一个新的三角形面积公式

曹嘉兴

（浙江省开化县第二中学 324300）

已知$\triangle ABC$的三边长a、b、c求其面积$\triangle$有我国南宋时期著名数学家秦九韶(1202—1261)在《数书九章》(1247)中提出的三斜求积公式：

$$\triangle=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$$

以及古希腊著名数学家海伦(Heron，约公元1世纪)在《测量学》(Metrica)一书中提出的公式：

$$\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

其中$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. 容易验证秦九韶公式与海伦公式是等价的. 本文给出一个由三角形的三边长求其面积的公式的新形式和对应的证明如下.

定理 在$\triangle ABC$中，三边长分别为$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，半周长为$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，面积为$\triangle$. 设$(p-a)(p-b)=x$，$(p-b)(p-c)=y$，$(p-c)(p-a)=z$，则

$$\triangle=\sqrt{xy+yz+zx}.$$

证明 设$\triangle ABC$的内切圆半径为r，

则 $p-a=r\cot\frac{A}{2}$，$p-b=r\cot\frac{B}{2}$，

$p-c=r\cot\frac{C}{2}$，

所以 $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$

$$=\frac{p-a}{r}+\frac{p-b}{r}+\frac{p-c}{r}$$

$$=\frac{3p-(a+b+c)}{r}$$

$$=\frac{p}{r}=\frac{pr}{r^2}=\frac{\triangle}{r^2}.$$

又因为$\frac{1}{\cot\frac{C}{2}}=\tan\frac{C}{2}=\cot(90^\circ-\frac{C}{2})$

$$=\cot\frac{A+B}{2}=\frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}-1}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}},$$

所以 $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$

$$=\frac{\triangle}{r^2}.$$

所以 $xy+yz+zx=r^4\cot\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}+$

$$r^4\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}+r^4\cot^2\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$=r^4\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

$$=r^4\times\frac{\triangle}{r^2}\times\frac{\triangle}{r^2}=\triangle^2,$$

即$\triangle=\sqrt{xy+yz+zx}$.

推论 如图1，在$\triangle ABC$中，它的内切圆$\odot O$与各边AB、BC、CA分别相切于点D、E、F，设$AD\cdot DB=x$，$BE\cdot EC=y$，$CF\cdot FA=z$，则$\triangle ABC$的面积为

$$\triangle=\sqrt{xy+yz+zx}.$$

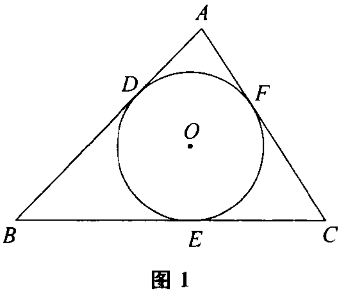


图 1

容易验证本文给出的三角形面积公式与海伦公式也是等价的. 事实上，

$$\triangle=\sqrt{xy+yz+zx}$$

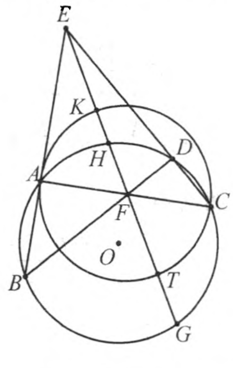
（下转第62页）

2398　设 $a,b,c>0,a+b+c\leqslant 3$,求证:

$$\frac{1}{abc}-\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\geqslant\frac{1}{4}.$$

(陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心　安振平　712000)

2399　如图,已知⊙O 上四点 A、B、C、D,BA 交 CD 于 E,AC 交 BD 于 F,EF 交⊙O 于 H、G,K 为 EF 中点,以点 A、K、C 作圆交 EG 于 T,求证:$HF=TG$.



(江西师范高等专科学校　王建荣　335000,
温州私立第一实验学校　刘沙西　325000)

2400　设△ABC 中的三边长分别为 a,b,c,外接圆和内切圆半径分别为 R,r,求证:

$$R\geqslant\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}\geqslant\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{3}}\geqslant\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\geqslant 2r$$

(河南质量工程职业学院　李永利　467000)

(上接第 58 页)

$\Leftrightarrow\triangle=\sqrt{(p-a)^2(p-b)(p-c)+(p-b)^2(p-a)(p-c)+(p-c)^2(p-a)(p-b)}$

$\Leftrightarrow\triangle=\sqrt{[(p-a)+(p-b)+(p-c)](p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Leftrightarrow\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

本文给出的三角形面积公式同样具有结构对称的形式，因此显得优美．在一些场合还能简化计算(或证明)的过程，现举两例说明．

例 1　(Finsler — Hadwiger 不等式)设△ABC 的各边长分别为 a、b、c，它的面积为△，则

$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$,

当且仅当△ABC 为正三角形时等号成立．

证明　设半周长为 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,

$(p-a)(p-b)=x$，$(p-b)(p-c)=y$，

$(p-c)(p-a)=z$,

则 $a^2-(b-c)^2=4y$，$b^2-(c-a)^2=4z$,

$c^2-(a-b)^2=4x$，$\triangle=\sqrt{xy+yz+zx}$.

所以原不等式等价于

$[a^2-(b-c)^2]+[b^2-(c-a)^2]+[c^2-(a-b)^2]\geqslant 4\sqrt{3}\triangle$

$\Leftrightarrow 4y+4z+4x\geqslant 4\sqrt{3(xy+yz+zx)}$

$\Leftrightarrow x+y+z\geqslant\sqrt{3(xy+yz+zx)}$

$\Leftrightarrow(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0.$

最后的一个不等式显然成立，故原不等式成立．

由最后的不等式不难看出当且仅当 $x=y=z$，也就是 $p-a=p-b=p-c$，即 $a=b=c$ 时等号成立，故当且仅当△ABC 为正三角形时等号成立．

例 2　(Goldner 不等式)设△ABC 的各边长分别为 a、b、c，它的面积为△，则 $a^4+b^4+c^4\geqslant 16\triangle^2$，当且仅当△$ABC$ 为正三角形时等号成立．

证明　设半周长为 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,

$(p-a)(p-b)=x$，$(p-b)(p-c)=y$，

$(p-c)(p-a)=z$,

则$\triangle=\sqrt{xy+yz+zx}$.

因为 $a=(p-b)+(p-c)\geqslant 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$，

所以 $a^4\geqslant 16(p-b)^2(p-c)^2=16y^2$,

同理可得 $b^4\geqslant 16z^2$，$c^4\geqslant 16x^2$.

所以 $a^4+b^4+c^4\geqslant 16(x^2+y^2+z^2)$

$\geqslant 16(xy+yz+zx)=16\triangle^2$.

由上述证明过程不难看出当且仅当 $p-a=p-b=p-c$，即 $a=b=c$ 时等号成立，故当且仅当△ABC 为正三角形时等号成立．

参考文献

[1]单墫．数学名题词典[M]．南京：江苏教育出版社，2002

[2]匡继昌．常用不等式(第三版)[M]．济南：山东科学技术出版社，2004