neq y*x$，容易验证。

2．$1*2=4\Rightarrow \frac{1}{a}-\frac{4}{b}=4$，

$2*3=2\Rightarrow \frac{4}{a}-\frac{9}{b}=2$，

解倒数方程得　$a=-\frac{1}{4}$，　$b=-\frac{1}{2}$。

3．$x*y=-4x^2+2y^2\Rightarrow 2*5$
$=-4\times2^2+2\times5^2=34$。



九、1．解：在$\triangle ABC$中，

$2\alpha+180°-2\beta+30°=180°\Rightarrow\beta-\alpha=15°$。

在$\triangle EDC$中，$\angle EDC=\beta-\alpha=15°$。

2．证明：由条件$(2-\sqrt{2})a=2b$

得　$a=(2+\sqrt{2})b$，∵ $a+b>c$，∴ $(3+\sqrt{2})b>c$，

$c-\sqrt{2}b<3c$，则 $\frac{c-\sqrt{2}b}{b}<3$。

∵ $a-b<c$，∴ $(1+\sqrt{2})b<c$，$b<c-\sqrt{2}b$，

则　$1<\frac{c-\sqrt{2}b}{b}$，故 $1<\frac{2-\sqrt{2}b}{b}<3$。

1987年青岛市初中数学竞赛

第 一 试

一、选择题

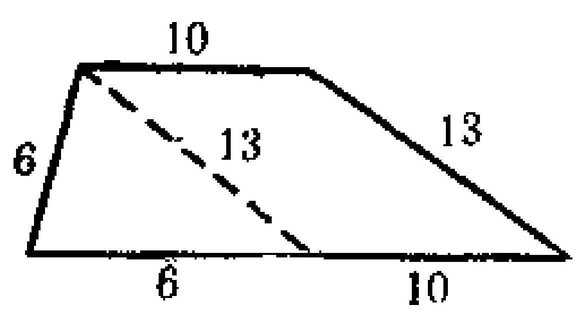
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	C	C	D	A	B	B	B	C

1．解：$\because -\frac{1}{a}>0$，$\therefore a<0$，

故 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\sqrt{-\frac{a^2}{a}}$

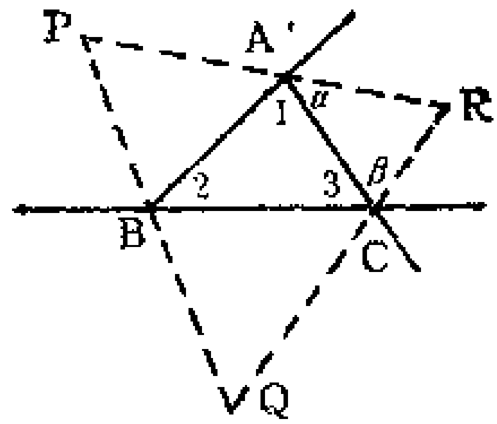
$=-\sqrt{-a}$。

2．解：如图所示，不满足三角形中边与边的关系。



3．解：$\because$直线不过原点，$\therefore$排除（A）．从其他三个图形的双曲线可知$k<0$。但(B)的直线$k>0$，故排除B．由$y=kx+k$，当$k<0$时，图象是由$y=kx$向下平移而成，故(C)成立。

4．解：可以证明$\triangle PQR$的任一内角小于90°，如$\angle R<90^\circ$，只需证明$\alpha+\beta>90^\circ$．下面证明：



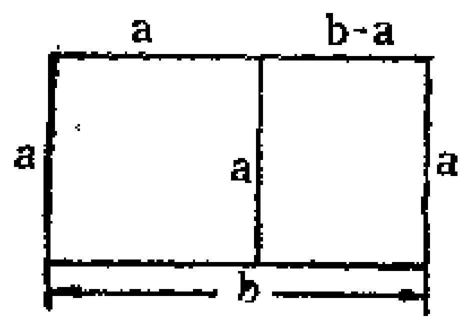
$\because \quad 2\alpha=\angle 2+\angle 3,\ 2\beta=\angle 1+\angle 2,$

$\therefore \quad 2\alpha+2\beta=\angle 1+2\angle 2+\angle 3>180^\circ$，故 $\alpha+\beta>90^\circ$。

5．解：$\because a*b=a^b$，$\therefore (a*b)^n=(a^b)^n=a^{nb}$。

$a*bn=a^{nb}$，故 $(a*b)^n=a*bn$。

6．解：如图，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b-a}$



（长边为b）。

变形得 $a^2+ab-b^2=0$。

解得 $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}b$，$a=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}b$（不合题意）。

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$。

7．解：$\sqrt{65}-\sqrt{63}=\dfrac{2}{\sqrt{65}+\sqrt{63}}$

$=\sqrt{\dfrac{4}{65+63+2\sqrt{8^4-1}}}=\sqrt{\dfrac{2}{64+\sqrt{8^4-1}}}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{64}+x}$（x非常小）

$=\dfrac{1}{8}+x=0.125+x$。（注：直接开方也可）

8、 解：注意到要求的是涂色相同的小方格至少有多少个，显然至少 4 个，也可能 5 个以上。

9. 解：由题意知

$(n-2)180^\circ < 180^\circ \times 3 + (n-3) \times 90^\circ$，

则 $n < 7$。 故 $n = 6$。

10. 解：

4	4	4	4	4	4	4	4
1	2	2	3	3	3	3	2
4	3	5	3	4	5	6	4

二、填空题

1. 解：当 $x>0$ 时，方程为 $x^2-7x+6=0$，

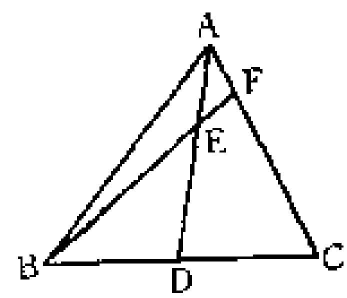
即 $(x-1)(x-6)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=6$。

当 $x<0$ 时，方程为 $x^2+7x+6=0$，

即 $(x+1)(x+6)=0$，得 $x_3=-1$，$x_4=-6$。

$x_1+x_2+x_3+x_4=6+1-1-6=\underline{0}$。

2. 解：根据梅涅劳斯定理：



$\frac{AF}{FC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DE}{EA}=1$，　$\frac{AF}{FC}\times 2\times 3=1$，

故 $AF:FC=\underline{1:6}$。

3. 解：$f(x)+af\left(\frac{1}{x}\right)=b\lg x$，

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+af(x)=b\lg\frac{1}{x}.$$

以 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 为变量，解联立方程得

$$f(x)=\frac{(1+a)b\lg x}{1-a^2}=\frac{b\lg x}{1-a},$$

故 $f(10)=\frac{b\lg 10}{1-a}=\frac{b}{1-a}$.

4. 解：容易判定这三角形为直角三角形，斜边长为2，两直角边之和为$1+\sqrt{3}$。

设一直角边为x，则有$x^2+(1+\sqrt{3}-x)^2=4$，

化简得 $x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$，

即 $(x-1)(x-\sqrt{3})=0$，得 $x_1=1$，$x_2=\sqrt{3}$。

$$S=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

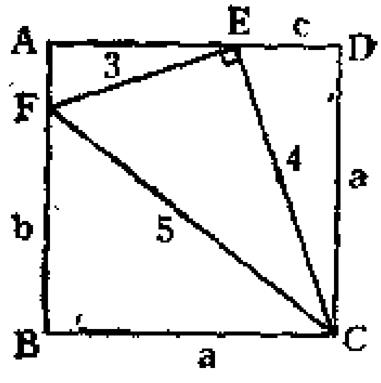
5. 解：∵ $x-1<[x]\leqslant x$，

$$\therefore\quad \frac{3}{4}x-2<\left[\frac{3}{4}x-1\right]\leqslant\frac{3}{4}x-1,$$

即 $\frac{3}{4}x-2<x-3\leqslant\frac{3}{4}x-1$。

故 $4<x\leqslant 8$。

6. 解：设正方形边长为a，$BF=b$，$ED=C$。



$$a^2=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ac+\frac{1}{2}(a-b)$$

$$\cdot(a-c)+\frac{1}{2}\times 3\times 4.$$

化简得 $a^2=bc+12$ (1)

又 $a^2+b^2=25$ (2)

$$a^2+c^2=16 \qquad (3)$$

(2)+(3)−(1)×2得 $\quad b^2+c^2=41-2bc-24$,

$$(b+c)^2=17,\ b+c=\sqrt{17},\quad b=\sqrt{17}-c \qquad (4)$$

(2)−(3)得 $\ b^2-c^2=9$。 将(4)式代入得

$$(\sqrt{17}-c)^2-c^2=9,\ 2\sqrt{17}c=8,\ c=\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{4}{17}\sqrt{17},$$

$$b=\sqrt{17}-c=\sqrt{17}-\frac{4}{17}\sqrt{17}=\frac{13}{17}\sqrt{17}.$$

由(3)得 $\quad a^2=16-c^2=16-\frac{16}{17}=\frac{272-16}{17}=\frac{256}{17}$.

故 $\qquad a=\frac{16}{\sqrt{17}}=\underline{\frac{16}{17}\sqrt{17}}$.

第 二 试

一、证明：（反证法）

设 $\ AB\geqslant AC$，则 $\ \angle ACB\geqslant\angle ABC$。

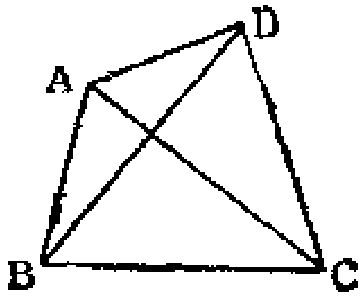
∵ $\ ABCD$为凸四边形，

∴ $\ \angle BCD>\angle ACB$,

$\angle ABC>\angle DBC$,

则 $\ \angle BCD>\angle DBC\Longrightarrow$

$BD>CD$.

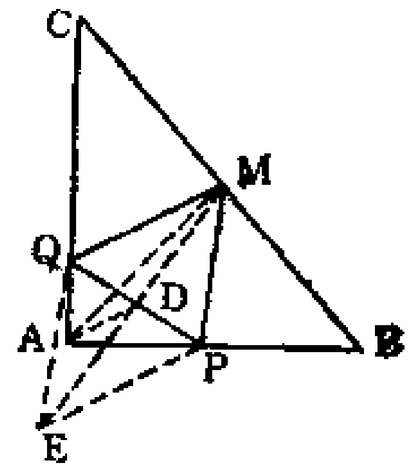


故 $\ AB+BD>AC+CD$,

与巳知条件矛盾。

因此$AB<AC$得证。

二、证明：连接AM，PQ的中点为D，以MQ和MP为邻边作平行四边形$MQEP$，



则　$PE=MQ$。$\because MP+PE>ME$，

$\therefore$　$MP+MQ>2MD$，

又$MD+DA>AM$，

$\therefore$　$MP+MQ>2AM-2DA$

$=BC-PQ$，

故　$MP+MQ+PQ>BC$。

三、解：(1)首先证明当n为偶数时，3^n+1能被2整除，但不能被2的任何更高次幂整除。

当n为偶数时，3^n的末位数字只可能是9或1，因而3^n+1的末位数字只可能是0或2，故不论那种情形，3^n+1都能被2整除。

当$n=2$时，$3^n+1=10$不能被2^2整除，现用反证法证明：不论n为何偶数，3^n+1都不能被2^2整除，假设存在某些偶数，它们能使3^n+1被2^2整除，在这些偶数中，必有一个最小的。令为k，显然$k\neq 2$。因$k-2$是比k小的一个偶数。故有结论：3^k+1能被2^2整除，但$3^{k-2}+1$不能被2^2整除．注意到$3^k+1=3^2\cdot 3^{k-2}+9-8=9(3^{k-2}+1)-8$，因等式左边能被$2^2$整除，故右边也必能被$2^2$整除，由此得$9(3^{k-2}+1)$能被$2^2$整除，但$(9,\ 2^2)=1$，故必有$3^{k-2}+1$能被$2^2$整除，与上述结论矛盾。故得证。

最后，当n为偶数时，若3^n+1能被2^m($m\in N$，且$m>2$)整除，就可推出3^n+1能被2^2整除，与上述结论矛盾。故当n为偶数时，3^n+1不能被2的任何更高次幂整除。

(2)　现证明：当n为奇数时，3^n+1能被2^2整除，但不能被2^m($m\in N$，$m>2$)整除。

由(1)的证明可知，当 n 为偶数时，3^n+1 能被 2 整除，但不能被2^2整除，因此当 n 为偶数时，

可令 $$3^n+1=2p\ （p为奇数）.$$

因为当 n 为奇数时，$n-1$为偶数，于是有

$$3^n+1=3\cdot3^{n-1}+3-2=3(3^{n-1}+1)-2$$
$$=3\cdot2q-2=2(3q-1)\quad（q为奇数）.$$

因 q 为奇数，故$3q-1$为偶数，则$2|(3q-1)$，于是对任何奇数 n 都有$2^2|(3^n+1)$。

结论的后一部份可仿(1)用反证法证明。

（注：本题如用同余性质定理证明，过程就比较简洁。）

四、解：$\because \lg乙=A+\lg B=\lg10^A+\lg B=\lg(B\times10^A)$，

$\therefore 乙=B\times10^A$。 $\because$乙为四位数，$\therefore A=3$。

$\because$甲千位数与百位数之和等于$5B$，$\therefore 5B\leqslant18$，

则 $B\leqslant3\dfrac{3}{5}$。现分别加以讨论：

当 $B=3$ 时，乙$=3000$，甲$=3000-6\times3=2982$。

但 $2+9\neq5\times3$，故 $B\neq3$。

当 $B=2$ 时，乙$=2000$，甲$=2000-6\times2=1988$。

但 $1+9=5\times2$，故合条件。

当 $B=1$ 时，乙$=1000$，甲$=1000-6\times1=994$，

不是四位数，故$B\neq1$。

因此这两个四位数是2000和1988。

五、设最大角为M，最小角为m。

由题意知 $M+m+180^\circ-n^\circ=180^\circ$，

即 $$M+m=180^\circ.$$

又 $$M-m=24^\circ,$$

则 $$M=\frac{n^\circ}{2}+12^\circ,\quad m=\frac{n^\circ}{2}-12^\circ.$$

由题意知　　$\frac{n^\circ}{2}-12^\circ\leqslant 180^\circ-n^\circ\leqslant\frac{n^\circ}{2}+12^\circ$，

故得　　$112^\circ\leqslant n^\circ\leqslant 128^\circ$.

1987年四川省初中数学联赛

第一试

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	C	B	B	C	D

1. 解：不难看出。

2. 解：举一反例：1和-1互为相反数，但$(-1)-1=-2<0$.

3. 解：$x_1\cdot x_2=-6$，$x_1+x_2=-m$.

x_1	1	-1	2	-2
x_2	-6	6	-3	3
m	5	-5	1	-1

故 m 可取值的个数为4.

4. 解：$\because \lg\left(-\frac{1}{4}\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{4}\right)=\lg\left(\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{-\frac{1}{4}}$

$$=\lg(\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2})=0,$$

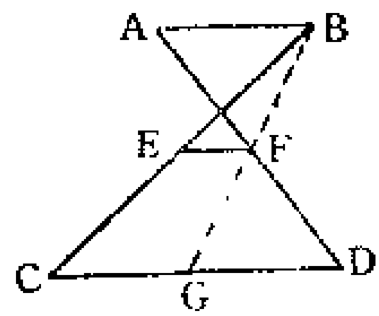
$\therefore$　$x+2y+3=0$，$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2=0$，即 $y=-2x$.

代入　$x+2y+3=0$，得 $x=1$，$y=-2$，则 $x^2-xy+y^2=7$.

5．解：底边长$=2\sin 18^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

二、填空题

1．解：连结BF延长交CD于G，显然$\triangle AFB\cong\triangle FGD$，则$GD=AB=a$，



$CG=b-a$，故$EF=\underline{\frac{1}{2}(b-a)}$。

2．解：$\because \lg x$的首数与$\frac{1}{2}\lg 3$的首数相同，即$\lg x$的首数为0，$\therefore 1<x<10$。

$\because$ $\lg x$的尾数与$3\lg 5=\lg 125$的尾数相同，

$\therefore$ 存在整数n、使$\lg x=\lg 125+\lg 10^n$。

$\because$ $1<x<10$，$\therefore$ $n=-2$。

故 $x=125\times 10^{-2}=\underline{1.25}$。

3．解：$\because -2<x<\frac{3}{2}$，$\therefore$ $x+2>0$，$2x-3<0$。

原式$=(x-4)[-(2x-3)]+(1-x)\sqrt{(x+2)^2}$

$=-(x-4)(2x-3)+(1-x)(x+2)$

$=\underline{-3x^2+10x-10}$。

4．解：判别式$\Delta=4-4(2-k)\times 6=24k-44<0$，

即 $6k-11<0$，$k<\frac{11}{6}$。

故方程无实根的最大整数$k=\underline{1}$。

5．解：由条件$\sqrt{x^2+21}-\sqrt{x^2+12}=1$。

令 $x^2+12=y$，则方程变为$\sqrt{y+9}-\sqrt{y}=1$，

$\sqrt{y+9}=1+\sqrt{y}$，$y+9=1+2\sqrt{y}+y$，

$\sqrt{y}=4$，$y=16$，故$x^2+12=16$，$x=\pm 2$。

经检验满足方程。

6　解：$\dfrac{n^2+76}{n+1}=\dfrac{n^2-1+77}{n+1}=n-1+\dfrac{77}{n+1}$。

因 n 为正整数，故 n 的可取值为6和10。

7．解：令 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)-6\times 7\times 8$。

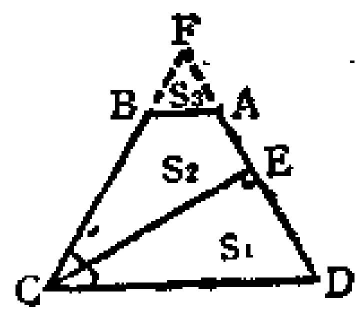
显然　$f(5)=0$，则 $f(x)$ 有一次因式$x-5$。

计算得$f(x)=x^3+6x^2+11x-330$。

利用多项式的除法得　$\dfrac{f(x)}{x-5}=x^2+11x+66$，

故　$f(x)=(x-5)(x^2+11x+66)$。

8．解：延长CB和DA相交于F，



由已知条件知　$FA=AE=\dfrac{1}{2}ED=\dfrac{1}{4}FD$。

$S_{\triangle FCD}=2S_1=2$。

令　$\triangle FBA$的面积为S_3，则 $\dfrac{S_3}{2S_1}=\dfrac{FA^2}{FD^2}=\dfrac{1}{16}$。

故　$S_3=\dfrac{1}{8}$，　$S_2=S_1-S_3=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$。

三、解下列各题

1．解：当 $a=-6$时，有两个公共根。

当$a=5$时，$x^2+ax-6=x^2+5x-6=0$有根 1 和-6，

$x^2-6x+a=x^2-6x+5=0$ 有根1和5。

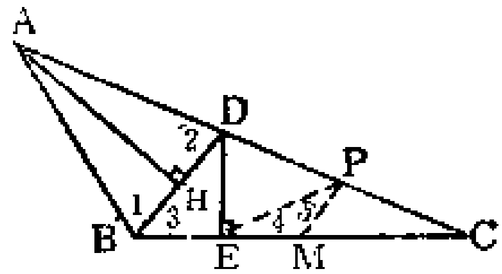
故当 a 为-6或5时两方程至少有一个公共根。

2．解：$|x|=ax+1$。

令　$x<0$，则 $-x=ax+1$，$a=-1-\dfrac{1}{x}$。

由 $x<0$ 知$\frac{1}{x}<0$，则 $-\frac{1}{x}>0$。

故 $\alpha=-1-\frac{1}{x}>-1$。



四、证明：过M作$MP\parallel BD$，则 $MP=\frac{1}{2}BD$（P为CD的中点）。

由已知得 $AB=AD$，则$\angle 1=\angle 2=\angle 3+\angle C$。

又 $\angle 1+\angle 3=5\angle C$，则 $\angle 3+\angle C+\angle 3=5\angle C$，

即 $\angle 3=2\angle C$。

连结EP（EP为直角$\triangle DEC$斜边上的中线），则$EP=PC$，$\angle 4=\angle C$。$\because \angle 3=2\angle C=\angle PMC=\angle 4+\angle 5=\angle C+\angle 5$，

$\therefore \angle 5=\angle C \Longrightarrow \angle 4=\angle 5 \Longrightarrow EM=MP=\frac{1}{2}BD$。

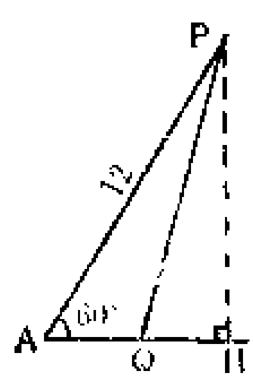
第二试

一、填空题

1 解：$(x+2)*x=(x+2)^2+x^2+x+2+x$
$=2x^2+6x+6=26$，

化简得 $x^2+3x-10=0$，$(x+5)(x-2)=0$。

$x=-5$（不合题意），$x=\underline{2}$



2．解：过P作$PH\perp AQ$。

$\because AH^2=(AQ+QH)^2$

$$=AQ^2+2AQ\cdot QH+QH^2$$
$$=AQ^2+2AQ\cdot QH+PQ^2-PH^2,$$

$\therefore\quad 12^2=AH^2+PH^2=AQ^2+PQ^2+2AQ\cdot QH.$

因此，要使$AP^2+AQ^2+PQ^2$的值最小，只需AQ^2+PQ^2的值最小，为此，要使$AQ\cdot QH$最大。

$\because\quad AQ+QH=6$（定值），

$\therefore$ 当$AQ=QH$时，$AQ\cdot QH$最大。

故 $AQ=3$。

3．解：先看两位数，显然个位数不能为0和偶数，也不能为1、3、7、9，因为它们与15的乘积的个位数只可能为0和5。因此个位数只能为5。$5\times15=75$，显然75具有题目要求的性质，$n=75$。再考虑三位数、四位数、…。

显然，$n=75\times10^m$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 都具有题目要求的性质。

4．解：观察这数列的特点，$\frac{8}{9}$应是从$\frac{1}{16}$起的第8个数，$\frac{1}{16}$前面还有$1+2+3+\cdots+15=120$个数，故$\frac{8}{9}$是这列数的第128个数。

二、解：令 $xy=p$，则 $y=\frac{p}{x}$。代入$ax+by-2c=0$

得 $\quad ax^2-2cx+bp=0$，方程显然有实根，则

判别式 $\quad 4c^2-4abp\geqslant0$，即 $c^2\geqslant abp$。

又已知 $ab-c^2>0$，即 $ab>c^2\geqslant abp$。

$\because\quad ab>c^2\geqslant0$，$\therefore\quad p<1$。

三、解：因冠军没平过一场，亚军没负过一场，故亚军必胜冠军；又因第四名没胜过一场，故冠军必胜第四名。又

由各队所得总分互不相等，可知亚军必平第四名，其他场次比赛结果均可逐步推出，如下表所示：

	冠　军	亚　军	第三名	第四名	第五名	总分
冠　军		2 0	0 2	0 2	0 2	6
亚　军	0 2		1 1	1 1	1 1	5
第三名	2 0	1 1		1 1	0 2	4
第四名	2 0	1 1	1 1		1 1	3
第五名	2 0	1 1	2 0	1 1		2

四、证一：由已知条件易证：

$$BE=BC \text{ 和 } \frac{AE}{EH}=\frac{CA}{CH} \tag{1}$$

由 $\frac{BC}{BH}=\frac{CA}{CH}$ 及(1)式得

$$\frac{AE}{EH}=\frac{BE}{BH}=\frac{BH+EH}{BH}=1+\frac{EH}{BH},$$

则
$$\frac{EH}{BH}=\frac{AE}{EH}-1 \tag{2}$$

在$Rt\triangle ACH$中，由梅涅劳斯定理得

$$\frac{CD}{DA}\cdot\frac{AE}{EH}\cdot\frac{HF}{FC}=1, \quad \because CD=DA,$$

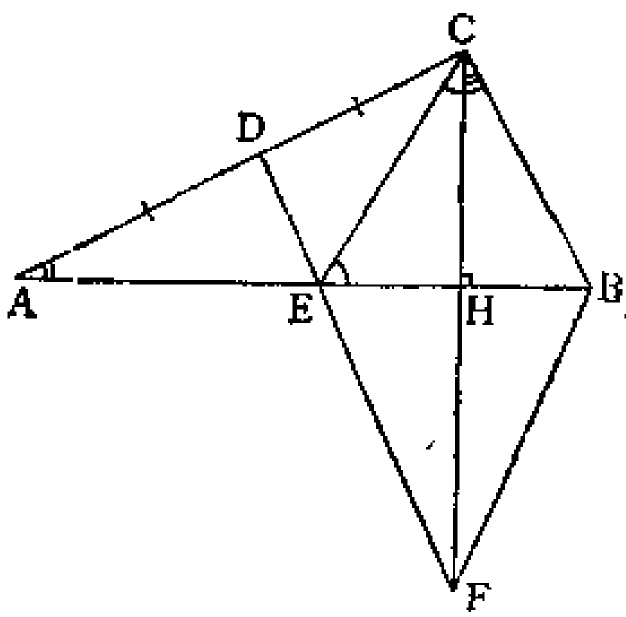
$$\therefore \frac{AE}{EH}=\frac{CF}{HF}=\frac{CH+HF}{HF}=\frac{CH}{HF}+1,$$

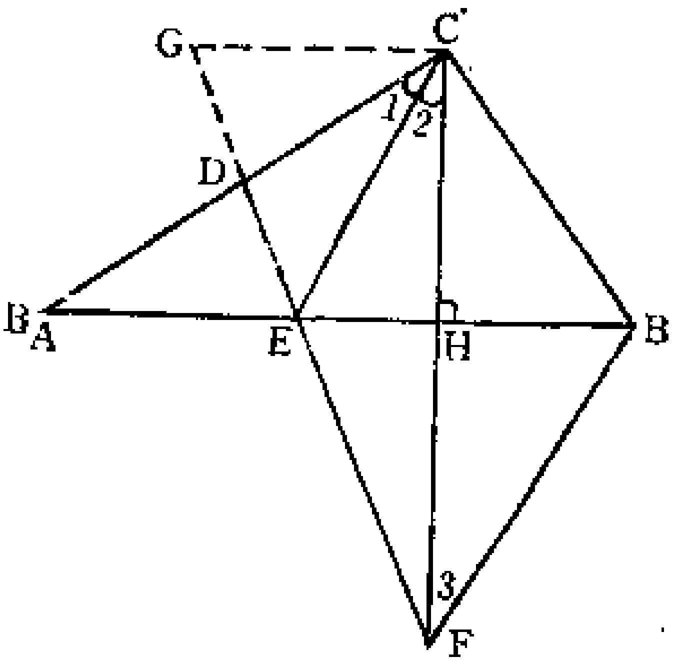
则
$$\frac{CH}{HF}=\frac{AE}{EH}-1 \tag{3}$$

由(2)和(3)得 $\dfrac{CH}{HF}=\dfrac{EH}{BH}$.

则 $Rt\triangle CEH\backsim Rt\triangle FHB$,

$\therefore\ \angle CEH=\angle FBH$, 故 $BF\parallel CE$.





证二：过C作AB的平行线与ED的延长线交于G(如上图)。

已知 $AD=DC$, 易证

$$\triangle CDG\cong\triangle ADE,$$

则 $$AE=GC \qquad (1)$$

$\because$ $$\angle 1=\angle 2,\ \therefore\frac{AE}{EH}=\frac{AC}{CH} \qquad (2)$$

$\because$ $$Rt\triangle ACH\backsim Rt\triangle CHB,\ \therefore\ \frac{AC}{CH}=\frac{CB}{HB} \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式得 $$\frac{GC}{EH}=\frac{CB}{HB} \qquad (4)$$

$$\because Rt\triangle GFC\backsim Rt\triangle EFH,\ \therefore\ \frac{GC}{EH}=\frac{CF}{HF} \qquad (5)$$

$\because\angle BEC=\angle 1+\angle A=\angle 2+\angle BCH=\angle BCE$,

$\therefore \qquad CB=EB \qquad (6)$

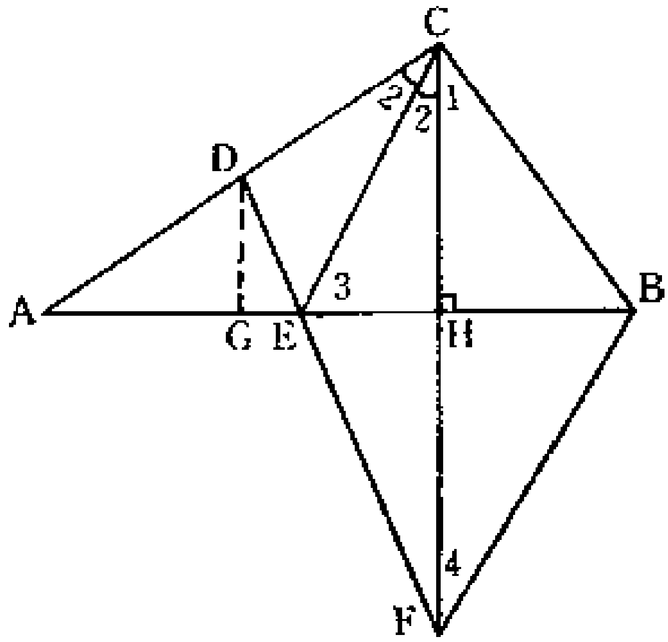
由(4)、(5)、(6)式得 $\dfrac{EB}{HB}=\dfrac{CF}{HF}$,

$$\frac{EB-HB}{HB}=\frac{CF-HF}{HF}，即\frac{EH}{HB}=\frac{CH}{HF}.$$

则 $Rt\triangle CHE\backsim Rt\triangle HFB$, $\therefore$ $\angle 2=\angle 3$,

故 $BF\parallel CE$。

证三：如图所示，过D作$DG\perp AB$，垂足为G。



$\because$ $\angle 3=\angle 1+\angle 2=\angle BCE$,

$\therefore$ $BC=BE$。

由角平分线性质及$\triangle DGE\backsim\triangle EFH$得

$$\frac{CD}{CF}=\frac{DE}{EF}=\frac{DG}{HF}=\frac{\frac{1}{2}CH}{HF}$$

$$\Longrightarrow\frac{2CD}{CF}=\frac{CH}{HF}\Longrightarrow\frac{AC}{CF}=\frac{CH}{HF}\Longrightarrow\frac{HF}{CF}=\frac{CH}{AC} \qquad (1)$$

$\because$ $Rt\triangle AHC\backsim Rt\triangle CHB$, $\therefore$ $\dfrac{CH}{AC}=\dfrac{BH}{BC}$ $\qquad (2)$

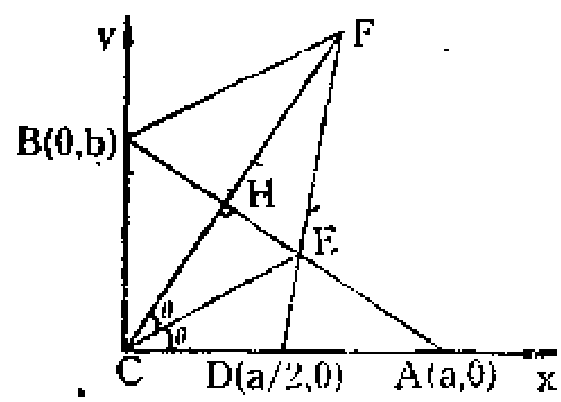
由(1)和(2)式得 $\frac{HF}{CF}=\frac{BH}{BC}=\frac{BH}{BE}$,

$$\frac{HF}{CF-HF}=\frac{BH}{BE-BH}, \text{即} \frac{HF}{HC}=\frac{BH}{EH}.$$

则 $Rt\triangle HFB \backsim Rt\triangle CEH$. $\therefore \angle 2=\angle 4$.

故 $BF \parallel CE$.

证四:(用解析法) 设A和B的坐标分别为$(a, 0)$和$(0, b)$,CE 的斜率为 $k=\text{tg}\theta$,则直线方程分别为



AB: $y=-\frac{b}{a}x+b$,

CH: $y=\frac{a}{b}x$,

CE: $y=kx$.

a、b和k 的关系为$\frac{a}{b}\text{tg}2\theta=\frac{2\text{tg}\theta}{1-\text{tg}^2\theta}=\frac{2k}{1-k^2}$.

将AB和CE的方程联立解得点E的坐标为

$$x_E=\frac{ab}{ak+b}, \quad y_E=\frac{abk}{ak+b}.$$

利用两点式建立DE的方程为 $y=\frac{bk}{b-ak}(2x-a)$.

将DE和CH的方程联立解得点F的坐标为

$$x_F=\frac{ab^2k}{2b^2k-ab+a^2k}, \quad y_F=\frac{a^2bk}{2b^2k-ab+a^2k}.$$

则BF斜率为

$$k'=\left(\frac{a^2bk}{2b^2k-ab+a^2k}-b\right)\div\frac{ab^2k}{2b^2k-ab+a^2k}$$

$$=\frac{a^2bk-b(2b^2k-ab+a^4k)}{ab^2k}=\frac{1}{k}-2\frac{b}{a}$$

$$=\frac{1}{k}-2\,\frac{1-k^2}{2k}=k,$$

故　$BF\parallel CE$。

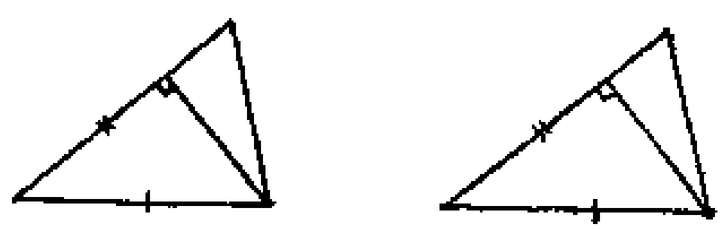
1987年天津市初二数学邀请赛

一、选择题

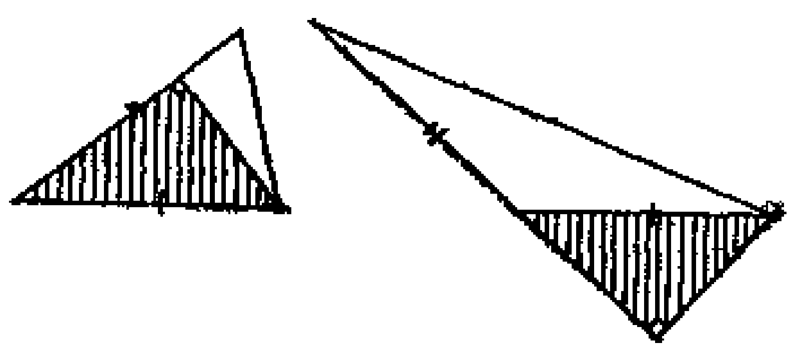
题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	D	C	B	A	D	C	A	B

1　解：有如下两种关系：

(一)



(二)



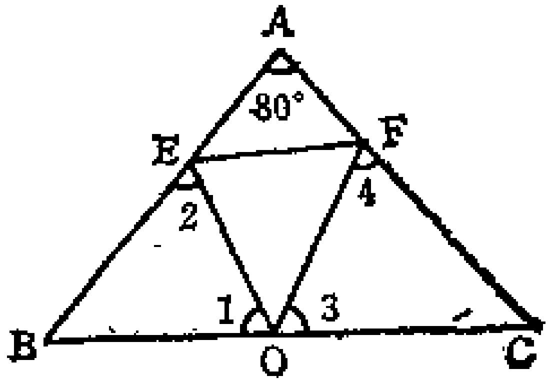
故角的关系是相等或互补。

2　解，$2^{96}-1=(2^{48}+1)(2^{48}-1)$

$$=(2^{48}+1)(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)。$$

因　$2^6+1=65$，$2^6-1=63$，

故　$2^{96}-1$ 可以被63和65整除。



3．解：$\because AB=AC$，$\angle A=80°$，$\therefore \angle B=\angle C=50°$，

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=65°$，

$\angle EDF=50°$。

由已知可得：$\angle FED=\frac{2}{5}\times 130°=52°$，

故　$\angle AEF=180°-52°-65°=63°$。

4．解：当$x\leqslant 0$时，方程变为

$-x^2+3x-4=0$，故　$x^2-3x+4=0$。

$\because$　判别式$\Delta=9-4\times 4<0$，$\therefore$方程无实根。

当$x>0$时，方程变为$x^2-3x-4=0$，

解得　$x=4$或-1（舍去），故实根个数为1。

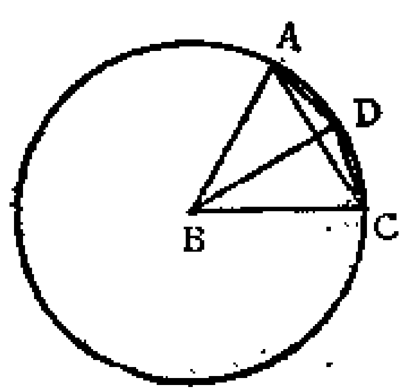
5．解一：若$n=1$，$m=1+16=17$是质数，则排除$x=16$；若$n=2$，$m=16+81=97$是质数，则排除$x=81$；若$n=4$，$m=256+61=317$是质数，则排除$x=61$，故只剩下$x=64$。

解二：若$x=64$，则$n^4+64=(n^2+8)^2-2\times 8\times n^2$

$=(n^2+8)^2-(4n^2)$

$=(n^2+4n+8)(n^2-4n+8)$为合数。

6．解：两边不可能为凸四边形的对边，只可能为邻边，所以如图示：$AB=BC=AC=BD=a$。



则A、C、D三点同在以B为圆心a为半径的圆上，　$\therefore \angle ADC=\frac{360°-60°}{2}=150°$。

显然，此角为最大角。

7. 解：因180为偶数，故三个角的度数只能为奇、奇、偶，而偶数为质数的数只一个2，不妨设 $\angle A=2^\circ$，则 $\angle B+\angle C=180^\circ-2^\circ=178^\circ$。

$\because$ $\angle ABC$ 是锐角三角形，即 $\angle B\leqslant 89^\circ$，$\angle C\leqslant 89^\circ$，

$\therefore$ 必有$\alpha=\beta=89^\circ$。

故这样的三角形只一个，且为等腰三角形。

8. 解：由题意知：总共有$144-120+1=25$组。

因$126=5\times 25+1$，故箱子最多的一组至少有6个箱子，即n的最小值为6。

二、填空题

1. 解：讨论以下几种情况：

(1) 20，30，…，70，80共有7个。

(2) 25，35，…，85，共有7个5，分别乘以2即为10，共有7个0。

(3) 因$50=5\times 10$，故$5\times 54=270$，又有1个0。

(4) $25\times 4=100$，$75\times 4=300$，又有2个0。

以上合计共有17个0，故$k=17$。

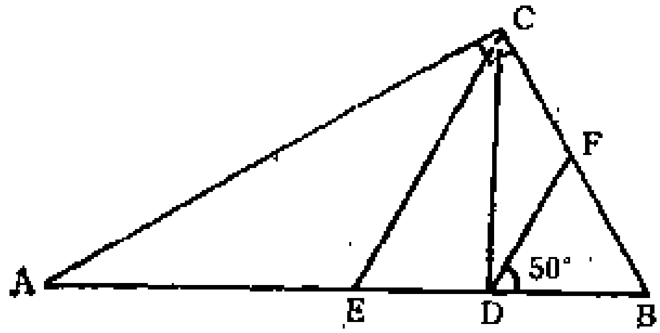
2. 解：$x+\dfrac{1}{x-1}=a+\dfrac{1}{a-1}$ $(x\neq 1,\ a\neq 1)$。

化简得 $(x-a)(a-1)(x-1)-(x-a)=0$，

$(x-a)[(a-1)(x-1)-1]=0$。

$x=a$ 或 $(a-1)(x-1)=1\Rightarrow x=\dfrac{a}{a-1}$。

3. 解：如图，$\because \angle FDB=50^\circ$，$DF=BF$，$\therefore \angle B=50^\circ$，则$\angle A=40^\circ$。故 $\angle ECD=\angle ACD-\angle ACE=\angle B-\angle A=10^\circ$。



4. 解：由题意得 $(n-2)\times180^\circ=n\times95^\circ+\frac{n(n-1)}{2}\times10^\circ$。

化简得 $n^2-18n+72=0$，

解得 $n=6$ 或 12。

5. 解：$\because a=\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}+1$，$\therefore a^2=6+2\sqrt{5}$。

故 $a^3-2a^2-4a=a(a^2-2a-4)=a(6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2-4)=0$。

6. 解：$\begin{cases}|x^2-2|+|y-2|=6\\|x^2-2|=2y-4\end{cases}$，

易得 $|y-2|=10-2y$。

若$y\leqslant2$，$2-y=10-2y$，$y=8$(舍去)。

若$y>2$，$y-2=10-2y$，$y=4$。

代入原方程得 $|x^2-2|=4$，$x^2=\pm4+2$(-6 舍去)，

则 $x=\pm\sqrt{6}$。

故实数解为 $\begin{cases}x=\sqrt{6}\\y=4\end{cases}$，$\begin{cases}x=-\sqrt{6}\\y=4\end{cases}$。

7. 解：易算出：$3*2=\frac{1}{3}$，

$5*(3*2)=5*\frac{1}{3}=\frac{29}{10}$。

8．解：$a+b+c+d+e=42$，$42=5\times 8+2$，

则五个数字分别有三种情况：

（A）9、9、8、8、8；（B）9、9、9、8、7；（C）9、9、9、9、6。

若能被4整除，$\overline{abcde}=\overline{abc}\times 100+\overline{de}$，则$\overline{de}$应能被4整除。

研究（A）共有三个数：99888，98988，89988，都能被4整除。研究（B）则各种情况都不能被4整除。研究（C）只有99996能被4整除。

故共有4个。

三、证明：见初中几何教材。

四、解：原式可变为$\sqrt{2x-4}=\sqrt{x+a}+1$。

两边平方后化为　$x-a-5=2\sqrt{x+a}$，

再平方得　$(x-a-5)^2=4(x+a)$。

$\because$　$x=4$是增根，代入得

$a^2-2a-15=0$，$\therefore$　$a_1=5$，$a_2=-3$。

当$a=5$时，$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$，解得$x_1=4$，$x_2=20$。

当$a=-3$时，$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x-3}=1$。经检验$x=4$是此方程的根，故舍去$a=-3$。

故只有$a=5$，此时方程的根是$x=20$。

五、证一：由于13张牌中的点数有7个奇数和6个偶数，所以当红黑牌配成13对之后，至少有一对数的奇偶性相同。这对数的差是偶数，于是这13对数的差的积必为偶数。

证二：由于这13对数的差的积为0，所以不可能每对数的差都是奇数（否则它们的和为奇数）。于是至少有一对数的差为偶数，即13对数的差的积必为偶数。

六、解：由$a^2+b^2+c^2=84$及$2b=a+c$，解得

$$ac=\frac{5b^2-84}{2},\quad a+c=2b.$$

则a、c是下面方程的根：$t^2-2bt+\frac{5b^2-84}{2}=0$　（1）

于是，$\Delta=4b^2-2(5b^2-84)\geqslant0$，解得$b^2\leqslant28$。又因为三角形任何两边之和大于第三边，所以$b+c>a$。解方程(1)，并考虑$a>b>c$，得

$$a=\frac{2b+\sqrt{168-6b^2}}{2},\quad c=\frac{2b-\sqrt{168-6b^2}}{2}.$$

从而有 $b+\frac{2b-\sqrt{168-6b^2}}{2}>\frac{2b+\sqrt{168-6b^2}}{2}$，

$\therefore$　$\sqrt{168-6b^2}<b$，$b^2<24$。

于是$24<b^2\leqslant28$。$\because b$是正整数，$\therefore b=5$。

1987年沈阳市初中数学邀请赛

一、填空

1．解：$x=10^{-2.8451}=\frac{1}{10^3\cdot10^{0.8451}}=\frac{1}{10^2\cdot7}=\frac{1}{700}$。

2．解：$x=3^{\log_{3^2}(1-\sqrt{5})^2}+2^{\log_{2^2}(1+\sqrt{5})^2}$

$=3^{\log_3|1-\sqrt{5}|}+2^{\log_2(1+\sqrt{5})}$

$=\sqrt{5}-1+1+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$。

3．解：$\lg y=-3-|\lg x|<0$，

$\lg x=\frac{-4}{|\lg y|}<0$，

$$\therefore \begin{cases} \lg y-\lg x=-3 & ① \\ \lg x\cdot\lg y=4 & ② \end{cases}$$

由②有$\lg y=\frac{4}{\lg x}$，代入①，有

$(\lg x-4)(\lg x+1)=0$，

$\lg x=4$(舍去)，$\therefore \lg x=-1$。

代入①，有$\lg y=-4$。

综上，有$x=0.1$，$y=0.0001$。

4． 解：设凸n边形的n个顶点为A_1、A_2、A_3、…、A_{n-1}、A_n，于是有

A_1A_2 A_1A_3 A_1A_4……A_1A_n——$n-1$条，

A_2A_3 A_2A_4……A_2A_n ——$n-2$条，

…… ……

$A_{n-1}A_n$——1条。

$\therefore$ 对角线条数为$\frac{(n-1)n}{2}-n=\frac{1}{2}n(n-3)=945$。

$n=-42$（舍去）或45。

$\therefore$ 答案为45。

5． 解：设其两条直角边长为a和b。

由已知有 $\begin{cases} a^2+b^2=2^2 & ① \\ a+b+2=2+\sqrt{b} & ② \end{cases}$

$②^2-①$，得 $2ab=2$。

$\therefore$ 其面积是$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}$。

6 解：设平路长为a，山路长为b，去时走平路用时t_1，上山用时t_2，返回时下山用时t_3．由已知：

$a=4t_1$，$b=3t_2=6t_3\Rightarrow 2t_3-t_2=0$，

$$2t_1+t_2+t_3=5.$$

总路程 $S=2(a+b)=8t_1+3t_2+6t_3$

$=4(2t_1+t_2+t_3)+2t_3-t_2$

$=4\times5+0=20$(公里)。

7. 解：抛物线 $y=2x^2-4x-5$ 即 $y=2(x-1)^2-7$，向左平移3个单位，再向上平移2个单位后有

$$y=2(x-1+3)^2-7+2\Rightarrow y=2x^2+8x+3.$$

此解析式关于y轴对称的图象的解析式为

$$y=2(-x+2)^2-5\Rightarrow y=2x^2-8x+3.$$

8 解：从A往B中倒入a升水后，B中的酒精浓度为$\frac{n}{n+a}$。再从B中向A倒回a升溶液，此中含纯酒精$\frac{na}{n+a}$。此时B中含水为

$$a-\left(a-\frac{na}{n+a}\right)=\frac{na}{n+a}.$$

9. 解：设四个数分别为a、b、c、d。由已知有

$$\begin{cases}a+b+c+d=100\\ a+4=b-4=4c=\dfrac{d}{4}.\end{cases}$$

解得 $a=12$，$b=20$，$c=4$，$d=64$。

所求四个数为12，20，4，64。

二、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6
答　案	A	B	C	D	C	B

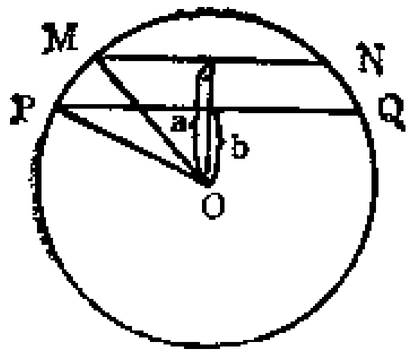
1. 见书上定义。

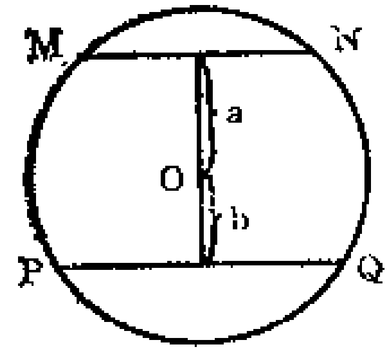
2. 解：设O到MN的距离为a，到PQ的距离为b，易算

得$a=4$，$b=3$。分两种情况讨论：

情况1：MN、PQ间距离为

$$a-b=1;$$





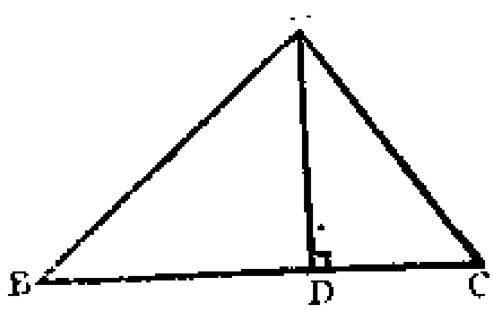
情况2：MN、PQ间距离为

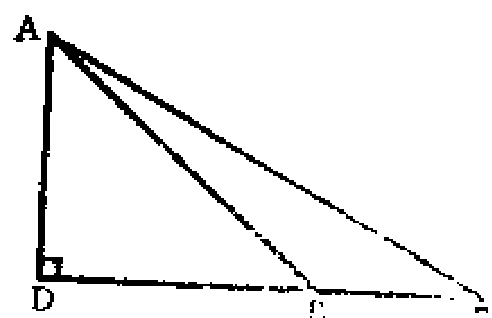
$$a+b=7.$$

综上，MN、PQ间的距离为1或7。

3. 解：分两种情况：

情况1：$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=9$，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=5$，周长为42。





情况2：$CD=\sqrt{15^2-13^2}=9$，$BD=\sqrt{13^2-12^2}=5$，

$\therefore BC=4$，周长为32。

综上，周长为32或42，选C。

4. 解：只有$x=1$时，$\sqrt{-(x-1)^2}$才有意义。

$\therefore\quad y=||\sqrt{-(1-1)^2}\pm2|\pm5|=|2\pm5|=\begin{cases}7\\3\end{cases}$，选$D$。

5. 解：根据关系式有下面两个表：

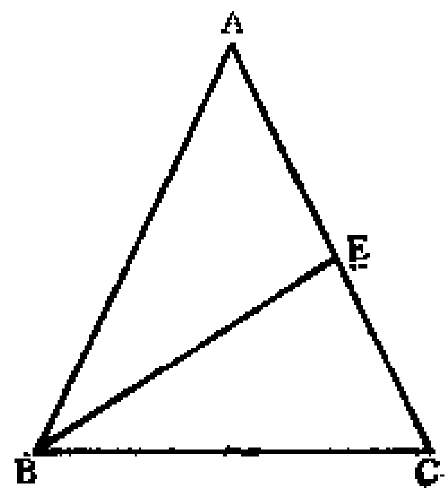
表 1：

$c>0$时	$b>0$	$b<0$
$a>0$	2	2
$a<0$	2	-2

表 2：

$c<0$时	$b>0$	$b<0$
$a>0$	2	-2
$a<0$	-2	-2

∴关系式的值为2或-2，选C。



6． 解：由角平分线性质定理：

$$\frac{BC}{AB}=\frac{CE}{EA}=\frac{BC+CE}{AB+EA}=\frac{112}{168},$$

或$\frac{168}{112}$，且

$$2AB+BC=112+168.$$

解得　$AB=105$或80，选B。

三、填空

1． 解：$31\div\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=31\times\frac{30}{31}=30$，

$$30\times\frac{1}{2}=15,\ 30\times\frac{1}{3}=10,\ 30\times\frac{1}{5}=6,$$

∴　甲、乙、丙依次分得15，10，6。

2． 解：$\because\frac{a+b+c}{d}=\frac{a+b+d}{c}=\frac{a+c+d}{b}=\frac{b+c+d}{a}$

$=k$。

由等比定理得 $k=\frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=3(a+b+c+d\neq0)$。

当$a+b+c+d=0$，则$a+b+c=-d$. $k=-1$.

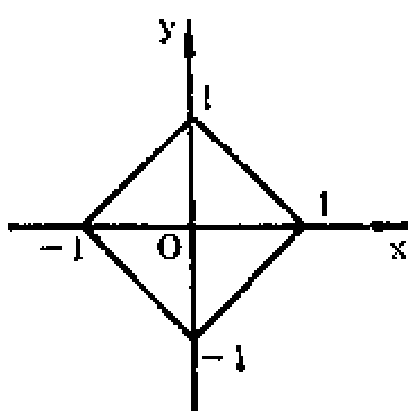
$\therefore$ k等于3或-1.

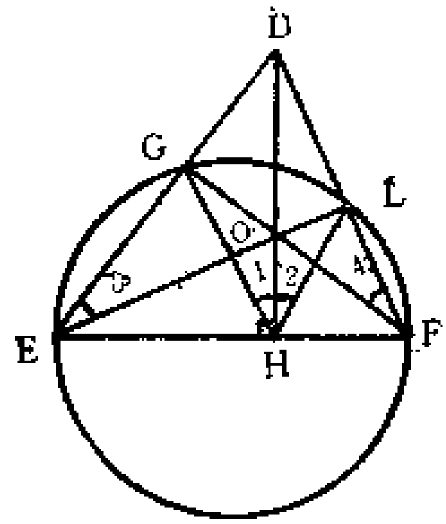
$\dfrac{a+b+c+d}{d}=4$或0，$\dfrac{a+b+c-d}{d}=2$或-2，

故 $\dfrac{a+b+c+d}{a+b+c-d}$等于2或0.

3. 解：$|x|+|y|=1$ 围成了如图的正方形，其面积为$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，而对称轴方程为

$x=0$，$y=0$，$y=x$，$y=-x$.





4. 解：如图，DH、FG、EL 为所在边的高，故以 EF 为直径的圆必过 G、L，$\therefore\angle1=\angle3$，$\angle2=\angle4$，又$\angle3=\angle4$，

$\therefore$ $\angle1=\angle2$. DH 为 $\angle GHL$ 的平分线，同理可求得 GF为$\angle DFE$的平分线，EL为$\angle DEF$的平分线. $\therefore O$ 为三条内角平分线的交点.

5. 解：设抛物线$y=-x^2+ax+b-b^2$的顶点为$P(x,y)$，

则 $\begin{cases} x=\dfrac{a}{2} \\ y=\dfrac{1}{4}a^2+b-b^2. \end{cases}$

把(x,y)代入 $y=4x^2+4x+\frac{9}{12}$，得

$$\frac{1}{4}a^2+b-b^2=4\left(\frac{a^2}{4}\right)+4\times\frac{a}{2}\times\frac{19}{12},$$

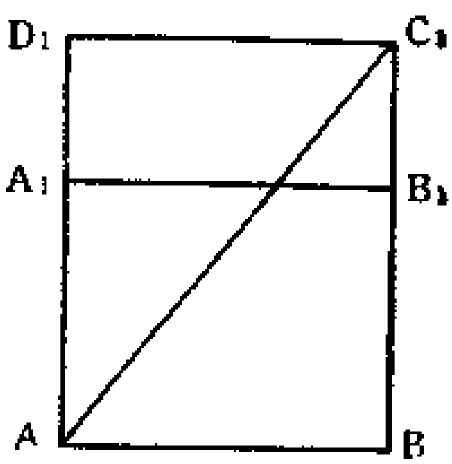
$$\therefore\quad \frac{3}{4}\left(a+\frac{4}{3}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

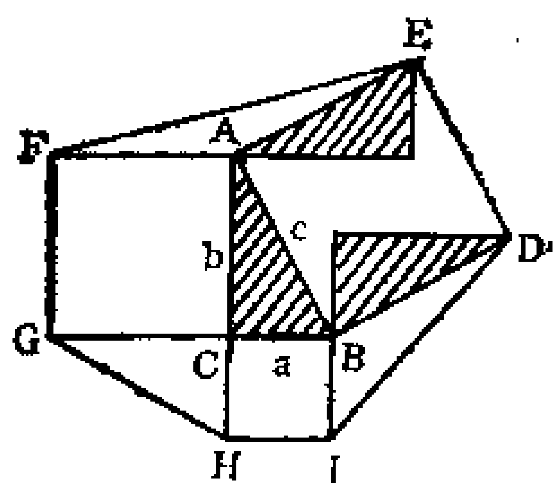
由此得　$a=-\frac{4}{3}$，$b=\frac{1}{2}$。

6．　解：将长方体展开成平面图形，可知AC_1为最短路程。

$AC_1=\sqrt{AB^2+BC_1^2}=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}$。

最短路程为$\sqrt{74}$。





7．　解：如图所示，$\triangle ABC\cong\triangle AEM\cong\triangle BDN$，

$\therefore\quad AM=FA=b$，$IB=NB=a$，

$$\therefore\quad S_{\triangle EAF}=S_{\triangle IBD}=\frac{1}{2}ab,$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+a^2+b^2+(\sqrt{a^2+b^2})^2+\frac{1}{2}ab$$

$$+\frac{1}{2}ab=2a^2+3ab+2b^2.$$

8　解：依题意，要使抛物线与直线总有交点，必须使以下方程组总有实数解：
$$\begin{cases} y=x^2-2bx+1 & ① \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}m & ② \end{cases}$$

②代入①，$2x^2-(4b-1)x+2-m=0$。

$\Delta=(4b-1)^2-8(2-m)\geqslant 0$，

$\therefore\quad (4b-1)^2\geqslant 8(2-m)$，

必须使$2-m\leqslant 0$，$\therefore m\geqslant 2$。故$m\geqslant 2$时抛物线与直线总有交点。

9．解：$\because\quad x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(1-m)^2$
$$-2\left(m^2-3m+\frac{9}{4}\right),$$

$\therefore\quad x_1^2+x_2^2=-m^2+4m-\frac{7}{2}$。

$\Delta=(m-1)^2-4\times\left(m^2-3m+\frac{9}{4}\right)\geqslant 0$，

$\therefore\quad \frac{4}{3}\leqslant m\leqslant 2$。

$x_1^2+x_2^2=-(m-2)^2+\frac{1}{2}\quad\left(\frac{4}{3}\leqslant m\leqslant 2\right)$。

当$m=2$时，$x_1^2+x_2^2$有最大值$\frac{1}{2}$；

当$m=\frac{4}{3}$时，$x_1^2+x_2^2$有最小值$\frac{1}{18}$。

10．解：$\because E=5$，$\therefore E+E=5+5=10$，故$I=0$。

代入算式，$\begin{array}{r} 5BFDH\,5 \\ +\,ALGDH\,5 \\ \hline GBCLG\,0 \end{array}$。观察算式的第二列知可能有三种

情况：$B+L=B$，$B+L=10+B$，$B+L+1=10+B$。前两种情况得出$L=0$和10，不可能，故只有第三种情况：$L=9$。

这时算式为$\begin{array}{r}5BFDH\ 5\\ +\ A9GDH\ 5\\ \hline GBC9G\ 0\end{array}$，由算式的第四列知可能有四种情况：$2D=9$，$2D=19$，$2D+1=19$，$2D+1=9$，显然前三种情况不可能，故$D=4$。这时 $2H+1=10+G$，$5+1+A=G$。即$2H=9+G$，$6+A=G$。可看出G是奇数，且$G>6$，$G\neq9$，故$G=7$，$A=1$，$H=8$。

由于$F+7=10+C$，即$F=3+C$，$\therefore F=6$，$C=3$。剩下$B=2$。故A，B，C，D，E，F，G，H，L，I对应的数字为1，2，3，4，5，6，7，8，9，0。

四、选择题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	C	D	D	B	C

1　解：取$A=9$，$B=3$，$\therefore N=93$，$M=3$；

取$A=21$，$B=7$，$\therefore N=217$，$M=7$。

以上特殊值说明，(A)、(B)、(D)都是错误的。

2　解：代入1、-1、2、-2都成立。

3、解：可研究$x\geqslant0$或$x<0$的两种情况。

4、解：抛物线的对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}$，从(A)、(B)、(C)中的三条直线看来，均为$a>0$，$b>0$。那么曲线向上开口，且对称轴在原点左边。故(B)对。

研究(D)：$a<0$，$b<0$。对称轴仍在y轴以左。

$\therefore$ D也是错的。

5. 解：20只球至少能组成8对，剩下的四个球为红、蓝、黄、白各一只．现在研究利用这四个球要再加几个球才能组成2对．显然，再加两个球还不够，如这两个球正好都取成红球，那么只能组成一对．而再加三个球，7个球总能组成2对，∴摸出10对至少应取(20＋3)，即23只球．

五、1. 证：所有整数可分为 $3n$、$3n+1$、$3n+2$ 三类．若任给的五个整数中这三类数都有，那么从这三类中各取一个，共三个，其和为 $3(n_1+n_2+n_3)+3$，能被3整除．若缺其中一类数，那么在剩下的两类数中必有一类数拥有五个整数中的3个，这3个之和必能被3整除．若五个数属于同一类，那么任选三个之和必被3整除．

故任给五个整数中能选出三个，使它们的和被3整除．

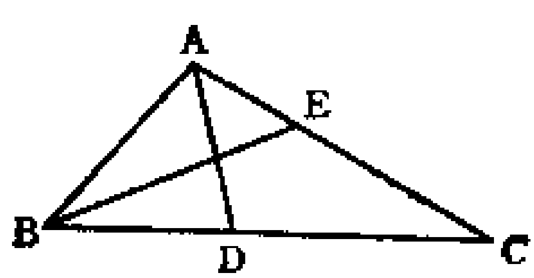
2. 证明：由已知易得：$\angle ACD=\angle ABE$，∴ $\triangle ABC \backsim \triangle AEB$．

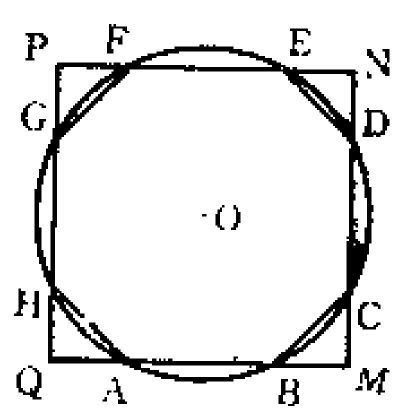
$$\because \quad \frac{AC}{AB}=\frac{BC}{BE}, \quad \therefore \quad AB=\frac{AC\cdot BE}{BC} \qquad ①$$

又 $\angle ABC=\angle DAC$，$\angle C$公用，∴$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$，

$$故 \quad \frac{AB}{AD}=\frac{BC}{AC}, \quad AB=\frac{AD\cdot BC}{AC} \qquad ②$$

②×①$\Rightarrow AB^2=AD\cdot BE$．





六、解：设⊙O 内接八边形 $ABCDEFGH$ 构造如图，

$AB=CD=EF=GH=3$，$BC=DE=FG=HA=2$，

$\therefore\quad \angle AOC=\angle COE=\angle EOG=\angle GOA=\angle BOD$

$=\angle DOF=\angle FOH=\angle HOB=\frac{360^\circ}{4}$.

易得八边形$ABCDEFGH$的内角相等，都等于135°，外角都等于45°。

边AB、CD、EF、GH分别交于M、N、P、Q，则$\triangle MBC$、$\triangle MDE$、$\triangle PFG$、$\triangle QHA$皆是腰长为$\sqrt{2}$的直角等腰三角形。

$\therefore$ $MNPQ$的各边相等，其长为$3+2\sqrt{2}$，各角都为直角，即$MNPQ$为正方形。

$$\therefore\quad S_{ABCDEFGH}=S_{MNPQ}-4S_{\triangle MBC}$$

$$=(3+2\sqrt{2})^2-4\times\frac{(\sqrt{2})^2}{2}$$

$$=17+12\sqrt{2}-4$$

$$=13+12\sqrt{2}.$$

1987年杭州市初中数学竞赛

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	D	A	B	D	A	C	D	C

1．解：易举出反例说明(1)、(2)、(3)均为假命题，仅(4)为真命题。

2．解：$y=\frac{x^2}{x}$的定义域为$x\neq0$；$y=\sqrt{x^2}$，$y=|x|$

的值域为$y\geqslant 0$；$y=2^{\log_2 x}$的定义域为$x>0$；而$y=x$的定义域与值域均为$(-\infty, +\infty)$，所以在前面4个函数中，图象与$y=x$完全重合的没有。

3. 解：$\lg N=n+\frac{1}{a}\Rightarrow \lg\frac{1}{N}=-\lg N=-n-\frac{1}{a}$，

$\lg\frac{1}{N}=(-n-1)+1-\frac{1}{a}=-(n+1)+\frac{a-1}{a}$，故

$\lg\frac{1}{N}$的尾数为$\frac{a-1}{a}$。

4. 解：$\triangle=(4n-1)^2-4(2n-5)$

$$=16\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+17>0.$$

∵ n是任意自然数，∴$\sqrt{\triangle}$非整数，故x的两个根非整数。

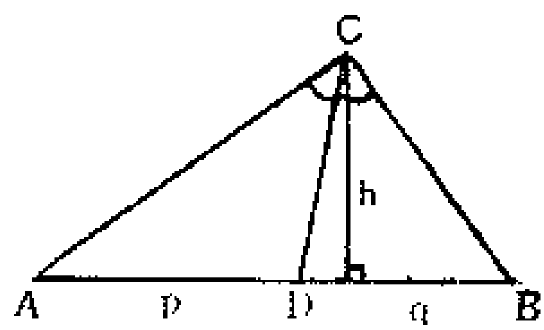
5. 解：∵ $x+\sqrt{x^2-1}=a^{\frac{m-n}{2mn}}$，

∴ $x-\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=a^{\frac{n-m}{2mn}}$.

6. 解，如图，由角平分线性质得

$\frac{AC}{BC}=\frac{p}{q}$，设$BC=a$，则

$AC=\frac{pa}{q}$.



由勾股定理得　$a^2+\frac{p^2a^2}{q^2}=(p+q)^2$，$a^2=\frac{(p+q)^2q^2}{p^2+q^2}$.

由面积公式得　$AC\cdot BC=AB\cdot h$,

故 $h=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}=\dfrac{pa^2}{q(p+q)}=\dfrac{pq(p+q)}{p^2+q^2}$.

7. 解：$\because$ $\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{y}+1=\dfrac{1}{y}(x+y+z)=0$，$1+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}=0$，$\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}+1=0$，$\therefore$原式$=3$。

8. 解：直线$y=\dfrac{1}{2}x+k$在x轴的截距为$-2k$，在y轴的截距为k，则 $S_{\triangle AOB}=\left|\dfrac{1}{2}(-2k)\cdot k\right|=k^2$，要使$k^2\leqslant 1$，那么$k$的取值范围是$-1\leqslant k\leqslant 1$。

二、填空题

1. 解：$x^4+3x^3+2x^2+3x+1$

$=x^4+3x^3+x^2+x^2+3x+1$

$=\underline{(x^2+3x+1)(x^2+1)}$.

2. 解：设这个正整数为x，则由题意得 $x+50=m^2$，$x-31=n^2$，$m^2-n^2=81$，$(m+n)(m-n)=81$。

(1) $m+n=9$，$m-n=9$，解得 $m=9$，$n=0\Rightarrow x=\underline{31}$；

(2) $m+n=27$，$m-n=3$，解得 $m=15$，$n=12\Rightarrow x=\underline{175}$；

(3) $m+n=81$，$m-n=1$，解得 $m=41$，$n=40\Rightarrow x=\underline{1631}$。

3. 解：当$a=b=c\neq 0$时，

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=8,$$

当a、b、c互不相等时，

$$\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}\Rightarrow(a+b)a=(b+c)c \qquad (1)$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}\Rightarrow(a+b)b=(c+a)c \qquad (2)$$

(1)−(2)得 $a^2-b^2=(b-a)c\Rightarrow a+b=-c$。

同理可得 $b+c=-a$，$a+c=-b$，

故 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=(-1)^3=-1$。

4． 解：$||2x+1|-x|=3$。

若 $x\leqslant-\frac{1}{2}$，则有 $|-2x-1-x|=3\Rightarrow-3x-1=3$ 或 $-3x-1=-3$，

∴ $x=-\frac{4}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$（舍去），

若 $x>-\frac{1}{2}$，则 $|x+1|=3\Rightarrow x+1=3$ 或 $-3\Rightarrow x=2$ 或 -4（舍去）。

综上，$x=-\frac{4}{3}$ 或2。

5． 解：示意图如右：

从 A 往右数，有 AC_1、AC_2、AC_3……AC_9、AB 10 条线段；

从 C_1 往右数，有 C_1C_2、C_1C_3……C_1C_9、C_1B 9 条线段；

从 C_2 往右数，有 C_2C_3……C_2C_9、C_2B 8 条线段；

从 C_9 往右数，有 C_9B 1 条线段。

故共有1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55条线段。

6． 解：设甲带 x 个，每个卖 a 元；乙带 y 个，每个卖 b 元。依题意有

$x+y=330$ ① $ax=by$ ② $ya=32.4$ ③ $xb=22.5$ ④

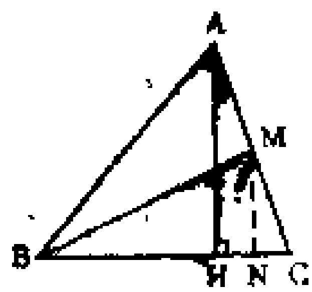
由③、④有 $a=\frac{32.4}{y}$，$b=\frac{22.5}{x}$。代入②有

$32.4\frac{x}{y}=\frac{y}{x}\cdot22.5\Rightarrow 6x=5y$，代入①有 $x+\frac{6}{5}x=330$。

$\therefore\quad x=330\cdot\frac{5}{11}=150$，$y=330-150=180$。

故甲所带的蛋是150个，乙所带的蛋是180个。

三、证：(1) 如图，过 M 作 $MN\parallel AH$ 交 BC 于 N，于是 $MN\underline{\parallel}\frac{1}{2}AH$。 $\because AH=BM$，



$\therefore\ MN=\frac{1}{2}BM$。在 $Rt\triangle BMN$ 中，$MN=\frac{1}{2}BH\Rightarrow\angle MBC=30^\circ$。

(2) $\because M$ 是 AC 中点，$\therefore S_{\triangle BCM}=S_{\triangle BAM}$。

即 $\frac{1}{2}BC\cdot BM\cdot\sin30^\circ=\frac{1}{2}BM\cdot BA\cdot\sin\angle ABM$。

$\therefore\quad BC\sin30^\circ=BA\sin\angle ABM$。$\because\quad BC<BA$，

$\therefore\quad \sin30^\circ>\sin\angle ABM$。

$\because\quad \angle ABM$ 是锐角，$\therefore\quad \angle ABM<30^\circ$，

$\therefore\quad \angle ABC<60^\circ$。

四、解：若将任 m 行、n 列的数记为 (m,n)，那么易观察出有 $(m,n)=(m-1,n-1)+(m-1,n)+(m-1,n+1)$。由此有数表。

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & & & \\
 & & 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 & & \\
 & 1 & 5 & 15 & 30 & 45 & 51 & 45 & 30 & 15 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 21 & 50 & 90 & 126 & 141 & 126 & 90 & 50 & 21 & 6 & 1
\end{array}
$$

五、证：令 $u=\sqrt[3]{x+\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}$

$$+\sqrt[3]{x-\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}$$

则 $u^3=2x+3\sqrt[3]{x^2-\left(\frac{x+1}{3}\right)^2\frac{8x-1}{3}}$

$$\cdot\left(\sqrt[3]{x+\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}\right.$$

$$\left.+\sqrt[3]{x-\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}\right)$$

$$=2x+3\sqrt[3]{\frac{27x^2-(8x^3-x^2+16x^2-2x+8x-1}{27}}u$$

$$=2x+\sqrt[3]{-8x^3+12x^2-6x+1}u$$

$$=2x-(2x-1)u$$

$$=2x-2xu+u,$$

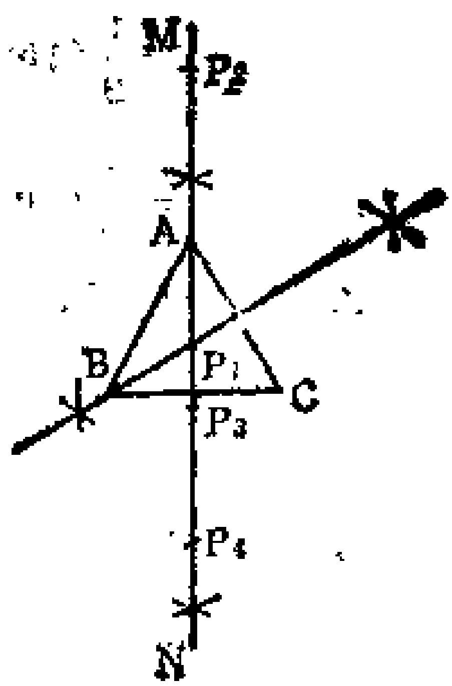
$\therefore\ u^3-u+2xu-2x=0$， $\therefore\ (u-1)(u^2+u+2x)=0$。

$\because\ x\geqslant\frac{1}{8}$， $\therefore\ u^2+u+2x\neq0$， $\therefore\ u=1$。

六、(1) 作法：①作BC边的垂直平分线MN；②作AC边的垂直平分线交MN于P_1，则P_1为所求的一个点；③以A为圆心，在MN上截AP_2、AP_3等于AB，则P_2、P_3为所求

的另外两点，④以B为圆心，以BA为半径，在MN上截$BP_4=BA$，则P_4为所求的一点。

则P_1，P_2，P_3，P_4为所求的点（如图）。



（2）如果$\triangle ABC$为正三角形，那么其每一条边的垂直平分线上都可以找到4个点满足条件，其中有一个点为公共点，这个点即是$\triangle ABC$的外心。所以符合条件的点共有$4\times3-2=10$个。

七、证：∵ $\underbrace{11\cdots1}_{n个}\ \underbrace{22\cdots25}_{(n+1)个}$

$$=\frac{10^n-1}{9}\times10^{n+2}+2\times\frac{10^{n+1}-1}{9}\times10+5$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n+2}-10^{n+2}+2\cdot10^{n+2}-20)+5$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n+2}+10^{n+2}-20)+5.$$

$$(\underbrace{33\cdots3}_{n个}5)^2=\left(3\times\frac{10^n-1}{9}\times10+5\right)^2$$

$$=\frac{10^{2n+2}-2\times10^{n+2}+10^2}{9}$$

$$+\frac{3\times(10^{n+2}-10^2)}{9}+25$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n+2}+10^{n+2}-2\times10^2)+25$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n+2}+10^{n+2}-20)+5.$$

$$\therefore\quad \underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1}\ \underbrace{22\cdots25}_{(n+1)\text{个}2}=(\underbrace{33\cdots35}_{n\text{个}3})^2$$

八、解：(1) $\because S_{\triangle ABG}=1$，

$\therefore\quad \dfrac{1}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{2\times1}{5\times3}$，得 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{15}{2}$，

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{15}{2}\times4=30$。

(2) $S_{\triangle ADC}=\dfrac{2}{15}\times3=\dfrac{45}{2}$。设$S_{\triangle AOD}=x$，则

$$\frac{x}{\frac{45}{2}}=\frac{AF}{AC}\quad ①\qquad\qquad \frac{1+x}{30}=\frac{2AF}{AC}\quad ②$$

由①、②得 $\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{2}{9}$。

1987年苏州市初中数学竞赛模拟试题

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6
答　案	C	D	C	C	C	B

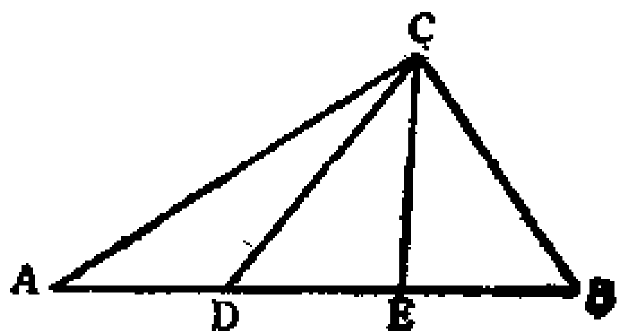
1．　解：$\log_2[\log_3(\log_4 x)]=0\Rightarrow\log_3(\log_4 x)=1\Rightarrow\log_4 x$

$=3\Rightarrow x=4^3=64$。

同理有　$y=16$，$z=9$，$\therefore\ x+y+z=89$.

2．解：$(a*b)^n=(a^b)^n=a^{bn}=a*(bn)$.

3．解：如图，设$\triangle ABC$中$\angle C=90^\circ$，D、E是斜边上的三等分点，$CE=\cos x$，$CD=\sin x$。



在$\triangle BCD$中，利用中线定理得

$$2(BC^2+\sin^2 x)=4\cos^2 x+\frac{4}{9}AB^2 \qquad ①$$

在$\triangle ACE$中，利用中线定理得

$$2(AC^2+\cos^2 x)=4\sin^2 x+\frac{4}{9}AB^2 \qquad ②$$

①+(2)　$2AB^2+2=4+\frac{8}{9}AB^2$，$\therefore\ \frac{10}{9}AB^2=2$，

$$AB=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

4．解，此阴影在直线$x+y=0$和$y-x=0$的下方，

$\therefore$有　$x+y\leqslant 0$，且$y-x\leqslant 0$，

$\therefore$　　$x+y\leqslant 0$，且$x-y\geqslant 0$。

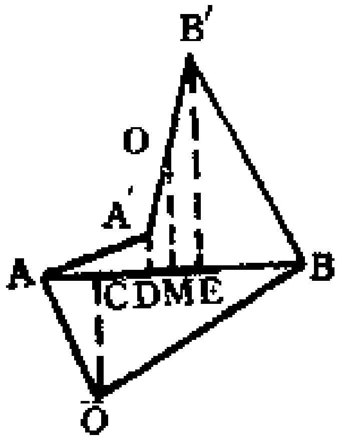
5．解，如图，设O、A'、B'、O'在AB上的射影分别为C、D、E、M。由三角形全等易证，$BE=OC=AD$，

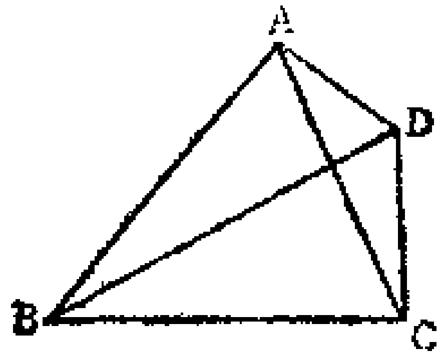
$B'E=BC$，$A'D=AC$，

$\therefore\ O'M=\frac{A'D+B'E}{2}=\frac{AC+BC}{2}=\frac{AB}{2}$.

又$O'M\perp AB$，$AM=AD+DM=BE+EM=BM$。

故当O移动时，O'为一定点。





6．解：平面4点A、B、C、D不外乎两种情况：D在$\triangle ABC$内与D在$\triangle ABC$外。假设四个三角形都为锐角三角形，那么D在$\triangle ABC$内，显然不满足，与假设矛盾。那么研究D在锐角$\triangle ABC$外，如图，$\because\ \triangle BCD$为锐角三角形，$\therefore\angle BCD$为锐角。同理由假设可得，$\angle BAD$、$\angle CDA$均为锐角。$\therefore\ \angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB<4\times90^\circ=360^\circ$。

而四边形$ABCD$内角和为360°，矛盾，故假设不成立。但很容易构造四点（如图），使得$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle BCD$为锐角三角形。

$\therefore$ 其中最多有3个锐角三角形。

二、填空题

1．解：关键在于要迅速有效地简化方程，以求特殊解。不妨设$x_3=x_4=\cdots=x_{1987}=1$，

方程化为 $x_1+x_2+1985=x_1\cdot x_2$。

设$x_2=2$，可解得$x_1=1987$。于是得一组解：$x_1=1987$，$x_2=2$，$x_3=x_4=\cdots=x_{1987}=1$。

2. 解：$199\div19=10\frac{9}{19}$.

3. 解：1克和3克两个砝码能在天平上称出1—4克的物体，添上9克的砝码，能称出1—13克的物体，添上27克的砝码，就能称出1—40克的物体，添上81克的砝码，就能称出1—121克的物体。所以这5个砝码的重量的克数分别是1，3，9，27，81。

4. 解：令 $x=\frac{1}{y}$，则 $f\left(\frac{1}{y}\right)+af(y)=-b\lg y$，即

$af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=-b\cdot\lg x$.

$$于是a^2f(x)+af\left(\frac{1}{x}\right)=-ab\lg x \qquad ①$$

$$f(x)+af\left(\frac{1}{x}\right)=b\lg x \qquad ②$$

①－②得 $(a^2-1)f(x)=-b(1+a)\lg x$,

$$f(x)=\frac{b\lg x}{1-a},\quad f(10)=\frac{b}{1-a}$$

5. 解：由条件(1)，设这个二次三项式为

$a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}(a>0)$，令其两根为$x_1x_2$，由韦达定理，$x_1+x_2=1$，$x_1x_2=\frac{a-49}{4a}$.

$$\begin{aligned}\therefore\ x_1^4+x_2^4&=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2\\&=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2x_1^2x_2^2\\&=(1-2x_1^2x_2^2).\end{aligned}$$

令$x_1x_2=y$。由条件(2)有

$(1-2y)^2-2y^2=337$,

$y^2-2y-168=0$,

∴ $y=-12$或14.

$$\left.\begin{array}{l} x_1x_2=-12 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{a-49}{4a} \end{array}\right\} \Rightarrow a=1>0,$$

$$\frac{a-49}{4a}=14\Rightarrow a=-\frac{49}{55}<0\ (\text{不合题意，舍去}).$$

∴ 这个二次三项式为$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$,

即 x^2-x-12.

6. 解：用记号$\langle A\rangle$表示整数A的末两位数.

∵ $1986=2000-14$,

∴ $1986^2=2000^2-2\times14\times2000+14^2$.

$\langle1986^{2000}\rangle=\langle14^{2000}\rangle$.

∵ $14^2=196=200-4$,

∴ $\langle14^{2000}\rangle=\langle4^{1000}\rangle=\langle1024^{200}\rangle$

$=\langle24^{200}\rangle=\langle576^{100}\rangle$.

而$\langle76^n\rangle=76$ (n为正整数),

$\langle576^{100}\rangle=76$, ∴ 1986^{2000}的末两位数是76.

三、解：设分为S_1, S_2, S_3. 若有三顶点或两对角顶点属于同一个S，由于两对角顶点的距离为$\sqrt{2}>\frac{\sqrt{65}}{8}$，结论显然成立. 如若不然，由抽屉原则可知，必有两相邻顶点属于同一个S，不妨设A、$B\in S_1$.

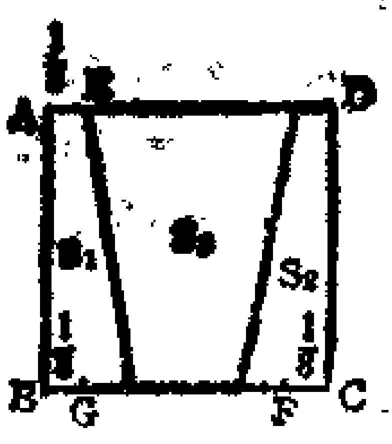
(1) 若C、$D\in S_2$，如图，取E、F、G、M. 若E、F中有一点属于S_1或S_2，结论也显然成立；否则E、$F\in S_3$,

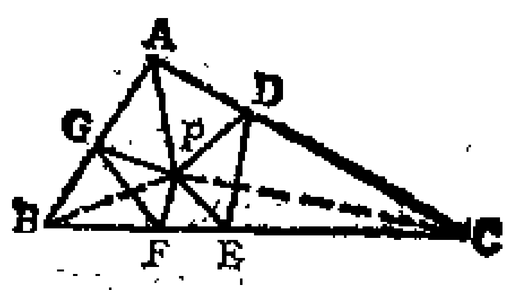
此时，$EF = \sqrt{1+\left(\frac{6}{8}\right)^2} > \frac{\sqrt{65}}{8}$，结论仍成立。

(2) 若$C\in S_2$，$D\in S_3$。这时当$E\in S_1$时，则$BE=\frac{\sqrt{65}}{8}$；当$E\in S_2$时，则$CE=\frac{\sqrt{65}}{8}$。当$E\in S_3$时，① 如$G\in S_1$，则$AG=\frac{\sqrt{65}}{8}$，②如$G\in S_3$则$GD>\frac{\sqrt{65}}{8}$，③如$G\in S_2$，则有

$$\begin{cases} M\in S_1,\ MA>\frac{\sqrt{65}}{8} \\ M\in S_2,\ MG>\frac{\sqrt{65}}{8} \\ M\in S_3,\ ME>\frac{\sqrt{65}}{8} \end{cases}$$

证毕。





四、解：设$\triangle ABC$是直角或钝角三角形，$\angle A\geqslant 90^\circ$，$\angle B\geqslant\angle C$。如图，$P$为$\triangle ABC$的内心。

在AC上取一点D，使$45^\circ<\angle ADP<45^\circ+\frac{1}{2}\angle C$。并取$AG=AD$，$BF=BG$，$CE=CD$，连结$GP$、$PE$、$PF$、

PD。将$\triangle ABC$分成七个小三角形，它们是锐角三角形，证明如下：

$\because$ P是内心，$AG=AD\Rightarrow\triangle AGP\cong\triangle APD\Rightarrow PG=PD$，同理有$PD=PE$和$PG=PF$。

因此，上述七个小三角形中，除$\triangle APD$和$\triangle APG$外，其余五个都是等腰三角形。

令$\theta=\angle ADP$，易证：$\angle AGP=\angle PFE=\angle PEF=\theta$。

又 $\angle APD=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A-\theta<180^\circ-45^\circ-45^\circ=90^\circ$。

$\angle DPE=360^\circ-\angle C-2(180^\circ-\theta)=2\theta-\angle C<90^\circ$。

$\angle FPG=360^\circ-\angle B-2(180^\circ-\theta)\leqslant 2\theta-\angle C<90^\circ$。

$\angle EPF=180^\circ-2\theta<90^\circ$。

由此可得，这七个小三角形都是锐角三角形。

五、解：设三角形的三个内角为α、β、γ，且

$$\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma，则\begin{cases}\alpha-\gamma=24^\circ & ①\\ \alpha+\beta+\gamma=180^\circ & ②\end{cases}$$

①＋②得 $2\alpha+\beta=204^\circ$，$\therefore 3\alpha\geqslant 204^\circ$，$\alpha\geqslant 68^\circ$。

$\alpha+\beta\leqslant 2\alpha+\beta-68^\circ=204^\circ-68^\circ=136^\circ$。

②－①得 $\beta+2\gamma=156^\circ$，$\therefore 3\gamma\leqslant 156^\circ$，$\gamma\leqslant 52^\circ$。

$\therefore$ $\beta+\gamma+52^\circ\geqslant\beta+2\gamma=156^\circ$，

$\therefore$ $\beta+\gamma\geqslant 104^\circ$，

$\therefore$ $104^\circ\leqslant\beta+\gamma\leqslant n\leqslant\alpha+\beta\leqslant 136^\circ$。

1987年南昌市初中数学竞赛

一、填空

1. 解：$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-(\sqrt{a^2+b^2+ab}\ )^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$。

$$x^{\cos C}=\sqrt{2}\Rightarrow x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

2. 解：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$

$$=\frac{6}{\sin B},$$

∴ $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow B=60^\circ$或$120^\circ\Rightarrow C=90^\circ$或$30^\circ$，

∴ $c=4\sqrt{2}$或$2\sqrt{3}$。

3. 解：$\begin{cases}2x-5>3-2x\\3x-6>4x-9,\end{cases}$ $\begin{cases}x>2\\x<3,\end{cases}$ ∴ $2<x<3$。

4. 解：$x+2y=1\Rightarrow x=1-2y$，
$f(y)=3y^2+x=3y^2-2y+1$。

当 $y=\dfrac{1}{3}$时，$f(y)$有最小值$\dfrac{2}{3}$。

∴ $x+3y^2$的最小值为$\dfrac{2}{3}$。

5. 解：当$p=q$时，方程有无数解；

当 $p\neq q$ 时，$x-p=-x+q$，∴ $x=\dfrac{p+q}{2}$。

6. 解：$\begin{cases}\sqrt{7}=2+a & (1)\\\dfrac{1}{a}=1+b & (2)\end{cases}$ (a、b为正的纯小数)

由(1)，$a=\sqrt{7}-2$。代入②，有

$$b=\frac{\sqrt{7}-1}{3}.$$

7．解：设$AB=b$，$BC=a$，则$b=x+a(x\in N)$。

$\because\ \begin{cases}b=a+x\\a^2+b^2=6,\end{cases}\quad\therefore\ 2a^2+2ax+x^2-6=0,$

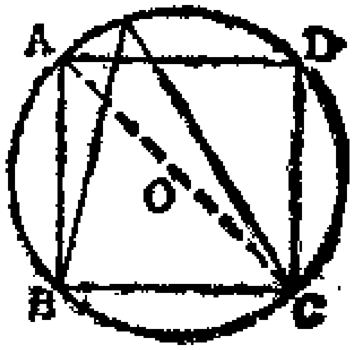
$\therefore\ x=\dfrac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4(2a^2-6)}}{2}=-a\pm\sqrt{6-a^2}.$

$\because\ 2\leqslant x\leqslant 3$　$x=2$ 时，$a=-1+\sqrt{2}$（舍负值），

$x=3$时，$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{2}<0$（舍）。

$\therefore\ a=\sqrt{2}-1$，$b=\sqrt{2}+1$。此即为两直角边长。

8　解：连接AC，AC必为直径。



$\therefore\ AC\cdot PB=AP\cdot BC+AB\cdot PC,$

即　$\sqrt{2}a\cdot PB=a\cdot AP+a\cdot PC,$

$$\frac{PA+PC}{PB}=\sqrt{2}.$$

二、选择题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	B	D	B	C	C

1．解：$\begin{cases}a-2b=0\\b^2+2b+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}\Rightarrow a-b=-1.$

2．解：研究$2>-2$，排除(A)、(C)；

研究$2>1$，排除(B)；

$\therefore\ a^2=b^2$ 有可能成立，$\dfrac{1}{a}$与$\dfrac{1}{b}$的大小不能确定。

3. 解：$\begin{cases} x_1+x_2=-2k \\ x_1x_2=2J-1. \end{cases}$

∵ α为整数，又$\alpha+\beta=-2k$.

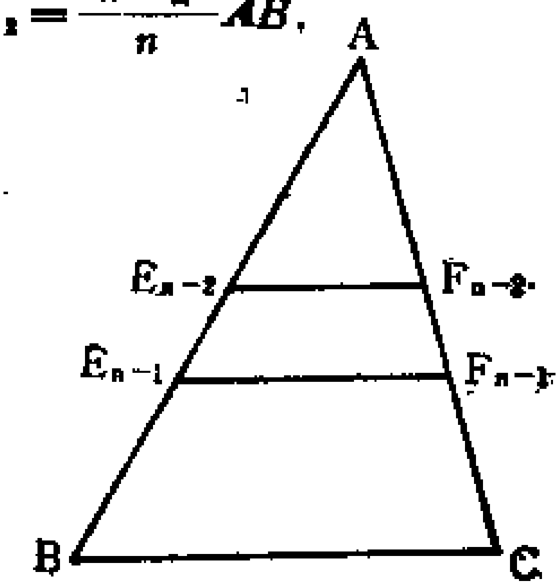
$-2k$为整数，故β必为整数.

4. 解：$4*(4*4)=4*\left(\dfrac{4\times 4}{4+4}\right)=4*2=\dfrac{4\times 2}{4+2}=\dfrac{4}{3}$.

5. 解：∵ $|a-\lg b|=a+\lg b$，∴ $a>0$，$b=1$，

∴ $a=ab$.

三、解：如图，$\begin{cases} AE_{n-1}=\dfrac{n-1}{n}AB \\ AE_{n-2}=\dfrac{n-2}{n}AB, \end{cases}$



∴ $S_{\triangle AE_{n-1}F_{n-1}}$

$=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2 S_{\triangle ABC}$,

$S_{\triangle AE_{n-2}F_{n-2}}$

$=\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^2\cdot S_{\triangle ABC}$,

∴ $S_{四边形E_{n-2}E_{n-1}F_{n-1}F_{n-2}}$

$=\left[\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2-\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^2\right]S_{\triangle ABC}$.

由条件得 $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2-\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^2=\dfrac{1}{4}$,

∴ $n=6$.

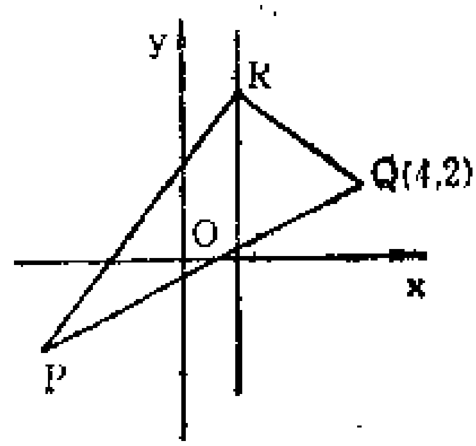
四、解：1　设t_1、t_2、t_3分别表示车开始载丙，回头去载乙，载乙达目的地三段的时间，由已知有

$$\begin{cases} 25t_1-25t_2+25t_3=100 \\ 5t_1+5t_2+25t_3=100 \\ 25t_1+5t_2+5t_3=100 \end{cases}$$

可解得　$t_1=3$，$t_2=2$，$t_3=3$。

∴　$t_1+t_2+t_3=8$。

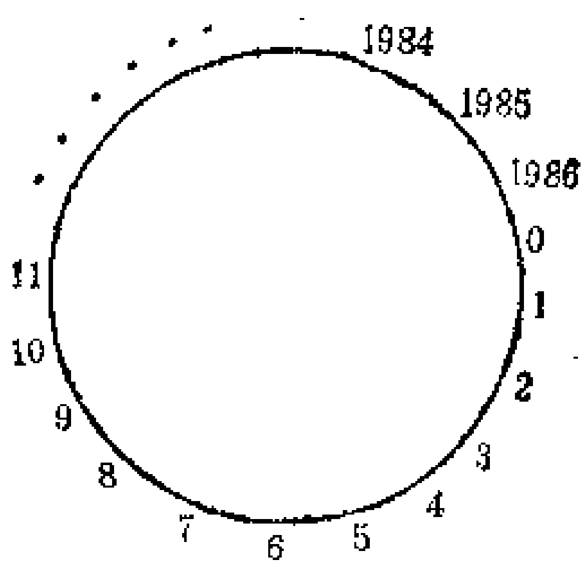
2　如图，R位于过（1，0）且垂直于x轴的直线上，$PR+RQ\geqslant PQ$，等号当点R在线段PQ上时成立。直线PQ：$y=kx+n$经过P、Q有$\begin{cases} -2=-k+n \\ 2=4k+n. \end{cases}$



∴　$k=\dfrac{4}{5}$，$n=-\dfrac{6}{5}$，PQ方程为$y=\dfrac{4}{5}x-\dfrac{6}{5}$。

$x=1$，$y=-\dfrac{2}{5}$，$m=-\dfrac{2}{5}$。

五，证明：任意1987个连续整数除以1987所得的余数总是连续变化的，即不论从哪一个数开始，总是沿着如下的顺序走完一圈：



由此可看出，有且仅有一个余数为0，所以有且仅有一

个数能被1987整除。

六、解：每剪一次，纸片的块数比这次前的块数增加了6块，所以剪了 n 次后应该有 $1+6n$ 块纸片。$6n+1=1987\Rightarrow n=331$。所以剪到第331次后总块数正好是1987。

1987年桂林市初二数学竞赛

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	C	E	A	B	D

1. 解：$\because -\sqrt[3]{343}=-7$，易知其他 2 个数不是无理数，$\therefore$ 仅有 $-\pi$ 为无理数。

2. 解：研究(C)，若 $b\neq0$，即 $a>|b|>0$，
则由不等式的性质得 $a^2>|b|^2$ 即 $a^2>b^2$。
若 $b=0$，即 $a>|b|=0$，则 $a^2>b^2$ 显然成立。
(此题也可用举反例的方法排除 A、B、D、E。)

3. 解：设此数为 x，由题意有 $x=\frac{4}{x}$，$x^2=4$。

则 $x=\pm2$。

4. 解：根据多项式的除法：

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -3 & a & 7 & b & 1+1-2 \\
2 & 2 & -4 & & & \overline{2-5-3} \\
\hline
 & -5 & a+4 & 7 & & \\
 & -5 & -5 & 10 & & \\
\hline
 & & a+9 & -3 & b & \\
 & & -3 & -3 & 6 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

可知，若能整除，$a+9+3=0$，$b-6=0$。

故 $a=-12$，$b=6$，$\dfrac{a}{b}=-2$。

5．解：不难看出，此三角形一定为等腰直角三角形，

故 $s=\dfrac{1}{2}\times1\times1=0.5$。

6．解：设 $a^2+b^2+c^2=n$ $(a>b>c>0)$，

则 $I_1=\sqrt{n+2ac}>0$，$I_2=\sqrt{n+2bc}>0$，$I_3=\sqrt{n+2ab}>0$。

$\because$ $a>b>c>0$，$\therefore$ $ab>bc$，$ac>bc$，

则 $I_1>I_2>0$，$I_3>I_2>0$。

故在 I_1I_2，I_1I_3，I_2I_3，I_1^2，I_3^2 中最小的一个是 I_2^2。

二、填空

1．解：$\sqrt{18+8\sqrt{2}}=\sqrt{16+8\sqrt{2}+2}$

$=\sqrt{(4+\sqrt{2})^2}=\underline{4+\sqrt{2}}$。

2．解：$x^6-7x^4-26x^2+72=(x^2)^3-7(x^2)^2$

$-26x^2+72$，

又 $2^3-7\times2^2-26\times2+72=8-28-52+72=0$，

$\therefore$ $x^6-7x^4-26x^2+72$ 分解后有一项 x^2-2。

易得：$(x^6-7x^4-26x^2+72)\div(x^2-2)=x^4-5x^2-36$，

$x^4-5x^2-36=(x^2-9)(x^2+4)$，

$\therefore\quad x^6-7x^4-26x^2+72=(x^2+4)(x+\sqrt{2})$

$\cdot(x-\sqrt{2})(x+3)(x-3)$。

3．解：$\because \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

$\therefore\quad \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{101}-\sqrt{100}$

$=\sqrt{101}-1$。

4．解：设矩形短边长为 x，则 $x^2+(x+2)^2=16$，

化简得 $x^2+2x-6=0$，即 $x(x+2)=6$。

矩形的面积为 6cm^2。

5．解：方程变为 $|2x-y|+\sqrt{y+2z}+(z-2)^2=0$，

则 $2x=y$，$y=-2z$，$z=2$，

即得 $y=-4$，$x=-2$。

故 $(x-y)^2=2^2=4$。

6．解：方程化为 $x^4+10x^3+35x^2+50x+25=0$，

即 $(x^2+5x+5)^2=0$，$x^2+5x+5=0$，

故 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$。

三、解：设拖拉机的速度为 x 公里/小时，则汽车的速度为$(x+20)$公里/小时，依题意有

$$\frac{12}{x+20}=\frac{9}{x}-\frac{1}{2},$$

$\therefore\quad x^2+26x-360=0$，$x_1=10$，$x_2=-36$（舍去）。

$10+20=30$，$\therefore$ 拖拉机的速度为10公里/小时，汽车的

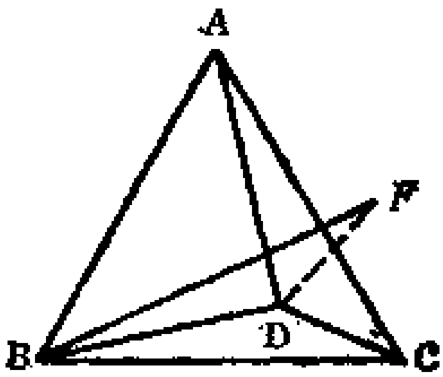
速度为30公里/小时。

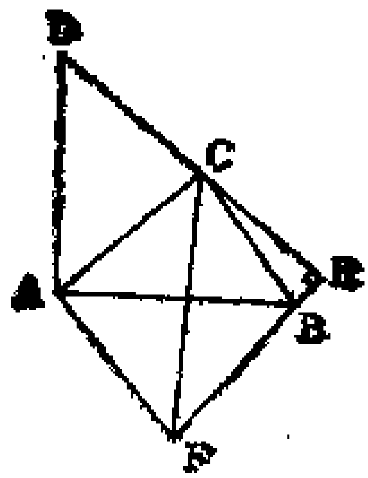
四、解：连结 CD。∵ $\triangle ACD \cong \triangle BCD$，

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\angle C = 30^\circ.$$

$$\left.\begin{array}{l} BF = AB = BC \\ BC\text{平分}\angle FBC \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BFD \cong \triangle BCD,$$

故 $\qquad \angle BFD = \angle BCD = 30^\circ$.





五、证：如图，

$$\left.\begin{array}{l} AD \perp AB \Rightarrow \angle DAC + \angle CAB = 90^\circ \\ AF \perp AC \Rightarrow \angle BAF + \angle CAB = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle DAC = \angle BAF.$$

$$\left.\begin{array}{l} AF \perp AC \\ \angle ACB = Rt\angle \end{array}\right\} \Rightarrow CB \parallel AF \Rightarrow \angle CBE = \angle AFB.$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle DCA + \angle ECB = 90^\circ \\ BE \perp DC \Rightarrow \angle CBE + \angle ECB = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle DCA = \angle CBE = \angle AFB.$$

又知 $AD = AB$，∴ $\triangle ACD \cong \triangle AFB$，

$$\therefore \quad AC = AF.$$

$\triangle CAF$ 是等腰直角三角形，∴ $\angle ACF = 45^\circ$

又 $\angle FCB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$，∴ $\angle ACF = \angle FCB$。故 CF 平分 $\angle ACB$。

六、解：当$n=4k(k=1,2,3,\cdots)$时，$1981^n+1982^n+1983^n+1984^n$不能被10整除，理由如下：

1981^n的个位数，不管n为何自然数，恒为1。

1982^n的个位数，当n分别取1，2，3，4时，依次是2，4，8，6。以后呈周期性的重复，周期为4。

同样，1983^n的个位数呈3，9，7，1周期为4的周期性重复。

1984^n的个位数，当n分别取1，2时，依次是4，6，以后呈周期性重复，周期为2。

因此，只有当1981^n的个位数是1，1982^n的个位数取6，1983^n的个位数取1，1984^n的个位数取6时，其个位数字之和为14，不能被10整除。其它情况都能被10整除。故当$n=4k(k=1,2,3,\cdots)$时，和数$1981^n+1982^n+1983^n+1984^n$才不能被10整除。

1987年宝鸡市初中数学竞赛

第一试

一、填空

1．解：$\because$ $x^2-2ax+a^2+b$的二次项系数大于零，只须$\triangle=4a^2-4(a^2+b)\leqslant 0$，即$b\geqslant 0$。

2．解：显然$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}>\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$，$\therefore y>0$，故$y^2=x+4\sqrt{x-4}-2\sqrt{(x+4\sqrt{x-4})(x-4\sqrt{x-4})}+x-4\sqrt{x-4}$，

$y^2=2x-2|x-8|$。函数的定义域为$x\geqslant 4$。

故当 $x\geqslant 8$ 时，$y^2=2x-2(x-8)=16$，$\therefore\ y=4$。

当 $4\leqslant x<8$ 时，$y^2=2x-2(8-x)=4x-16$，

$\therefore\ y=\sqrt{4x-16}$。

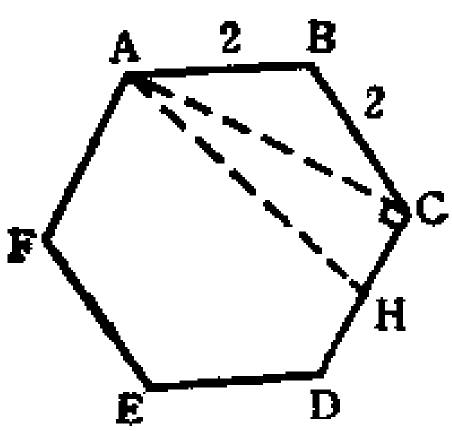
由 $4\leqslant x<8$ 可推得 $0\leqslant\sqrt{4x-16}<4$。即 $0\leqslant y<4$。

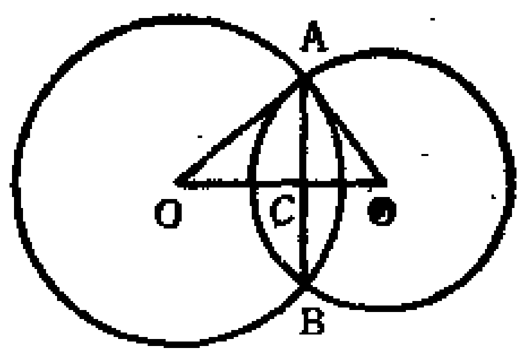
综合以上两种情况，可知 $0\leqslant y\leqslant 4$。

3． 解：如图，设某人从顶点A出发，经B、C两点到H点，共走 5 米，显然 H 是 CD 的中点，易证 $\angle ACH=90^\circ$。在$\triangle ABC$中，由余弦定理得

$$AC^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120^\circ=12.$$

在 $Rt\triangle ACH$ 中，$AH^2=AC^2+1^2=12+1=13$，$\therefore AH=\sqrt{13}$。



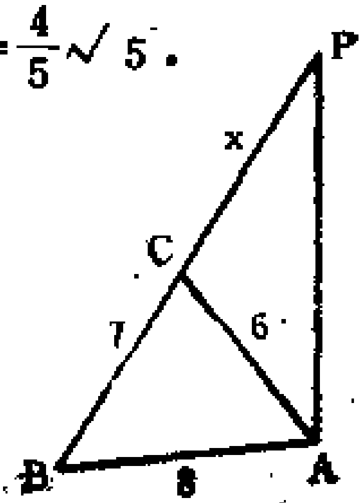


4． 解：如图，连心线 OO' 垂直且平分公共弦 AB。又易知$OO'=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，故 $AO\cdot AO'=OO'\cdot AC$，

$$\therefore\ AC=\frac{2\times1}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}，\ AB=2AC=\frac{4}{5}\sqrt{5}.$$

5． 解：如图，$\because\triangle PAB\backsim\triangle PCA$，

$$\therefore\ \frac{AB}{AC}=\frac{PC+7}{PA}.\ 设\ AC=x.$$



$$\because\quad \cos B=\frac{8^2+7^2-6^2}{2\times8\times7}=\frac{11}{16},$$

$\therefore \quad PA^2=(7+x)^2+8^2-2(7+x)\cdot 8\cdot \dfrac{11}{16}$

$\quad\quad =x^2+3x+36$。

由此得$\dfrac{(x+7)^2}{x^2+3x+36}=\dfrac{16}{9}$，即 $7x^2-78x+135=0$。解得$x=9\left(舍去了\ x=\dfrac{15}{7}\right)$。

6．解：由$CD\parallel AB$易证 $AE=BE$，$CE=DE$。设 $AE=BE=x$，$CE=DE=y$。连结 AD，则 $\angle ADB=Rt\angle$。在$Rt\triangle ADE$中，$\cos\alpha=\dfrac{y}{x}$ · $\dfrac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABE}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}y^2\sin(180^\circ-\alpha)}{\frac{1}{2}x^2\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{y^2\sin\alpha}{x^2\sin\alpha}=\left(\frac{y}{x}\right)^2=\cos^2\alpha。$$

7．解：整理方程$\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{2x+a}{x(x+2)}=0$ ①

得 $2x^2-2x+4+a=0$ ②

方程①只有一个实数根的可能是：

（1） 方程②有相等的两实根；

（2） 方程②有两个不等的实根，但只是有一个根为0；

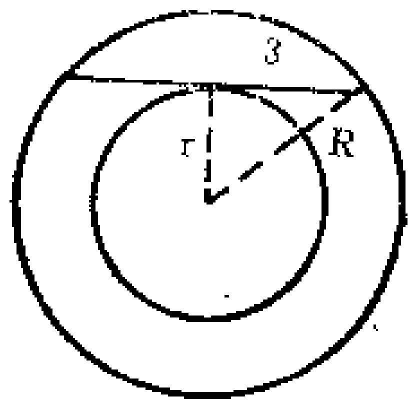
（3） 方程②有两个不等实根，但是有一个根为2。

由上述三种情况分别得出 a 的值为$-\dfrac{7}{2}$、-4、-8，和它们对应的原方程的根分别是$\dfrac{1}{2}$、1、-1。

二、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	A	C	A	D	D

1. 解：最小的三位数100的9倍是900，111的9倍是999。从100到111之间的三位数的9倍都不超过999。故有12对这样的三位数。



2. 解：如图，$R^2-r^2=9$，则$\pi R^2-\pi r^2=9\pi$。圆环的面积为9π。

3. 解：这些字母第一节13个字母是这样排列的：*abccbadcbabcd*。接着的每节又按此规律重排一次、因此前100个字母共可排7节并余下9个字母，按此规律第九个字母应是b。

4. 解：设大半圆弧的直径是$2R$，则小半圆弧的直径为$\frac{2R}{n}$，因此大半圆弧长是$S_1=\pi R$，小半圆弧的长是$\frac{\pi R}{n}$，

n个小半圆弧的长的和$S_2=n\cdot\frac{\pi R}{n}=\pi R$。

5. 解：$a=\frac{1}{4}=\log_9\sqrt{3}=\log_8\sqrt[4]{8}$。

$\because\ \frac{3}{2}<\sqrt{3}$，$\therefore\ \log_9\frac{3}{2}<\log_9\sqrt{3}$，即$b<a$。

$\because\ \sqrt{3}=\sqrt[4]{9}>\sqrt[4]{8}$，$\therefore\ \log_8\sqrt{3}>\log_8\sqrt[4]{8}$，即$c>a$，$\therefore\ b<a<c$。

6. 解：$\because\ A>3B$，$2B>C$，$\therefore\ A+2B>3B+C$，即$A-B-C>0$。又$A+B+C=180^\circ$，$\therefore 2A>180^\circ$，$A>90^\circ$。

7．解：设男队员有 x 人，女队员 y 人。

$$\begin{cases} x+y=23 \\ x-y=3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x=13 \\ y=10 \end{cases}.$$

8．解一：根据题设条件可推出，有4天上午晴，下午雨；2天上、下午都晴，3天上午雨，下午晴，共计9天。

解二：设有 x 天，则有 $2x$ 个上下午．由已知：$2x=7+5+6\Rightarrow 2x=18\Rightarrow x=9$，共计9天。

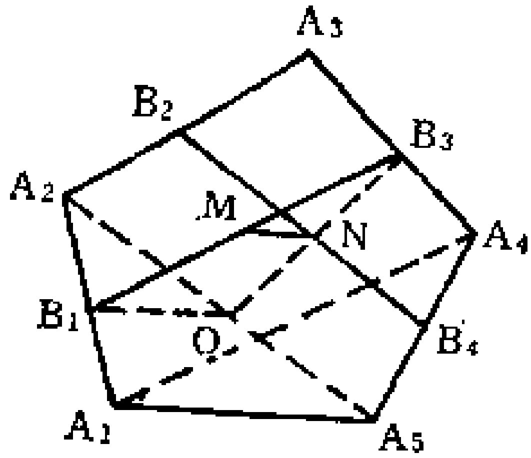
第二试

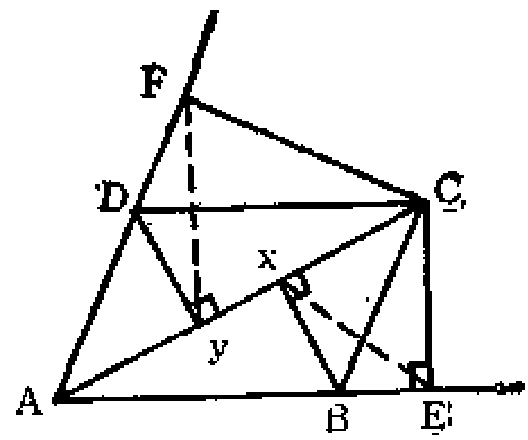
一、解：1．欲使原方程有实数根，只须 $\triangle\geqslant 0$，即 $3^2-4(m+1)\geqslant 0$，解得 $m\leqslant\frac{5}{4}$。

2．$x_1^2+x_2^2=\frac{1}{3}$，即 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{1}{3}$．

$\frac{9}{(m+1)^2}-2\cdot\frac{1}{m+1}=\frac{1}{3}$，$\therefore m_1=-8$，$m_2=2$(舍去)，$\therefore m=-8$。

二、证：如图，连结 A_2A_5，A_1A_4，设 C 为 A_2A_5 的中点．连结 B_1O，则 $B_1O \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}A_1A_4$，即 $B_1O=\frac{1}{2}a$。再连结 B_3N，因为四边形 $A_2A_3A_4A_5$ 的四边中点所连成的四边形 $B_2B_3B_4O$ 为平行四边形，故其对角线 B_3O 和 B_2B_4 互相平分，即 B_3N 必过 B_2B_4 的中点 N，且 $B_3N=NO$，$\therefore MN \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}B_1O$，$\therefore MN=\frac{1}{2}B_1O=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{4}$。





三、证：如图，作 $Bx \perp AC$，连结 xE。又 $CE \perp AE$，

∴ B，E，C，x 四点共圆。据割线定理得

$$AB \cdot AE = AC \cdot Ax \qquad ①$$

同理 $AD \cdot AF = AC \cdot Ay$。

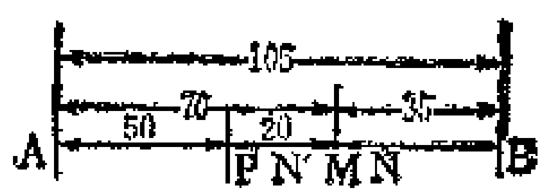
由四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

可推得 $\triangle ADy \cong \triangle BCx$，∴ $Ay = Cx$，

$$\therefore \quad AD \cdot AF = AC \cdot Cx \qquad ②$$

①＋②得 $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC(Ax + Cx) = AC^2$。

四、解：依题意有示意图，设第一、二、三人的速度分别为 v_1，v_2，v_3 市里/小时。相遇时，第一人走的路程为



$1\frac{3}{4} \times 40 = 70$ 里，第二人走了35里，∴ $v_2 = 35 \div 1\frac{3}{4} = 20$ 市里/小时。

设第一个人与第三个人相遇于 N 点，$MN = 40 \times \frac{3}{60} = 2$ 里。当第一人走到 N 时，第二人走到 N'，$MN' = 20 \times \frac{3}{60} = 1$ 里。

第一人与第二人第二次相遇于 P 点，$AP = 20 \times \frac{105}{20+22}$

$=50$里，$MP=AM-AP=70-50=20$ 里，$\therefore PN'=19$ 里，$PN=22$里。

第二人从N'到P与第三人从N到P的时间相等，故$\frac{19}{20}=\frac{22}{v_3}$，$v_3=\frac{20\times22}{19}=\frac{440}{19}$市里/小时。

五、证：见1987年沈阳市初中数学竞赛试题解答五、第1题。

1985年全国初中数学联赛

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	B	C	C	D	B

1． 解：因$ABCD$为圆内接四边形，对角必互补，故有$A+C=180°$，且A、C都不能为 0° 及180°，因此(1)式恒成立，(2)式恒不成立。同理，由 B、D 互补知(3)式恒成立，(4)式只有$B=D=90°$ 时成立，故总能成立的关系式的个数是两个。

2． 解：当 n 为奇数时，$\frac{1-(-1)^n}{2}=1$；

当 n 为偶数时，$\frac{1-(-1)^n}{2}=0$。

因此，当 n 为大于 1 的奇数时，

$p=n+n^2-1=$奇数；

当 n 为大于 1 的偶数时，

$p=n+1=$奇数。

故当 n 为大于 1 的整数时，

$p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$ 的值一定是奇数。

3、 解：由已知条件$PQ\parallel BD$，$BP=PC$，得$DQ=QC$。利用同底等高、等底同高或底增倍、高减半的两个三角形面积相等的性质，得

$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle DBP}=S_{\triangle DPC}=S_{\triangle QBC}=S_{\triangle ADQ}=S_{\triangle BDQ}$。

4． 解：$\because$ 在函数 $y=1-|x-x^2|$中$|x-x^2|\geqslant 0$，

$\therefore$ 函数值 $y\leqslant 1$，即$y=1-|x-x^2|$的图象在直线$y=1$的下方，而图1、图2、图4都至少有一段实线在$y=1$的上方。故应排除(A)、(B)、(D)。

另解，当$|x|$很大时，$x^2-x>1$。即

$y=1-|x-x^2|<0$。而图1、图2、图4 的实线部份都不具有这一性质，故应排除(A)、(B)、(D)。

5． 解：若$u=\frac{x+2}{4}$，则当 $x=2$ 时，$u=1$，$[u]=1$，

因而$y=4\left(\frac{3}{4}-\left[\frac{3}{4}\right]\right)=4\left(\frac{3}{4}-0\right)=3$，与题设当 $x=2$ 时，$y=2$矛盾，故应排除(A)。

若 $u=\frac{x+1}{4}$，则当 $x=3$ 时 $u=1$，$[u]=1$，因而

$y=4\left(\frac{3+1}{4}-\left[\frac{3+1}{4}\right]\right)=4(1-1)=0$ 与题设当 $x=3$ 时，$y=3$矛盾，故应排除 (B)。

若 $u=\frac{x}{4}$，则当$x=4$时$u=[u]=1$，因而，$y=4\Big(\frac{4+1}{4}$

$-\left[\dfrac{4+1}{4}\right]\right)=4\left(\dfrac{5}{4}-1\right)=1$ 与题设当$x=4$时，$y=0$矛盾，故应排除（C）。

由此可见，（D）成立。

另解：∵ 当$x=4$时，$y=0$，代入得

$$0=4\left(\frac{4+[u]}{4}-\left[\frac{4+[u]}{4}\right]\right),$$

$$\left[\frac{4+[u]}{4}\right]=\frac{4+[u]}{4},$$

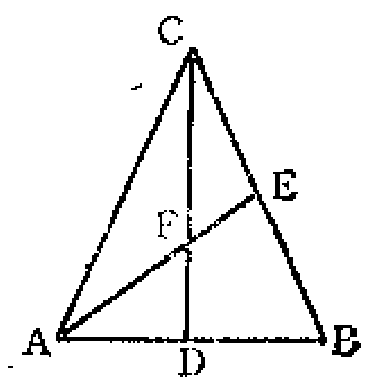
$$\therefore\quad \frac{4+[u]}{4}=1+\frac{[u]}{4}\text{为一整数,}$$

也就是说，$\dfrac{[u]}{4}$为一整数。

当 $u=\dfrac{x+2}{4}$时，$x=4$有$\dfrac{[u]}{4}=\dfrac{\left[\frac{3}{2}\right]}{4}=\dfrac{1}{4}$，故应排除（$A$），

当 $u=\dfrac{x+1}{4}$ 时，$x=4$有$\dfrac{[u]}{4}=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{5}{4}\right]=\dfrac{1}{4}$，故应排除（$B$），

当 $u=\dfrac{x}{4}$ 时，$x=4$有$\dfrac{[u]}{4}=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{4}{4}\right]=\dfrac{1}{4}$，故应排除（$C$）。



6．解：由已知条件，F是等腰三角形的重心，$CF=2FD$，$AF=2FE$。

（1）$L(c)=AB+BE+EF+FC+CA$,

$L(a)=AF+FC+CB+BA$,

$L(c)-L(a)=BE+EF-AF=BE$
$+EF-BF>0$，

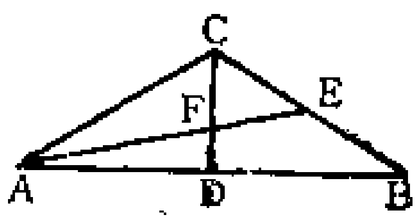
故 $L(c)>L(a)$成立。

（2） $L(b)=AC+CE+EB+BD+DF+FA$，

$L(c)-L(b)=AD+EF+FC-CE$
$-DF-FA=AD+EF+2FD$
$-CE-DF-2EF=AD+DF$
$-CE-EF$。

当$\triangle ABC$为等边三角形时，$AD=CE$，$DF=EF$，因此，$L(c)-L(b)=0$，故$L(b)<L(c)$不恒成立。

（3） $L(a)-L(b)=FC+DA$
$-AC-DF$
$=2DF+DA-AC$
$-DF=DF+DA-AC$。



当$\angle ACB=120°$时，设$AC=BC=1$，

则 $AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$CD=\dfrac{1}{2}$，$DF=\dfrac{1}{6}$，

$$L(a)-L(b)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{6}-1=\frac{3\sqrt{3}+1}{6}-1>0,$$

故$L(a)<L(b)$不恒成立。

综上知只有一个不等式成立。

二、填空题：

1．解：$\because$ $a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$，

$\therefore$ $a-c=4$。

令 $S=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$，

则 $2S=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2+4^2=30,$

故　$S=\frac{1}{2}\times30=\underline{15}$。

2. 解：设方程 $x^2-402x+k=0$ 的两个根分别为 x_1、x_2，则由题意和根与系数的关系得

$$\begin{cases} x_1+3=80x_2 & (1) \\ x_1+x_2=402 & (2) \\ x_1\cdot x_2=k & (3) \end{cases}$$

由(1)、(2)解得　$x_1=397$，$x_2=5$。

由(3)得 $k=397\times5=\underline{1985}$。

3. 解：设购甲、乙、丙每件各需 x、y、z 元，根据题意得

$$\begin{cases} 3x+7y+z=3.15 & (1) \\ 4x+10y+z=4.20 & (2) \end{cases}$$

( )—(2)得　　$x+3y=1.05$　　(3)

(1 —(3)×2得　$x+y+z=1.05$(元)。

故购甲、乙、丙各1件共需$\underline{1.05}$元。

4. 解：原不等式可变形为

$$(6x+a)(7x-a)<0.$$

当$\underline{a<0}$时，$\frac{a}{7}<-\frac{a}{6}$，

故原不等式的解为$\underline{\frac{a}{7}<x<-\frac{a}{6}}$，

当$\underline{a>0}$时，$-\frac{a}{6}<\frac{a}{7}$，

故原不等式的解为$\underline{-\frac{a}{6}<x<\frac{a}{7}}$；

[illegible]$=0$时，原不等式为$42x^2<0$，故不等式[illegible]。

5、解：根据题意，x^2只能通过分式的运算[illegible]，也就是要从x^2着手，通过一系列的变换得出所需的表达式，因此有

$$x^2=x^2-x+x=x(x-1)+x$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{x(x-1)}}+x=\frac{1}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}+x.$$

这个式子恰好是经过题目所限制的运算法，则经过六步可得出x^2。

同理可得 $x^2=x(x+1)-x=\dfrac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-x$。

除了这两个式子外，没有第三个式子可依题目的要求得出x^2。

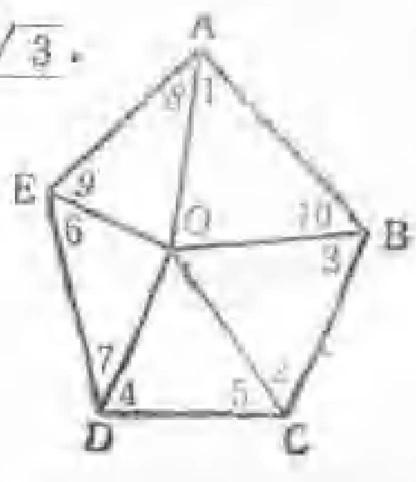
故计算的表达式为

$$\underline{\frac{1}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}+x \text{ 或 } \frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-x}.$$

6、解：由于在定义运算符号 * 时，是分段定义的，所以在解方程时也应分段求解。由题意：

当$3\geqslant x$时，$3*x=x^3=27$，故$x=\underline{3}$；

当$3<x$时，$3*x=x^2=27$，故$x=\underline{3\sqrt{3}}$。



三、证明：由正弦定理及已知条件得：

$$\frac{OA}{\sin\angle 10}=\frac{OB}{\sin\angle 1}=\frac{OB}{\sin\angle 2}$$

$$=\frac{OC}{\sin\angle 3}=\frac{OC}{\sin\angle 4}=\frac{OD}{\sin\angle 5}$$

$$\frac{OD}{\sin\angle ?} = \frac{OE}{\sin\angle ?} = \frac{OE}{\sin\angle ?} = \frac{OA}{\sin\angle 9}.$$

从而 $\sin\angle 10=\sin\angle 9$，故 $\angle 9$ 与 $\angle 10$ 相等或互补。

另证：由于对定线段张定角的点的轨迹是以定线段为弦的张角等于定角的两个相等的弓形弧。所以由 $\angle 1=\angle 2$ 得：

$\triangle OAB$ 的外接圆与 $\triangle OCB$ 的外接圆相等；

同理，$\triangle OCB$ 的外接圆与 $\triangle OCD$ 的外接圆相等；

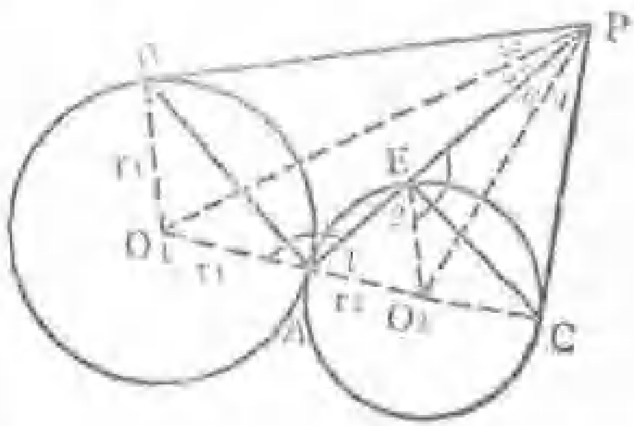
$\triangle OCD$ 的外接圆与 $\triangle OED$ 的外接圆相等；

$\triangle ODE$ 的外接圆与 $\triangle OAE$ 的外接圆相等；

于是，$\triangle OAB$ 的外接圆与 $\triangle OAE$ 的外接圆相等。

从而，$\angle 9$ 与 $\angle 10$ 相等或互补。

四、证明：连 O_1A，O_1B，PO_1，PO_2，O_2A，O_2C，则 O_1、A、O_2 三点共线。



$\because \quad PB:PC=r_1:r_2$，

$\therefore \quad Rt\triangle PBO_1 \backsim Rt\triangle PCO_2$，

$\therefore \quad \angle 3=\angle 4$，$PO_1:PO_2=r_1:r_2$

$\qquad =O_1A:O_2A$，

于是 PA 为 $\angle O_1PO_2$ 的平分线，即 $\angle 5=\angle 6$。

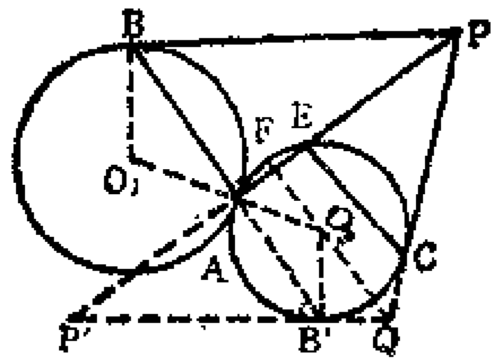
连 O_2E，由 $\angle 1=\angle 2$ 知 $\angle O_1AP=\angle O_2EP$，$\quad \therefore\ O_1AP$

$\backsim \triangle O_2EP$，$\therefore PA:PE=r_1:r_2$，即$PA:PE=PB:PC$。

又由 $\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$ 知

$$\angle BPA=\angle CPE,$$

$$\therefore \triangle PAB \backsim \triangle PEC.$$



另证：延长BA交$\odot O_2$于B'。过B'作直线平行于PB交PA延长线于P'，交PC于Q。

连O_1B，O_1A，O_2A，O_2B'，则由O_1、A、O_2三点共线知

$\angle O_1AB=\angle O_2AB'$ $\therefore \angle O_1BA=\angle O_2B'A$，从而$O_1B \parallel O_2B'$。

又$\because BP \parallel B'P'$，$O_1B \perp PB$，

$\therefore O_2B' \perp P'Q$，即$P'Q$为$\odot O_2$的切线，$B'$为切点。

$\because PB \parallel P'B'$，$\triangle ABP \backsim \triangle AB'P'$，$\therefore PB:P'B'=AB:AB'$。

由$\triangle AO_1B \backsim \triangle AO_2B'$知$AB:AB'=r_1:r_2$。

又 $PB:PC=r_1:r_2$，$\therefore PB:P'B'=PB:PC$，

从而 $P'B'=PC$。又 $QC=QB'$，$\therefore QP'=QP$。

设QO_2交PA于F，则FQ为$\angle Q$平分线，$\therefore O_2F \perp AE$，$AF=FE$，从而$P'F=FP$，$\therefore P'A=PE$。

又$\angle B'P'A=\angle CPE$，$P'B'=PC$，$\therefore \triangle P'AB' \cong PEC$，

$$\therefore \triangle PEC \backsim \triangle PAB.$$

五、解：长、宽、高分别为正整数m、n、r（$m \leqslant n \leqslant r$）的长方体，表面涂上红色后切成棱长为1的正方体后，共有$m \cdot n \cdot r$个。

（1） 若$m=1$，$n=2$，此时所给长方体切成r个棱长为1的正方体后，每个正方体至少有三面带红色。与本题无关。

（2） 若$m=1$，$2<n \leqslant r$，此时所给长方体切成r个棱

长为1的正方体后，每个正方体至少有二面涂红色，其中二面带红色的正方体的个数为$(n-2)(r-2)$。

由题意知：

$$0+(n-2)(r-2)-0=1985,$$

$$\therefore\quad (n-2)(r-2)=1985.$$

当$(n-2)(r-2)=1985=5\times397$时，

$$n-2=5,\ r-2=397,$$

$$\therefore\quad n=7,\ r=399.$$

当$(n-2)(r-2)=1985=1\times1985$时，

$$n-2=1,\ r-2=1985,$$

$$\therefore\quad n=3,\ r=1987.$$

（3） $m\geqslant2$，此时所给长方体切成r个棱长为1的正方体后，只有下面四种类型：

不带红色的正方体个数为

$$(m-2)(n-2)(r-2);$$

一面带红色的正方体个数为

$$2(m-2)(n-2)+2(m-2)(r-2)+2(n-2)(r-2);$$

两面带红色的正方体个数为

$$4(m-2)+4(n-2)+4(r-2).$$

令 $m-2=a,\ n-2=b,\ r-2=c,$

根据题意有

$$abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)=1985,$$

$$(a-2)(b-2)(c-2)=1985-8=1977.$$

即 $$(m-4)(n-4)(r-4)=1977.$$

$m,\ n,\ r$为正整数，且$2\leqslant m\leqslant n\leqslant r$。

讨论：

(A) 当$1977=1\times3\times659$时，

则　$m-4=1$，$n-4=3$，$r-4=659$，

故　$m=5$，$n=7$，$r=663$；

(B)　当 $1977=1\times1\times1977$时，

则　$m-4=1$，$n-4=1$，$r-4=1977$，

故　$m=5$，$n=5$，$r=1981$；

(C)　当 $1977=(-1)\times(-1)\times1977$时，

则　$m-4=-1$，$n-4=-1$，$r-4=1977$，

故　$m=3$，$n=3$，$r=1981$。

综上所述，m，n，r的值共有五组：

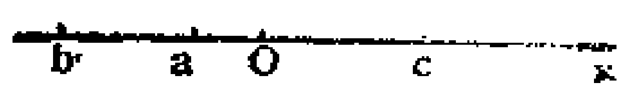
$$\begin{cases} m_1=1, & n_1=7, & r_1=399; \\ m_2=1, & n_2=3, & r_2=1987; \\ m_3=5, & n_3=7, & r_3=663; \\ m_4=5, & n_4=5, & r_4=1981; \\ m_5=3, & n_5=3, & r_5=1981. \end{cases}$$

1985年全国部分市(地)、县初中数学通讯赛

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	C	D	C	E	A	B	D	C

1．解：由图知$b<a<o<c$，则$|a|-|a+b|+|c-a|+|b-c|=-a+a+b+c-a+(c-b)=2c-a$。



2．解：设$\frac{x}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{7}=k$，

则　$x=3k$，$y=-4k$，$z=7k$，

$\therefore\quad \dfrac{3x+y+z}{y}=\dfrac{9k-4k+7k}{-4k}=\dfrac{12k}{-4k}=-3$。

3．解：设甲地到乙地的路长为s，平地速度为v，则上山速度为$\frac{1}{2}v$，下山速度为$2v$，因此，走平路所化时间为

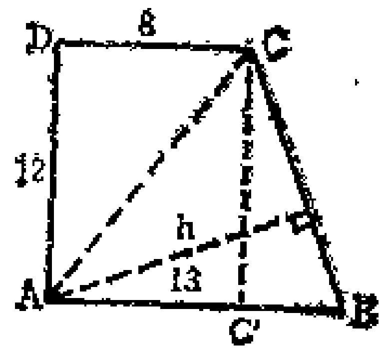
$t_1=\dfrac{s}{v}$。

走坡路所化时间为 $t_2=\dfrac{\frac{1}{3}s}{\frac{1}{2}v}+\dfrac{\frac{2}{3}s}{2v}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{s}{v}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{s}{v}=\dfrac{s}{v}$，

故　$t_1=t_2$。

4．解：由题意得$y=2(x+1)-2=2x$。

5．解：如图，过C作$CC'\perp AB$，



则　$BC'=13-8=5$，

$\therefore\quad BC=\sqrt{12^2+5^2}=13$。

设A到BC距离为h，连结AC。

$\because\quad S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=S_{梯形ABCD}$，

$\therefore\quad \frac{1}{2}\times 8\times 12+\frac{1}{2}\times h\times 13=\frac{1}{2}(8+13)\times 12$。

故　$h=12$。

6．解：在由a^2、b^2、c^2所组成的三角形$A'B'C'$中，

$\because\quad a^4=b^4+c^4-b^2c^2$，$\therefore\quad \dfrac{b^4+c^4-a^4}{b^2c^2}=1$，

则　$\cos A'=\dfrac{b^4+c^4-a^4}{2b^2c^2}=\dfrac{1}{2}$。$\therefore\quad A'=60^\circ$。

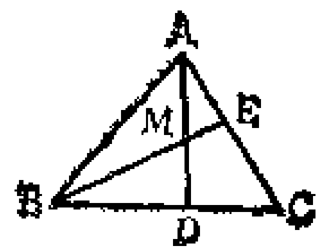
同理，由$b^4=c^4+a^4-a^2c^2$推得$B'=60°$。

因此$\triangle A'B'C'$为等边三角形，

则　$a^2=b^2=c^2$，故$a=b=c$。

7．解：由梅莱劳斯定理，有

$$\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BM}{ME}\cdot\frac{EA}{AC}=1.$$



由已知条件得

$$\frac{2}{3}\times\frac{BM}{ME}\cdot\frac{3}{7}=1，即\frac{BM}{ME}=\frac{7}{2}.$$

$$\because\quad \frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta AME}}=\frac{BM}{ME}=\frac{7}{2}，\therefore\quad S_{\Delta ABM}=\frac{7}{9}S_{\Delta ABE}$$

$$=\frac{7}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{3}.$$

故　$S_{\Delta BMD}=S_{\Delta ABD}-S_{\Delta ABM}=\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$。

8．解：$\because 2、3\in N$，而$2-3=-1$，$-1\notin N$，$\therefore N$不是数环。

$\because\ \frac{8}{2^3}\in P,\frac{4}{2^1}\in P$，而$\frac{8}{2^3}-\frac{4}{2^1}=-1$，$-1\notin P$，$\therefore P$不是数环。

容易验证，其余四个皆为数环。

二、填空题：

1．解：因甲取走的球数是乙的两倍，故取走球的总数应为3的倍数，而只有14、16、25、28不是3的倍数。

其个位与十位数字之和分别为5、7、7、10，$5+7+7$和$5+7+10$都不是3的倍数，只有$7+7+10$才是3的倍数，则$16+25+28=69$能被3整除，故剩下的一袋内装球14只。

2. 解：设$\frac{AC}{BC}=x$，

∴ $x=\frac{BC+CE}{BC}=1+\frac{\sin B}{\sin\angle BEC}$

$$=1+\frac{\sin B}{\sin(A+45^\circ)}=1+\frac{\sin B}{\sin(135^\circ-B)}$$

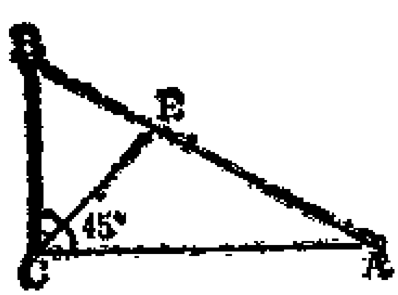
$$=1+\frac{\sin B}{\sin(B+45^\circ)}=1+\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ctg}B+1}$$

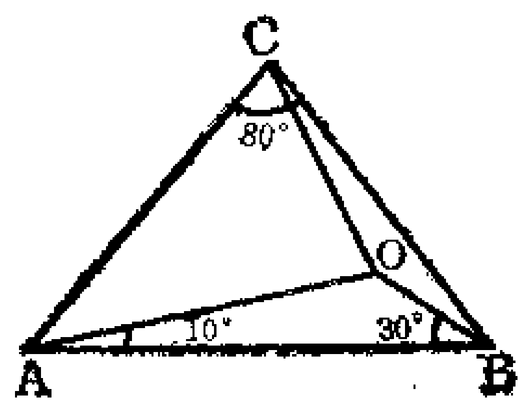
$$=1+\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{x}+1}=1+\frac{\sqrt{2}x}{1+x}.$$

则 $x^2+x=1+x+\sqrt{2}x$，即$x^2-\sqrt{2}x-1=0$，

解得 $x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+4}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$.

故 $x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$（负值舍去）.





3. 解：设$AC=x$，

在△ABC中，$AB^2=2x^2-2x^2\cos80^\circ$

$$=2x^2(1-\cos80^\circ),$$

∴ $AB=\sqrt{2}x\sqrt{1-\cos80^\circ}$.

在$\triangle ABO$中，$\dfrac{AO}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos 80^\circ}\,x}{\sin 140^\circ}$，

$$\therefore\quad AO=\frac{\sqrt{2}\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}\sqrt{1-\cos 80^\circ}\,x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sin 40^\circ}\cdot\sqrt{2}\sin 40^\circ\cdot x=x=AC.$$

$$\because\quad \angle CAO=50^\circ-10^\circ=40^\circ,$$

$$故\quad \angle ACO=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=\underline{70^\circ}.$$

三、解法一：去分母整理得：

$x^4-6x^3+2x^2+96x-144=0$，

$(x^2+2x-6)(x^2-8x+24)=0$。

若　$x^2+2x-6=0$，则 $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{7}$；

若　$x^2-8x+24=0$，无实数根。

经检验，原方程的实数根为

$x_1=-1+\sqrt{7}$，$x_2=-1-\sqrt{7}$。

解法二：设$\operatorname{tg}\alpha=x\Big/\dfrac{3x}{3-x}=1-\dfrac{x}{3}$。

故　$x=3(1-\operatorname{tg}\alpha)$，

$$\frac{3x}{x-3}=\frac{9(1-\operatorname{tg}x)}{3(1-\operatorname{tg}x)-3}=3(1-\operatorname{ctg}\alpha),$$

代入原方程，$9(1-\operatorname{tg}\alpha)^2+9(1-\operatorname{ctg}\alpha)^2=16$，

即　$18-18(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)+9(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)=16$。

令　$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=t$，则$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=t^2-2$，

故　$9t^2-18t-16=0$。

解得　$t=\frac{8}{3}$或$-\frac{2}{3}$.

由　$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{8}{3}$，得$\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{8}{3}\operatorname{tg}\alpha+1=0$.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\pm\sqrt{\frac{64}{9}-4}\right)=\frac{1}{3}(4\pm\sqrt{7}),$$

故　$x=3(1-\operatorname{tg}\alpha)=3-(4\pm\sqrt{7})=-1\mp\sqrt{7}$;

另由　$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{2}{3}$,

得　$\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{2}{3}\operatorname{tg}\alpha+1=0$.

此方程无实根，故仅得两根：$x=-1\mp\sqrt{7}$.

四、1.　证明：$[(n-1)^2+1]\cdot[(n+1)^2+1]$

$$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$
$$=n^4+4.$$

2.　解：原式分子分母均乘以16^{10}后，便得：

$$\frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdots(38^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdots(40^4+4)}.$$

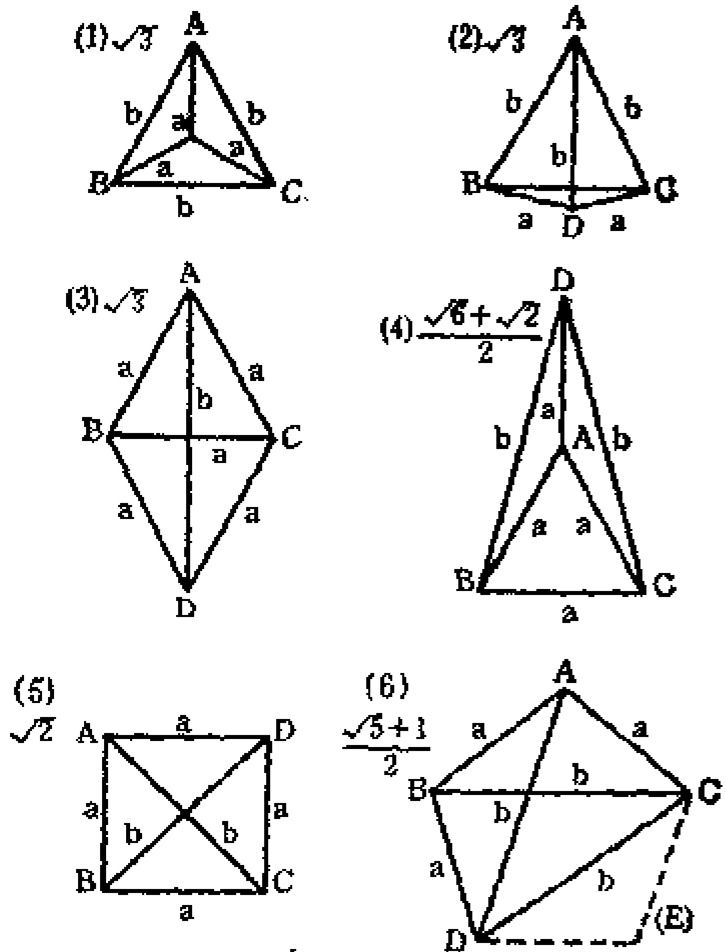
利用第1小题结论，

上式等于

$$\frac{(1^2+1)(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)\cdots(37^2+1)(39^2+1)}{(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)\cdots(39^2+1)(41^2+1)}$$

$$=\frac{1^2+1}{41^2+1}=\frac{2}{1682}=\frac{1}{841}.$$

五、可以证明，本题共有六种情况（如下图）：



($a<b$,所标为$\frac{b}{a}$的数值)

1985年上海市初中数学竞赛

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5
答　案	C	A	D	A	B

1.解：由题意知$\begin{cases} p+q=-p & (1) \\ p\cdot q=q & (2) \end{cases}$

由(1)式得　$2p=q$　　(3)

由(2)式得　$q=0$或$p=1$,

由(3)得　$p=0$ (当$q=0$),

$q=2$ (当$p=1$).

故　pq的值是 0 或2。

2. 解：原式$=xy(x+y)-yz(x+y)$

$$-zx(x+y)-z^2(x+y)$$

$$=(x+y)(xy-yz-zx-z^2)$$

$$=(x+y)(x-z)(y-z).$$

3. 解：因只有一个值满足方程，故有两种情况：

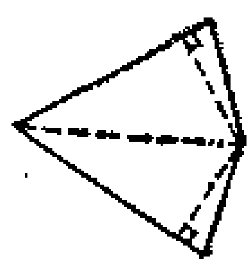
(1) 判别式$\Delta=(3+\lg a)^2-4(1-\lg^2 a)\times 2=0$,

化简得　$9\lg^2 a+6\lg a+1=0$,

即　$(3\lg a+1)^2=0$，$\lg a=-\frac{1}{3}$，$a=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$.

(2) $1-\lg^2 a=0$，则$\lg a=\pm 1$,

故　$a=10$或$\frac{1}{10}$.



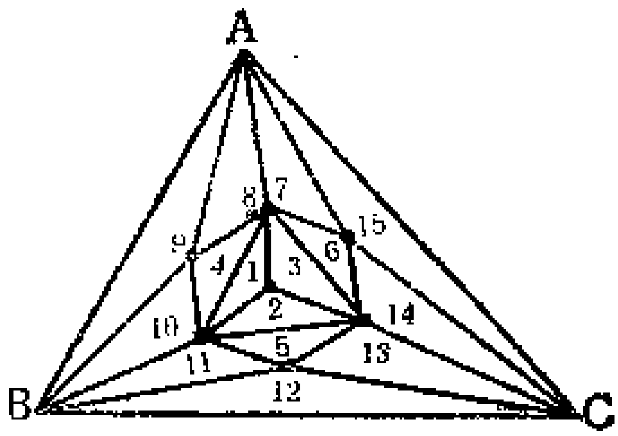
4. 解：∵矩形不存在锐角，∴出现锐角的最小个数$m=0$。

∵ 凸n边形的外角和为360°,

∴ 若出现 4 个或 4 个以上的锐角，则必有 4 个或 4 个以上的外角大于90°，因而外角和大于360°，故出现锐角的最大个数不会是 4 或大于 4 的一切自然数。可排除(B)、(C)。

又容易作出有三个锐角的四边形，故排除(D)，因此(A)成立。

5. 解：根据条件画出图形，从内向外逐个作出三角



形，再逐个数出三角形的个数是15.

二、填充

1. 解，设$9n^2+5n+26=(3n+k)(3n+k+1)$

$$=9n^2+3n(k+1)+3nk+k^2+k$$

$$=9n^2+3(2k+1)n+k^2+k.$$

$[5-(6k+3)]n=k^2+k-26$，

则 $n=\dfrac{k^2+k-26}{-6k+2}$.

当$k=0$时，$n=-13$（不合题意）.

当$k=1$时，$n=\dfrac{-24}{-4}=6$，当$k=2$时，$n=\dfrac{-20}{-10}=2$.

容易验证，当k为3以上的自然数或负整数时，n都不能为自然数. 故只有$n=6$或$n=2$.

2. 解：将$x=(x^2-2)^2-2$化为

$$x^4-4x^2-x+2=0,$$

$$x^2(x^2-4)-(x-2)=0,$$

$$(x-2)[x^2(x+2)-1]=0,$$

$$(x-2)(x^3+x^2+x^2-1)=0,$$

$$(x-2)(x+1)(x^2+x-1)=0.$$

解得 $x_1=-1$，$x_2=2$，$x_3=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，

$$x_4 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

3　解：因$(12-3.5)\times 4=34$分。

故正确时间是12点时，闹钟指到11点26分。

由于闹钟走56分钟，正确时间过去60分钟，所以闹钟要指到12点，还需走34分钟，则正确时间需经过$34\times\frac{60}{56}=36\frac{3}{7}$分钟。

4．解：从123456…99100中划去100个数字，使剩下的数首位不是0，且数值最小，则首位必是1，且从最高位尽量小，要如此，就从第2个数字起划去85个非零数，从51至60还要划

$$1\ \underbrace{2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 1}_{\text{划去 9 个}}0\ 1\underbrace{1\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 2}_{\text{划去19个}}0$$

$$\underbrace{21\ 22\ 23\ 24\ 25\ 26\ 27\ 28\ 29\ 3}_{\text{划去19个}}0\ \ 3\underbrace{1\ 32\cdots 39\ 4}_{\text{划去19个}}0$$

$$\underbrace{41\ 42\cdots 49\ 5}_{\text{划去19个}}0\ 51\ 52\ 53\ 54$$

$$\underbrace{55\ 56\ 57\ 58\ 59\ 6}_{\text{划去11个}}0\ 61\ 62\cdots\cdots$$

掉15个数字，于是保留1 2 3 4，划掉5以上的数字，这样划的结果为

100000123406162 63…99100。

5．解：当$x=a$时，$y=|a-b|+|a-c|$

$$=(b-a)+c-a>c-a.$$

当$x=b$时，$y=|b-a|+|b-c|$
$=b-a+c-b=c-a$。

当$x=c$时，$y=|c-a|+|c-b|$
$=c-a+(c-b)>c-a$。

当$x<a$或$x>c$时，显然$y>c-a$。

当$a<x<b$时，

$y=|x-a|+|x-b|+|x-c|=x-a+b-x+c-x$
$=c-a+b-x>c-a$。

同理可证，当$b<x<c$时，$y>c-a$。

故函数的最小值为$\underline{c-a}$。

三、证明：$\because l^2+m^2=n^2$，

$\therefore l^2=(n+m)(n-m)$。

$\because l$为质数，且$n+m>n-m>0$，

$\therefore n+m=l^2$，$n-m=1$。

于是$l^2=n+m=(m+1)+m=2m+1$，$2m=l^2-1$。

$2(l+m+1)=2l+2+2m=2l+2+(l^2-1)$
$=l^2+2l+1=(l+1)^2$。

故　$2(l+m+1)$是完全平方数。

四、解：[作法]．1.连结BM；

2．　在BA上任取一点P_1，并自P_1作BA的垂线，交BC于N_1；

3．　以N_1为圆心，N_1P_1为半径作弧交BM于点M_1，并连N_1M_1；

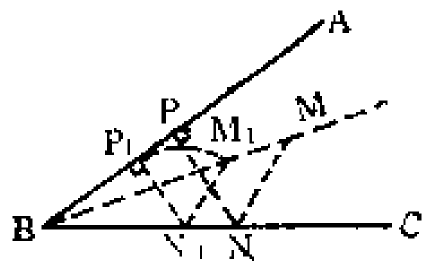
4．　过M作M_1N_1的平行线，交BC于点N，点N即为所求。

[证明]　自N作BA的垂线NP，P为垂足。

由$\triangle BP_1N_1\backsim\triangle BPN$，

$\triangle BM_1N_1 \backsim \triangle BMN$可得

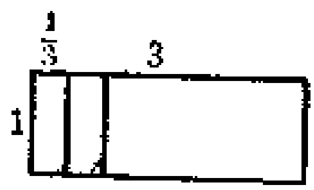
$$\frac{PN}{P_1N_1}=\frac{BN}{BN_1}=\frac{MN}{M_1N_1}.$$



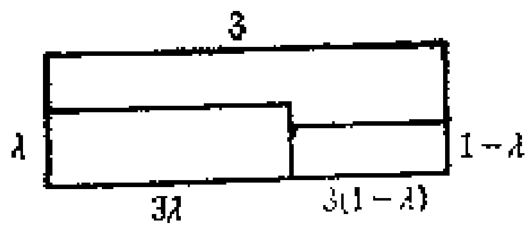
但$N_1P_1=N_1M_1$，故$PN=MN$。

五、解：若两个小矩形都“竖放”，如图一，此时两个小矩形的周长和的最大值是

$$2\times\left(2\times1+2\times\frac{1}{3}\right)=5\frac{1}{3}.$$



图一

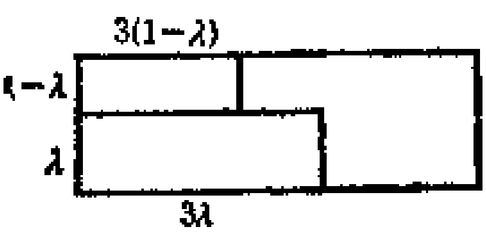


图二

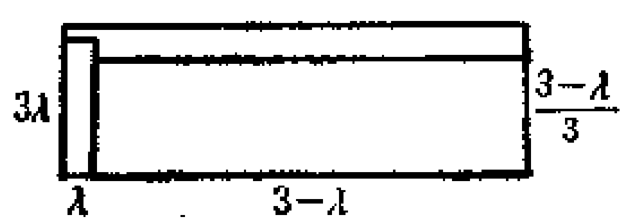
若两个小矩形都“横放”，如图二、图三，则此时两个小矩形周长和的最大值是

$$2(\lambda+3\lambda)+2[(1-\lambda)+3(1-\lambda)]=8.$$

若两个小矩形一个“竖放”，一个“横放”，如图四，则两个小矩形的周长和为



图三



图四

$$2(\lambda+3\lambda)+2\left(3-\lambda+\frac{3-\lambda}{3}\right)=2\left(4+\frac{8}{3}\lambda\right).$$

$\because\quad 0<3\lambda\leqslant1,\ 0<\lambda\leqslant\frac{1}{3},$

$\therefore$ 当$\lambda=\frac{1}{3}$时，两个小矩形周长和取最大值$9\frac{7}{9}$。

综上所述，两个小矩形周长和的最大值为$9\frac{7}{9}$。

1985年“缙云杯”初中数学邀请赛

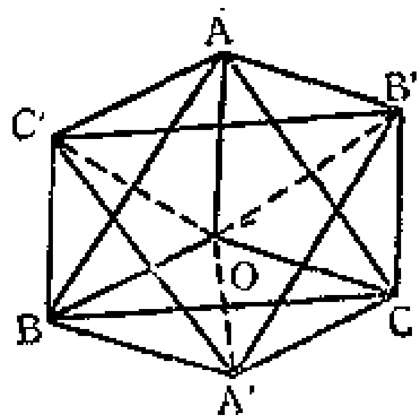
一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
答案	B	B	B	C	C	B	C	D	A	C	C	A	B	B	D

1．解：由数轴知$a<0$，$b>0$，$|b|>|a|$，$\therefore a+b$，$b-2a$，$|a-b|$均为正。

2．解：由定义知，当x为任意实数时，只有$\sqrt{x^2}-x$恒有意义。

3．解：由作图知，AC与$B'O$互相垂直平分，故四边形$AOCB'$为菱形。同理，四边形$COBA'$、$AOBC'$也是菱形。又$\because B'C\perp AO\perp C'B$，故四边形$BCB'C'$是平行四边形。同理，四边形$ABA'B'$、$ACA'C'$也是平行四边形。故图中有6个平行四边形。



4．解：影响两方程解的异同的x值是$x=1$，$x=1$不是第一个方程的解，而可以是第二个方程的解，此时$a=4$。

而当$a\neq4$时，两方程同解。

5．解：设另一直角边为x，斜边为y，x、y为自然数，由勾股定理得$n^2=y^2-x^2=(y+x)(y-x)$.

$\because n$为质数，$\therefore n^2$只有约数1、n、n^2。

显然$n\neq y+x$，$n\neq y-x$，于是有$y-x=1$，$y+x=n^2$。故此三角形的周长为$x+y+n=n^2+n$。

6．解：$\because a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{12}}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{12}}$，

$$c=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{12}}.$$

而 $\frac{1}{729}<\frac{1}{256}<\frac{1}{8}$，$\therefore b<c<a$。

7．解：将原方程化为$(m-2)(m+1)x=2-m$。当$m=2$时，方程变为$0\cdot x=0$，有无穷多个解；而当$m=-1$时，方程变为$0\cdot x=3$，无解；当$m\neq 2$，$m\neq -1$时，原方程有唯一解。

8．解：$\because a+b+c=0$，

$$\therefore \text{原式}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}$$

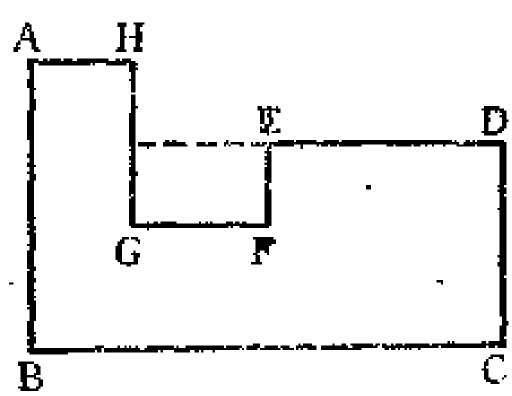
$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0.$$

9．解：如图，因为

$AH+GF+ED=BC$，

$HG+EF+DC=AB+2EF$，

所以已知AB、BC、EF就可以求得多边形周长。



10．解：当$x>0$时，原方程化为$x^2-3x+2=0$，解得$x_1=1$，$x_2=2$；

当$x<0$时，原方程化为$-x^2+3x+2=0$，解得

$$x_3=\frac{3-\sqrt{17}}{2},\quad x_4=\frac{3+\sqrt{17}}{2}.$$

因$x_4>0$不符合$x<0$的条件，应舍去；

当$x=0$时，原方程无解。

故原方程共有3个实根。

11．解：设汽车A追上B的时间为x分钟，又设A、B、C的速度分别为v_A、v_B、v_C，则由题意得

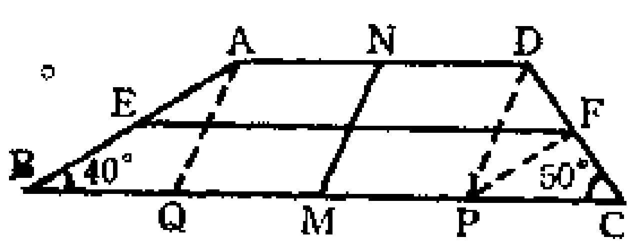
$$\frac{v_B}{v_C}=\frac{20+5}{20},\quad \frac{v_A}{v_C}=\frac{50+10+5}{50}=\frac{13}{10},$$

$$\therefore\quad \frac{v_A}{v_B}=\frac{26}{25}.$$

又　$v_Ax=v_B(x+10)$，即$\dfrac{x+10}{x}=\dfrac{26}{25}$.

解得　$x=250$（分）．

12．解：作$FP\parallel AB$且交BC于P，则$FP\perp CD$，$PC=PD$。作$AQ\parallel DP$且交BC于Q，则$QA=QB$（$\because\angle BAQ=\angle ABQ=40^\circ$）。



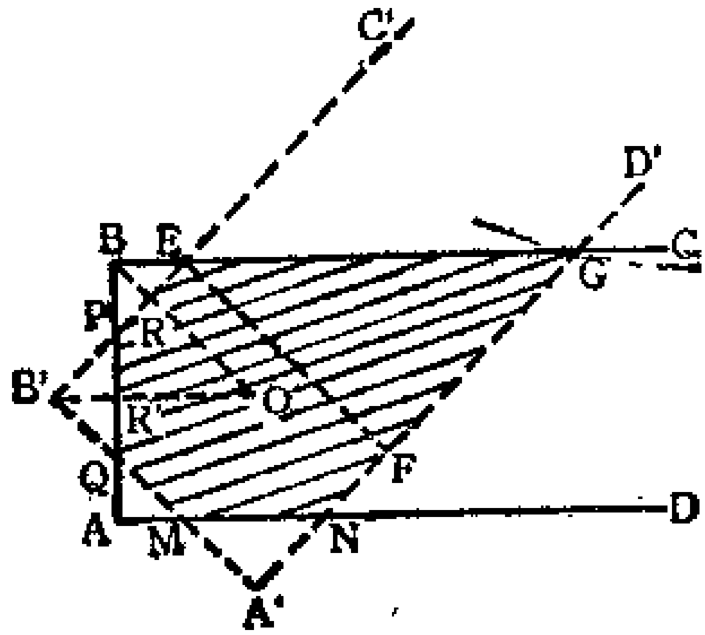
又　$QA=PD=PC=MN=b$，$BP=EF=a$，

故　$BC=BP+PC=a+b$。

13．解：整数中能同时被3与5除余1的数可表为$15n+1$，其中$n=0,1,2\cdots$。由题设得$15n+1\leqslant101$，$\therefore n\leqslant6.6$，即$n=0$，1，2，3，4，5，6。故有1、16、31、46、61、76、

91这 7 个数符合条件。

14．解：如图，矩形 $ABCD$ 绕 O 点旋转 $45°$ 得到矩形 $A'B'C'D'$。



连 OB、OB'，易得 $OB=OB'=\sqrt{2}$，$BR=B'R'=\sqrt{2}-1$，

$\therefore\quad B'P=BE=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$。

同理可得

$$AQ=AM=A'M=A'N=2-\sqrt{2},$$

$\therefore\quad PE=2BR=2(\sqrt{2}-1)$，

$$B'E=B'P+PE=\sqrt{2}.$$

故 $S_{A'B'EF}=A'B'\cdot B'E=2\sqrt{2}$。

$\therefore$ 公共部分的面积 $S=S_{\triangle BFG}+S_{A'B'EF}-2S_{\triangle PBE}$

$$=\frac{2\times2}{2}+2\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})^2$$

$$=2(3\sqrt{2}-2).$$

15．解，设A、B、C单独做这项工作的时间为a、b、c，由题意得

$$m\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \qquad (1)$$

$$n\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \qquad (2)$$

$$x\cdot\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a} \qquad (3)$$

由(1)、(2)得 $\frac{1}{a}=\frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{1}{b}$ （4）

$$\frac{1}{c}=\frac{mn-1}{m+1}\cdot\frac{1}{b} \qquad (5)$$

将(4)、(5)代入(3)得 $x=\frac{m+n+2}{mn-1}$。

解二，设 A、B、C 的工作速度分别为 a、b、c，则 $ma=b+c$，$nb=c+a$，$xc=a+b$，

$$\therefore\quad x=\frac{a+b}{c}=\frac{1}{c}\left(\frac{b+c}{m}+\frac{c+a}{n}\right)$$

$$=\frac{nb+nc+mc+ma}{mnc}=\frac{c+a+nc+mc+b+c}{mnc}$$

$$=\frac{a+b}{mnc}+\frac{m+n+2}{mn}$$

$$=\frac{x}{mn}+\frac{m+n+2}{mn}.$$

则 $\left(1-\frac{1}{mn}\right)x=\frac{m+n+2}{mn}$，故 $x=\frac{m+n+2}{mn-1}$。

二、填空题

1 解：令 $x=-1$，

则有 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=[2\times(-1)-1]^5$

$=(-3)^5=-\underline{243}$。

2．解：$\because \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，

$$\therefore \frac{2x+3xy-2y}{x-y-2xy}=\frac{3-2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}{-2-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}=\frac{3}{5}$$

3．解：由已知得$xy=1$，$x+y=4n+2$（n为自然数），

$\therefore$ $19x^2+123xy+19y^2=1985$，

得 $19(x+y)^2+85xy=1985$，

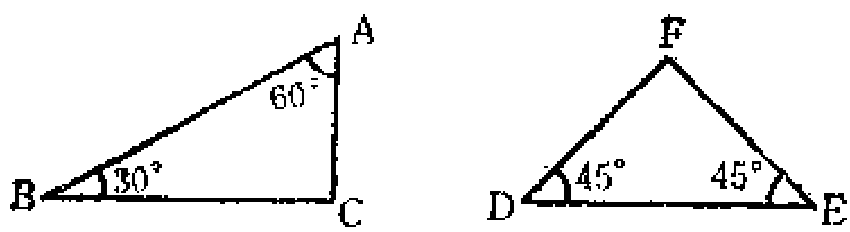
即 $19(4n+2)^2=1900$，

$(4n+2)^2=100$，

$\therefore$ $4n+2=\pm 10$，得$n=2$或-3（舍去），

故 $n=\underline{2}$。

4．解：



$\because$ $BC=DE=\sqrt{6}$，则$AC=\sqrt{2}=1+b$，$DF=\sqrt{3}$ $=1+a$，$\therefore b=\sqrt{2}-1$，$a=\sqrt{3}-1$。

$$\frac{a}{(a-b)b}=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}$$
$$=(\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$
$$=1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1+2.82+1.73\approx 6$$。

5．解：由题意知$p\neq q$，设二方程公共根为x_0，则有

$x_0^2+px_0+q=x_0^2+qx_0+p$，

$\therefore\quad x_0=\dfrac{p-q}{p-q}=1$。代入原方程得$p+q=-1$

故　$(p+q)^{20}=(-1)^{20}=\underline{1}$。

6． 解：$\because a*b=\dfrac{a+2b}{2}$，

$\therefore\quad 3*|x|=\dfrac{3+2|x|}{2}=2$，即得$|x|=\dfrac{1}{2}$，

故　$x=\underline{\pm\dfrac{1}{2}}$。

7． 解：$\because \dfrac{1}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$，

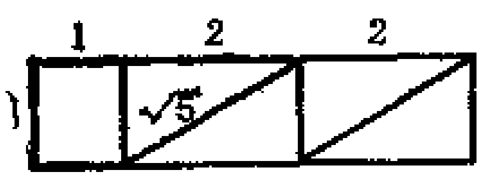
$\therefore a=\underline{5}$，

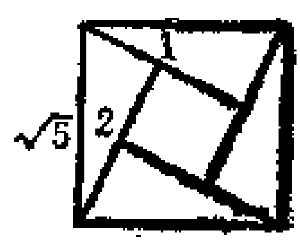
$\because 3+2\sqrt{2}=5+6$，$\therefore b=2\sqrt{2}-2$，

$b-\dfrac{4}{b}=2\sqrt{2}-2-\dfrac{4}{2\sqrt{2}-2}$

$=2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}-2=\underline{-4}$。

8．





解：$\because$长方形和正方形的面积相等，

$\therefore$拼成的正方形边长为$\sqrt{5}$cm，而直角边长分别为1cm、2cm的三角形斜边长为$\sqrt{5}$cm。

$\therefore$矩形应分成如上图所示的五块，拼成如右图所示的正方形。

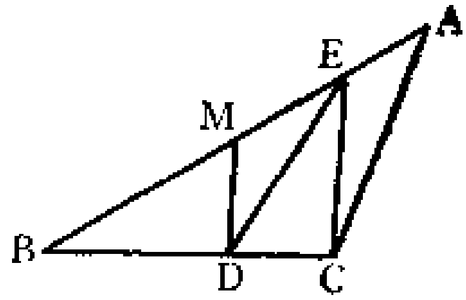
9． **解：**$\because x$、y、z均为自然数，

又　$x<y$，$x+y=1985$，$z-x=2000$，

$\therefore\quad x+x<1985$，$x<992.5$，x的最大值是992，而$y+z=x+y+z-x=1985+2000=3985$，

故　$x+y+z$的最大值是$3985+992=\underline{4977}$。

10．解：由已知得$\triangle BMD\backsim\triangle BEC$，



$$\therefore\quad \frac{BD}{BM}=\frac{BC}{EB}.$$

$$\because\quad \frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BD\cdot EB\cdot\sin B}{AB\cdot BC\cdot\sin B}=\frac{BD\cdot EB}{2BM\cdot BC}$$

$$=\frac{BC\cdot EB}{2EB\cdot BC}=\frac{1}{2},$$

故　$S_{\triangle BED}=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{2}=\underline{12}$。

11．解：由$x=\sqrt{3}+1$得$\sqrt{3}=x-1$，

$$\therefore\quad x^3-(2+\sqrt{3})x^2+(1+2\sqrt{3})x-\sqrt{3}+5$$
$$=x^3-(1+x)x^2+(2x-1)x-x+6$$
$$=x^3-x^2-x^3+2x^2-2x+6$$
$$=x^2-2x+6=(x-1)^2+5$$
$$=(\sqrt{3})^2+5=\underline{8}.$$

12．解：设长为$a+b$，宽为b，其中a为正整数，$0<b<1$，则$(a+b)^2+b^2=6$，得

$$2b^2+2ab+a^2-6=0,$$

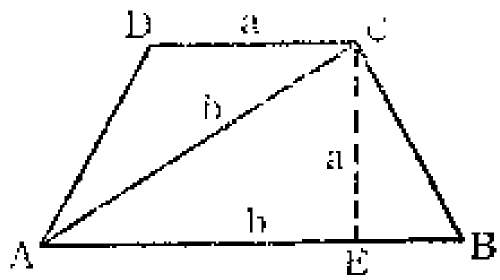
$$\therefore\quad b=\frac{-2a+\sqrt{4a^2-8(a^2-6)}}{4}$$

$$=\frac{-a+\sqrt{12-a^2}}{2}.$$

由于$0<b<1$，可知$a=2$。

则 $b=\sqrt{2}-1$，$a+b=\sqrt{2}+1$ 。

13．解：如图，设上底为a，下底为b，则有



$$AE=b-\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

在$Rt\triangle AEC$中，有$a^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=b^2$，

即 $5\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\cdot\frac{a}{b}-3=0$。

解得 $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$或$\frac{a}{b}=-1$（舍去）。

故小底对大底的比为3∶5。

14．解：当$x\neq-b$时，方程可化为$x^2+(b-3)x-2a=0$，由方程有两个绝对值相等而符号相反的实根得 $b-3=0$，

$\therefore b=3$。

由$b=3$，$x^2=2a$，则$a>0$。

又由$x\neq-b$即$x\neq-3$，得$a\neq\frac{9}{2}$。

故 a 的取值范围为$a>0$，$a\neq\frac{9}{2}$，$b=3$。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝最新初中数学竞赛试题全解汇编（１９８６－１９８９）
作者＝谢云荪　邓御寇编
页数＝４３６
ＳＳ号＝１１２１５８５０
出版日期＝１９９０年０３月第１版

前言
目录
试题解答