换元法在解数学竞赛题中的应用

青岛市第二中学　266061　张　劲

换元法又称辅助元素法，其实质是转化，即把某一式子看作一个整体，用一个变量去代替它，变换研究的对象，把问题转换到新的知识背景下去研究，从而使复杂问题明晰化，陌生问题熟悉化. 换元法在解竞赛试题特别是其中有关不等式等问题时常能奏效. 下面结合典型的竞赛题例举几种常见的换元方法. 不当之处，敬请指正.

1　三角换元法

三角换元法是最常见也是应用最广泛的换元方法，常用于去根号或者特殊的平方关系.

例 1　（2013 年江西省高中数学联赛第 6 题）函数 $f(x)=\sqrt{3x-6}+\sqrt{3-x}$ 的值域是______.

解析　**法 1**　函数 $f(x)=\sqrt{3x-6}+\sqrt{3-x}$ 的定义域为 $[2,3]$，故可设 $x=2+\sin^2\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，

则 $f(x)=\sqrt{3\sin^2\theta}+\sqrt{\cos^2\theta}=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$.

易知函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,2]$.

法 2　对于函数 $f(x)=\sqrt{3x-6}+\sqrt{3-x}$，可令 $\sqrt{3x-6}=y\sin^2\theta$，$\sqrt{3-x}=y\cos^2\theta$，

有 $3x-6=y^2\sin^4\theta$，$3-x=y^2\cos^4\theta$，消去 x，有 $\sin^4\theta+3\cos^4\theta=\frac{3}{y^2}$，由于 $\sin^4\theta+3\cos^4\theta=4(\sin^2\theta-\frac{3}{4})^2+\frac{3}{4}$，即有 $\frac{3}{4}\leqslant\frac{3}{y^2}\leqslant 3$，得 $y\in[1,2]$.

例 2　（2017 年全国高中数学联赛河北预赛题）已知 x、$y\in\mathbf{R}$，且 $2x^2+3y^2\leqslant 12$，求 $|x+2y|$ 的最大值.

解析　设 $\sqrt{2}x=r\cos\theta$，$\sqrt{3}y=r\sin\theta$，$0\leqslant r\leqslant 2\sqrt{3}$，

得 $|x+2y|=\left|\frac{2r\cos\theta}{\sqrt{2}}+\frac{2r\sin\theta}{\sqrt{3}}\right|$

$=r\left|\sqrt{\frac{11}{6}}\sin(\theta+\varphi)\right|\leqslant\sqrt{\frac{11}{6}}r\leqslant\sqrt{22}$，

所以 $|x+2y|$ 的最大值是 $\sqrt{22}$.

2　增量换元法

在对称式或给定字母大小顺序的不等式问题中，可以考虑用增量换元，达到减元的目的.

例 3　（2011 年全国高中数学联赛（B 卷）第 9 题）已知实数 x、y、z 满足 $x\geqslant y\geqslant z$，$x+y+z=1$，$x^2+y^2+z^2=3$，求实数 x 的范围.

解析　由 $x\geqslant y\geqslant z$，可以考虑设 $y=x-a$，$z=x-a-b(a,b\geqslant 0)$.

则题设变为 $2a+b=3x-1$，$2a^2+2ab+b^2-2(2a+b)x+3x^2-3=0$，消去 b，有

$a^2-a(3x-1)+3x^2-2x-1=0$. 关于 a 的二次方程必有两个非负实数根，由于 $x\geqslant y\geqslant z$，$x+y+z=1$，知 $x\geqslant\frac{1}{3}$，$\frac{3x-1}{2}\geqslant 0$，

因此 $\begin{cases}3x^2-2x-1\geqslant 0,\\ \frac{3x-1}{2}\geqslant 0,\\ (3x-1)^2-4(3x^2-2x-1)\geqslant 0,\end{cases}$

得 $1\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}$.

例 4　（1988 年全国高中数学联赛初试第 5 题）已知 a、b 为正实数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，试证：对每一个 $n\in\mathbf{N}$，$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$.

解析　由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，得 $a+b=ab$，且 $a>1$，$b>1$，可设 $a=1+t$，$b=1+\frac{1}{t}(t>0)$，有

$(a+b)^n-a^n-b^n=(ab)^n-a^n-b^n$

$=(a^n-1)(b^n-1)-1$

$=[(1+t)^n-1]\cdot[(1+\frac{1}{t})^n-1]-1$

$=(C_n^1t+C_n^2t^2+\cdots+C_n^nt^n)(C_n^1\frac{1}{t}+C_n^2\frac{1}{t^2}+\cdots+C_n^n\frac{1}{t^n})-1\geqslant(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n)^2-1$

$=(2^n-1)^2-1=2^{2n}-2^{n+1}$.

得到$(a+b)^n-a^n-b^n \geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$.

3 整体(局部)换元法

利用不等式与方程、函数之间的内在联系,将某一整体看作一个变量,生成新的不等式,进而求解.

例5 (2014年哈佛—麻省理工数学竞赛第16题)已知实数x、y满足$x^2-xy+2y^2=8$,试求$x^2+xy+2y^2$的最大值.

解析 设$m=x^2+xy+2y^2$,由$x^2-xy+2y^2=8$,得$2(x^2+2y^2)=8+m$,$x^2+2y^2=8+xy$,由$x^2+2y^2 \geqslant 2\sqrt{2}|xy|$,得$8+xy \geqslant 2\sqrt{2}|xy|$,得$\frac{8-16\sqrt{2}}{7} \leqslant xy \leqslant \frac{8+16\sqrt{2}}{7}$,由$x^2+xy+2y^2=m=8+2xy$得$\frac{72-32\sqrt{2}}{7} \leqslant m \leqslant \frac{72+32\sqrt{2}}{7}$,所以$x^2+xy+2y^2$的最大值是$\frac{72+32\sqrt{2}}{7}$.

例6 (2015年第26届"希望杯"全国数学邀请赛高二初试题)若正实数a、b满足$2a+b=1$,则$\frac{a}{2-2a}+\frac{b}{2-b}$的最小值是______.

解析 由$2a+b=1$,知$2-2a+2-b=3$,即$\frac{2-2a}{3}+\frac{2-b}{3}=1$,则$\frac{1}{2-2a}+\frac{2}{2-b}=(\frac{1}{2-2a}+\frac{2}{2-b})(\frac{2-2a}{3}+\frac{2-b}{3})=1+\frac{2(2-2a)}{3(2-b)}+\frac{2-b}{3(2-2a)} \geqslant 1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$.所以$\frac{a}{2-2a}+\frac{b}{2-b}=\frac{1}{2-2a}+\frac{2}{2-b}-\frac{3}{2} \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{2}$.

4 中值(均值)换元法

由两数之和为定值联想到等差中项,利用等差中项换元可以起到减元的效果.

例7 (2009年清华大学自主招生数学试题)已知x、y为实数,且$x+y=1$,求证:对于任意正整数n,$x^{2n}+y^{2n} \geqslant \frac{1}{2^{2n-1}}$.

解析 不妨设$x \geqslant y$,设$x=\frac{1}{2}+d$,$y=\frac{1}{2}-d$,$d \geqslant 0$,则$x^{2n}+y^{2n}=(\frac{1}{2}+d)^{2n}+(\frac{1}{2}-d)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}+C_{2n}^1(\frac{1}{2})^{2n-1}d+C_{2n}^2(\frac{1}{2})^{2n-2}d^2+\cdots+d^{2n}+\frac{1}{2^{2n-1}}+C_{2n}^1(\frac{1}{2})^{2n-1}(-d)+C_{2n}^2(\frac{1}{2})^{2n-2}(-d)^2+\cdots+(-d)^{2n}=\frac{1}{2^{2n-1}}+2C_{2n}^2(\frac{1}{2})^{2n-2}d^2+\cdots+2d^{2n} \geqslant \frac{1}{2^{2n-1}}$.

证毕.

例8 见例3.

解析 由$y+z=1-x$,可设$y=\frac{1-x}{2}-t$,$z=\frac{1-x}{2}+t$,代入$x^2+y^2+z^2=3$,得$t^2=3-x^2-(\frac{1-x}{2})^2 \geqslant 0$,即$3x^2-2x+5 \leqslant 0$,得$-1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}$.

由$x \geqslant y \geqslant z$,$x+y+z=1$,知$x \geqslant \frac{1}{3}$.

当$y \geqslant 1$时,由$x \geqslant y$,知$x \geqslant 1$.

当$y<1$时,$-1 \leqslant z \leqslant y<1$,$0 \leqslant y^2 \leqslant 1$,$0 \leqslant z^2 \leqslant 1$,有$x^2=1-y^2-z^2 \geqslant 1$,结合$x \geqslant \frac{1}{3}$,得$x \geqslant 1$.

综上所述,得$1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}$.

5 和差换元法

对于某些二元多项式的最值题目,可令$x=a+b$,$y=a-b$进行和差代换,会有意外惊喜.

例9 (2009年江西省南昌市高中数学竞赛题)已知x、y是实数,且$x^2+xy+y^2-2=0$,求x^2-xy+y^2的最大值和最小值.

解析 设$x=m+n$,$y=m-n$,代入已知有$n^2=2-3m^2$,得$0 \leqslant m^2 \leqslant \frac{2}{3}$,$x^2-xy+y^2=m^2+3n^2=m^2+3(2-3m^2)=6-8m^2$,由$0 \leqslant m^2 \leqslant \frac{2}{3}$,得$x^2-xy+y^2$的最大值是6,最小值是$\frac{2}{3}$.

例10 (2011年太原市高中数学竞赛题)设实数a、b、c满足$a^2-bc-8a+7=0$,$b^2+C^2+bc-6a+6=0$,求$\log_9 a_{\max}+\log_9 a_{\min}=$________.

解析 设$b=x+y$,$c=x-y$,代入已知有$x^2+y^2=a^2-8a+7$,$3x^2+y^2=6a-6$,消去x^2,得$4y^2=-3(a^2-10a+9) \geqslant 0$,得$1 \leqslant a \leqslant 9$,所以$\log_9 a_{\max}+\log_9 a_{\min}=0+1=1$.