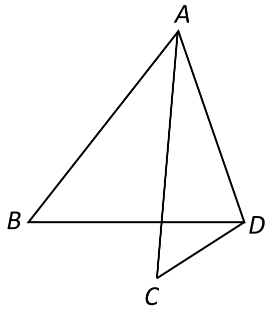
期末冲刺讲义（三）　　　　三角形有关计算和证明

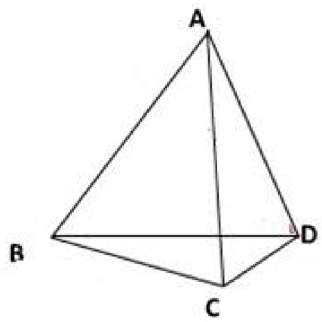
【知 1】 角平分线上的点到两边距离相等，这可以成为全等中一个“*S*”的来源，务必注意全等一定是有至少一组边相等的关系;此外，角平分线分对边之比为邻边之比，是角平分线的另一个重要性质，这一性质定理的逆定理同样成立.

【例 1】 如图，$AB=AC$，$\angle ADB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BDC$，求证：$\angle B=\angle C$．



延长 *CD* 至 *E*，则 *AD* 平分∠*BDE*，过 *A* 向两边作垂线，*HL* 全等

【例 2】 如图，△*ABC* 中, $AB=AC$, *D* 为△*ABC* 外一点，且$\angle ABD=\angle ACD=60^\circ$．求证：$CD=AB-BD$.



延长 *CD* 至 *G* 使 *BD*=*DG*，过 *A* 向∠*BDE* 两边作垂线 *AE*、*AF*，△*ABE*≌△*ACF*（*AAS*），则 *AD* 平分∠*BDE*，则△*ABD*≌△*AGD*（*AAS*），则正△*ACG*，则证得.

【例 3】 证明边长为 12、9、7 的三角形中，有一个角是另一个角的两倍.

作 7 这一边的角平分线，分成 4 和 3，对称得等腰.

【知 2】 满足（SSA）的两个三角形若不全等，则两个三角形有一组互补的角；因此可知若满足（SSA）的为两锐角三角形或两钝角三角形，则全等.

【例 4】 在∠*A* 的角平分线上取一点 *D*，角的两边上分别取 *B*、*C*，当 $AB+AC=\sqrt{3}AD$ 时，一定有 $DB=DC$，求∠*A*.

取 AC = 0，知一等腰三角形底边为腰的根号 3 倍，那么其底角为 30° .故角 A 只能为 60°

然后证明∠A = 60° 时一定成立.

【知 3】轴对称的图形必全等，中心对称的图形同样全等.

【例 5】已知周长一定的三角形中，正三角形的面积最大；那么一个边长为 1 的正三角形绕中心旋转后，与原来的重叠部分的面积最小值为？

边上的六个小三角形每个周长为定值，借助引理，知面积最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}-3\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{1}{3})^2=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

【知 4】$\triangle ABC$ 的中线长 $AD=\sqrt{\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}}$.

【例 6】$\triangle ABC$ 的 BC 边上的三等分点为 D、E，设 $BC=a,AC=b,AB=c,$ 求 AD^2+AE^2.

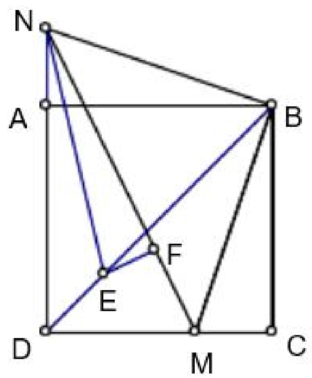
中线 $AF^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{AD^2+AE^2}{2}-\frac{a^2}{36}$

【例 7】在$\triangle ABC$ 内有一点 P 使得 $PA^2+PB^2+PC^2$ 最小，求证此时 $PA^2+PB^2+PC^2\le\frac{1}{3}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$.

取 P 为重心，代入计算；事实上重心时取最小值，可选讲

【知 5】利用截长补短的方法构造全等，是由结论引发的常见辅助线思路，具体截长还是补短，怎样截补，需看怎样作能够简化条件.

【例 8】在正方形 $ABCD$ 中，M、N 分别在 CD、AD 所在直线上，且 $BN\perp BM$，NE 平分$\angle DNM$ 交 BD 于 E，$EF\perp MN$ 于 F，求证：$AD-EF=\frac{MN}{2}$.



作 EH⊥AD 于 H，只需证 2AH=MN

又易知 $BE=BN=\sqrt{2}AH=\frac{\sqrt{2}}{2}MN$.证得.

【知 6】下例是两个常用的形状，可采用反证法证明.构造这两个形状的辅助线也颇有效.

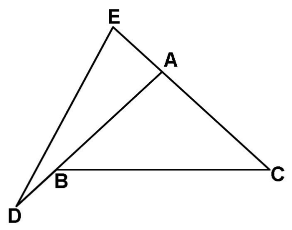
【例 9】等腰$\triangle ABC$ 顶角$\angle BAC$ 为 2α,有一点 D 使 A 在$\triangle DBC$ 内，，且$\angle BDC=\alpha$,另有一点 E 与 A 在 BC 异侧，且$\angle BEC=180°-\alpha$,求证： $AB=AC=AD=AE$.

反证：若 $AD<AB$,由角度得到矛盾；$AD>AB$ 同理.类似有 AE.其中 AD 有两种情况.

注：还有同侧 D 在△ABC 外的一种情况，需用同一法，可选讲.

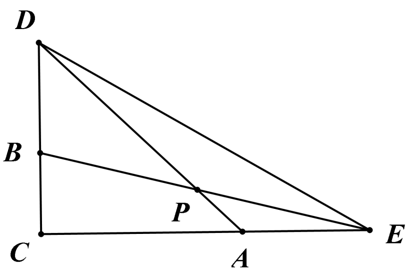
【知 7】平移变换，保持角度不变，长度不变；用以将已知元素集中，使各元素之间的关系明朗化。

【例 10】 如图，在等腰三角形中，延长边 AB 到点 D，延长边 CA 到点 E，连接 DE，恰有 $AD=BC=CE=DE$．求证：$\angle BAC=100°$．



平移 BC 至 DF,△ADE≌△CEF.

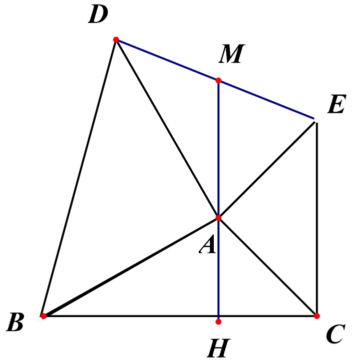
【例 11】 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，D，E 分别为 CB，CA 延长线上的点，BE 与 AD 的交点为 P．若 $AC=\sqrt{3}BD$，$CD=\sqrt{3}AE$，求 $\angle APE$ 的度数．



平移 CD 至 AF，AC 至 DF，150°

【知 8】在同一顶点上一个角内有一个半角，或可通过旋转证明全等或得到结论；在同一顶点上有两个等角，这本身就是一个旋转的模型.此外，等腰三角形的两腰，等边三角形均可成为旋转的始边和终边.

【例 12】 在△ABC 形外做等腰 $Rt\triangle ABD$ 和等腰 $Rt\triangle ACE$，使 $\angle BAD=\angle CAE=90°$，作 $AH\perp BC$ 于 H，延长 HA 交 DE 于 M.求证：$DM=ME$.



旋转△ABC 至△DAF，E、A、F 共线，只需证 $AM // DF$，易得.

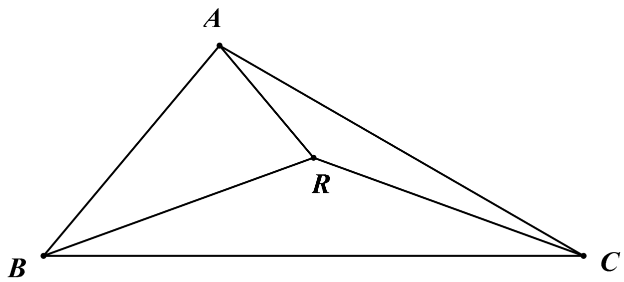
【知 9】对称变换保持距离、角度、面积等不变，同时对称点连线被对称轴垂直平分.利用反射的不变性，也可以集中已知元素或构造特殊三角形.

【例 13】单位正方形内有一条不自交的曲线将正方形分成面积相同的两部分，若曲线的起点和终点都在正方形的边界上，求证曲线的长度不小于 1.

分在对边：显然；在邻边：必与对角线有交点，关于对角线作一次对称对称到对边上；在同一边，必与平行此边的中位线有交点，作一次对称对称到对边上.

【例 14】在△ABC 中，$\angle ABC$ =50°，$\angle ACB$= 30°，R 为形内一点，$\angle RAC$ =$\angle RCB$ =20°，求$\angle RBC$.

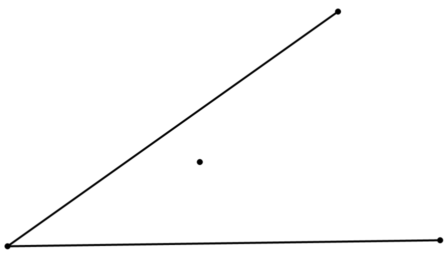
作△ADC 与△ARC 关于 AC 对称，再作△EDC 与△ADC 关于 DC 对称，有正△ADE，B、A、E 共线，ER 为等腰三角形 EBC 的角平分线，因此$\angle RBC$=$\angle RCB$=20°.

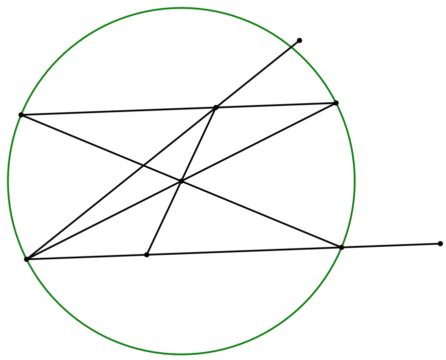


【知 10】几何作图相关： 需熟悉的几种作图：垂直平分线、角平分线、垂线、轴对称、平行线，正三角形，15°角的整数倍;引申而来的作图包括平行四边形、中位线、内心、外心、垂心等. 在尺规作图中，一要必须准确，二要追求简洁. 对于必要的一些截取线段的作图，需辅以文字说明.

【例 15】在一个角内有一个定点，过该定点作一条端点在角两边的线段，使得其恰好为中点.

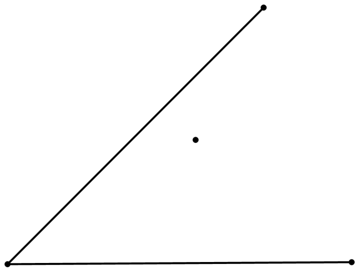
当然，步数越少越好.

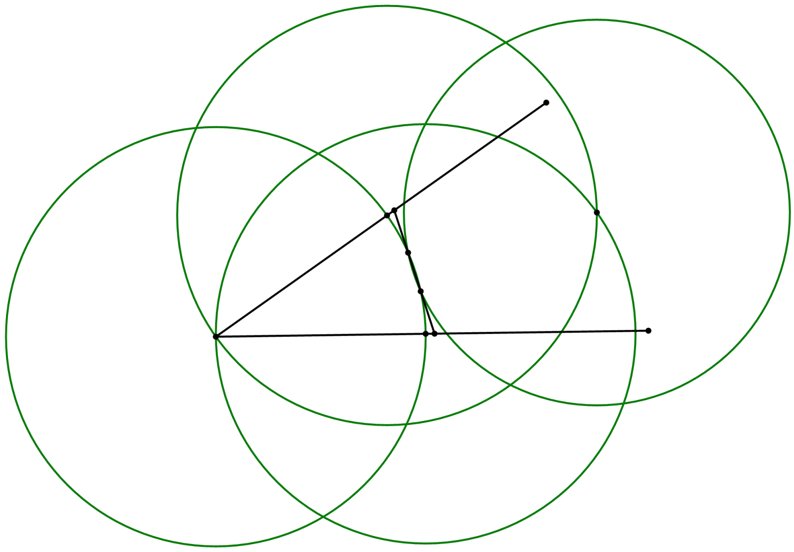




【例 16】在一个角内有一个定点，过该定点作一条端点在角两边的线段，使得其恰好为等腰三角形.

当然，步数越少越好.





注：一般作法，角平分线，然后作垂线

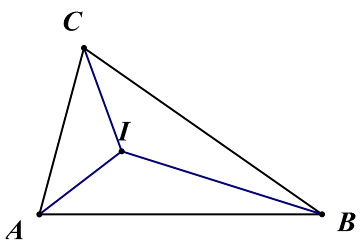
【习 1】 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 120°$，AD、BE、CF 为三条角平分线，求证：$ED \perp FD$.

只需证 ED 平分$\angle CDA$.

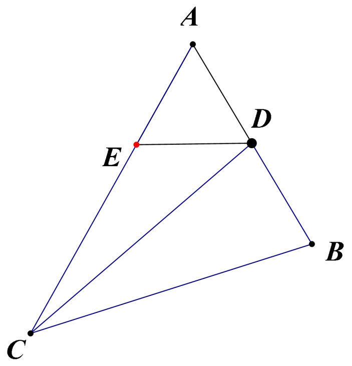
【习 2】 求边长为 4、5、6 的三角形中 6 这一边上的角平分线长.

$\frac{10}{3}$.

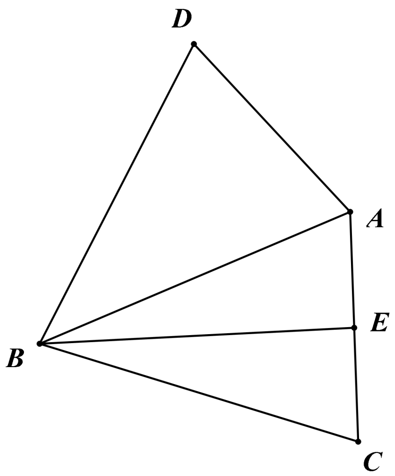
【习 3】 如图，$\triangle ABC$ 中$\angle CAB = 70°$，I 是$\triangle ABC$ 内心，若 $CA + AI = BC$，求$\angle ABC$ 的度数.



【习 4】$\triangle ABC$ 中，$\angle CAB = 60°$，D、E 分别在边 AB、AC 上，且$\angle AED = 60°$，$ED + DB = CE$，$\angle CDB = 2\angle CDE$.求$\angle DCB$.

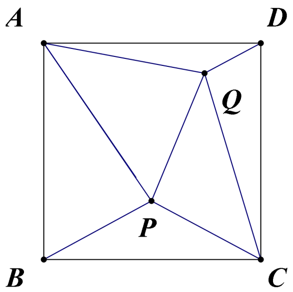


【习 5】如图所示，在等腰$\triangle ABC$中，$AB=BC$. $BE\perp AC$于E，有一点D使得$AD=AC$，$\angle DBE=60^\circ$，$\angle D=70^\circ$，求证：$AB=BD$.

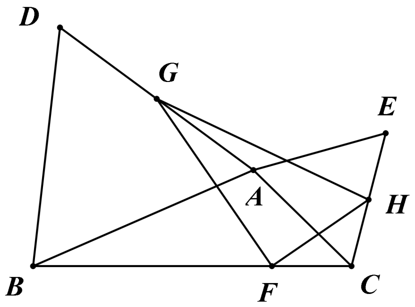


【习 6】在正三角形ABC的两边AB、AC上分别取点D、E使得$AD=CE$，恰有$BE=1$,则$\triangle ADE$的中线AF长度为?

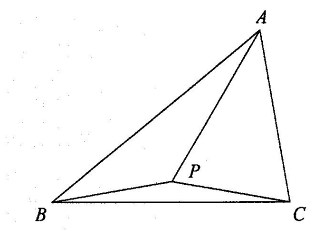
【习 7】如图，PQ是边长为 1 的正方形$ABCD$内两点，使得$\angle PAQ=\angle PCQ=45^\circ$，求$S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PCQ}+S_{\Delta QAD}$的值.



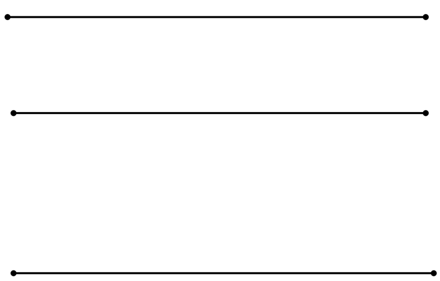
【习 8】在△ABC 的两边向外作正△ABD 和正△ACE，G、H 分别是 AD、CE 的中点，F 在线段 BC 上，$BF = 3CF$，试探究△FGH 的形状.



【习 9】如图，在△ABC 中，$\angle ACB$=2$\angle ABC$，P 为三角形内一点，AP=AC，PB=PC，求证：$\angle BAC$=3$\angle BAP$.



【习 10】任给三条平行线，请画一个正三角形，使得三个顶点分别在三条平行线上.（提示：借助旋转）



【习 11】作图研究：对$\triangle ABC$，$AD\perp BC$于D，E是AB的中点，H是$\triangle ABC$的垂心，F是CH的中点. 过D、E、F作圆，说明你的发现.

【习 12】给出了三条相交且不互相垂直的直线，请作出所有的直线，使得整个图形成为轴对称图形.