2017 中国数学奥林匹克希望联盟夏令营(一)

中图分类号:G424.79　　文献标识码:A　　文章编号:1005-6416(2018)01-0032-05

第 一 试

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知集合

$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}, B=\{x\mid x^2-ax+4\geqslant 0\}$.

若 $A\subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是______.

2. 函数 $f(x)=7\sin x+\sin 2x$ 的最大值为______.

3. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a、b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 双曲线 C 与圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 的一个交点为 P. 若 $\frac{|PF_1|+|PF_2|}{r}$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$, 则双曲线 C 的离心率为______.

4. 设 p 为素数. 若存在正整数 n, 使得 $p\mid(n^2+7n+23)$, 则 p 的最小值为______.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3, AC=4, BC=5$, I 为 $\triangle ABC$ 的内心, P 为 $\triangle IBC$(包括边界)内一点. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda、\mu\in\mathbf{R})$, 则 $\lambda+\mu$ 的最小值为______.

6. 已知 P 是轴截面为等腰直角三角形的圆锥的顶点, PA 为圆锥的母线, B 为圆锥底面内的动点. 则 $\frac{PA+AB}{PB}$ 的最大值为______.

7. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 规定 $S_0=0$. 若对任意的 $n\in\mathbf{Z}_+$, 均有

$$\frac{a_n}{2\,017}=-\frac{2\,017+S_{n-1}}{n},$$

则 $\sum_{n=1}^{2\,017}2^n a_n=$______.

8. 定义在集合 $\{x\in\mathbf{Z}_+\mid 1\leqslant x\leqslant 12\}$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$|f(x+1)-f(x)|=1(x=1,2,\cdots,11),$$

且 $f(1)$、$f(6)$、$f(12)$ 成等比数列. 若 $f(1)=1$, 则满足条件的不同函数 $f(x)$ 的个数为______.

二、解答题(共 56 分)

9. (16 分)已知函数

$$f(x)=3\lg(x+2)-\log_2 x,$$

集合 $M=\{n\in\mathbf{Z}\mid f(n^3-3n^2-10n+32)\geqslant 0\}$.

求 M.

10. (20 分)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, F 为右焦点, $A(-a,0)$, $|AF|$

下面证明:存在正整数 n, 使得 A_n、B_n、C_n 中至少有两项相等, 即

$A_n=B_n\leqslant C_n$ 或 $A_n\leqslant B_n=C_n$.

否则, 对任意正整数 n, 均有

$A_n<B_n<C_n$.

故 $A_{n+1}=\min\{B_n-A_n, C_n-B_n\}>0$,

且 $C_{n+1}=C_n-A_n<C_n$.

于是, $C_{n+2}=C_{n+1}-A_{n+1}<C_n$.

从而, 对任意正整数 k, $C_{2k+1}\leqslant C_1-k$.

当 $k>C_1$ 时, $C_{2k+1}<0$, 矛盾.

因此, 存在正整数 n, 使得 A_n、B_n、C_n 中至少有两项相等. 无论 $A_n=B_n\leqslant C_n$ 或 $A_n\leqslant B_n=C_n$, 均有

$A_{n+1}=0, B_{n+1}=C_{n+1}$.

故 $a_{n+2}=a_{n+1}, b_{n+2}=b_{n+1}, c_{n+2}=c_{n+1}$.

(陈发来　提供)

$=3$. 设 O 为坐标原点,P 为椭圆 C 上一点,M 为 AP 的中点,直线 OM 与 $x=4$ 交于点 D,过点 O 且平行于 AP 的直线与 $x=4$ 交于点 E. 证明:

$\angle ODF=\angle OEF$.

11. (20分)设 a_k 为正整数 k 的最大奇因数,记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_i$. 证明:$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{S_iS_{i+1}}<\frac{3}{20}$.

加　试

一、(40分)求使得关于 x、y、z 的方程

$2^x+3^y-5^z=2m$

无正整数解的最小正整数 m.

二、(40分)如图1,在非等腰△ABC 中,I 为内心,⊙O 为△ABC 的外接圆,M 为 BC 的中点,I 在 BC 上的射影为 D,N 为弧$\overset{\frown}{BAC}$的中点,AM 与 DN 交于点 K. 证明:$AD\perp IK$.

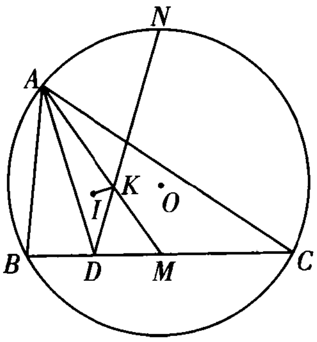

图1

三、(50分)已知非负实数 a、b、c、d 满足 $a+b+c+d=4$. 求 $\sum\frac{b+3}{a^2+4}$的最小值,其中,"$\sum$"表示轮换对称和.

四、(50分)已知 n 为给定整数且 $n\geqslant2$,集合 A 的元素均为正整数,A 的最小元素为1,最大元素为 a,且 $7\times3^n<a<3^{n+2}$,满足对于 A 的任一元素 $x(x\neq1)$,均存在 s、t、$p\in A$,使得 $x=s+t+p$. 求集合 A 元素个数的最小值.

参 考 答 案

第 一 试

一、**1.** $a\leqslant4$.

易知,关于 x 的不等式 $x^2-ax+4\geqslant0$ 在区间 $[1,2]$ 恒成立.

因此,$a\leqslant4$.

2. $\frac{15\sqrt{15}}{8}$.

由条件知

$f'(x)=7\cos x+2\cos 2x$

$=4\cos^2x+7\cos x-2$

$=(4\cos x-1)(\cos x+2)$.

令 $\cos\varphi=\frac{1}{4}\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. 则

$\sin\varphi=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

易知,$f(x)$ 在区间 $(-\varphi+2k\pi,\varphi+2k\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增,在区间 $(\varphi+2k\pi,2\pi-\varphi+2k\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减.

因此,$f(x)$ 的最大值为

$f(\varphi+2k\pi)=\frac{15\sqrt{15}}{8}$.

3. $2\sqrt{2}$.

设 $P(r\cos\theta,r\sin\theta)$,$\cos\theta\geqslant0$. 则

$\frac{|PF_1|+|PF_2|}{r}=\frac{a+er\cos\theta+er\cos\theta-a}{r}$

$=2e\cos\theta$.

故由$\frac{|PF_1|+|PF_2|}{r}$的最大值为 $4\sqrt{2}$,得 $e=2\sqrt{2}$.

4. 11.

设 $f(n)=n^2+7n+23$.

由 $f(n)\equiv1\pmod 2$,

$f(n)\equiv\pm1\pmod 3$,

$f(n)\equiv1,\pm2\pmod 5$,

$f(n)\equiv-1,2,\pm3\pmod 7$,

且 $f(7)=121$,知满足条件的最小正素数为11.

5. $\frac{7}{12}$.

设 AP 与 BC 交于点 Q. 则

$\overrightarrow{AQ}\triangleq t\overrightarrow{AP}=t\lambda\overrightarrow{AB}+t\mu\overrightarrow{AC}$.

由 Q、B、C 三点共线

$\Rightarrow t\lambda+t\mu=1\Rightarrow\lambda+\mu=\frac{1}{t}$.

当点 P 与 I 重合时，t 最大，此时，

$$\frac{AP}{PQ}=\frac{7}{5}\Rightarrow\frac{AQ}{AP}=\frac{12}{7}.$$

因此，$\lambda+\mu=\frac{1}{t}$ 的最大值为 $\frac{7}{12}$.

6. $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

设底面圆心为 O，底面半径为 1，延长 AO 至点 B'，使得 $OB=OB'$.

于是，$PB=PB'$.

由 $AB\leqslant AO+OB=AO+OB'=AB'$

$$\Rightarrow\frac{PA+AB}{PB}\leqslant\frac{PA+AB'}{PB'}.$$

当 A、O、B 三点共线时，上式等号成立.

在 $\triangle PAB'$ 中，设 $\angle APB'=\alpha$，$\angle AB'P=\beta$.

则 $\alpha+\beta=135°$.

由正弦定理得

$$\frac{PA+AB'}{PB'}=\frac{\sin\beta+\sin\alpha}{\sin 45°}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin 45°}$$

$$\leqslant\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin 45°}=\frac{2\sin 67.5°}{\sin 45°}=\frac{1}{\sin 22.5°}.$$

当 $\alpha=\beta$ 时，

$$\left(\frac{PA+AB'}{PB'}\right)_{\max}=\frac{1}{\sin 22.5°}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

7. $-4\ 034$.

消掉 S_{n-1} 得 a_n 与 a_{n+1} 的递推关系，利用累乘法可求 a_n 的通项公式为

$$a_n=2\ 017(-1)^n\mathrm{C}_{2\ 017}^n.$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{2\ 017}2^na_n=2\ 017\sum\limits_{n=1}^{2\ 017}(-2)^n\mathrm{C}_{2\ 017}^n$

$=2\ 017((1-2)^{2\ 017}-1)=-4\ 034$.

8. 155.

令 $f(k+1)-f(k)=e_k\in\{-1,1\}$.

设 $e_1,e_2,\cdots,e_5$ 中有 s 个 1，$e_6,e_7,\cdots,e_{11}$ 中有 t 个 1. 则 $e_1,e_2,\cdots,e_5$ 中有 $5-s$ 个 -1，$e_6,e_7,\cdots,e_{11}$ 中有 $6-t$ 个 -1.

故 $f(6)=f(1)+e_1+e_2+\cdots+e_5=2s-4$，

$f(12)=f(6)+e_6+e_7+\cdots+e_{11}$

$=2t+f(6)-6=2t+2s-10$.

由 $f(1)$、$f(6)$、$f(12)$ 成等比数列知

$(2s-4)^2=2t+2s-10$

$\Rightarrow t=2s^2-9s+13$.

当 $s=0$ 时，$t=13$，不合题意；

当 $s=1$ 时，$t=6$；当 $s=3$ 时，$t=4$；

当 $s=4$ 时，$t=9$，不合题意；

当 $s=5$ 时，$t=18$，不合题意.

故所求函数的个数为

$\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_6^6+\mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_6^4=155$.

二、9. 求导易知函数 $f(x)$ 单调递减，$f(8)=0$.

则 $0<n^3-3n^2-10n+32\leqslant 8$

$\Rightarrow 2\leqslant n\leqslant 4$ 或 $n\leqslant -3$.

易得 $g(x)=x^3-3x^2-10x+32$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，且

$g(-4)=-40<0$，$g(-3)=8>0$.

又 $g(3)=2>0$，故 $M=\{-3,2,3,4\}$.

10. 设椭圆 C 的半焦距为 c.

依题意得

$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a+c=3\Rightarrow a=2$，$c=1$.

则 $b^2=a^2-c^2=3$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

从而，$A(-2,0)$.

设 $P(x_1,y_1)(x_1\neq\pm 2)$，其中，

$3x_1^2+4y_1^2-12=0$.

因为 AP 的中点是 M，所以，

$M\left(\frac{x_1-2}{2},\frac{y_1}{2}\right)$.

于是，$l_{OM}:y=\frac{y_1}{x_1-2}x$.

令 $x=4$，得 $D\left(4,\frac{4y_1}{x_1-2}\right)$.

又 $l_{OE}:y=\frac{y_1}{x_1+2}x$，令 $x=4$，得

$E\left(4,\frac{4y_1}{x_1+2}\right)$.

由 $F(1,0)$，得 $k_{EF}=\frac{4y_1}{3(x_1+2)}$.

又 $k_{EF}k_{OM}=\frac{4y_1}{3(x_1+2)}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}$

$=\frac{4y_1^2}{3(x_1^2-4)}=-1$,

则 $EF\perp OM$,记垂足为 H.

类似地,

$k_{DF}k_{OE}=\frac{4y_1}{3(x_1-2)}\cdot\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{4y_1^2}{3(x_1^2-4)}=-1$,

则 $DF\perp OE$,记垂足为 G.

在 Rt$\triangle EHO$、Rt$\triangle DGO$ 中,由$\angle ODF$、$\angle OEF$ 均与$\angle EOD$ 互余,从而,

$\angle ODF=\angle OEF$.

11. 依题意知 $S_1=2$.

下面考虑 S_n 与 S_{n+1}的关系.

显然,奇数 $2k+1$ 的最大奇数因子为 $2k+1$,形如 $2^k(k\in\mathbf{N})$的数的最大奇数因子为 1.

由于 $1,2,3,\cdots,2^n,\cdots,2^{n+1}$中各项的最大奇数因子之和为 S_{n+1},于是,

$S_{n+1}=1+3+5+\cdots+(2^{n+1}-1)+S_n$

$=4^n+S_n$

$\Rightarrow S_n=S_1+\sum_{i=1}^{n-1}(S_{i+1}-S_i)$

$=2+\sum_{i=1}^{n-1}4^i=\frac{4^n+2}{3}$.

则$\frac{1}{S_iS_{i+1}}=\frac{9}{(4^i+2)(4^{i+1}+2)}<\frac{9}{4^{2i+1}}$.

故 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S_iS_{i+1}}<\sum_{i=1}^{n}\frac{9}{4^{2i+1}}$

$=\frac{3}{20}\left(1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right)<\frac{3}{20}$.

加　试

一、计算得

$2=2^2+3-5,4=2+3^3-5^2$,

$6=2^3+3-5,8=2^2+3^2-5$,

$10=2^3+3^3-5^2,12=2^3+3^2-5$,

$14=2^4+3-5,16=2^5+3^2-5^2$,

$18=2^4+3^3-5^2,20=2^4+3^2-5$.

下面证明:$2^x+3^y-5^z=22$ 无解.

若 $x=1$,则 $3^y=20+5^z$.

显然,此方程无解.

当 $x\geqslant2$ 时,$2^x\equiv0\pmod 4$,则

$(-1)^y\equiv3\pmod 4$.

从而,y 为奇数.

又 $2^x+3^y-5^z\equiv(-1)^x-(-1)^z\equiv1\pmod 3$,

故 x 为奇数且 z 为偶数.

设 $x=2\alpha+1,y=2\beta+1(\beta\in\mathbf{N},\alpha\in\mathbf{N}_+)$.

则 $2^x+3^y-5^z=2^{2\alpha+1}+3^{2\beta+1}-5^z$

$=2\times4^\alpha+3\times9^\beta-5^z$

$\equiv2(-1)^\alpha+3(-1)^\beta$

$\equiv0$ 或 1 或 $-1\pmod 5$.

而 $22\equiv2\pmod 5$,故此方程无整数解.

因此,满足条件的最小正整数 m 为 11.

二、先证明一个引理.

引理　若$\triangle ABC$ 与$\triangle ADE$ 逆相似,且$\angle ABC=\angle ADE=90°$,$BE$ 与 CD 交于点 P,则 $AP\perp BD$.

证明　如图 2,作 $AQ\perp BE$ 于点 Q,AQ 与 CD 交于点 R;作 $AT\perp CD$ 于点 T,AT 与 BE 交于点 S.

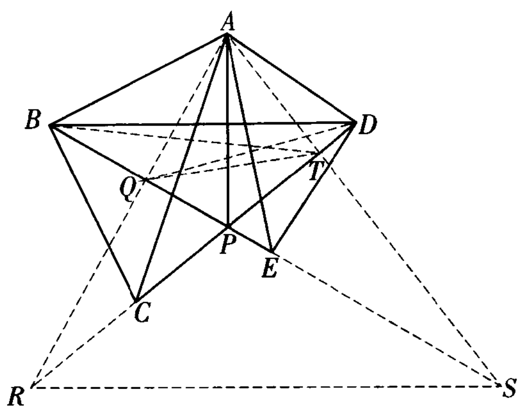

图 2

显然,Q、R、S、T 四点共圆.

于是,$\angle RSB=\angle RTQ$.

因为 P 是$\triangle ARS$ 的垂心,所以,$AP\perp RS$.

由 A、D、E、Q,A、B、C、T 分别四点共圆知

$\angle BTP=\angle BAC=\angle DAE=\angle DQE$

$\Rightarrow\angle BQD=\angle BTD$

$\Rightarrow D$、B、Q、T 四点共圆

$\Rightarrow \angle DBP=\angle QTP=\angle RSB$

$\Rightarrow BD /\!/ RS$.

又 $AP\perp RS$,则 $AP\perp BD$.

引理得证.

不妨设 $AC>AB$,如图3.

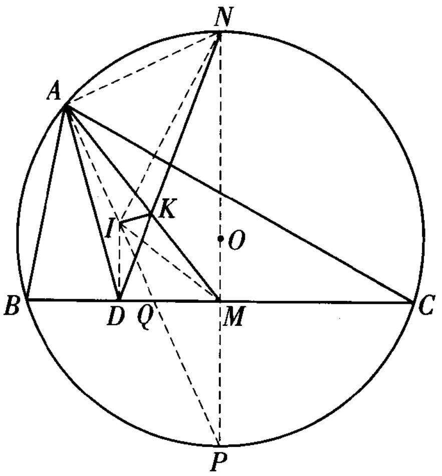

图3

设 AI 分别与⊙O、BC 交于点 P、Q.

显然,P、M、N 三点共线.

熟知 $PI=PB=PC$,

$PM\cdot PN=PB=PI$

$\Rightarrow \triangle PIM\backsim\triangle PNI$

$\Rightarrow \angle PIM=\angle PNI$.

由 $\angle NAP=\angle PMQ=90^\circ$

$\Rightarrow A$、N、M、Q 四点共圆

$\Rightarrow \angle MQP=\angle ANM$.

则 $\angle IMD=\angle MQP-\angle MIP$

$=\angle ANM-\angle INM=\angle ANI$.

又 $\angle NAI=\angle IDM=90^\circ$,$AM$ 与 DN 交于点 K,结合引理得 $IK\perp AD$.

三、注意到,

$$\frac{1}{a^2+4}\geqslant\frac{4-a}{16}\Leftrightarrow a(a-2)^2\geqslant 0.$$

显然成立.

则 $\sum\frac{b+3}{a^2+4}\geqslant\sum\frac{(b+3)(4-a)}{16}$

$=\frac{1}{16}\left(\sum a-\sum ab\right)+3$.

又 $\sum ab=(a+c)(b+d)$

$\leqslant\frac{1}{4}\left(\sum a\right)^2=4$,

故 $\sum\frac{b+3}{a^2+4}\geqslant 3$.

当 $a=b=2$,$c=d=0$ 时,上式等号成立.

因此,$\sum\frac{b+3}{a^2+4}$ 的最小值为3.

四、所求最小值为 $n+4$.

一方面,当 $|A|=n+4$ 时,取

$A=\{1,3,3^2,\cdots,3^{n+1},7\times3^n,7\times3^n+2\}$.

则 $7\times3^n=3^n+2\times3^{n+1}$,

$7\times3^n+2=7\times3^n+2\times1$,

$3^{k+1}=3^k+3^k+3^k(0\leqslant k\leqslant n)$.

另一方面,设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$,其中,$a_1=1<a_2<\cdots<a_m=a$,$a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,m)$.

由题意,对任意 $2\leqslant i\leqslant m(i\in\mathbf{N})$ 均存在 $1\leqslant j$、k、$h\leqslant i-1$,使得

$$a_i=a_j+a_k+a_h\leqslant a_{i-1}+a_{i-1}+a_{i-1}=3a_{i-1}. \quad ①$$

则 $7\times3^n<a_m=a\leqslant3^{m-1}a_1=3^{m-1}$

$\Rightarrow m-1\geqslant n+2\Rightarrow m\geqslant n+3$.

假设 $m=n+3$.

数学归纳法证明 $a_i=3^{i-1}(1\leqslant i\leqslant m)$.

显然,$a_2=3a_1=3$,即当 $i=1,2$ 时结论成立;

假设 $1\leqslant i\leqslant t$ 时,有 $a_i=3^{i-1}$.

当 $i=t+1$ 时,若 $a_{t+1}\neq3^t=3a_t$,则

$a_{t+1}\leqslant2a_t+a_{t-1}=7\times3^{t-2}$.

但由式①知

$a_m\leqslant3^{m-1-t}a_{t+1}\leqslant3^{m-1-t}\times7\times3^{t-2}=7\times3^n$,

与题意矛盾.

因此,$a_{t+1}=3^t$. 此时,

$A=\{1,3,3^2,\cdots,3^{n+1},a\}$,$a=3^{n+2}$,

与条件矛盾.

从而,当 $m=n+3$ 时,不可能成立.

综上,A 的元素个数的最小值为 $n+4$.

(命题组　提供)