期末冲刺讲义（一）：实数、绝对值与一次方程组

【知 1】每一个十进制循环小数能化为整数或分数，任何一个整数或分数都可以化为十进制循环小数（假定后面没有数了算作 0 的循环）.（请自行证明）

【例 1】 已知无限循环小数 $0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{a}b\dot{c}=\dfrac{33}{37}$, 求 $\overline{abc}$.

$$\frac{10a+b}{99}+\frac{100a+10b+c}{999}=\frac{33}{37}\Rightarrow 221(10a+b)+11c=99^2,\because 0\le 11c\le 99,\therefore 10a+b=44,c=7.$$

【例 2】求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\cdots+\dfrac{1}{2018}}}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{\cdots+\dfrac{1}{2018}}}}}}=$________.

设 $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\cdots+\dfrac{1}{2018}}}=x$， $\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=1$.

【知 2】一个正整数若不是完全平方数，则其平方根为无理数.

【例 3】求证：$\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$ 为无理数.

若否，设为 $\dfrac{p}{q}$, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=\dfrac{p^2}{q^2}\Rightarrow 3=\left(\dfrac{p^2}{q^2}-\sqrt{2}\right)^3=\dfrac{p^6}{q^6}+6\dfrac{p^2}{q^2}-\sqrt{2}\left(\dfrac{3p^4}{q^4}+2\right)$，这与根号 2 是无理数矛盾

【知 3】除了常见的平方差公式，和的平方等公式以外，还有一些常用的公式：

$$x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2);(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz.$$

此外，这两个因式分解请务必熟练：$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$；

$$x^{2n+1}+1=(x+1)\left(x^{2n}-x^{2n-1}+\cdots+(-1)^i x^{2n-i}+\cdots-x+1\right)$$

【例 4】$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$, 求 a.

$$\sqrt[3]{2}-1=\left(\frac{(\sqrt[3]{2})^3+1}{\sqrt[3]{2}+1}\right)^3\div a\Leftrightarrow\frac{27}{a}=(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2}+1)^3=(\sqrt[3]{2}-1)(3+3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4})=3\Rightarrow a=9.$$

【知 4】下例是绝对值的和的经典结论，务必掌握其基于数轴的几何意义的原理.注意证明过程中绝对值不等式 $|x|+|y|\ge|x+y|,|x|-|y|\le|x-y|$ 的应用.

【例 5】设 $a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_n$，求 $|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ 的最小值.

看作数轴上点 x 到这 n 个点的距离之和，当 n 为奇数时，

$$|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|\geq|x-a_1+a_n-x|+|x-a_2+a_{n-1}-x|+\cdots+\left|x-a_{\frac{n-1}{2}}+a_{\frac{n+3}{2}}-x\right|+\left|x-a_{\frac{n+1}{2}}\right|.$$

$x=a_{\frac{n+1}{2}}$ 时，取到最小值：$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{\frac{n+3}{2}}-a_{\frac{n-1}{2}}-\cdots-a_1$.

当 n 为偶数时，$|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|\geq|x-a_1+a_n-x|+|x-a_2+a_{n-1}-x|+\cdots+\left|x-a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}-x\right|$.

$a_{\frac{n}{2}}\leq x\leq a_{\frac{n}{2}+1}$ 时，取到最小值：$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}-\cdots-a_1$.

【例 6】 $|x+2|+|1-x|=9-|y-5|-|1+y|-||z|-2|$, 求 $x+y+z$ 的最大值和最小值.

由上例可知：$9\geq 3+6+0$, 等号全部取到，$-2\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 5, z=\pm 2, x+y+z$ 的最大值为 8，,最小值为 -5..

【知 5】 对于含绝对值的式子，我们可以讨论变量的取值范围解题；也可以利用绝对值不等式配凑常数以获得一步到位求得最大值或最小值的效果.

【例 7】 求 $|x+1|+|2x+3|-|4x-8|$ 的最大值.

$|x+1|+|2x+3|-|4x-8|\leq|x+1-(x-2)|+|2x+3-(2x-4)|-|x-2|\leq 10$. 且 $x=2$ 时能取到.

【例 8】 已知有理数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2017}$ 满足和为 0，且 $|a_1-2a_2|=|a_2-2a_3|=\cdots=|a_{2016}-2a_{2017}|=|a_{2017}-2a_1|$.

求证这 2017 个有理数均为 0.

设其中有 k 个正，去绝对值求和，设连等为 $m>0, k\cdot m+(2017-k)\cdot(-m)=0\Rightarrow m=0\Rightarrow a_i$ 同号，则均为 0.

【知 6】 对一元一次方程，既要能按部就班，严格按步骤正确解方程，要熟悉一元一次方程无解、唯一解、无穷解的条件；对于特殊的类型，也要能随机应变，巧解方程。应用题也是如此.

【例 9】 解关于 x 的方程 $\frac{a(x+n)}{x+m}+\frac{b(x+m)}{x+n}=a+b(m\neq n)$.

$$\frac{a(x+n)}{x+m}-a+\frac{b(x+m)}{x+n}-b=0\Leftrightarrow(m-n)\left(\frac{b}{x+n}-\frac{a}{x+m}\right)=0\Leftrightarrow b(x+m)=a(x+n)(x\neq -m,-n)$$

$(a-b)x=bm-an; a=b\neq 0$ 时，$bm\neq an$，无解；$a=b=0$ 时，x 为非 $-m,-n$ 的任意实数;

$a\neq b$ 时，$x=\frac{bm-an}{a-b}$.

【例 10】 解方程：$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left\{\cdots\left\{\frac{1}{2}x-2\right\}\cdots-2\right\}-2\right\}-2\right\}-2=0$（共 2018 层括号）

$$\frac{1}{2^{2019}}x-\frac{1}{2^{2017}}-\frac{1}{2^{2016}}-\cdots-1-2=0\Leftrightarrow x=2^{2020}+2^{2019}+\cdots+8+4=2^{2021}-4.$$

（备选）解方程 $\frac{x-2}{2017}+\frac{x}{2018}+\frac{x+2}{2019}=6$.

$\frac{x-4036}{2017}+\frac{x-4036}{2018}+\frac{x-4036}{2019}=0 \Rightarrow x=4036.$

（备选）有十个人要从 A 地前往 12 千米外的 B 地，但自行车不足人手一个，已知步行速度 5 千米/小时，骑行速度 20 千米/小时，忽略换车的时间，所有人尽量快地到达 B 地共用了一个半小时，那么有几辆自行车？

$\frac{(10-x)\cdot 12}{5}+\frac{x\cdot 12}{20}=10\cdot 1.5 \Leftrightarrow 9=\frac{9x}{5} \Rightarrow x=5.$

【知 7】二元一次方程组的解：对于 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，当 $a_1b_2 \neq a_2b_1$ 时，方程组有唯一一组解：$\begin{cases} x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases}$

当 $a_1b_2=a_2b_1;a_1c_2=a_2c_1;b_1c_2=b_2c_1$ 中任两个成立时，方程组有无穷多组解；通常来说，不考虑 0 的情况，我们用 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ 来判定.

当 $a_1b_2=a_2b_1, a_1c_2 \neq a_2c_1$ 时，方程组无解.通常来说，不考虑 0 的情况，我们用 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ 来判定.

【例 11】$\begin{cases} (2a-3b+1)x+(a+b-1)y=3, \\ (3a-4b+5)x-(2-2b-a)y=5 \end{cases}$ 有无穷解，求 $14x-13y$.

$\frac{2a-3b+1}{3a-4b+5}=\frac{a+b-1}{a+2b-2}=\frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{13}{5}, \\ b=-\frac{21}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{42}{5}x-\frac{39}{5}y=3,14x-13y=5.$

【例 12】解方程组：$\begin{cases} \frac{a}{x}+\frac{2}{y}=4 \\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=b \end{cases}$，其中 a、b 为实数.

换元：$\begin{cases} au+2v=4, \\ 3u+5v=b \end{cases}(u,v\neq 0)$，$\frac{a}{3}=\frac{2}{5}=\frac{4}{b} \Rightarrow a=1.2,b=10$ 时，$\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=10, x=\frac{3y}{10y-5}$，其中 y 为非 0、$\frac{1}{2}$ 的任意实数;$\frac{a}{3}=\frac{2}{5}\neq\frac{4}{b} \Rightarrow a=1.2,b\neq 10$ 时，无解；$a\neq 1.2 \Rightarrow \begin{cases} u=\frac{20-2b}{5a-6}, \\ v=\frac{ab-12}{5a-6} \end{cases}$ 于是 $b=10 \; or \; ab=12$ 时无解.

综合 $a\neq 1.2, b\neq 10, ab\neq 12$ 时，$\begin{cases} x=\frac{5a-6}{20-2b}, \\ y=\frac{5a-6}{ab-12} \end{cases}$；$a=1.2,b=10$ 时，$x=\frac{3y}{10y-5}$，其中 y 为非 0、$\frac{1}{2}$ 的任意实数;其余情况无解.

（备选）在方程组$\begin{cases} y=|x|+1, \\ y=\dfrac{1}{2}x+b \end{cases}$中，$b$为何值时，原方程组有1解，两解或无解？

$x\ge 0\Rightarrow x=2b-2; x<0\Rightarrow x=\dfrac{2}{3}(1-b);$ 从而$b>1$时有2解；$\mathrm{b}=1$时有1解，$\mathrm{b}<1$时无解.

【知8】多元一次方程组的求解：方法一：逐步消元，即通过加减消元法同时降低方程个数和变量个数，最终变为二元一次方程组乃至一元一次方程的过程；方法二：特殊法：对于一些对称的多元一次方程组，可以考虑借助整体的代数运算得到结果.

【例13】已知x、y、z满足：$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=-\sqrt{3}+1, \\ [x]+\{y\}+z=\sqrt{3}-\sqrt{2}, \\ \{x\}+y+[z]=\sqrt{2}+1, \end{cases}$求$x$、$y$、$z$.

$$\Rightarrow x+y+z=1\Rightarrow \begin{cases} \{y\}+[z]=\sqrt{3} \\ \{x\}+[y]=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}, \\ [x]+\{z\}=-\sqrt{2} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=-2+1+\sqrt{2}-\sqrt{3}=-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}, \\ y=0+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}-1, \\ z=1+(-\sqrt{2}-(-2))=3-\sqrt{2} \end{cases}$$

【例14】解方程组$\begin{cases} w+8x+3y+5z=20, \\ 4w+7x+2y+3z=-20, \\ 6w+3x+8y+7z=20, \\ 7w+2x+7y+3z=-20 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z+w=0 \\ 8(w+z)+10(x+y)=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ w=-z \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 5y-4z=-20, \\ 5y+z=20 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{12}{5}, \\ y=\dfrac{12}{5}, \\ z=8, \\ w=-8 \end{cases}$$

【知9】含参数的多元一次方程组，一般而言可以通过消元转化成含参数的一元一次方程.

【例15】解方程组：$\begin{cases} x+y-z=2, \\ x+my+mz=m, \\ x-2y+z=1, \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=3x-5 \\ y=2x-3 \end{cases}\Rightarrow (5m+1)x=9m$$

$m=-\dfrac{1}{5}$时，无解；$m\neq-\dfrac{1}{5}$时，$\begin{cases}x=\dfrac{9m}{5m+1},\\ y=\dfrac{3m-3}{5m+1},\\ z=\dfrac{2m-5}{5m+1}\end{cases}$

【例 16】m 为整数，方程组$\begin{cases}mx+5y=17,\\ 2x-5y=3\end{cases}$有整数解，求所有的 m.

$\begin{cases}x=\dfrac{20}{m+2}\\ y=\dfrac{34-3m}{5(m+2)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m+2|20\\ 5|34-3m\end{cases}\Rightarrow m=-22,3(-12,-7,8,18\text{检验舍去})$

【习 1】化简$\dfrac{5+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$.

【习 2】有下列几个命题：

甲：若α、β 是不相等的无理数，则$\alpha\beta+\alpha-\beta$ 是无理数

乙：若α、β 是不相等的无理数，则$\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$是无理数

丙：若α、β 是不相等的无理数，则$\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$ 是无理数

丁：若α、β、$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ 是有理数，则$\sqrt{\alpha}$、$\sqrt{\beta}$ 是有理数.

其中正确命题的个数是________.

一个。丁

【习 3】已知三轮车的前轮每行驶 1000 千米将会磨损毁坏，后轮每行驶 1500 千米将会磨损毁坏，为要保证一辆新三轮车能够行驶 10000 千米，至少需要准备多少个备胎？

21 个

【习 4】解方程$\dfrac{x-2016}{4035}+\dfrac{x-2017}{4034}+\dfrac{x-2018}{4033}=3$.

6051.

备选：$\dfrac{x+2016}{4035}+\dfrac{x+2017}{4034}+\dfrac{x+2018}{4033}=3$

$(x+6051)(\dfrac{1}{4035}+\dfrac{1}{4034}+\dfrac{1}{4033})=6,x=\dfrac{6}{\dfrac{1}{4035}+\dfrac{1}{4034}+\dfrac{1}{4033}}-6051.$

【习 5】求$|x+1|+|2x+3|+|3x+5|+|5x+8|+|8x+13|$ 的最小值.

$x=-\frac{13}{8}, \frac{5}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}.$

【习 6】求$|x+1|+|2x+3|+|3x+5|+|5x+8|-|13x-21|$的最大值.

$34\frac{10}{13}.$

【习 7】$\begin{cases} ab=1, \\ bc=2, \\ cd=3, \\ de=4, \\ ea=5 \end{cases}$

【习 8】$a=\pm\frac{\sqrt{30}}{4}, b=\pm\frac{2\sqrt{30}}{15}, c=\pm\frac{\sqrt{30}}{2}, d=\pm\frac{\sqrt{30}}{5}, e=\pm\frac{2\sqrt{30}}{3}$ 已知正数 a、b、c、d、e、f 满足

$$\frac{bcdef}{a}=4, \frac{acdef}{b}=9, \frac{abdef}{c}=16, \frac{abcef}{d}=\frac{1}{4}, \frac{abcdf}{e}=\frac{1}{9}, \frac{abcde}{f}=\frac{1}{16},$$

求$(a+c+e)-(b+d+f)$的值.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+3-\frac{1}{3}-2-4=-\frac{31}{12}.$

【习 9】$||x-a|-b|=3$恰有三个不相等的解，求 b 的值.

$\mathrm{b}=3$

【习 10】$\begin{cases} |x+y|=1, \\ |x|+2|y|=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}, \\ y=\frac{4}{3} \end{cases} \begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=-\frac{4}{3} \end{cases}$

【习 11】$|x+a|+|x-2|=2a.$

$a<2:$无解；$a=2, -2\le x\le 2; a>2: x=\frac{2-3a}{2}\ or\ x=\frac{a+2}{2}.$