早六期末冲刺讲义（二）　　不等式与简单几何不等式

【知 1】一元一次不等式的解法：通分化简，合并同类项，成为 $ax<b$ 之类的标准形式.注意两边同乘一个负数时，不等号需要变向。同时，还要注意 x 的取值范围.

【例 1】若实数 a 满足 $a^3<a<a^2$，则 $x+a>1-ax$ 的解集为________.

$\Rightarrow a<-1,(a+1)x>1-a\Rightarrow x<\dfrac{1-a}{1+a}$.

【例 2】若存在实数 k，不等式 $kax>a+b^2$ 的解集不可能包含 k（无论 a,b 如何变化），则 $k=$________.

将 $x=k$ 代入，方程对 a、b 无解，那么 $k^2-1=0,k=\pm1$.

【知 2】一元一次不等式组的解集为各一元一次不等式解集的交集，可利用数轴确定。同时，含绝对值的一元一次不等式的解集也可以通过数轴直接写出.

【例 3】解不等式：$b<|x+a|<b+1$.

$b\le -1$, 无解；$-1<b<0\Rightarrow -b-1-a<x<b+1-a;b=0\Rightarrow -b-1-a<x<b+1-a(x\ne -a)$;

$b>0\Rightarrow -b-1-a<x<-b-a\ or\ b-a<x<b+1-a$.

这一题中注意利用绝对值的数轴几何意义直接写出解集.

【例 4】解不等式组：$\begin{cases}ax-4<8-3ax,\\(a+5)x-2>2(1-a)x+4.\end{cases}$

$\begin{cases}ax<3\\(a+1)x>2\end{cases}\Rightarrow a>0:\dfrac{2}{a+1}<x<\dfrac{3}{a};a=0:x>2;-1<a<0:x>\dfrac{2}{a+1};a=-1:$ 无解

$-3<a<-1:x<\dfrac{2}{a+1};a\le -3:x<\dfrac{3}{a}$.

【知 3】分式类型的一元一次不等式变体，我们尽量将保持分式不变，将右侧常数化为 0，利用分子分母同号或异号，减少关于参数的讨论.

【例 5】解不等式：$\dfrac{ax+b}{cx+d}>\dfrac{a}{c}$.

$\dfrac{ax+b}{cx+d}-\dfrac{a}{c}>0\Rightarrow \dfrac{bc-ad}{c^2x+cd}>0\Rightarrow bc>ad:x>-\dfrac{d}{c};bc<ad:x<-\dfrac{d}{c};bc=ad:$ 无解

【例 6】解不等式：$\dfrac{4x+2}{ax+1}>2$.

$\dfrac{(4-2a)x}{ax+1}>0.\Rightarrow a>2:-\dfrac{1}{a}<x<0;a=2:$ 无解$;0<a<2:x<-\dfrac{1}{a}\ or\ x>0;a=0:x>0;a<0:0<x<-\dfrac{1}{a}$.

【知 4】含绝对值的一元一次不等式，要注意分类讨论；要注意绝对值不等式中借助数轴直接去绝对值的手法的使用.

【例 7】解不等式：$|ax-b|\le a+1$

$a=0:\begin{cases}|b|>1,\text{无解},\\|b|\le 1,x\in\mathbf{R}\end{cases};a>0:\dfrac{b-a-1}{a}\le x\le\dfrac{b+a+1}{a};-1<a<0:\dfrac{b+a+1}{a}\le x\le\dfrac{b-a-1}{a};a=-1:x=-b;$

$a<-1:$无解

【例 8】$||ax-1|-2|-3|<1.$

$\Leftrightarrow 2<||ax-1|-2|<4.\Leftrightarrow -2<|ax-1|<0(false)\ or\ 4<|ax-1|<6.\Leftrightarrow -5<ax<-3\ or\ 5<ax<7.$

$a<0:\dfrac{7}{a}<x<\dfrac{5}{a}\ or\ -\dfrac{3}{a}<x<-\dfrac{5}{a};a=0:$无解$;a>0:-\dfrac{5}{a}<x<-\dfrac{3}{a}\ or\ \dfrac{5}{a}<x<\dfrac{7}{a}.$

【知 5】不等式组的整数解问题，我们可以通过恰当的放缩处理极端情况，对于剩余有限部分有时还需细致讨论.

【例 9】若恰有两个正整数 k 使得 $\dfrac{33}{50}<\dfrac{n+k}{2n+k}<\dfrac{35}{53}$ 成立，求正整数 n 的最小值.

$\Leftrightarrow \dfrac{16}{17}<\dfrac{k_0}{n}<\dfrac{k_0+1}{n}<\dfrac{17}{18}\Rightarrow\dfrac{1}{306}\ge\dfrac{1}{17n}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{18n}\Rightarrow n\ge 341.$

又 $n=341$ 时，$320\dfrac{16}{17}<k<322\dfrac{1}{18}$.满足条件.

【例 10】已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}3x-a\ge 0,\\|x|<\dfrac{b}{2}\end{cases}$ 的整数解只有 4 个，且 $|ab|\le 30$, 求可能的 a、b 有多少种？.

由于解为 4 个，非含 0 的对称形式，故解集为 $\dfrac{a}{3}\le x<\dfrac{b}{2}$.可以设整数解为 $x-1,x,x+1,x+2(x\ge 0)$，

$x=0$ 时，$-2<\dfrac{a}{3}\le -1,2<\dfrac{b}{2}\le 3\Rightarrow(a,b)=(-5,6),(-5,5),(-4,6),(-4,5)$ 或 $(-3,6),(-3,5)$

$x=1$ 时，$-1<\dfrac{a}{3}\le 0,3<\dfrac{b}{2}\le 4,(a,b)=(-2,7),(-2,8),(-1,7),(-1,8),(0,7)\ or\ (0,8)$

$x=2$ 时，$0<\dfrac{a}{3}\le 1,4<\dfrac{b}{2}\le 5,(a,b)=(1,9),(1,10),(2,9)\ (2,10),(3,9)$ 或 $(3,10)$.

$x\ge 3$ 时，那么 $\dfrac{a}{3}>x-2\Rightarrow\Rightarrow a>3,\dfrac{b}{2}>x+2\Rightarrow b>10\Rightarrow ab>30,$ 不符合题意.一共有 18 种.

【知 6】在三角形中，大边对大角；那么，非最大边所对一定是锐角.

【例 11】已知△ABC 的三条边 a、b、c 满足 $\dfrac{3}{a}=\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}$。则 $\angle A$ 是________.。

【知 7】对于任意图形，用一条线段（直线）将它恰分成两部分，则两部分的周长都比原图形严格小.这是因为：两点之间，线段最短.

【例 12】 在△ABC 内有一个凸多边形 S，证明：S 的周长$\le$△ABC 的周长.

依次沿凸多边形的边所在直线分割三角形，因为是凸的，所以凸多边形全在直线的一侧。保留包括凸多边形的那一块，由上述原理，周长不会增加；那么当所有边都分割完毕后，得到的恰为这个凸多边形，周长不大于三角形周长.

【知 8】借助勾股定理转代数不等式为几何不等式 ，有时可以轻松解决问题.

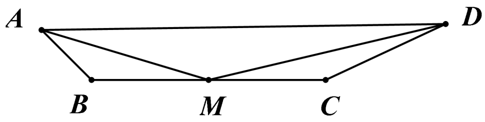
【例 13】a、b、c、d 为正实数，求证：$\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}+\sqrt{b^2+c^2}\geq\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$.

配方，略

【知 9】借助平移、对称实现几何不等式的简化

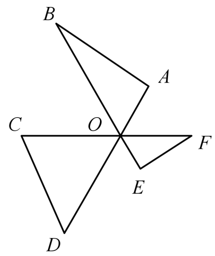
【例 14】凸四边形 $ABCD$ 中，M 是 BC 中点，$\angle AMD=150°$．求证：$AB+\dfrac{\sqrt{3}}{2}BC+CD\geq AD$．

将△ABM 和△DCM 分别关于 AM、DM 作对称，即得.

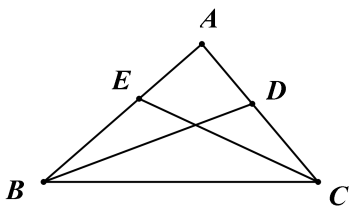


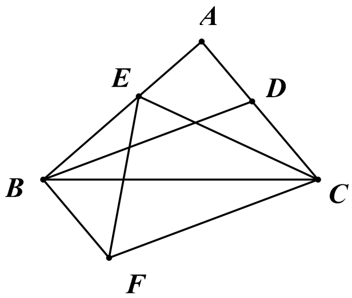
【例 15】已知线段 OA、OB、OC、OD、OE、OF 满足：$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=60°$．且 $AD=BE=CF=2$．求证：$S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OCD}+S_{\Delta OEF}<\sqrt{3}$．

将△COD 向右上平移 2 个单位，△EOF 向左上平移两个单位，即得.



【例 16】在△ABC 中，若 $AB>AC$. 证明：角平分线 $BD>CE$.





如图将 BD 平移至 FC，由 $BE=\dfrac{AB\cdot BC}{AC+BC}>\dfrac{AC\cdot BC}{AB+BC}=CD=BF\Rightarrow\angle BFE>\angle BEF$,

又 $AB>BC\Rightarrow\angle ACB>\angle ABC.\Rightarrow\angle BEC=180°-\angle ABC-\dfrac{\angle ACB}{2}>180°-\angle ACB-\dfrac{\angle ABC}{2}$.

$\Rightarrow\angle EFC<\angle FEC\Rightarrow BD=CF>CE.$

【习 1】若不等式：$(a+k)x+k>-x+3$ 无论 a 如何变化，解集不包含 k，那么 k 的取值范围是________.

【习 2】解不等式 $\dfrac{|2x-1|-|x-1|}{|3x-1|-1}>\dfrac{1}{2}$.

【习 3】一个班内男生人数大于 50%而小于 51%，这个班至少有多少人？

【习 4】 $\dfrac{a+2}{3}<x<\dfrac{a+1}{2}$ 有两个整数解，求 a 的取值范围.

【习 5】证明：对任意三角形，存在其两条边，它们的长 u、v 满足$1 \le \frac{u}{v} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【习 6】平面内有 4 个点，任三点不共线，现两两连线，是否一定能从其中找出两个有一个角不大于 45 度的三角形？

【习 7】点 D、E、F 分别在△ABC 的三边 AB、BC、CA 上，且 $\frac{AD}{DB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}=\frac{1}{3}$.

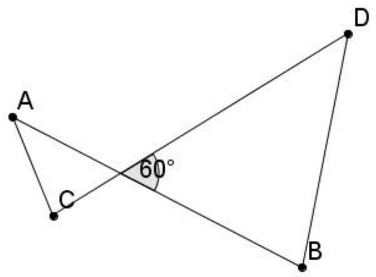
设△ABC 和△DEF 的周长分别为 p 和 q，求证:$\frac{p}{2}<q<\frac{3p}{4}$.

【习 8】△ABC 中 AB 和 BC 边上的高分别不短于该边，求△ABC 各个角的度数.

【习 9】面积为 1，边长为 $a \ge b \ge c$ 的△ABC，求证：$b \ge \sqrt{2}$.

【习 10】已知 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$, 求 $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+4}+\sqrt{z+9}$ 的最小值.

【习 11】设线段 AB 与 CD 相等，且交角为$60°$。求证：$AC+BD \ge AB$.



【习 12】在△ABC 每边上各取一点构成三角形，何时周长最小？