第 43 届俄罗斯数学奥林匹克(十、十一年级)

中图分类号:G424.79　　文献标识码:A　　文章编号:1005-6416(2017)12-0033-06

十 年 级

1. 已知直角坐标平面上有两个首项系数为 1 的二次函数的图像 Γ_1、Γ_2 和两条不平行的直线 l_1、l_2. 若直线 l_1 被 Γ_1、Γ_2 所截得线段长度相等,直线 l_2 被 Γ_1、Γ_2 所截得线段长度也相等,证明:图像 Γ_1 与 Γ_2 重合.

2. 在锐角$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,O 为$\triangle ABC$ 的外心,射线 BO、CO 分别与边 AC、AB 交于点 B'、C',直线 l 过点 C'且与 AC 平行. 证明:直线 l 与$\triangle B'OC$ 的外接圆相切.

3. 桌上有数目分别为 100、101、102 的三堆石头. 甲、乙两人轮流进行如下操作:每个人第一步可以从任意一堆中取石头,由甲开始,每一步,其中一人从某一堆中取出一块石头,但不能从此人上轮游戏中取过石头的那一堆中取,不能进行下一步者为输. 问:无论对手如何操作,谁有必胜策略?

4. 在黑板上写有 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 对每个 $i=1,2,\cdots,n$,维萨亚想要写出一个数 $b_i(b_i\geqslant a_i)$,使得对于任意的 i、$j\in\{1,2,\cdots,n\}$,$\frac{b_i}{b_j}$与$\frac{b_j}{b_i}$至少有一个为整数. 证明:维萨亚可写出 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,使得

$$b_1b_2\cdots b_n\leqslant 2^{\frac{n-1}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

5. 设 n 为合数,对 n 的每个真因子 d(正整数 n 的真因子是指 $d\mid n$,且 $1<d<n$),在黑板上写上数 $d+1$. 求所有的正整数 n,使得写在黑板上的所有数恰为某个正整数 m 所有真因子.

6. 设 $P(x)$ 是次数为 $n(n\geqslant2)$ 的非负系数多项式,a、b、c 为某个锐角三角形的三边长. 证明:$\sqrt[n]{P(a)}$、$\sqrt[n]{P(b)}$、$\sqrt[n]{P(c)}$ 也为某个锐角三角形的三边长.

7. 同九年级第 8 题.

8. 设点 O、I 分别为不等边$\triangle ABC$ 的外心、内心,B'为点 B 关于直线 OI 的对称点,且 B'在$\angle ABI$ 的内部. 证明:$\triangle BIB'$的外接圆在点 B'、I 处的两条切线与 AC 三线共点.

十 一 年 级

1. 设实数 x 使得

$$s=\sin 64x+\sin 65x$$

与 $$t=\cos 64x+\cos 65x$$

均为有理数. 证明:这两个和式之一的右边两项均为有理数.

2. 同十年级第 2 题.

3. 同十年级第 4 题.

4. 一位魔术师与其助手有一摞牌,所有牌的反面均相同,正面为 2 017 种颜色之一(每种颜色有 1 000 000 张牌). 魔术是:魔术师先离开房间,观众将 n 张正面朝上的牌排成一行放在桌上,魔术师的助手将其中 $n-1$ 张牌在原位翻过来,只保留一张牌正面朝上,然后魔术师进入房间,观察桌面上的牌,选择一张背面朝上的牌,猜出其正面的颜色. 求 n 的最小值,使得魔术师与其助手可根据某种事先确定的策略完成这样的魔术.

5. 设 $P(x)$ 是次数为 $n(n\geqslant2)$ 的非负系数多项式,a、b、c 为某个三角形的三边长. 证明:$\sqrt[n]{P(a)}$、$\sqrt[n]{P(b)}$、$\sqrt[n]{P(c)}$ 也为某个三角形的三边长.

6. 在 200×200 的棋盘中,有些格子里放了一枚红色或蓝色的棋子,其他的格子是空

的. 若两枚棋子处于同一行或同一列,则称一枚棋子能"看见"另一枚棋子. 假设每枚棋子恰能看见五枚异色棋子(可能也会看见一些同色棋子). 求棋盘上棋子总数的最大值.

7. 在起始时刻,黑板上写着一个正整数 N. 每一步,米莎可以选择一个已经写在黑板上的正整数 $a>1$,擦掉它,再写上除了它本身以外的所有正因子. 已知经过若干步后,黑板上恰有 N^2 个数. 求 N 的所有可能值.

8. 在凸四边形 $ABCD$ 中,I_A、I_B、I_C、I_D 分别为$\triangle DAB$、$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$ 的内心. 若$\angle BI_AA+\angle I_CI_AI_D=180°$,证明:

$\angle BI_BA+\angle I_CI_BI_D=180°$.

参考答案

十年级

1. 设 $\Gamma_1: f_1(x)=x^2+p_1x+q_1$,

设 $\Gamma_2: f_2(x)=x^2+p_2x+q_2$.

由条件,知直线 l_1、l_2 的斜率存在,设

$l_1: y=k_1x+b_1$,

$l_2: y=k_2x+b_2$.

设直线 l_1 与 Γ_1、Γ_2 分别交于点

$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$.

联立方程$\begin{cases}y=k_1x+b_1,\\ y=x^2+p_1x+q_1,\end{cases}$消元得

$$x^2+(p_1-k_1)x+q_1-b_1=0. \quad ①$$

由 x_1、x_2 为方程①的两根,则

$|x_1-x_2|=\sqrt{(p_1-k_1)^2-4(q_1-b_1)}$.

故$|AB|=\sqrt{1+k_1^2}|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{(p_1-k_1)^2-4(q_1-b_1)}$.

类似地,

$|CD|=\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{(p_2-k_1)^2-4(q_2-b_1)}$.

由$|AB|=|CD|$

$\Rightarrow \sqrt{(p_1-k_1)^2-4(q_1-b_1)}$

$=\sqrt{(p_2-k_1)^2-4(q_2-b_1)}$

$\Rightarrow (p_1-p_2)(p_1+p_2-2k_1)=4(q_1-q_2)$.

若 $p_1\neq p_2$,则

$$k_1=\frac{p_1+p_2}{2}-\frac{2(q_1-q_2)}{p_1-p_2}.$$

类似地,$k_2=\dfrac{p_1+p_2}{2}-\dfrac{2(q_1-q_2)}{p_1-p_2}$.

从而,$k_1=k_2$,与直线 l_1、l_2 不平行矛盾.

故 $p_1=p_2$,$q_1=q_2$,即图像 Γ_1 与 Γ_2 重合.

2. 如图 1,联结 AO 并延长,与直线 l 交于点 T,联结 $B'T$.

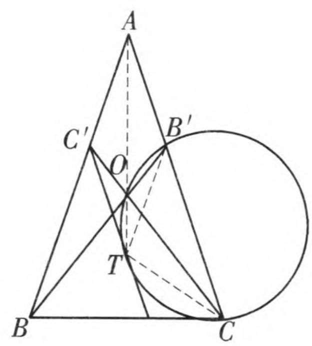

图 1

易知,AO 为$\triangle ABC$ 的对称轴,且点 B'、C'关于 AO 对称.

故$\angle B'TO=\angle C'TO$. ①

而 $l/\!/AC$,则

$\angle C'TO=\angle OAC=\angle OCA$. ②

由式①、②得$\angle B'TO=\angle OCA$.

从而,点 T 在$\triangle B'OC$ 的外接圆上.

又由对称性知

$\angle OB'T=\angle OC'T=\angle OCA=\angle OTC'$

$\Rightarrow C'T$ 与$\triangle B'OC$ 的外接圆相切.

3. 甲有必胜策略.

记开始时含 100、101、102 块石头的堆分别为 A、B、C.

甲先从 B 堆中取一块石头,三堆块数变为 100、100、102,均为偶数.

(1)若乙不从 B 堆中取,则甲每次与乙取同一堆的石头. 由于甲取后每堆石头块数均为偶数,且只要乙不从其上轮游戏中取过的那堆中取,甲必不从自己上轮游戏中取过的那堆中取,故甲在乙操作后必能操作. 由于

该游戏总能结束,故甲获胜.

(2)若乙从 B 堆中取,则甲按照如下规则操作:

乙从 B 堆中取,甲就从 A 堆中取;

乙从 A 堆中取,甲就从 B 堆中取;

乙从 C 堆中取,甲就从 C 堆中取.

于是,甲取完后,C 堆总有偶数块石头,且 A、B 两堆的块数总相等. 故只要乙不从其上轮取过的石块堆中取,甲必也不从上轮取过的石块堆中取,从而,甲在乙操作后必能操作. 由于该游戏总能结束,故甲获胜.

综上,甲有必胜策略.

4. 对于一切 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$,均写出一组 $b_{k1},b_{k2},\cdots,b_{kn},b_{ki}=2^{x_{ki}}a_k$,其中,$x_{ki}\in\mathbf{Z}$,且满足 $a_i\leqslant b_{ki}=2^{x_{ki}}a_k<2a_i$.

则对于任意的 i、$j\in\{1,2,\cdots,n\}$,

$$\frac{b_{ki}}{b_{kj}}=2^{x_{ki}-x_{kj}},\frac{b_{kj}}{b_{ki}}=2^{x_{kj}-x_{ki}}$$

中必有一个为整数. 由此,得到了 n 组满足条件的 $b_1,b_2,\cdots,b_n$.

下面只需证明:

$$\prod_{k=1}^{n}b_{k1}b_{k2}\cdots b_{kn}\leqslant 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}a_i^n.$$

事实上,由 $b_{kk}=a_k$,得

$$\prod_{k=1}^{n}b_{k1}b_{k2}\cdots b_{kn}$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{n}b_{ii}\right)\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}b_{ij}b_{ji}\right)$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}b_{ij}b_{ji}\right).$$

对于任意的 i、$j\in\{1,2,\cdots,n\}$,由 x_{ij}、x_{ji} 的定义,知

$$\frac{a_i}{a_j}\leqslant 2^{x_{ij}}<\frac{2a_i}{a_j},\frac{a_j}{a_i}\leqslant 2^{x_{ji}}<\frac{2a_j}{a_i}.$$

则 $x_{ij}=\left\lceil\log_2\frac{a_i}{a_j}\right\rceil,x_{ji}=\left\lceil-\log_2\frac{a_i}{a_j}\right\rceil$,其中,$\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数.

进而,$x_{ij}+x_{ji}=0$ 或 1.

于是,$b_{ij}b_{ji}=2^{x_{ij}+x_{ji}}a_ia_j\leqslant 2a_ia_j$.

故 $\prod_{k=1}^{n}b_{k1}b_{k2}\cdots b_{kn}$

$$=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}b_{ij}b_{ji}\right)$$

$$\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}b_{ij}b_{ji}\right)$$

$$=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}a_i^n.$$

5. 设 n 的最小真因子为 p.

易知,p 为素数.

又 $p+1$ 为 m 的最小真因子,则 $p+1$ 也为素数. 故 $p=2$.

从而,3 为 m 的最小真因子.

于是,m 为奇数(否则,m 有真因子 2).

由此,m 的真因子均为奇数,n 的真因子均为偶数.

故 n 为 2 的幂. 设 $n=2^k(k\in\mathbf{Z}_+,k\neq1)$.

从而,m 的最大真因子为 $2^{k-1}+1$,即 $m=3(2^{k-1}+1)$.

若 $k\geqslant4$,则 2^{k-2} 为 n 的真因子,且 $2^{k-2}\geqslant4$. 故 $2^{k-2}+1\geqslant5$ 为 m 的真因子.

从而,$(2^{k-2}+1)\mid(2^{k-1}+1)$.

但 $(2^{k-2}+1,2^{k-1}+1)=(2^{k-1}+1,1)=1$,矛盾.

于是,$k=2,3$,即 $n=4,8$.

经检验,$n=4,8$ 均满足题意.

因此,$n=4$ 或 8.

6. 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$.

由题意,知 $a^2<b^2+c^2$.

设 $P(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots+p_0$,其中,$p_n>0,p_i\geqslant0(i=0,1,\cdots,n-1)$.

记 $G(x)=\frac{P(x)}{x^n}$.

则 $G(a)=p_n+\frac{p_{n-1}}{a}+\cdots+\frac{p_0}{a^n}$

$$\leqslant p_n+\frac{p_{n-1}}{b}+\cdots+\frac{p_0}{b^n}=G(b).$$

类似地,$G(a)\leqslant G(c)$.

故 $\sqrt[n]{P^2(a)}=a^2\sqrt[n]{G^2(a)}$

$$<(b^2+c^2)\sqrt[n]{G^2(a)}$$
$$\leqslant b^2\sqrt[n]{G^2(b)}+c^2\sqrt[n]{G^2(c)}$$
$$=\sqrt[n]{P^2(b)}+\sqrt[n]{P^2(c)}.$$

因此，$\sqrt[n]{P(a)}$、$\sqrt[n]{P(b)}$、$\sqrt[n]{P(c)}$ 也为某个锐角三角形的三边长.

7. 同九年级第 8 题.

8. 如图 2,联结 BI 并延长,与$\odot O$ 交于点 S.

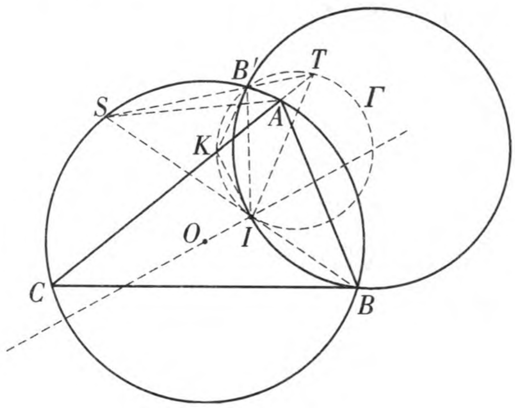

图 2

易知,$SA=SC=SI$.

延长 SB',与直线 CA 交于点 T.

由对称性知 $IB=IB'$.

于是,$\angle IB'B=\angle IBB'\triangleq\alpha$.

又 $OB=OB'$,则点 B'在$\odot O$ 上.

故$\angle ATS=\angle SAC-\angle ASB'$

$=\angle SCA-\angle ACB'=\angle SCB'=\angle B'AS$

$\Rightarrow\triangle SAB'\backsim\triangle STA$

$\Rightarrow SB'\cdot ST=SA^2=SI^2$.

记$\triangle TB'I$ 的外接圆为 Γ. 则 SI 为圆 Γ 的切线.

于是,$\angle ITB'=\angle B'IS=2\alpha$.

故$\angle ITA=\angle ITB'-\alpha=2\alpha-\alpha=\alpha$.

设 AC 与圆 Γ 交于点 K.

由$\angle KB'I=\angle KTI=\alpha=\angle IB'B$,

$\angle KIB'=\angle KTB'=\alpha=\angle IB'B$,

知 KI、KB'均为$\triangle BB'I$ 外接圆的切线.

十 一 年 级

1. 注意到,

s^2+t^2

$=(\sin^2 64x+\cos^2 64x)+(\sin^2 65x+\cos^2 65x)+2(\sin 64x\cdot\sin 65x+\cos 64x\cdot\cos 65x)$

$=2+2\cos(65x-64x)=2+2\cos x$

为有理数.

于是,$\cos x$ 为有理数.

由公式 $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ 及数学归纳法,易知对任意正整数 k,$\cos 2^k x$ 为有理数.

特别地,$\cos 64x$ 为有理数.

因此,构成和式 t 的两项均为有理数.

2. 同十年级第 2 题.

3. 同十年级第 4 题.

4. 当 $n=2\,018$ 时,魔术师可与助手约定:对 $i=1,2,\cdots,2\,017$,当助手保留第 i 张正面朝上的牌时,魔术师就猜第 2 018 张牌是第 i 种颜色的. 这样魔术便可完成.

假设对某个正整数 $n\leqslant 2\,017$,魔术可以完成.

为方便叙述,用(a,i)表示第 a 张牌是第 i 种颜色的,其中,$1\leqslant a\leqslant n$,$1\leqslant i\leqslant 2\,017$.

对 n 张牌而言,注意到每种颜色的牌数为 1 000 000(大于 n),于是,共有$2\,017^n$ 种不同的状态(每个位置上有 2 017 种可能的颜色),每种状态相当于一个形如

$$\{(1,i_1),(2,i_2),\cdots,(n,i_n)\}$$

的集合,其中,$i_1,i_2,\cdots,i_n\in\{1,2,\cdots,2\,017\}$.

对任意的 a、i,因为当魔术师看到(a,i)后,总可以猜出至少一个$(b,j)(b\neq a)$,而含(a,i)与(b,j)的状态一共只有 $2\,017^{n-2}$种,所以,魔术师可以猜出的不同状态的总数(即 $2\,017^n$)不超过$2\,017\times 2\,017^{n-2}n$.

从而,$n\geqslant 2\,017$.

这表明,n 只能为 2 017. 进而,从任意一个(a,i)所能猜出的$(b,j)(b\neq a)$是唯一的.

因此,连一条从(a,i)到(b,j)的边$(a,i)\rightarrow(b,j)$,并称 a、b 是“关联”的(关联是相互的,即 b、a 也是关联的),且任意两种不同的猜法$(a,i)\rightarrow(b,j)$与$(c,k)\rightarrow(d,l)$

所对应的状态不能出现重复.

这表明，c、d 中至少有一个属于 $\{a,b\}$.

下面证明一个引理.

引理 若 $(a,i)\to(b,j)$，则必存在 $k\neq i$，使得 $(b,j)\to(a,k)$.

证明 设 $(b,j)\to(c,k)$. 若 $c\neq a$ 或 $(c,k)=(a,i)$，则一个含 (a,i)、(b,j)、(c,k) 的状态有 $(a,i)\to(b,j)$ 与 $(b,j)\to(c,k)$ 这两种猜法，矛盾.

从而，必存在一个 $k\neq i$，使得

$(b,j)\to(a,k)$.

引理得证.

不妨设 1、2 是关联的.

注意到，3 必与另一个数 a 关联，由前讨论，知 $a\in\{1,2\}$，不妨设 $a=1$.

此时，对任意一个 $b(4\leqslant b\leqslant 2\ 017)$，由于 b 必与另一数 c 关联，而 1、2 关联，1、3 关联，于是，$c\in\{1,2\}$，$c\in\{1,3\}$. 从而，$c=1$，即 1、b 是关联的.

这表明，2，3，…，2 017 均与 1 关联.

由此，对任意的 $t\in\{2,3,\cdots,2\ 017\}$，结合引理，知总存在 i_t、$j_t\in\{1,2,\cdots,2\ 017\}$，使得 $(1,i_t)\to(t,j_t)$.

再反复利用引理，知存在 k_t、$l_t\in\{1,2,\cdots,2\ 017\}$ $(k_t\neq i_t,l_t\neq j_t)$，使得

$(t,j_t)\to(1,k_t)\to(t,l_t)$.

故 $i_2,k_2,i_3,k_3,\cdots,i_{2\,017},k_{2\,017}$ 互不相同，但 $2\times 2\ 016>2\ 017$，矛盾. 这表明，$n=2\ 017$ 的情形是不能完成魔术的.

综上，n 的最小值为 2 018.

5. 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$. 则 $a<b+c$.

由 $P(x)$ 的性质知

$P(a)\geqslant P(b)\geqslant P(c)>0$.

于是，仅需证明

$\sqrt[n]{P(a)}<\sqrt[n]{P(b)}+\sqrt[n]{P(c)}$.

设 $P(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots+p_0$.

考虑 $G(x)=\dfrac{P(x)}{x^n}$. 易知，

$$G(a)=p_n+\frac{p_{n-1}}{a}+\cdots+\frac{p_0}{a^n}$$

$$\leqslant p_n+\frac{p_{n-1}}{b}+\cdots+\frac{p_0}{b^n}=G(b).$$

类似地，$G(a)\leqslant G(c)$.

故 $\sqrt[n]{P(a)}=a\sqrt[n]{G(a)}$

$<(b+c)\sqrt[n]{G(a)}$

$\leqslant b\sqrt[n]{G(b)}+c\sqrt[n]{G(c)}$

$=\sqrt[n]{P(b)}+\sqrt[n]{P(c)}$.

6. 首先给出棋子数为 3 800 的例子.

第 1 到 5 行与第 11 到 200 列的交叉格及第 1 到 5 列与第 11 到 200 行的交叉格均放红棋；第 6 到 10 行与第 11 到 200 列的交叉格及第 6 到 10 列与第 11 到 200 行的交叉格均放蓝棋. 易验证，每枚棋子恰能看见五枚异色棋子. 此时，总棋子数为

$5\times 190\times 4=3\ 800$.

下面假设有一种符合要求的棋子放法，使得棋盘上棋子总数超过 3 800. 此时，将每枚棋子与它能看见的棋子之间用边相连，这样以每枚棋子为端点的边数恰为 5. 于是，总边数超过

$\dfrac{1}{2}\times 5\times 3\ 800=9\ 500$.

考虑任意一行：若该行中没有异色的棋子，则该行棋子数不超过 200，边数为 0；若该行中有异色的棋子，不妨设有红棋 R 与蓝棋 B，因为红棋 R 恰能看见五枚异色棋子，所以，该行至多有五枚蓝棋. 类似地，该行至多有五枚红棋. 于是，该行的棋子数不超过 10，边数不超过 25.

假如存在 191 行含有异色棋子，则棋盘上的棋子总数不超过

$191\times 10+9\times 200<3\ 800$，

与假设矛盾. 这表明，至多仅有 190 行含异色

棋子. 从而,连接同行异色棋子的边数不超过

$190\times25=4\ 750.$

类似地,连接同列异色棋子的边数不超过4 750.

因此,总边数不超过

$2\times4\ 750=9\ 500,$

也得矛盾.

这表明,棋盘上棋子总数必不超过3 800.

综上,所求最大值为3 800.

7. 只需证明:对任意正整数 N,黑板上写出的数总是不超过 N^2 个,且当 $N\geqslant2$ 时,黑板上写出的数少于 N^2 个.

显然,$N=1$ 时结论成立.

对于 $N\geqslant2$,假设结论对小于 N 的正整数均已成立. 将 N 的正因子从小到大依次列为

$1=d_1<d_2<\cdots<d_k<d_{k+1}=N.$

按照操作规则,第一步擦掉 N 并写上 $d_1,d_2,\cdots,d_k$. 由归纳假设,知对任意一个 d_j $(1\leqslant j\leqslant k)$ 的操作至多只能产生 d_j^2 个数. 故黑板上的数的个数不超过 $\sum\limits_{j=1}^{k}d_j^2$.

注意到,N 的正因子也可记为

$$\frac{N}{d_{k+1}}<\frac{N}{d_k}<\cdots<\frac{N}{d_2}<\frac{N}{d_1}.$$

则 $\sum\limits_{j=1}^{k}d_j^2=\sum\limits_{j=2}^{k+1}\frac{N^2}{d_j^2}=N^2\sum\limits_{j=2}^{k+1}\frac{1}{d_j^2}$

$$\leqslant N^2\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j^2}<N^2\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{(j-1)j}$$

$$=N^2\sum_{j=2}^{N}\left(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}\right)<N^2.$$

从而,在 N 的情形下,黑板上写出的数必少于 N^2 个.

由数学归纳法,知结论成立.

进而,满足条件的正整数仅有 $N=1$.

8. 由条件知

$\angle ABI_B=\frac{1}{2}\angle ABC$

$=\frac{1}{2}\angle ABD+\frac{1}{2}\angle DBC$

$=\angle I_ABD+\angle DBI_C=\angle I_ABI_C.$

类似地,$\angle BAI_A=\angle I_BAI_D$.

于是,$\angle BAI_B=\angle I_AAI_D$.

如图3,在射线 AB 上取一点 P,使得 $\angle API_B=\angle AI_AI_D$.

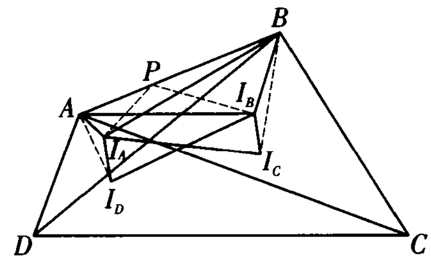

图3

则$\triangle API_B$ 与$\triangle AI_AI_D$ 顺向相似.

进而,$\triangle API_A$ 与$\triangle AI_BI_D$ 顺向相似.

据条件知$\angle BI_AI_C+\angle AI_AI_D=180°$.

注意到,

$180°>\angle I_ABI_C+\angle BI_AI_C$

$=\angle ABI_B+180°-\angle API_B$.

于是,$\angle API_B>\angle ABI_B$.

从而,点 P 在线段 AB 上.

故$\angle BI_AI_C=180°-\angle AI_AI_D$

$=180°-\angle API_B=\angle BPI_B$.

再结合$\angle I_ABI_C=\angle ABI_B$,知$\triangle BPI_B$ 与$\triangle BI_AI_C$ 顺向相似.

进而,$\triangle BPI_A$ 与$\triangle BI_BI_C$ 顺向相似.

故$\angle BI_BI_C+\angle AI_BI_D$

$=\angle BPI_A+\angle API_A=180°$,

即 $\angle BI_BA+\angle I_CI_BI_D=180°$.

(熊斌 提供)

更 正

2017年第10期的《数学奥林匹克问题》栏目高546题图中应去掉线段 MP、AP 及点 P. 由于编校失误,给读者带来不便,深表歉意。

本刊编辑部