数学活动课程讲座

数学竞赛中条件求值题的常用解法

邓　超

（福建省福州市第十八中学象园校区，350005）

中图分类号：O122.1　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2018)01－0002－04

（本讲适合初中）

条件求值问题是初中数学竞赛中经常考查的一类问题.此类问题中的多数是有着一定的解题规律可循.本文将结合具体的例子谈谈此类问题的常用解法.

1　直接求解

所谓直接求解，是先把需要求值的代数式（本文称目标代数式）中的所有字母的值一一求出，再代入目标代数式求值.此法虽非该类问题的常见方法，但也不可忽略.其实，直接求解并不是一种特定的方法，而是一种解题思路.

例1　设 a、b、c 均为非零实数，且

$ab=2(a+b)$，$bc=3(b+c)$，$ca=4(a+c)$.

则 $a+b+c=$______.

【**分析**】未知数的个数等于方程的个数，故可以直接求解.

解　由题中等式得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{24},\\ \dfrac{1}{b}=\dfrac{7}{24},\\ \dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{24}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{24}{5},\\ b=\dfrac{24}{7},\\ c=24.\end{cases}$$

故 $a+b+c=\dfrac{24}{5}+\dfrac{24}{7}+24=\dfrac{1128}{35}$.

例2　已知 $a+b+c=1$，　①

$b^2+c^2-4ac+6c+1=0$.　②

求 abc 的值.

【**分析**】方程②缺乏对称性，不太可能直接求 abc 的值，而方程的个数少于未知数的个数，常见的方法就是先通过消元，将某个方程配方后，写成 $m^2+n^2=0$ 的形式，再利用非负数的性质求解.

解　由方程①得 $a=1-b-c$.

代入方程②并整理得

$b^2+5c^2+4bc+2c+1=0$

$\Rightarrow(b+2c)^2+(c+1)^2=0$

$\Rightarrow b+2c=c+1=0\Rightarrow b=2,c=-1$

$\Rightarrow a=1-b-c=0\Rightarrow abc=0$.

2　降幂

所谓降幂，是利用条件代数式（题目条件 $f(x)=0$ 中，若 $f(x)$ 为代数式，则在本文中称作条件代数式）将目标代数式的次数降低.但有时条件代数式的次数大于目标代数式的次数，此时要将条件代数式的次数降低，即对条件代数式进行因式分解.

例3　已知 $(\sqrt{3}+1)x=\sqrt{3}-1$.则

$x^4-5x^3+6x^2-5x+4=$______.

（2013，湖北省黄冈市数学竞赛）

解　由 $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$，得 $x-2=\sqrt{3}$.

平方后得

$x^2-4x+1=0$.　①

用式①对目标代数式进行降幂.作多项

收稿日期：2017－08－31

式除法得

$$x^4-5x^3+6x^2-5x+4$$
$$=(x^2-4x+1)(x^2-x+1)+3=3.$$

例 4 设 $a^3+b^3+3ab=1$. 求 $a+b$ 的值.

【分析】由于目标代数式次数低于条件代数式次数,则要将条件代数式次数降低.

解 设 $a+b-k=0$. 假定

$$a^3+b^3+3ab-1=(a+b-k)Q(x), \quad ①$$

其中,$Q(x)$为二次多项式.

令 $a=0,b=k$.

由式①得

$k^3-1=0 \Rightarrow k=1 \Rightarrow a+b-1=0$.

故 $a^3+b^3+3ab-1$

$=(a+b-1)(a^2-ab+a+b^2+b+1)$

$=0$.

若 $a^2-ab+a+b^2+b+1=0$,则

$a^2-ab+a+b^2+b+1$

$=\frac{1}{2}((a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2)$

$=0$.

此时,$a=b=-1$.

因此,$a+b=1$ 或 -2.

3 公式法

两个常用公式:

(1)$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$;

(2)$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

这两个公式在初中数学竞赛中经常用到,更多的应用可见文献[1].

先给出对称代数式的概念.

对于某一代数式,若交换其中的任意两个字母,所得到的新代数式与原代数式相同,则称此代数式为对称代数式. 若对称代数式为多项式,又称其为对称多项式. 例如,$a+b+c$、$ab+bc+ca$ 和 abc 均为对称代数式,也为对称多项式.

再给出对称多项式的一个基本定理.[2]

定理 对于任意一个 n 元对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,均有唯一的 n 元多项式 $\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n),$$

其中,多项式

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}x_i,\sigma_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}x_ix_j,\cdots,$$

$$\sigma_k=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}^{n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k},\sigma_n=\prod_{i=1}^{n}x_i$$

均为 n 元对称多项式,称为初等对称多项式.

定理表明,任意 n 元对称多项式均能唯一地表示为初等对称多项式的多项式. 笔者认为,该定理可以推广到对称代数式,即可将定理中的多项式全部改为代数式. 这表明,任意 n 元对称代数式均能唯一地表示为初等对称多项式的代数式.

由上述结论,知若目标代数式是二元对称代数式,可假设该式中的两个字母为 x、y,则其必然可用 $x+y$、xy 这两个初等对称多项式表示,求出 $x+y$、xy 的值就能求出目标代数式的值;若目标代数式是三元对称代数式,可假设该式中的三个字母为 a、b、c,则其必然可用 $a+b+c$、$ab+bc+ca$、abc 这三个初等对称多项式表示,求出这三个式子的值(经常需要利用上述的两个常用公式)就能求出目标代数式的值;四元以上的情形极少出现,本文不作讨论.

例 5 已知实数 x、y 满足

$$x+y=3,\frac{1}{x+y^2}+\frac{1}{x^2+y}=\frac{1}{2}.$$

求 x^5+y^5 的值.[3]

(2017,全国初中数学联合竞赛)

【分析】由于目标代数式为对称代数式,则可用 $x+y$、xy 表示. 为此,先求出 xy 的值.

解 由题给方程得

$$2x^2+2y+2x+2y^2=x^3+xy+x^2y^2+y^3$$
$$\Rightarrow 2(x+y)^2-4xy+2(x+y)$$
$$=(x+y)((x+y)^2-3xy)+xy+x^2y^2.$$

将 $x+y=3$ 代入上式得

$(xy)^2-4xy+3=0$

$\Rightarrow xy=1$ 或 $xy=3$(舍去).

又 $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$,

$x^3+y^3=(x+y)((x+y)^2-3xy)=18$,

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=7$,

故 $x^5+y^5=123$.

例6 已知 $a+b+c=5$,

$a^2+b^2+c^2=15, a^3+b^3+c^3=47$.

求 $(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$ 的值.[4]

(2016,全国初中数学联合竞赛(B卷))

【分析】由于目标代数式为对称代数式,考虑用 $a+b+c$、$ab+bc+ca$、abc 表示. 由题意,利用两个常用公式可求出 $ab+bc+ca$、abc 的值.

解 由公式(1)知

$$2(ab+bc+ca)$$
$$=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=10$$
$$\Rightarrow ab+bc+ca=5.$$

由公式(2)知

$$47-3abc=5(15-5)\Rightarrow abc=-1.$$

而 a^2+ab+b^2

$$=(a+b)(a+b+c)-(ab+bc+ca)$$
$$=5(5-c)-5=5(4-c),$$

类似地,$b^2+bc+c^2=5(4-a)$,

$c^2+ca+a^2=5(4-b)$.

故所求式的值为

$$125(4-a)(4-b)(4-c)$$
$$=125(64-16(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-abc)$$
$$=125(64-16\times5+4\times5-(-1))$$
$$=125\times5=625.$$

4 换元法

换元法是数学解题中的常见方法,在条件求值问题中也经常使用.

例7 已知 $a+b+c=1$,

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+5}=0. \quad ①$$

求 $(a+1)^2+(b+3)^2+(c+5)^2$ 的值.

(2017,全国初中数学联赛(初二))

【分析】方程①中的分母有些复杂,考虑用换元法.

解 设 $x=a+1, y=b+3, z=c+5$.

则已知方程可化为

$x+y+z=10$,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0\Rightarrow xy+yz+zx=0.$$

由公式(1)得

$$(a+1)^2+(b+3)^2+(c+5)^2$$
$$=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$
$$=100.$$

例8 已知不全相等的非零实数 a、b、c 满足

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1. \quad ①$$

求 $a+b+c$ 的值.

解 令 $x=\frac{2a^2}{bc}, y=\frac{2b^2}{ca}, z=\frac{2c^2}{ab}$.

于是,$xyz=8$.

故式①可化为

$$\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$$
$$\Rightarrow xyz=x+y+z+2\Rightarrow x+y+z=6$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$$
$$\Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)=0.$$

因为 a、b、c 不全相等,所以,

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$.

因此,$a+b+c=0$.

更多利用换元法解条件求值问题的例子,请见文献[5].

5 韦达定理法

例9 设实数 s、t 满足方程

$19s^2+99s+1=0$，$t^2+99t+19=0$，且 $st\neq1$.

则 $\frac{st+4s+1}{t}=$______.

（1999，“数学周报杯”全国初中数学竞赛）

解 显然，$t\neq0$.

故 $19\left(\frac{1}{t}\right)^2+99\cdot\frac{1}{t}+1=0$.

比较发现 s、$\frac{1}{t}$ 为方程 $19x^2+99x+1=0$ 的两个不同根（因 $st\neq1$，即 $s\neq\frac{1}{t}$）. 则由韦达定理得

$$s+\frac{1}{t}=-\frac{99}{19},\frac{s}{t}=\frac{1}{19}.$$

故 $\frac{st+4s+1}{t}=\left(s+\frac{1}{t}\right)+4\cdot\frac{s}{t}$

$=-\frac{99}{19}+\frac{4}{19}=-5$.

练 习 题

1. 已知实数 x、y 满足

$(x^2+6x+12)(5y^2+2y+1)=\frac{12}{5}$.

则 xy 的值为______.

（2011，湖北省黄冈市数学竞赛）

提示 由条件得

$12=((x+3)^2+3)((5y+1)^2+4)\geqslant12$

$\Rightarrow x=-3,y=-\frac{1}{5}\Rightarrow xy=\frac{3}{5}$.

2. 已知 $a^2+b^2+c^2=1$，

$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$.

求 $a+b+c$ 的值.

提示 由已知式得

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$

$\Rightarrow a+b+c=0$ 或 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

由后者得 $ab+bc+ca=0$.

故 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$

$\Rightarrow a+b+c=\pm1$.

综上，$a+b+c=0,-1,1$.

3. 设实数 ab 满足

$a^2(b^2+1)+b(b+2a)=40$,

$a(b+1)+b=8$.

求 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的值.

（2014，全国初中数学联合竞赛）

提示 将条件中的两个方程变形得

$a^2b^2+(a+b)^2=40,ab+(a+b)=8$.

令 $x=a+b,y=ab$.

于是，$x^2+y^2=40,x+y=8$.

解得 $(x,y)=(2,6)$（舍去）或 $(6,2)$.

故 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{(a+b)^2-2ab}{a^2b^2}=8$.

4. 已知实数 a 满足 $a^5+a+1=0$. 求多项式 a^3-a^2 的值.

提示 注意到，

$a^5+a+1=(a^3-a^2+1)(a^2+a+1)=0$.

因为 $a^2+a+1>0$，所以，

$a^3-a^2+1=0\Rightarrow a^3-a^2=-1$.

5. 已知实数 x、y 满足

$\frac{4}{x^4}-\frac{2}{x^2}=3,y^4+y^2=3$.

则 $\frac{4}{x^4}+y^4$ 的值为______.

（2008，“数学周报杯”全国初中数学竞赛）

提示 通过观察，知 $-\frac{2}{x^2}$ 和 y^2 为方程 $m^2+m=3$ 的两个不同的解.

由韦达定理得

$\frac{4}{x^4}+y^4=m_1^2+m_2^2=(m_1+m_2)^2-2m_1m_2$

$=(-1)^2-2(-3)=7$.

6. 若在实数范围内有

$x^3+px+q=(x-a)(x-b)(x-c)$,

且 $q\neq0$，则 $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=$______.

以圆周上一点为圆心作圆的图的性质及应用

沈 文 选

（湖南省长沙市河西师大，410081）

中图分类号：O123.1 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2018)01－0006－07

（本讲适合高中）

以圆周上一点为圆心作圆的图，即为相交两圆中的一圆过另一圆的圆心的图. 此类图有一系列优美的结论，且是创作有关几何命题的题根. 本文将这些结论作为性质，并以一些数学竞赛试题为例介绍之.

1 知识介绍

性质 1 以$\odot O_1$上一点O为圆心作$\odot O$，两圆交于P、Q两点. 过P、Q中的任一点作$\odot O$的切线与$\odot O_1$交于点A，则A为$\odot O_1$上点O的对径点（直径的端点称为对径点）. 反之，命题亦真.

事实上，如图 1，设过点P作切线，则由$\angle OPA=90°$，知结论成立. 反之，也由$\angle OPA=90°$即证.

在图 1 中，还有下述结论.

推论 1 在性质 1 的条件下，过点P、Q分别作$\odot O$的切线，其交点必为$\odot O_1$上点O的对径点. 反之，命题亦真.

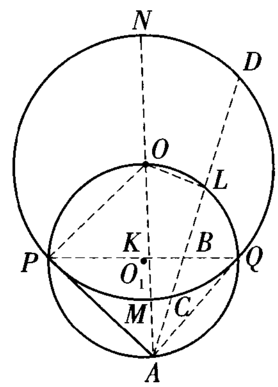

图 1

推论 2 在性质 1 的条件下，过点A且与两圆均相交的直线被两圆截得的线段相等.

事实上，如图 1，直线AO与$\odot O$交于点N、M，显然，O为MN的中点.

过点A的直线与$\odot O$交于点C、D，与$\odot O_1$交于点L. 由$\angle OLA=90°$，即知L为CD的中点.

【注】在图 1 中，若联结AQ、PQ，且直线AN、AD与PQ分别交于点K、B. 则该图便成为角的内切圆图了. 因而，A、M、K、N，A、C、B、D均为调和点列；N、P、M、Q，D、P、C、Q均为

收稿日期：2017－10－16

提示 显然，a、b、c为方程$x^3+px+q=0$的根.

由韦达定理得$a+b+c=0$.

由公式(2)得

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{abc}+3=3.$$

参考文献：

[1] 邓超. 两个多项式乘法公式的应用（初二）[J]. 数理天地：初中版，2016(11).

[2] 孟道骥 著. 高等代数与解析几何（上册）[M]. 北京：科学出版社，1998，8.

[3] 2017 年全国初中数学联合竞赛[J]. 中等数学，2017(7).

[4] 2016 年全国初中数学联合竞赛[J]. 中等数学，2016(12).

[5] 沈毅. 初中数学竞赛中的轮换对称式求值问题[J]. 中等数学，2014(12).