数学竞赛中的集合问题

周文清
(天津师范大学数学科学学院 2015 级硕士研究生,300387)

中图分类号:O157 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2017)12-0008-04

(本讲适合高中)

集合作为近代数学中的一个重要概念,与高中数学的许多内容有着紧密联系.在数学竞赛中,很多问题可以用集合的语言加以叙述.恰当运用集合思想解题,可以使问题化繁为简,化难为易,有时还可以出奇制胜.对于一些比较复杂的问题,还需要将集合思想与其他知识结合起来.本文列举几例.

1 集合与抽屉原理

抽屉原理在数学问题中有着重要的作用,是使用最朴素的思想解决组合数学问题的一个范例,其内容简明朴素,易于接受.从数量关系的角度分析,每一个抽屉可以看成一个集合,每一个放入抽屉里的物品就可以看成一个元素.

例1 已知平面上有 2 015 个半径为 1 的圆.证明:在这 2 015 个圆中能选出 27 个圆构成的集合 S 满足:S 中的任意两个圆要么均有公共点,要么均没有公共点.[1]

(第 28 届韩国数学奥林匹克)

证明 假设不存在 27 个圆满足任意两个圆均有公共点.

选取一条直线 l,使得 l 既不与这 2 015 个圆的任意两个圆的连心线平行,又不与这些连心线垂直.

设这条直线为 x 轴,2 015 个圆分别记为 $C_1,C_2,\cdots,C_{2015}$,且这 2 015 个圆的圆心的横坐标是递增的.

先证明一个引理.

引理 对于正整数 $i>1$,在圆 $C_1,C_2,\cdots,C_{i-1}$ 中最多有 75 个圆与圆 C_i 有公共点.

证明 依据 x 轴的正向,圆 $C_1,C_2,\cdots,C_{i-1}$ 在圆 C_i 的左边.

设 $\widetilde{C_i}$ 是以圆 C_i 的圆心为圆心、2 为半径的圆.将圆 $\widetilde{C_i}$ 的左半圆三等分为三个扇形.

由假设,知每个扇形最多包含圆 $C_1,C_2,\cdots,C_{i-1}$ 中的 25 个圆的圆心.于是,圆 $\widetilde{C_i}$ 的左半圆最多包含圆 $C_1,C_2,\cdots,C_{i-1}$ 中的 75 个圆的圆心.从而,圆 $C_1,C_2,\cdots,C_{i-1}$ 中最多有 75 个圆与圆 C_i 有公共点.

引理得证.

接下来将这 2 015 个圆依次放入 76 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{76}$ 中.

将圆 $C_1,C_2,\cdots,C_{76}$ 依次放入集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{76}$ 中.对于任意的圆 $C_i(i=77,78,\cdots,2015)$,在圆 $C_1,C_2,\cdots,C_{i-1}$ 中最多有 75 个圆与圆 C_i 有交点,从而,在放入圆 C_i 时,必存在一个集合 $A_j(j\in\{1,2,\cdots,76\})$ 满足 A_j 中不含与圆 C_i 有公共点的圆,将圆 C_i 放入集合 A_j 中.

将这 2 015 个圆放入相应的集合中,且满足任意一个集合中的任意两个圆没有公共点.

记 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

由抽屉原理,知存在一个集合中至少含

收稿日期:2017-09-19

$\left[\frac{2\ 015}{76}\right]+1=27$ 个圆,从中选择 27 个圆构成集合 S 满足条件.

【评注】本题中的集合类似于抽屉,将圆按顺序依次放入集合.

例 2 集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{35}$ 满足 $|A_i|=27$ $(1\leqslant i\leqslant 35)$,且其中任意三个集合的交集之中恰有一个元素.证明:集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{35}$ 中有一个公共的元素.

(2006,伊朗国家队选拔考试(第二轮))

证明 对集合 A_1 而言,$A_2,A_3,\cdots,A_{35}$ 中两个一组能组成 C_{34}^2 个集合对.

因为任意三个集合的交集之中恰有一个元素,所以,每个集合对对应 A_1 中的一个唯一元素.

由抽屉原理,知至少存在 $\left[\frac{\mathrm{C}_{34}^2}{27}\right]+1=21$ 个集合对对应 A_1 中的某个元素 x,21 个集合对至少需要七个集合组成.不妨假设这七个集合分别为 $A_2,A_3,\cdots,A_8$,满足

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_8=\{x\}.$$

下面证明:$x\in A_i(i=9,10,\cdots,35)$.

由于 $A_1,A_2,\cdots,A_8$ 能组成 $\mathrm{C}_8^2=28$ 个集合对,每个集合对对应集合 $A_i(i=9,10,\cdots,35)$ 中唯一的一个元素,而 A_i 中只有 27 个元素,故至少存在两个集合对对应 A_i 中的某个元素 y,存在 $m、n、p、q$ 满足

$$(A_m\cap A_n)\cap(A_p\cap A_q)$$
$$=y(m、n、p、q\in\{1,2,\cdots,8\}),$$
$$\{m,n\}\neq\{p,q\},$$

而任意三个集合的交集之中恰有一个元素,则 $y=x$.

因此,$x\in A_i(i=9,10,\cdots,35)$.

2 集合与算两次

许多关于集合的问题,可以从两个方面考虑:一是集合含有哪些元素,一是元素属于哪些集合,然后将这两个方面综合起来,导出结论.算两次的典型做法就是选择一个适当的量,从两个方面去考虑.

例 3 已知 X 为有限集合,且 $|X|>10$. $A_1,A_2,\cdots,A_{2\,016}$ 为集合 X 的子集,$2|X_i|>|X|$ $(i=1,2,\cdots,2\ 016)$.证明:存在 X 的十元子集 B,使得

$$A_i\cap B\neq\varnothing(i=1,2,\cdots,2\ 016).$$

证明 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}(m>10)$.

若 $x_i\in A_j$,则在 x_i 所在的列与 A_j 所在的行相交的方格处写 1,其余方格处写 0.

于是,各行之和依次为 $|A_1|,|A_2|,\cdots,|A_{2\,016}|$,各列之和依次为 $n_1,n_2,\cdots,n_m$.

故 $\sum\limits_{i=1}^{m}n_i=\sum\limits_{j=1}^{2\,016}|A_j|>2\ 016\times\frac{m}{2}=1\ 008m$.

由抽屉原理,知存在 $n_k>1\ 008$.不妨假设 $n_1>1\ 008$,即 $A_1,A_2,\cdots,A_{2\,016}$ 中至少有 1 009 个集合含有 x_1.设不包含 x_1 的集合为 $B_1,B_2,\cdots,B_s(s\leqslant 1\ 007)$,将 $\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}$ 与 $\{x_2,x_3,\cdots,x_m\}$ 重新构造表格,各行之和依次为 $|B_1|,|B_2|,\cdots,|B_s|$,各列之和依次为 $\widetilde{n_2},\widetilde{n_3},\cdots,\widetilde{n_m}$.则

$$\sum_{i=2}^{m}\widetilde{n_i}=\sum_{j=1}^{s}|B_j|>s\times\frac{m}{2}.$$

由抽屉原理,知存在 $k\in\{2,3,\cdots,m\}$,使得

$$\widetilde{n_k}>\frac{s}{2}\cdot\frac{m}{m-1}>\frac{s}{2}.$$

不妨假设 $\widetilde{n_2}>\frac{s}{2}$,即在不包含 x_1 的 s 个子集中,至少有 $\left[\frac{s}{2}\right]+1$ 个集合包含 x_2.从而,与 $\{x_1,x_2\}$ 无交集的集合不超过 503 个.不妨假设与 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}\}$ 无交集的集合中,包含 x_i 的集合最多.将上面的操作进行下去,设与 $\{x_1,x_2,\cdots,x_i\}$ $(i\in\mathbf{Z}_+)$ 无交集的集合的个数为 a_i.在这 a_i 个集合中至少有 $f(a_i)$ 个集合包含 x_{i+1},则

$$f(a_i)=1+\left[\frac{a_i}{2}\right].$$

故 $a_1 \leqslant 1\,007, a_2 \leqslant a_1 - f(a_1) \leqslant 503$,

$$\begin{aligned} &a_3 \leqslant a_2 - f(a_2) \leqslant 251, \\ &a_4 \leqslant a_3 - f(a_3) \leqslant 125, a_5 \leqslant 62, \\ &a_6 \leqslant 30, a_7 \leqslant 14, a_8 \leqslant 6, a_9 \leqslant 2. \end{aligned} \tag{①}$$

若 $a_9=0$,可任取一个元素,不妨设为 x_{10};

若 $a_9=1$,在此集合中任取一个元素,不妨设为 x_{10};

若 $a_9=2$,因为 $2|A_i|>m(i=1,2,\cdots 2\,016)$,所以,与 $\{x_1,x_2,\cdots,x_9\}$ 的交集为空集的这两个集合的交集里至少有一个元素,不妨设为 x_{10}.

因此,集合 $B=\{x_1,x_2,\cdots,x_{10}\}$ 为满足条件的集合.

【评注】本题中 $a_i - f(a_i)$ 为关于 a_i 单调递增的函数(不是严格递增),则结论①中的一系列不等式依次成立.

3 集合与图论

将集合中的元素看成是图中的点,可以把一些集合问题转化为图论问题,运用图论知识得出结论.

例 4 设 S 为 m 个正整数数对 (a,b) $(1\leqslant a<b\leqslant n)$ 所构成的集合. 证明:至少有 $\frac{4m^2-mn^2}{3n}$ 个三元数组 (a,b,c),使得

(a,b)、(b,c)、$(a,c)\in S$.

(1989,亚太地区数学奥林匹克)

证明 将正整数 $1,2,\cdots,n$ 看成 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,且任意三点不共线. 若 $(a,b)\in S(1\leqslant a<b\leqslant n)$,则在 a、b 所对应的点之间连一条边.

设 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的度为 $d(A_i)$. 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(A_i)=2m,$$

且包含边 $A_iA_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 的三角形的个数至少为

$$\begin{aligned} &d(A_i)-1+d(A_j)-1-(n-2) \\ &=d(A_i)+d(A_j)-n. \end{aligned}$$

由于每个三角形有三条边,于是,顶点为 $A_i(i\in\{1,2,\cdots,n\})$ 的三角形的个数至少为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}\sum_{(i,j)\in S}(d(A_i)+d(A_j)-n) \\ &=\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} d^2(A_i)-mn\right) \\ &\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d(A_i)\right)^2-mn\right) \\ &=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}(2m)^2-mn\right)=\frac{4m^2-mn^2}{3n}. \end{aligned}$$

4 集合与数列

从集合中挑选元素排成一列可以形成一个数列,若同一个元素可以在数列中重复出现,则不仅可以得到有限长数列还可以得到无限长数列. 集合与数列问题是数学竞赛中经常考查的一种题型.

例 5 令 A 表示由 $\{1,2,\cdots,2\,017\}$ 中的元素组成的所有数列(任意有限长或无限长) $\{a_1,a_2,\cdots\}$ 构成的集合. 若数列 M 前连续若干项为数列 T,则称数列 M 以数列 T"开头". 由一些有限长数列组成的集合 $S\subset A$ 满足:对集合 A 中任意一个无穷长的数列 M,均存在 S 中唯一数列 T,数列 M 以 T 开头. 下面三个结论哪个成立:

(1) S 一定是有限集;

(2) S 一定是无限集;

(3) S 可以是有限集也可以是无限集?

证明你的结论.

(2017,北京大学中学生数学科学夏令营)

【分析】先给出一个(2)不成立的例子.

取 2 017 个只有 1 项的数列 $1,2,\cdots,2\,017$,则集合 A 中的每个数列必以此 2 017 个数列中的某个作为开头,故(2)不成立.

首先,集合 S 中不可能存在两个不同的数列 T_1、T_2,使得其中 T_2 以 T_1 为开头,否则,考虑集合 A 中以 T_2 为开头的无穷长数列 M.

则 M 既可以以 S 中的 T_2 为开头，又可以以 S 中的 T_1 为开头，与题目中的唯一性矛盾.

其次证明 S 不可能为无穷集合，即(3)不成立.

若 S 为无限集，则据抽屉原理，知必然存在某个 $b_1 \in \{1,2,\cdots,2\,017\}$，使得 S 中以数列 $\{b_1\}$ 为开头的数列有无穷多个，且由前面分析，知必有 $\{b_1\} \notin S$；同样地，据抽屉原理，知必存在某个 $b_2 \in \{1,2,\cdots,2\,017\}$，使得 S 中以数列 $\{b_1,b_2\}$ 为开头的数列有无穷多个，且 $\{b_1,b_2\} \notin S$；依此类推，对于任给的正整数 n，存在数列 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，使得 S 中有无穷多个以 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 为开头的数列且数列 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\} \notin S$.

于是，可得到一个无穷长数列

$$M'=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\},$$

满足对任意的正整数 n，数列

$$\{b_1,b_2,\cdots,b_n\} \notin S.$$

因此，这个无穷长数列 M' 就无法以集合 S 中任何有限数列作为开头，矛盾.

综上，只有结论(1)成立.

练　习　题

1. 已知 31 名学生参加了某次考试，考试共有十道题，每名学生至少解出了六道题. 证明：存在两名学生，他们解出的题目中至少有五道相同.

(2015，全国高中数学联赛安徽赛区预赛)

提示　把十道题组成一个十元全集，不妨假设每名学生恰答对了六道题，则每名学生答对的题组成一个六元子集，一共 31 个六元子集. 接下来证明：这 31 个六元子集中存在两个子集的补集含有相同的三元子集.

2. 已知 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为集合 S 的一个非空子集列，且两两不等. 对于任意的 $i \in \{1,2,\cdots,99\}$，有

$$X_i \cap X_{i+1}=\varnothing, X_i \cup X_{i+1} \neq S.$$

求集合 S 中元素个数的最小值.

(第 45 届美国数学奥林匹克)

提示　先用数学归纳法证明：当 $n \geqslant 4$ 时，可构造一个 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的满足要求的 $2^{n-1}+1$ 个子集形成的子集列；然后证明 $|S|=7$ 时满足要求的子集列所包含的子集个数不超过 100.

所求集合 S 中元素个数的最小值为 8.

3. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为集合 $\{1,2,\cdots,2\,016\}$ 的 k 个不同的子集，使得对于任意的正整数 i、$j(1 \leqslant i<j \leqslant k)$，$A_i \cap A_j$ 均为等差数列. 求 k 的最大值.

(2016，土耳其国家队选拔考试)

提示　容易验证所有元素不超过 3 的子集满足条件. 只需证明：至少有三个元素的子集的个数不超过 $C_{2\,016}^{3}$.

4. 设正整数集合

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{1\,000}\},$$

其中，$a_1<a_2<\cdots<a_{1\,000} \leqslant 2\,014$，且

$$B=\{a_i+a_j \mid 1 \leqslant i、j \leqslant 1\,000, i+j \in A\}$$

为 A 的子集. 求满足条件的集合 A 的个数.

(第 54 届荷兰国家队选拔考试)

提示　先证明集合 A 可表示成 $B \cup C$，其中，$B \subseteq \{2\,001,2\,002,\cdots,2\,014\}$，$C \subseteq \{1,2,\cdots,1\,000\}$. 再证明当集合 B 确定时，集合 C 是唯一的. 故满足条件的集合 A 的个数等于集合 $\{2\,001,2\,002,\cdots,2\,014\}$ 的子集的个数.

5. 求至少有多少个集合，可以同时满足，以下三个条件：

(1) 每个集合均包含四个元素；

(2) 任意两个集合有且恰有两个公共元素；

(3) 所有集合的公共元素不超过一个.

(2014，中国香港代表队选拔考试)

提示　先挑选其中两个集合 $\{a,b,c,d\}$、$\{a,b,e,f\}$ 考虑. 容易证明同时含有元素 a、b 的集合不超过三个. 分两种情形讨论：同时含

赛题另解

2017 年全国高中数学联赛加试题另解

中图分类号:O12　　文献标识码:A　　文章编号:1005－6416(2017)12－0012－07

第一题　如图 1,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,I为$\triangle ABC$的内心.以AB为半径作$\odot A$,以IB为半径作$\odot I$,过点B、I的圆Γ与$\odot A$、$\odot I$分别交于点P、Q(不同于点B).设IP与BQ交于点R.证明:$BR\perp CR$.

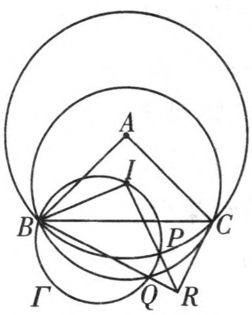

图 1

证法 1　如图 2,联结IC、IQ、PA、PB、PC,作$AD\perp BP$于点D,$IS\perp BQ$于点S.

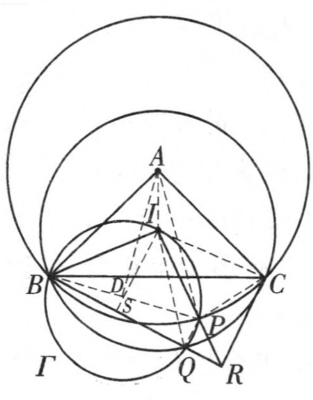

图 2

由$AB=AC=AP$,$IB=IC=IQ$,且B、I、P、Q四点共圆,知

$\angle BAD=\angle PAD=\angle BCP$,

$\angle BIS=\angle QIS$,

$\angle ABI=\angle CBI=\angle BCI=\angle ACI$,

$\angle IPB=\angle IQB=\angle IBQ$,

$\angle PIQ=\angle PBQ$.

则$\angle BAD+\angle ABI+\angle IBC+\angle CBP=90^{\circ}$,

$\angle BIS+\angle IBC+\angle CBP+\angle PBQ=90^{\circ}$.

故$\angle BCP+\angle BCI=\angle PIQ+\angle QIS$,即

$\angle SIR=\angle ICP$.

又$\angle BIP=\angle RIB$,于是,

$\angle IBP=\angle IRB$

$\Rightarrow IB$为$\triangle BPR$外接圆的切线

$\Rightarrow IB^2=IP\cdot IR=IC^2$.

又$\angle CIP=\angle RIC$,故

$\triangle CIP\backsim\triangle RIC\Rightarrow\angle ICP=\angle IRC$

$\Rightarrow IC$为$\triangle CPR$外接圆的切线

$\Rightarrow\angle IRC=\angle ICP=\angle SIR$

$\Rightarrow IS/\!/CR$.

因此,$BR\perp CR$.

(李耀文　山东省枣庄市第十八中学,277200　王梅丽　重庆市铁路中学,400000)

有元素a、b的集合有两个时,满足条件的集合的个数最多为七个;同时含有元素a、b的集合有三个时,满足条件的集合的个数最多也是七个.

参考文献:

[1]　第 28 届韩国数学奥林匹克(2015)[J].中等数学,2016(增刊二).
[2]　单墫　编著.算两次[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2009,4.