

# 第43届俄罗斯数学奥林匹克(十、十一年级)

中图分类号: G424.79

文献标识码: A

文章编号: 1005-6416(2017)12-0033-06

## 十 年 级

1. 已知直角坐标平面上有两个首项系数为1的二次函数的图像 $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$ 和两条不平行的直线 $l_1$ 、 $l_2$ .若直线 $l_1$ 被 $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$ 所截得线段长度相等,直线 $l_2$ 被 $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$ 所截得线段长度也相等,证明:图像 $\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2$ 重合.

2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$ , $O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心,射线 $BO$ 、 $CO$ 分别与边 $AC$ 、 $AB$ 交于点 $B'$ 、 $C'$ ,直线 $l$ 过点 $C'$ 且与 $AC$ 平行.证明:直线 $l$ 与 $\triangle B'OC$ 的外接圆相切.

3. 桌上有数目分别为100、101、102的三堆石头.甲、乙两人轮流进行如下操作:每个人第一步可以从任意一堆中取石头,由甲开始,每一步,其中一人从某一堆中取出一块石头,但不能从此人上轮游戏中取过石头的那一堆中取,不能进行下一步者为输.问:无论对手如何操作,谁有必胜策略?

4. 在黑板上写有 $n$ 个正数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ .对每个 $i=1, 2, \dots, n$ ,维萨亚想要写出一个数 $b_i$  ( $b_i \geq a_i$ ),使得对于任意的 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , $\frac{b_i}{b_j}$ 与 $\frac{b_j}{b_i}$ 至少有一个为整数.证明:维萨亚可写出 $b_1, b_2, \dots, b_n$ ,使得

$$b_1 b_2 \cdots b_n \leq 2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

5. 设 $n$ 为合数,对 $n$ 的每个真因子 $d$ (正整数 $n$ 的真因子是指 $d|n$ ,且 $1 < d < n$ ),在黑板上写上数 $d+1$ .求所有的正整数 $n$ ,使得写在黑板上的所有数恰为某个正整数 $m$ 所有真因子.

6. 设 $P(x)$ 是次数为 $n$  ( $n \geq 2$ )的非负系数多项式, $a, b, c$ 为某个锐角三角形的三边

长.证明: $\sqrt[n]{P(a)}$ 、 $\sqrt[n]{P(b)}$ 、 $\sqrt[n]{P(c)}$ 也为某个锐角三角形的三边长.

7. 同九年级第8题.

8. 设点 $O, I$ 分别为不等边 $\triangle ABC$ 的外心、内心, $B'$ 为点 $B$ 关于直线 $OI$ 的对称点,且 $B'$ 在 $\angle ABI$ 的内部.证明: $\triangle BIB'$ 的外接圆在点 $B', I$ 处的两条切线与 $AC$ 三线共点.

## 十 一 年 级

1. 设实数 $x$ 使得

$$s = \sin 64x + \sin 65x$$

与  $t = \cos 64x + \cos 65x$

均为有理数.证明:这两个和式之一的右边两项均为有理数.

2. 同十年级第2题.

3. 同十年级第4题.

4. 一位魔术师与其助手有一擦牌,所有牌的反面均相同,正面为2 017种颜色之一(每种颜色有1 000 000张牌).魔术是:魔术师先离开房间,观众将 $n$ 张正面朝上的牌排成一行放在桌上,魔术师的助手将其中 $n-1$ 张牌在原位翻过来,只保留一张牌正面朝上,然后魔术师进入房间,观察桌面上的牌,选择一张背面朝上的牌,猜出其正面的颜色.求 $n$ 的最小值,使得魔术师与其助手可根据某种事先确定的策略完成这样的魔术.

5. 设 $P(x)$ 是次数为 $n$  ( $n \geq 2$ )的非负系数多项式, $a, b, c$ 为某个三角形的三边长.证明: $\sqrt[n]{P(a)}$ 、 $\sqrt[n]{P(b)}$ 、 $\sqrt[n]{P(c)}$ 也为某个三角形的三边长.

6. 在 $200 \times 200$ 的棋盘中,有些格子里放了一枚红色或蓝色的棋子,其他的格子是空

的. 若两枚棋子处于同一行或同一列, 则称一枚棋子能“看见”另一枚棋子. 假设每枚棋子恰能看见五枚异色棋子(可能也会看见一些同色棋子). 求棋盘上棋子总数的最大值.

7. 在起始时刻, 黑板上写着一个正整数  $N$ . 每一步, 米莎可以选择一个已经写在黑板上的正整数  $a > 1$ , 擦掉它, 再写上除了它本身以外的所有正因子. 已知经过若干步后, 黑板上恰有  $N^2$  个数. 求  $N$  的所有可能值.

8. 在凸四边形  $ABCD$  中,  $I_A, I_B, I_C, I_D$  分别为  $\triangle DAB, \triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA$  的内心. 若  $\angle BI_A A + \angle I_C I_A I_D = 180^\circ$ , 证明:

$$\angle BI_B A + \angle I_C I_B I_D = 180^\circ.$$

## 参 考 答 案

### 十 年 级

1. 设  $\Gamma_1: f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$ ,

设  $\Gamma_2: f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ .

由条件, 知直线  $l_1, l_2$  的斜率存在, 设

$$l_1: y = k_1x + b_1,$$

$$l_2: y = k_2x + b_2.$$

设直线  $l_1$  与  $\Gamma_1, \Gamma_2$  分别交于点

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ .

$$\text{联立方程} \begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = x^2 + p_1x + q_1, \end{cases} \quad \text{消元得}$$

$$x^2 + (p_1 - k_1)x + q_1 - b_1 = 0. \quad \text{①}$$

由  $x_1, x_2$  为方程①的两根, 则

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(p_1 - k_1)^2 - 4(q_1 - b_1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } |AB| &= \sqrt{1 + k_1^2} |x_1 - x_2| \\ &= \sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{(p_1 - k_1)^2 - 4(q_1 - b_1)}. \end{aligned}$$

类似地,

$$|CD| = \sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{(p_2 - k_1)^2 - 4(q_2 - b_1)}.$$

由  $|AB| = |CD|$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sqrt{(p_1 - k_1)^2 - 4(q_1 - b_1)} \\ &= \sqrt{(p_2 - k_1)^2 - 4(q_2 - b_1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (p_1 - p_2)(p_1 + p_2 - 2k_1) = 4(q_1 - q_2).$$

若  $p_1 \neq p_2$ , 则

$$k_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{2(q_1 - q_2)}{p_1 - p_2}.$$

$$\text{类似地, } k_2 = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{2(q_1 - q_2)}{p_1 - p_2}.$$

从而,  $k_1 = k_2$ , 与直线  $l_1, l_2$  不平行矛盾.

故  $p_1 = p_2, q_1 = q_2$ , 即图像  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_2$  重合.

2. 如图 1, 联结  $AO$  并延长, 与直线  $l$  交于点  $T$ , 联结  $B'T$ .

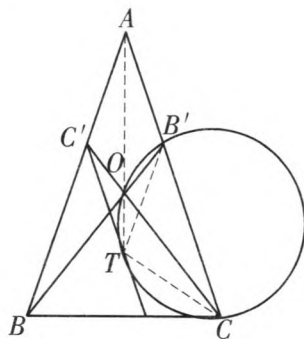


图 1

易知,  $AO$  为  $\triangle ABC$  的对称轴, 且点  $B', C'$  关于  $AO$  对称.

$$\text{故 } \angle B'TO = \angle C'TO. \quad \text{①}$$

而  $l \parallel AC$ , 则

$$\angle C'TO = \angle OAC = \angle OCA. \quad \text{②}$$

由式①、②得  $\angle B'TO = \angle OCA$ .

从而, 点  $T$  在  $\triangle B'OC$  的外接圆上.

又由对称性知

$$\angle OB'T = \angle OC'T = \angle OCA = \angle OTC'$$

$\Rightarrow C'T$  与  $\triangle B'OC$  的外接圆相切.

3. 甲有必胜策略.

记开始时含 100、101、102 块石头的堆分别为  $A, B, C$ .

甲先从  $B$  堆中取一块石头, 三堆块数变为 100、100、102, 均为偶数.

(1) 若乙不从  $B$  堆中取, 则甲每次与乙取同一堆的石头. 由于甲取后每堆石头块数均为偶数, 且只要乙不从其上轮游戏中取过的那堆中取, 甲必不从不自己上轮游戏中取过的那堆中取, 故甲在乙操作后必能操作. 由于

该游戏总能结束,故甲获胜.

(2)若乙从  $B$  堆中取,则甲按照如下规则操作:

乙从  $B$  堆中取,甲就从  $A$  堆中取;

乙从  $A$  堆中取,甲就从  $B$  堆中取;

乙从  $C$  堆中取,甲就从  $C$  堆中取.

于是,甲取完后, $C$  堆总有偶数块石头,且  $A$ 、 $B$  两堆的块数总相等.故只要乙不从上轮取过的石块堆中取,甲必也不从上轮取过的石块堆中取,从而,甲在乙操作后必能操作.由于该游戏总能结束,故甲获胜.

综上,甲有必胜策略.

4. 对于一切  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 均写出一组  $b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn}, b_{ki} = 2^{x_{ki}} a_k$ , 其中,  $x_{ki} \in \mathbf{Z}$ , 且满足  $a_i \leq b_{ki} = 2^{x_{ki}} a_k < 2a_i$ .

则对于任意的  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\frac{b_{ki}}{b_{kj}} = 2^{x_{ki} - x_{kj}}, \frac{b_{kj}}{b_{ki}} = 2^{x_{kj} - x_{ki}}$$

中必有一个为整数.由此,得到了  $n$  组满足条件的  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

下面只需证明:

$$\prod_{k=1}^n b_{k1} b_{k2} \cdots b_{kn} \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_i^n$$

事实上,由  $b_{kk} = a_k$ , 得

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^n b_{k1} b_{k2} \cdots b_{kn} \\ &= \left( \prod_{i=1}^n b_{ii} \right) \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} b_{ji} \right) \\ &= \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} b_{ji} \right). \end{aligned}$$

对于任意的  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 由  $x_{ij}, x_{ji}$  的定义, 知

$$\frac{a_i}{a_j} \leq 2^{x_{ij}} < \frac{2a_i}{a_j}, \frac{a_j}{a_i} \leq 2^{x_{ji}} < \frac{2a_j}{a_i}.$$

$$\text{则 } x_{ij} = \lceil \log_2 \frac{a_i}{a_j} \rceil, x_{ji} = \lceil -\log_2 \frac{a_i}{a_j} \rceil, \text{ 其中,}$$

$\lceil x \rceil$  表示不小于实数  $x$  的最小整数.

进而,  $x_{ij} + x_{ji} = 0$  或  $1$ .

$$\text{于是, } b_{ij} b_{ji} = 2^{x_{ij} + x_{ji}} a_i a_j \leq 2a_i a_j.$$

$$\begin{aligned} & \text{故 } \prod_{k=1}^n b_{k1} b_{k2} \cdots b_{kn} \\ &= \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} b_{ji} \right) \\ &\leq \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} 2a_i a_j \right) \\ &= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_i^n. \end{aligned}$$

5. 设  $n$  的最小真因子为  $p$ .

易知,  $p$  为素数.

又  $p+1$  为  $m$  的最小真因子, 则  $p+1$  也为素数. 故  $p=2$ .

从而,  $3$  为  $m$  的最小真因子.

于是,  $m$  为奇数 (否则,  $m$  有真因子  $2$ ).

由此,  $m$  的真因子均为奇数,  $n$  的真因子均为偶数.

故  $n$  为  $2$  的幂. 设  $n = 2^k (k \in \mathbf{Z}_+, k \neq 1)$ .

从而,  $m$  的最大真因子为  $2^{k-1} + 1$ , 即

$$m = 3(2^{k-1} + 1).$$

若  $k \geq 4$ , 则  $2^{k-2}$  为  $n$  的真因子, 且  $2^{k-2} \geq 4$ . 故  $2^{k-2} + 1 \geq 5$  为  $m$  的真因子.

从而,  $(2^{k-2} + 1) \mid (2^{k-1} + 1)$ .

$$\text{但 } (2^{k-2} + 1, 2^{k-1} + 1) = (2^{k-1} + 1, 1) = 1,$$

矛盾.

于是,  $k=2, 3$ , 即  $n=4, 8$ .

经检验,  $n=4, 8$  均满足题意.

因此,  $n=4$  或  $8$ .

6. 不妨设  $a \geq b \geq c$ .

由题意, 知  $a^2 < b^2 + c^2$ .

设  $P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$ , 其中,  $p_n > 0, p_i \geq 0 (i=0, 1, \dots, n-1)$ .

$$\text{记 } G(x) = \frac{P(x)}{x^n}.$$

$$\text{则 } G(a) = p_n + \frac{p_{n-1}}{a} + \dots + \frac{p_0}{a^n}$$

$$\leq p_n + \frac{p_{n-1}}{b} + \dots + \frac{p_0}{b^n} = G(b).$$

类似地,  $G(a) \leq G(c)$ .

$$\text{故 } \sqrt[n]{P^2(a)} = a^2 \sqrt[n]{G^2(a)}$$

$$\begin{aligned} &< (b^2 + c^2) \sqrt[n]{G^2(a)} \\ &\leq b^2 \sqrt[n]{G^2(b)} + c^2 \sqrt[n]{G^2(c)} \\ &= \sqrt[n]{P^2(b)} + \sqrt[n]{P^2(c)}. \end{aligned}$$

因此,  $\sqrt[n]{P(a)}$ 、 $\sqrt[n]{P(b)}$ 、 $\sqrt[n]{P(c)}$  也为某个锐角三角形的三边长.

7. 同九年级第 8 题.

8. 如图 2, 联结  $BI$  并延长, 与  $\odot O$  交于点  $S$ .

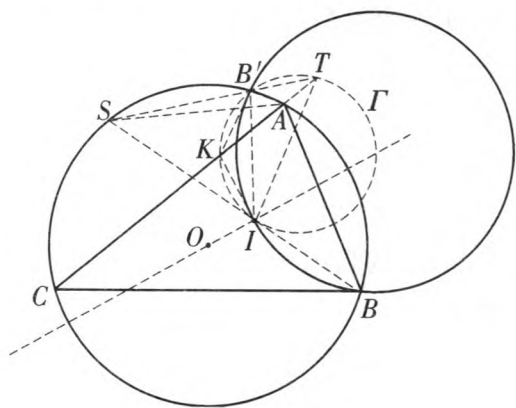


图 2

易知,  $SA = SC = SI$ .

延长  $SB'$ , 与直线  $CA$  交于点  $T$ .

由对称性知  $IB = IB'$ .

于是,  $\angle IB'B = \angle IBB' \triangleq \alpha$ .

又  $OB = OB'$ , 则点  $B'$  在  $\odot O$  上.

$$\begin{aligned} \text{故 } \angle ATS &= \angle SAC - \angle ASB' \\ &= \angle SCA - \angle ACB' = \angle SCB' = \angle B'AS \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \triangle SAB' \sim \triangle STA$$

$$\Rightarrow SB' \cdot ST = SA^2 = SI^2.$$

记  $\triangle TB'I$  的外接圆为  $\Gamma$ . 则  $SI$  为圆  $\Gamma$  的切线.

于是,  $\angle ITB' = \angle B'IS = 2\alpha$ .

故  $\angle ITA = \angle ITB' - \alpha = 2\alpha - \alpha = \alpha$ .

设  $AC$  与圆  $\Gamma$  交于点  $K$ .

由  $\angle KB'I = \angle KTI = \alpha = \angle IB'B$ ,

$\angle KIB' = \angle KTB' = \alpha = \angle IB'B$ ,

知  $KI$ 、 $KB'$  均为  $\triangle BB'I$  外接圆的切线.

## 十一年級

1. 注意到,

$$\begin{aligned} &s^2 + t^2 \\ &= (\sin^2 64x + \cos^2 64x) + (\sin^2 65x + \cos^2 65x) + \\ &\quad 2(\sin 64x \cdot \sin 65x + \cos 64x \cdot \cos 65x) \\ &= 2 + 2\cos(65x - 64x) = 2 + 2\cos x \end{aligned}$$

为有理数.

于是,  $\cos x$  为有理数.

由公式  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$  及数学归纳法, 易知对任意正整数  $k$ ,  $\cos 2^k x$  为有理数.

特别地,  $\cos 64x$  为有理数.

因此, 构成和式  $t$  的两项均为有理数.

2. 同十年级第 2 题.

3. 同十年级第 4 题.

4. 当  $n = 2\,018$  时, 魔术师可与助手约定: 对  $i = 1, 2, \dots, 2\,017$ , 当助手保留第  $i$  张正面朝上的牌时, 魔术师就猜第  $2\,018$  张牌是第  $i$  种颜色的. 这样魔术便可完成.

假设对某个正整数  $n \leq 2\,017$ , 魔术可以完成.

为方便叙述, 用  $(a, i)$  表示第  $a$  张牌是第  $i$  种颜色的, 其中,  $1 \leq a \leq n, 1 \leq i \leq 2\,017$ .

对  $n$  张牌而言, 注意到每种颜色的牌数为  $1\,000\,000$  (大于  $n$ ), 于是, 共有  $2\,017^n$  种不同的状态 (每个位置上有  $2\,017$  种可能的颜色), 每种状态相当于一个形如

$$\{(1, i_1), (2, i_2), \dots, (n, i_n)\}$$

的集合, 其中,  $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, 2\,017\}$ .

对任意的  $a, i$ , 因为当魔术师看到  $(a, i)$  后, 总可以猜出至少一个  $(b, j)$  ( $b \neq a$ ), 而含  $(a, i)$  与  $(b, j)$  的状态一共只有  $2\,017^{n-2}$  种, 所以, 魔术师可以猜出的不同状态的总数 (即  $2\,017^n$ ) 不超过  $2\,017 \times 2\,017^{n-2} n$ .

从而,  $n \geq 2\,017$ .

这表明,  $n$  只能为  $2\,017$ . 进而, 从任意一个  $(a, i)$  所能猜出的  $(b, j)$  ( $b \neq a$ ) 是唯一的.

因此, 连一条从  $(a, i)$  到  $(b, j)$  的边  $(a, i) \rightarrow (b, j)$ , 并称  $a, b$  是“关联”的 (关联是相互的, 即  $b, a$  也是关联的), 且任意两种不同的猜法  $(a, i) \rightarrow (b, j)$  与  $(c, k) \rightarrow (d, l)$

所对应的状态不能出现重复.

这表明,  $c, d$  中至少有一个属于  $\{a, b\}$ .

下面证明一个引理.

引理 若  $(a, i) \rightarrow (b, j)$ , 则必存在  $k \neq i$ , 使得  $(b, j) \rightarrow (a, k)$ .

证明 设  $(b, j) \rightarrow (c, k)$ . 若  $c \neq a$  或  $(c, k) = (a, i)$ , 则一个含  $(a, i), (b, j), (c, k)$  的状态有  $(a, i) \rightarrow (b, j)$  与  $(b, j) \rightarrow (c, k)$  这两种猜法, 矛盾.

从而, 必存在一个  $k \neq i$ , 使得

$(b, j) \rightarrow (a, k)$ .

引理得证.

不妨设 1, 2 是关联的.

注意到, 3 必与另一个数  $a$  关联, 由前讨论, 知  $a \in \{1, 2\}$ , 不妨设  $a = 1$ .

此时, 对任意一个  $b (4 \leq b \leq 2\ 017)$ , 由于  $b$  必与另一数  $c$  关联, 而 1, 2 关联, 1, 3 关联, 于是,  $c \in \{1, 2\}, c \in \{1, 3\}$ . 从而,  $c = 1$ , 即 1,  $b$  是关联的.

这表明, 2, 3,  $\dots, 2\ 017$  均与 1 关联.

由此, 对任意的  $t \in \{2, 3, \dots, 2\ 017\}$ , 结合引理, 知总存在  $i_t, j_t \in \{1, 2, \dots, 2\ 017\}$ , 使得  $(1, i_t) \rightarrow (t, j_t)$ .

再反复利用引理, 知存在  $k_t, l_t \in \{1, 2, \dots, 2\ 017\} (k_t \neq i_t, l_t \neq j_t)$ , 使得

$(t, j_t) \rightarrow (1, k_t) \rightarrow (t, l_t)$ .

故  $i_2, k_2, i_3, k_3, \dots, i_{2\ 017}, k_{2\ 017}$  互不相同, 但  $2 \times 2\ 016 > 2\ 017$ , 矛盾. 这表明,  $n = 2\ 017$  的情形是不能完成魔术的.

综上,  $n$  的最小值为 2 018.

5. 不妨设  $a \geq b \geq c > 0$ . 则  $a < b + c$ .

由  $P(x)$  的性质知

$$P(a) \geq P(b) \geq P(c) > 0.$$

于是, 仅需证明

$$\sqrt[n]{P(a)} < \sqrt[n]{P(b)} + \sqrt[n]{P(c)}.$$

$$\text{设 } P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0.$$

考虑  $G(x) = \frac{P(x)}{x^n}$ . 易知,

$$\begin{aligned} G(a) &= p_n + \frac{p_{n-1}}{a} + \dots + \frac{p_0}{a^n} \\ &\leq p_n + \frac{p_{n-1}}{b} + \dots + \frac{p_0}{b^n} = G(b). \end{aligned}$$

类似地,  $G(a) \leq G(c)$ .

$$\text{故 } \sqrt[n]{P(a)} = a \sqrt[n]{G(a)}$$

$$< (b+c) \sqrt[n]{G(a)}$$

$$\leq b \sqrt[n]{G(b)} + c \sqrt[n]{G(c)}$$

$$= \sqrt[n]{P(b)} + \sqrt[n]{P(c)}.$$

6. 首先给出棋子数为 3 800 的例子.

第 1 到 5 行与第 11 到 200 列的交叉格及第 1 到 5 列与第 11 到 200 行的交叉格均放红棋; 第 6 到 10 行与第 11 到 200 列的交叉格及第 6 到 10 列与第 11 到 200 行的交叉格均放蓝棋. 易验证, 每枚棋子恰能看见五枚异色棋子. 此时, 总棋子数为

$$5 \times 190 \times 4 = 3\ 800.$$

下面假设有一种符合要求的棋子放法, 使得棋盘上棋子总数超过 3 800. 此时, 将每枚棋子与它能看见的棋子之间用边相连, 这样以每枚棋子为端点的边数恰为 5. 于是, 总边数超过

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 3\ 800 = 9\ 500.$$

考虑任意一行: 若该行中没有异色的棋子, 则该行棋子数不超过 200, 边数为 0; 若该行中有异色的棋子, 不妨设有红棋  $R$  与蓝棋  $B$ , 因为红棋  $R$  恰能看见五枚异色棋子, 所以, 该行至多有五枚蓝棋. 类似地, 该行至多有五枚红棋. 于是, 该行的棋子数不超过 10, 边数不超过 25.

假如存在 191 行含有异色棋子, 则棋盘上的棋子总数不超过

$$191 \times 10 + 9 \times 200 < 3\ 800,$$

与假设矛盾. 这表明, 至多仅有 190 行含异色

棋子. 从而, 连接同行异色棋子的边数不超过  $190 \times 25 = 4\,750$ .

类似地, 连接同列异色棋子的边数不超过 4 750.

因此, 总边数不超过

$$2 \times 4\,750 = 9\,500,$$

也得矛盾.

这表明, 棋盘上棋子总数必不超过 3 800.

综上, 所求最大值为 3 800.

7. 只需证明: 对任意正整数  $N$ , 黑板上写出的数总是不超过  $N^2$  个, 且当  $N \geq 2$  时, 黑板上写出的数少于  $N^2$  个.

显然,  $N=1$  时结论成立.

对于  $N \geq 2$ , 假设结论对小于  $N$  的正整数均已成立. 将  $N$  的正因子从小到大依次列为

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k < d_{k+1} = N.$$

按照操作规则, 第一步擦掉  $N$  并写上  $d_1, d_2, \dots, d_k$ . 由归纳假设, 知对任意一个  $d_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) 的操作至多只能产生  $d_j^2$  个数. 故

黑板上的数的个数不超过  $\sum_{j=1}^k d_j^2$ .

注意到,  $N$  的正因子也可记为

$$\frac{N}{d_{k+1}} < \frac{N}{d_k} < \cdots < \frac{N}{d_2} < \frac{N}{d_1}.$$

$$\text{则 } \sum_{j=1}^k d_j^2 = \sum_{j=2}^{k+1} \frac{N^2}{d_j^2} = N^2 \sum_{j=2}^{k+1} \frac{1}{d_j^2}$$

$$\leq N^2 \sum_{j=2}^N \frac{1}{j^2} < N^2 \sum_{j=2}^N \frac{1}{(j-1)j}$$

$$= N^2 \sum_{j=2}^N \left( \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) < N^2.$$

从而, 在  $N$  的情形下, 黑板上写出的数必少于  $N^2$  个.

由数学归纳法, 知结论成立.

进而, 满足条件的正整数仅有  $N=1$ .

8. 由条件知

$$\angle ABI_B = \frac{1}{2} \angle ABC$$

$$= \frac{1}{2} \angle ABD + \frac{1}{2} \angle DBC$$

$$= \angle I_A BD + \angle DBI_C = \angle I_A BI_C.$$

类似地,  $\angle BAI_A = \angle I_B AI_D$ .

于是,  $\angle BAI_B = \angle I_A AI_D$ .

如图 3, 在射线  $AB$  上取一点  $P$ , 使得  $\angle API_B = \angle AI_A I_D$ .

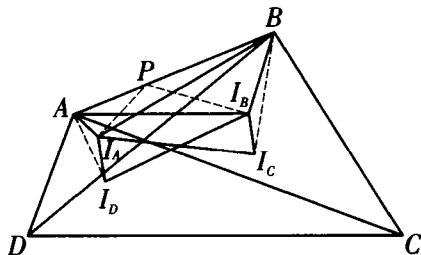


图 3

则  $\triangle API_B$  与  $\triangle AI_A I_D$  顺向相似.

进而,  $\triangle API_A$  与  $\triangle AI_B I_D$  顺向相似.

据条件知  $\angle BI_A I_C + \angle AI_A I_D = 180^\circ$ .

注意到,

$$180^\circ > \angle I_A BI_C + \angle BI_A I_C \\ = \angle ABI_B + 180^\circ - \angle API_B.$$

于是,  $\angle API_B > \angle ABI_B$ .

从而, 点  $P$  在线段  $AB$  上.

$$\text{故 } \angle BI_A I_C = 180^\circ - \angle AI_A I_D \\ = 180^\circ - \angle API_B = \angle BPI_B.$$

再结合  $\angle I_A BI_C = \angle ABI_B$ , 知  $\triangle BPI_B$  与  $\triangle BI_A I_C$  顺向相似.

进而,  $\triangle BPI_A$  与  $\triangle BI_B I_C$  顺向相似.

$$\text{故 } \angle BI_B I_C + \angle AI_B I_D \\ = \angle BPI_A + \angle API_A = 180^\circ,$$

即  $\angle BI_B A + \angle I_C I_B I_D = 180^\circ$ .

(熊斌 提供)

### 更正

2017 年第 10 期的《数学奥林匹克问题》栏目高 546 题图中应去掉线段  $MP$ 、 $AP$  及点  $P$ . 由于编校失误, 给读者带来不便, 深表歉意.

本刊编辑部