2017 中国西部数学邀请赛

中图分类号:G424.79　　文献标识码:A　　文章编号:1005-6416(2017)12-0025-08

1. 设素数 p、正整数 n 满足 $p^2\left|\prod\limits_{k=1}^{n}(k^2+1)\right.$. 证明:$p<2n$.　　(王广廷　供题)

2. 已知 n 为正整数,使得存在正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足

$$x_1x_2\cdots x_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=100n.$$

求 n 的最大可能值.　　(邹瑾　供题)

3. 如图 1,在 $\triangle ABC$ 中,D 为边 BC 上一点,设 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内心分别为 I_1、I_2,$\triangle AI_1D$、$\triangle AI_2D$ 的外心分别为 O_1、O_2,直线 I_1O_2 与 I_2O_1 交于点 P. 证明:$PD\perp BC$.

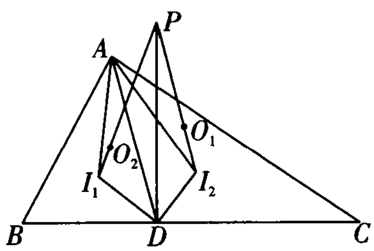

图 1

(张端阳　供题)

4. 给定整数 n、$k(n\geqslant k\geqslant 2)$. 甲、乙两人在一张每个小方格均为白色的 $n\times n$ 方格纸上玩游戏:两人轮流选择一个白格并将其染为黑色,甲先进行. 若某人染色后,每个 $k\times k$ 的正方形中均至少有一个黑格,则游戏结束,此人获胜. 问:谁有必胜策略?

(瞿振华　供题)

5. 已知九个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_9$(允许相同)满足:对任意的 $1\leqslant i<j<k\leqslant 9$,均存在与 i、j、k 不同的 $l(1\leqslant l\leqslant 9)$,使得

$$a_i+a_j+a_k+a_l=100.$$

求满足要求的有序九元数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$ 的个数.　　(何忆捷　供题)

6. 在锐角 $\triangle ABC$ 中,点 D、E 分别在边 AB、AC 上,线段 BE 与 DC 交于点 H,M、N 分别为线段 BD、CE 的中点. 证明:H 为 $\triangle AMN$ 的垂心的充分必要条件是 B、C、E、D 四点共圆且 $BE\perp CD$.　　(石泽晖　供题)

7. 设正整数 $n=2^{\alpha}q$,其中,α 为非负整数,q 为奇数. 证明:对任意正整数 m,方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=m \quad ①$$

的整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的组数能被 $2^{\alpha+1}$ 整除.　　(王广廷　供题)

8. 已知整数 $n\geqslant 2$. 证明:对任意正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,均有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant i}a_j\right)\left(\min_{i\leqslant j\leqslant n}a_j\right)\leqslant\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2. \quad ①$$

(张端阳　供题)

参考答案

1. 按照 $\prod\limits_{k=1}^{n}(k^2+1)$ 中的因子所含 p 的幂次分情形讨论.

(1)若存在 $k(1\leqslant k\leqslant n)$,使得 $p^2\mid(k^2+1)$,则 $p^2\leqslant n^2+1$.

于是,$p\leqslant\sqrt{n^2+1}<2n$.

(2)若对任意的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$,$p^2\nmid(k^2+1)$,由条件,知存在 $1\leqslant j\neq k\leqslant n$,使得

$p\mid(j^2+1)$ 且 $p\mid(k^2+1)$.

则 $p\mid(k^2-j^2)$.

于是,$p\mid(k-j)(k+j)$.

若 $p\mid(k-j)$,则

$p\leqslant k-j\leqslant n-1<2n$;

若 $p\mid(k+j)$，则

$p\leqslant k+j\leqslant n+n-1=2n-1<2n$.

综上，$p<2n$.

2. n 的最大可能值为 9 702.

显然，由已知等式得 $\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant n$.

故 $\prod_{i=1}^{n}x_i\leqslant 100$.

又等号无法成立，则 $\prod_{i=1}^{n}x_i\leqslant 99$.

而 $\prod_{i=1}^{n}x_i=\prod_{i=1}^{n}((x_i-1)+1)$

$\geqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)+1=\sum_{i=1}^{n}x_i-n+1$,

则 $\sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant\prod_{i=1}^{n}x_i+n-1\leqslant n+98$　　①

$\Rightarrow 99(n+98)\geqslant 100n$

$\Rightarrow n\leqslant 99\times 98=9\ 702$.

取 $x_1=99,x_2=x_3=\cdots=x_{9\ 702}=1$，可使式①等号成立.

3. 由 $O_1A=O_1I_1=O_1D$ 及内心的性质，知 O_1 为 $\triangle ABD$ 外接圆弧 $\overparen{AD}$ 的中点.

如图 2，延长 BI_1、DI_2 交于点 J_1，则 J_1 为 $\triangle ABD$ 中 $\angle B$ 内的旁心，且 O_1 为 I_1J_1 的中点.

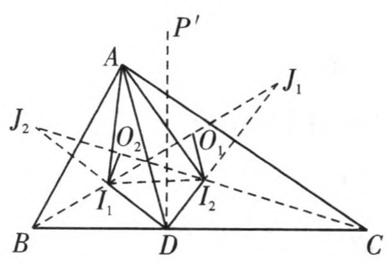

图 2

类似地，延长 DI_1、CI_2 交于点 J_2，则 J_2 为 $\triangle ACD$ 中 $\angle C$ 内的旁心，且 O_2 为 I_2J_2 的中点.

过点 D 作 $DP'\perp BC$. 只需证明 I_1O_2、I_2O_1、DP' 三线共点.

对 $\triangle DI_1I_2$ 用角元塞瓦定理，只需证明：

$$\frac{\sin\angle P'DI_2}{\sin\angle P'DI_1}\cdot\frac{\sin\angle DI_1O_2}{\sin\angle O_2I_1I_2}\cdot\frac{\sin\angle O_1I_2I_1}{\sin\angle DI_2O_1}=1.$$

事实上，由 $O_2J_2=O_2I_2$，知

$S_{\triangle O_2I_1J_2}=S_{\triangle O_2I_1I_2}$.

则 $\dfrac{\sin\angle DI_1O_2}{\sin\angle O_2I_1I_2}=\dfrac{\sin\angle O_2I_1J_2}{\sin\angle O_2I_1I_2}$

$$=\frac{\dfrac{2S_{\triangle O_2I_1J_2}}{I_1J_2\cdot I_1O_2}}{\dfrac{2S_{\triangle O_2I_1I_2}}{I_1I_2\cdot I_1O_2}}=\frac{I_1I_2}{I_1J_2}.$$

类似地，$\dfrac{\sin\angle O_1I_2I_1}{\sin\angle DI_2O_1}=\dfrac{I_2J_1}{I_1I_2}$.

又 $\dfrac{\sin\angle P'DI_2}{\sin\angle P'DI_1}=\dfrac{\cos\angle CDI_2}{\cos\angle BDI_1}$，故只需证明：

$$\frac{I_2J_1\cos\angle CDI_2}{I_1J_2\cos\angle BDI_1}=1,$$

即 I_2J_1、I_1J_2 在 BC 上的投影长度相同.

如图 3，设 I_1、I_2、J_1、J_2 在 BC 上的投影分别为 H_1、H_2、K_1、K_2.

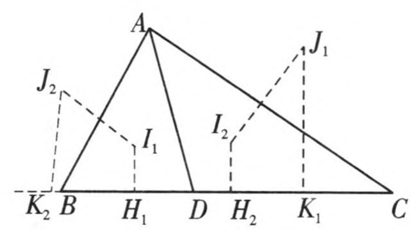

图 3

则 $H_2K_1=DK_1-DH_2$

$=\dfrac{1}{2}(AB+AD-BD)-\dfrac{1}{2}(AD+CD-AC)$

$=\dfrac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

类似地，$H_1K_2=\dfrac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

故 $H_2K_1=H_1K_2$.

命题得证.

4. 将方格纸按从上到下标记行，从左到右标记列.

若 $n\leqslant 2k-1$，则甲将第 k 行第 k 列的格染为黑色后，每个 $k\times k$ 正方形中至少有一个

黑格. 因此,甲获胜.

若 $n\geqslant 2k$,证明当 n 为奇数时,甲有获胜策略;当 n 为偶数时,乙有获胜策略.

事实上,对于一个已经有若干个格染为黑色的局面:若有两个不相交的 $k\times k$ 正方形所含的全为白格,且方格纸内白格总数为奇数,称其为"好局面";若有两个不相交的 $k\times k$ 正方形所含的全为白格,且方格纸内白格总数为偶数,称其为"坏局面".

下面证明当某人面对好局面时,此人有获胜策略.

假设甲面对好局面,他先取定两个不相交的 $k\times k$ 正方形 A、B,且均为白格. 由于白格总数为奇数,可选取不在 A、B 中的另一个白格,将其染为黑色,此时,白格总数为偶数,且 A、B 中仍然均为白格. 因此,变为一个坏局面.

轮到乙面对坏局面,若其染色后,仍有两个不相交的 $k\times k$ 正方形中均为白格,此时,白格总数为奇数,又回到好局面;若其染色后,不存在两个不相交的 $k\times k$ 正方形,此时注意到,至少有一个全白格的 $k\times k$ 正方形,可设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为所有全白格的 $k\times k$ 正方形,则它们两两相交,必包含于某个 $(2k-1)\times(2k-1)$ 的正方形 S. 于是,S 的中心方格 P 为 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的公共格. 因此,甲将 P 染为黑色后,所有 $k\times k$ 正方形中均含有黑格,从而,甲获胜.

总之,当某人面对好局面时,他可以在自己的下一回合获胜或是仍面对好局面,而游戏必在有限步内结束,因此,他有获胜策略;当某人面对坏局面时,他要么让对方下一回合即可获胜,要么留给对方好局面,因此,对方有获胜策略.

在 $n\geqslant 2k$ 时,由于四个角上的 $k\times k$ 正方形互不相交,且一开始均为白格,于是,当 n 为奇数时,一开始是好局面,甲有获胜策略;当 n 为偶数时,一开始是坏局面,乙有获胜策略.

5. 对满足条件的正整数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$,将 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 从小到大排列为

$$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_9.$$

由条件,知分别存在 $l\in\{4,5,\cdots,9\}$ 及 $l'\in\{1,2,\cdots,6\}$,使得

$$b_1+b_2+b_3+b_l=b_{l'}+b_7+b_8+b_9=100. \quad ①$$

注意到,

$$b_{l'}\geqslant b_1,b_7\geqslant b_2,b_8\geqslant b_3,b_9\geqslant b_l. \quad ②$$

结合式①,知结论②中的不等号均为等号.

于是,$b_2=b_3=\cdots=b_8$.

故设 $(b_1,b_2,\cdots,b_8,b_9)=(x,y,\cdots,y,z)$,其中,$x\leqslant y\leqslant z$.

由条件,知使 $x+y+z+b_l=100$ 的 b_l 的值只能为 y,即

$$x+2y+z=100. \quad ③$$

(1)当 $x=y=z=25$ 时,有

$(b_1,b_2,\cdots,b_9)=(25,25,\cdots,25)$.

此时,得到一组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$.

(2)当 x、z 中恰有一个为 y 时,记另一个为 w.

由式③知 $w+3y=100$.

该条件也是充分的. 此时,y 可以取

$1,2,\cdots,24,26,27,\cdots,33$

这 32 种不同值,且每个 y 值对应一组 $(b_1,b_2,\cdots,b_9)$,进而,对应九组不同的 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$,共有 $32\times 9=288$ 个数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$.

(3)当 $x<y<z$ 时,由条件,知存在某个 $b_l\in\{x,y,z\}$,使得 $3y+b_l=100$,与式③比较得 $y+b_l=x+z$,则必有 $b_l=y$.

故 $y=25$,$x+z=50$.

该条件也是充分的. 此时,对 $x=1,2,$

$\cdots$,24,每个 x 值对应一组 $(b_1,b_2,\cdots,b_9)$,进而,对应 $9\times8=72$ 组不同的 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$,共有 $24\times72=1\ 728$ 个数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$.

综上,知符合条件的数组个数为

$1+288+1\ 728=2\ 017$.

6. 如图 4,延长 MH,与 AC 交于点 P;延长 NH,与 AB 交于点 Q.

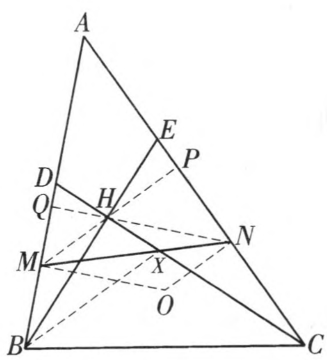

图 4

充分性.

由 B、C、E、D 四点共圆知

$\angle BDH=\angle CEH$.

又 $BE\perp CD$,从而,$\triangle DHB$、$\triangle EHC$ 均为直角三角形.

注意到,M、N 分别为斜边 BD、CE 的中点.

则 $\angle MDH=\angle MHD$,

$\angle MHB=\angle MBH$.

故 $\angle EHP+\angle HEC=\angle MHB+\angle HDB$

$=\angle MBH+\angle HDB=90^\circ$

$\Rightarrow MH\perp AC$.

类似地,$NH\perp AB$.

因此,H 为 $\triangle AMN$ 的垂心.

必要性.

若 H 为 $\triangle AMN$ 的垂心,则

$MP\perp AN$,$NQ\perp AM$.

故 $\dfrac{DQ}{QB}=\dfrac{DH\sin\angle DHQ}{BH\sin\angle BHQ}$

$=\dfrac{DH\sin\angle CHN}{BH\sin\angle EHN}=\dfrac{DH\cdot EH}{BH\cdot CH}$.

类似地,$\dfrac{EP}{PC}=\dfrac{DH\cdot EH}{BH\cdot CH}$.

于是,$\dfrac{EP}{PC}=\dfrac{DQ}{QB}$.

利用比例性质及 $DM=MB$,$EN=NC$,知

$\dfrac{EC}{PC}=\dfrac{DB}{QB}\Rightarrow\dfrac{NC}{PC}=\dfrac{MB}{QB}$

$\Rightarrow\dfrac{NC}{PN}=\dfrac{MB}{QM}\Rightarrow\dfrac{EN}{PN}=\dfrac{DM}{QM}$.

又因为 H 是 $\triangle AMN$ 的垂心,所以,

$\angle DMH=\angle ENH$.

则 $\dfrac{QM}{MH}=\dfrac{PN}{NH}\Rightarrow\dfrac{DM}{MH}=\dfrac{EN}{NH}$

$\Rightarrow\triangle DMH\backsim\triangle ENH$

$\Rightarrow\angle MDH=\angle NEH$

$\Rightarrow B$、C、E、D 四点共圆.

设四边形 $BCED$ 的外心为 O.

易知,$OM\perp AB$.

从而,$OM\parallel NH$.

类似地,$ON\parallel MH$.

于是,四边形 $MHNO$ 为平行四边形.

因此,$MH=ON$.

过点 B 作 MH 的平行线,与 DC 交于点 X.

注意到,M 为边 BD 的中点.

则 $BX=2MH=2ON$.

由熟知的外心性质,知 X 为 $\triangle BCE$ 的垂心.

因此,$CX\perp BE$,即 $CD\perp BE$.

7. 设方程①的解的个数为 $N(m)$,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为方程①的一组非负整数解,不妨设其中有 k 个非零项.

注意到,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的每个分量有正负两种情形,恰对应原方程的 2^k 个整数解.

设 S_k 为方程①恰有 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 个非零项的非负整数解的个数.

则 $N(m)=\sum\limits_{k=1}^{n}2^kS_k$.

因为 k 个非零项的非负整数解有 C_n^k 种位置可选，所以，$\mathrm{C}_n^k \mid S_k$.

于是，要证明 $2^{\alpha+1} \mid N(m)$，只需证明：$2^{\alpha-k+1} \mid \mathrm{C}_n^k$.

注意到，$\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

则分子中 2 的因子个数至少为 α，而分母中 2 的因子个数为

$$\sum_{i=1}^{[\log_2 k]}\left[\frac{k}{2^i}\right] < \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{k}{2^i}=k,$$

其中，$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数.

故分母中 2 的因子至多有 $k-1$ 个.

因此，$2^{\alpha-k+1} \mid \mathrm{C}_n^k$，即 $2^{\alpha+1} \mid N(m)$.

8. 对 n 用第二数学归纳法.

当 $n=2$ 时，

式①左边$=a_1\cdot\min\{a_1,a_2\}+a_2\cdot\max\{a_1,a_2\}$.

若 $a_1 \geqslant a_2$，则

式① $\Leftrightarrow 2a_1a_2 \leqslant a_1^2+a_2^2$，

命题成立；

若 $a_1 \leqslant a_2$，则

式① $\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2 \leqslant a_1^2+a_2^2$，

命题成立.

假设命题对所有正整数 $k(2 \leqslant k<n)$ 成立，考虑 n 时的情形.

对 $2 \leqslant i \leqslant n$，记 $c_i=\dfrac{i}{2\sqrt{i-1}}$，定义 $c_1=1$.

容易验证 $c_1=c_2<c_3<\cdots<c_n$.

记 $M=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} a_j$，并设 $a_k=M$.

当 $k=1$ 时，

$$\text{式①左边}=M\sum_{i=1}^{n}\min_{i\leqslant j\leqslant n} a_j.$$

由 $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} a_j=\min\limits_{2\leqslant j\leqslant n} a_j \leqslant \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=2}^{n} a_i$，且当 $2 \leqslant i \leqslant n$ 时，有 $\min\limits_{i\leqslant j\leqslant n} a_j \leqslant a_i$.

$$\text{故}\sum_{i=1}^{n}\min_{i\leqslant j\leqslant n} a_j \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} a_i+\sum_{i=2}^{n} a_i$$

$$=\frac{n}{n-1}\sum_{i=2}^{n} a_i.$$

由均值不等式得

$$\text{式①左边} \leqslant \frac{n}{n-1}M\sum_{i=2}^{n} a_i$$

$$\leqslant \frac{n}{2\sqrt{n-1}}\left(M^2+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right)^2\right)$$

$$\leqslant \frac{n}{2\sqrt{n-1}}\left(M^2+\sum_{i=2}^{n} a_i^2\right)$$

$$=\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

当 $k=n$ 时，$\min\limits_{i\leqslant j\leqslant n} a_j=\min\limits_{i\leqslant j\leqslant n-1} a_j$.

则式①左边

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant i} a_j\right)\left(\min_{i\leqslant j\leqslant n-1} a_j\right)+M^2.$$

由归纳假设得

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant i} a_j\right)\left(\min_{i\leqslant j\leqslant n-1} a_j\right) \leqslant c_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2.$$

$$\text{故式①左边} \leqslant c_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2+M^2$$

$$<\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2+M^2\right)$$

$$=\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

当 $2 \leqslant k \leqslant n-1$ 时，结合 $k=1$ 和 $k=n$ 时的证明得

式①左边

$$=\sum_{i=1}^{k-1}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant i} a_j\right)\left(\min_{i\leqslant j\leqslant n} a_j\right)+M\sum_{i=k}^{n}\min_{i\leqslant j\leqslant n} a_j$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant i} a_j\right)\left(\min_{i\leqslant j\leqslant k-1} a_j\right)+\frac{n-k+1}{n-k}M\sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

$$\leqslant c_{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2+\frac{n-k+1}{2\sqrt{n-k}}\left(M^2+\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2\right)$$

$$=c_{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2+c_{n-k+1}\sum_{i=k}^{n} a_i^2$$

$$<\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

综上，命题得证.

【注】取 $a_1=\sqrt{n-1}, a_2=a_3=\cdots=a_n=1$，知常数 $\frac{n}{2\sqrt{n-1}}$ 为最佳.

附：本届邀请赛预选题

1. 如图5，$\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot O$，D 为 $\angle BAC$ 的平分线上一点，BD 与 AC 交于点 F，CD 与 AB 交于点 E，EF 与 $\odot O$ 交于点 G、H（点 E 在线段 GF 上），GD、HD 分别与 $\odot O$ 交于点 N、M. 证明：$MN /\!/ BC$.

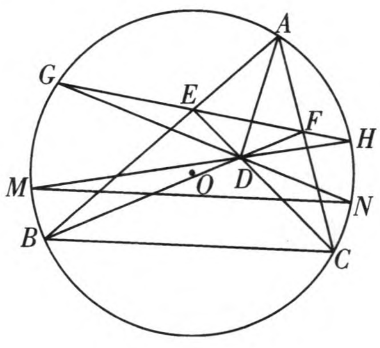

图5

（石泽晖　供题）

2. 已知 P 为锐角 $\triangle ABC$ 内的一点，P 关于边 BC 的中点 M_A 的对称点为 P_A，P_A 关于边 BC 的对称点为 Q_A，AQ_A 的中点记为 R_A. 类似定义点 R_B、R_C. 若点 P 在边 BC、CA、AB 上的射影分别为 H_A、H_B、H_C，证明：$\triangle R_AR_BR_C$ 与 $\triangle H_AH_BH_C$ 中心对称.　　（张甲　供题）

3. 给定整数 $n\geqslant 2$. 求最小的正实数 c，使得对任意复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，均有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + c\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|z_i-z_j| \geqslant \sum_{i=1}^{n}|z_i|.$$

（张端阳　供题）

4. 设 S 为正实数集，满足：

（1）$1\in S$，且对任意的 x、$y\in S$，有 $x+y$、$xy\in S$.

（2）存在 S 的一个子集 P，使得 $S\backslash\{1\}$ 中的数均能唯一表示成 P 中若干数（允许相同）的乘积（两种写法若只有因子顺序不同，则视为同一种）.

问：S 是否一定为正整数集？

（郑凡　供题）

5. 记 A 为所有整数数列构成的集合. 求所有 $f: A\to \mathbf{Z}$ 满足：对任意 x、$y\in A$，均有

$f(x+y)=f(x)+f(y)$.　　（郑凡　供题）

参考答案

1. 先证明一个引理.

引理　在圆 Γ 中，AD、BE、CF 三条弦共点于 P，AC 与 BE 交于点 X_1，AE 与 CF 交于点 X_2，X_1X_2 与圆 Γ 交于 Q、Q' 两点. 若 QP、$Q'P$ 与圆 Γ 分别交于点 R、R'，RR' 分别与 BE、CF 交于点 Y_2、Y_1，则 B、Y_1、D，F、Y_2、D 分别三点共线.

证明　如图6，设 BD 与 RR' 交于点 Y，ER 与 DQ' 交于点 Z（若平行，设其交于无穷远处）.

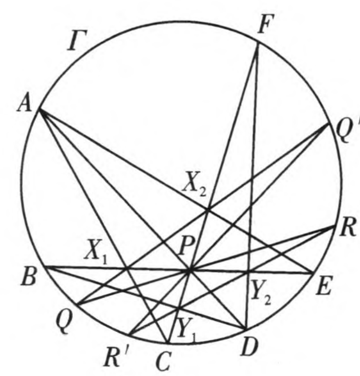

图6

对圆内接六边形 $DBERR'Q'$，由帕斯卡定理，知 Y、P、Z 三点共线.

对圆内接六边形 $READQ'Q$，由帕斯卡定理，知 X_2、P、Z 三点共线.

于是，X_2、Y、P 三点共线.

从而，点 Y 与 Y_1 重合，此即 B、Y_1、D 三点共线.

类似地，F、Y_2、D 三点共线.

引理得证.

如图 7，延长 AD、CE、BF，分别与 $\odot O$ 交于点 P、S、T，记 PS、PT 分别与 MN 交于点 Q、R.

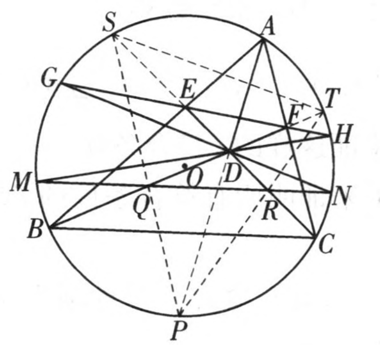

图 7

由引理，知 S、Q、P，T、R、P 分别三点共线.

联结 ST.

由 P 为弧 $\overparen{BC}$ 的中点

$\Rightarrow \angle PSC=\angle PTB$

$\Rightarrow T$、R、Q、S 四点共圆

$\Rightarrow \angle QRS=\angle QTS=\angle BTS=\angle BCS$

$\Rightarrow QR /\!/ BC \Rightarrow MN /\!/ BC$.

2. 如图 8，设线段 H_AR_A、H_BR_B 的中点分别为 M、N.

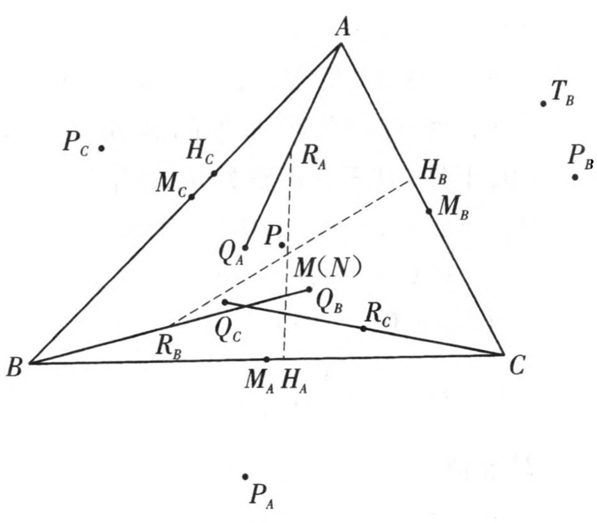

图 8

下面证明点 M 与 N 重合，即只需证明点 M、N 到 BC 的距离相等，点 M、N 到 AC 的距离也相等.

设点 K 到 BC 所在直线的距离为 y_K，即证 $y_M=y_N$.

依题意得 $PQ_A /\!/ BC$.

于是，$y_{Q_A}=y_P$.

故 $y_M=\frac{1}{2}y_{R_A}+\frac{1}{2}y_{H_A}=\frac{1}{2}y_{R_A}$

$=\frac{1}{4}(y_{Q_A}+y_A)=\frac{1}{4}(y_P+y_A)$.

延长 PH_B 至点 T_B，使得 $PH_B=H_BT_B$.

从而，$PT_B\perp AC$.

又 $Q_BP_B\perp AC$，从而，$Q_BP_B /\!/ PT_B$.

结合 $PQ_B /\!/ AC$，$T_BP_B /\!/ AC$，知四边形 $PT_BP_BQ_B$ 为矩形.

故 $y_N=\frac{1}{2}y_{R_B}+\frac{1}{2}y_{H_B}$

$=\frac{1}{4}(y_{Q_B}+y_B)+\frac{1}{2}y_{H_B}$

$=\frac{1}{4}y_{Q_B}+\frac{1}{2}y_{H_B}=\frac{1}{4}y_{Q_B}+\frac{1}{4}(y_P+y_{T_B})$

$=\frac{1}{4}(y_{Q_B}+y_{T_B})+\frac{1}{4}y_P$

$=\frac{1}{4}(y_A+y_C)+\frac{1}{4}y_P=\frac{1}{4}(y_A+y_P)$.

从而，$y_M=y_N$，即点 M、N 到 BC 的距离相等.

类似地，点 M、N 到 AC 的距离也相等.

因此，点 M 与 N 重合.

设 H_CR_C 的中点为 L，类似可得点 M 与 L 也重合.

综上，$\triangle R_AR_BR_C$ 与 $\triangle H_AH_BH_C$ 中心对称.

3. 当 $n=2m$ 时，取

$z_1=z_2=\cdots=z_m=1$,

$z_{m+1}=z_{m+2}=\cdots=z_{2m}=-1$;

当 $n=2m+1$ 时，取

$z_1=z_2=\cdots=z_m=1$,

$z_{m+1}=z_{m+2}=\cdots=z_{2m+1}=-\frac{m}{m+1}$.

以上两种情形均有 $c\geqslant\frac{2}{n}$.

下面证明：对任意复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，均有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + \frac{2}{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|z_i - z_j| \geqslant \sum_{i=1}^{n}|z_i|.$$

事实上，对 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + \sum_{j=1}^{n}|z_k - z_j|$$

$$\geqslant \left|\sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{j=1}^{n}(z_k - z_j)\right| = n|z_k|.$$

对 k 从 1 到 n 求和即得

$$n\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + 2\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}|z_k - z_j| \geqslant n\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

综上，所求最小的正实数为 $\frac{2}{n}$.

4. 不一定.

取 $S=\{f(\pi)\mid f$ 为整系数多项式，且对任意的 $x>0$ 有 $f(x)>0\}$.

易知，集合 S 满足条件(1).

接下来证明集合 S 满足条件(2).

取 $P=\{f(\pi)\in S\mid f$ 在 $\mathbf{Z}[x]$ 上不可约$\}$.

对集合 S 中的任一元素 $f(\pi)$，f 可以分解成首项系数为正的若干不可约整系数多项式的乘积 $f=f_1f_2\cdots f_n$.

则 $f(\pi)=f_1(\pi)f_2(\pi)\cdots f_n(\pi)$.

由于 f 没有正实根，其任一因子 f_i 均没有正实根，且 f_i 首项系数为正，于是，对所有的 $x>0$，均有 $f_i(x)>0$.

从而，$f_i(\pi)\in P$.

下面证明分解的唯一性.

设 $f(\pi)=f_1(\pi)f_2(\pi)\cdots f_n(\pi)$

$=g_1(\pi)g_2(\pi)\cdots g_m(\pi)$.

则整系数多项式 $f_1f_2\cdots f_n - g_1g_2\cdots g_m$ 有根 π，但 π 为超越数，故 $f_1f_2\cdots f_n - g_1g_2\cdots g_m$ 恒为 0，即

$$f_1f_2\cdots f_n = g_1g_2\cdots g_m.$$

于是，由整系数多项式唯一分解定理，知 $g_1,g_2,\cdots,g_m$ 为 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的排列.

故 $f(\pi)=f_1(\pi)f_2(\pi)\cdots f_n(\pi)$

$=g_1(\pi)g_2(\pi)\cdots g_m(\pi)$

为同一种分解.

取 $f(x)=x$，知 $\pi\in S$.

因此，S 不为正整数集.

5. $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=\sum_{i=1}^{n} a_ix_i$.

易验证这样的 f 符合条件.

接下来证明所有符合条件的 f 均具有所给形式.

设 e_n 为第 n 项为 1、其他项为 0 的数列.

设 $f(e_n)=a_n$，且

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=f(x)-\sum_{i=1}^{n} a_ix_i.$$

由 g 的构造，知其满足

$$g(x+y)=g(x)+g(y),$$

且若 x 仅有有限项非零，则 $g(x)=0$.

下面只需证明对所有的 $x\in A$，均有 $g(x)=0$.

设 $x=\{x_n\}$.

由裴蜀定理，知存在数列 $y=\{y_n\}$ 和 $z=\{z_n\}$，满足对所有正整数 n，均有

$$x_n=2^ny_n+3^nz_n.$$

从而，$g(x)=g(y)+g(z)$.

要证 $g(x)=0$，只需证 $g(y)=g(z)=0$.

由于对所有有限项非零的数列 x 均有 $g(x)=0$，于是，对任意正整数 n，均有

$$g(y)=g(y_1,\cdots,y_{n-1},0,\cdots,0)+g(0,\cdots,0,y_n,\cdots)$$

$$=g(0,\cdots,0,y_n,\cdots)$$

$$=2^ng\left(0,\cdots,0,\frac{y_n}{2^n},\frac{y_{n+1}}{2^n},\cdots\right)$$

能被 2^n 整除.

故 $g(y)=0$.

类似地，$g(z)=0$.

因此，g 恒等于 0.

故 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=\sum_{i=1}^{n} a_ix_i$.

（邹瑾　王广廷　提供）