2018年全国初中数学竞赛(初三组)初赛试题参考答案和评分标准

一、1. D　2. B　3. A　4. B　5. C　6. C

二、7. 1　8. $4<k<4\sqrt{2}$　9. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{32-4\sqrt{15}}{7}$　10. ①③

三、11. 设 $y=x^2+2x$,则原式可化为 $y+\frac{m^2-1}{y-2m}=0$,即 $y^2-2my+m^2-1=0$. ………… 5分

解得 $y_1=m+1$, $y_2=m-1$.

即 $x^2+2x=m+1$或$x^2+2x=m-1$. ………… 10分

所以 $x^2+2x=m+1$ 的判别式为 $\Delta_1=4m+8$,

$x^2+2x=m-1$ 的判别式为 $\Delta_2=4m$. ………… 15分

因为 $\Delta_1>\Delta_2$,方程有三个不相等的实数根,所以 $\Delta=4m=0$, 即 $m=0$.

即 $x^2+2x+1=0$ 或 $x^2+2x-1=0$. 解得 $x_1=-1$, $x_2=\sqrt{2}-1$, $x_3=-\sqrt{2}-1$. ………… 20分

四、12. (1) 由题可证$\triangle EDH\backsim\triangle BAE$. 所以 $\frac{DH}{AE}=\frac{DE}{AB}$. 所以 $DH=4$. ………… 5分

(2) 过点 F 作 $FG\perp DC$ 于点 G, $FM\perp AD$,交 AD 的延长线于点 M.

因为 $\tan\angle ABE=\frac{3}{4}$, $AB=16$,所以 $AE=12$. 所以 $DE=4$.

因为$\angle MEF+\angle AEB=\angle AEB+\angle ABE=90°$,所以$\angle MEF=\angle ABE$.

又因为 $EF=BE$, $\angle M=\angle A$,所以$\triangle EMF\cong\triangle BAE$.

所以 $ME=AB=16$, $FM=AE=12$. ………… 10分

所以 $DM=ME-DE=12$. 所以 $DM=MF$. 所以四边形 $DGFM$ 是正方形.

所以 $FG=DG=12$. 所以 $CG=4$. 所以 $CF=\sqrt{FG^2+CG^2}=4\sqrt{10}$. ………… 15分

(3) 由题意,可得 $S_{\triangle CEF}=S_{\triangle CHF}+S_{\triangle CHE}=\frac{1}{2}CH\cdot EM$.

由$\triangle EMF\cong\triangle BAE$,得 $EM=AB=16$.

所以 $S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}\times16\times CH=8CH$.

由$\triangle EDH\backsim\triangle BAE$,得 $\frac{DE}{AB}=\frac{DH}{AE}$. ………… 20分

设 AE 为 x,则 $DH=\frac{DE\cdot AE}{AB}=\frac{(16-x)\cdot x}{16}=\frac{1}{16}\left(-x^2+16x\right)=-\frac{1}{16}(x-8)^2+4\leqslant4$.

所以 $DH\leqslant4$. 所以 $CH\geqslant12$. 所以 CH 的最小值是12.

所以$\triangle CEF$面积的最小值是96. ………… 25分

五、13. (1) 抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$. ………… 5分

(2) 因为抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$,所以其对称轴为直线 $x=2$.

连接 BC. 因为点 $B(5,0)$, $C\left(0,-\frac{5}{2}\right)$,所以可求得直线 BC 的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$. ………… 10分

当 $x=2$ 时, $y=1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$.

所以使 $PA+PC$ 的值最小时,点 P 的坐标为 $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$. ………… 15分

(3) 存在,如图所示.

① 当点 N 在 x 轴下方时,因为抛物线的对称轴为直线 $x=2$, $C\left(0,-\frac{5}{2}\right)$,所以 $N_1\left(4,-\frac{5}{2}\right)$; ………… 20分

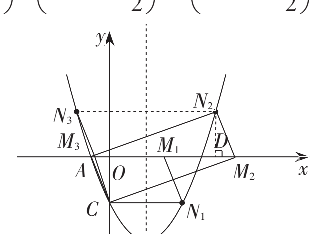
② 当点 N 在 x 轴上方时,过点 N_2 作 $N_2D\perp x$ 轴于点 D.

所以$\triangle AN_2D\cong\triangle M_2CO$. 所以 $N_2D=OC=\frac{5}{2}$,即点 N_2 的纵坐标为 $\frac{5}{2}$.

所以 $\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$. 解得 $x=2+\sqrt{14}$ 或 $x=2-\sqrt{14}$.

所以点 $N_2\left(2+\sqrt{14},\frac{5}{2}\right)$, $N_3\left(2-\sqrt{14},\frac{5}{2}\right)$.

综上所述,符合条件的点 N 的坐标为 $\left(4,-\frac{5}{2}\right)$, $\left(2+\sqrt{14},\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(2-\sqrt{14},\frac{5}{2}\right)$. ………… 25分



第13题图