

第二十二屆全國華羅庚金杯少年數學邀請賽(香港賽區)決賽

中一組試卷

日期：2017 年 4 月 1 日

一小時三十分鐘完卷 (上午 10:00 至上午 11:30)

比賽須知：

1. 全卷共 14 題，滿分 150 分。包括填空題 8 道，每題 10 分；簡答題 4 道，每題 10 分；詳答題 2 道，每題 15 分。
2. 參賽學生必須全部作答，所有答案寫在答題紙上。
3. 填空題無需書寫步驟，只須填寫答案；簡答題要求寫出簡要過程；詳答題要求寫出詳細過程。
4. 比賽時使用自備文具，例如鉛筆、原子筆及橡皮擦膠等。不准使用計算器。違規者將被取消比賽資格。
5. 完卷後收回所有題目，答題紙及草稿紙。
6. 參賽學生在本試題和答題紙上填寫以下資料：座位編號、學生姓名、學生編號及學校名稱。
7. (可依照參賽資格確認信列印的資料填寫)

座位編號	學生姓名	學生編號	學校名稱
C _ _ _		_ _ _ _	

本試卷共設 14 題，全部試題均須作答，所有答案寫在答題紙上。

一. 填空題 (每小題 10 分, 共 80 分)

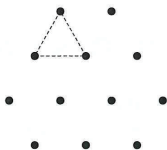
1. 計算：
$$\frac{\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} + \dots + \frac{2016}{2015} \times \frac{2016}{2017}}{1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2015} \times \frac{1}{2017}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 已知 $(x^2 + 3x - 1)^5 = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_1x + a_0$ ，則 $a_9 + a_7 + a_5 + a_3 + a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 下列算式中相同的漢字代表相同的數字，不同的漢字代表不同的數位，且均不為 1。則成績 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\overline{\text{努力}} \times \overline{\text{認真}} + \overline{\text{仔細}} = \overline{\text{好成績}}$$

4. 以下面的正三角形點陣中的點為頂點的所有平行四邊形的面積和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ (圖中所示的正三角形的面積為 1)。



5. A、B、C、D 四支球隊打比賽，賽前四隊的主教練聚在一起預測比賽結果。

教練甲說：「B 隊第二，我執教的隊伍第三，A 隊墊底。」

教練乙說：「我執教的隊伍肯定奪冠，D 隊第二，B 隊第三。」

教練丙說：「我執教的隊伍這次能力有限，只能拿到第四，A 隊第二，C 隊第三。」

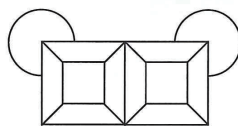
教練丁說：「我執教 A 隊剛滿一年，應該是第三名，比 B 隊好一點。」

比賽結果統計出來後，發現沒有並列名次，且每位教練預測的結果中都只有一部分正確。那麼，獲得第二名的是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 執教的隊伍。

6. 已知正整數數列 $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$ 中，任意連續若干項之和都不等於 41 (包括只取任何一項)，那麼 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2017}$ 最小等於 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 王先生去加油站加油，發現當天的油價比之前下降了 0.25 元/升，於是他多加了 3 升。結帳時發現所付金額比之前多支付了 10 元。又過了幾天，王先生再次去加油，發現這次的油價比上次上升了 0.4 元/升，於是他比上次少加了 5 升油，結帳時發現所付金額比上次少 18 元。那麼，王先生兩次加油共花了 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元錢。

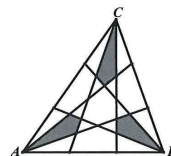
8. 用紅、黃、藍、綠四種顏色之一給下圖所示的區域染色，每個區域只能使用一種顏色。要求有邊相鄰的區域顏色不能相同，那麼共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種不同的染色方法。



二. 解答下列各題 (每題 10 分, 共 40 分, 要求寫出簡要過程)

9. 猴山上的桃子豐收了，猴王分給兩隻小猴各一筐桃子，為了公平起見，每筐桃子數量一樣多。其中一隻小猴每天吃掉了六個桃子，然後再從剩下的桃子中拿一個送給猴王作為感謝 (如果沒有剩餘，則不送)；另一隻小猴每天先送給猴王一個桃子，再從剩餘的桃子中吃掉七個 (如果不足七個，則吃完)。當兩筐桃子被吃完後，兩隻小猴發現它們送給猴王的桃子數量也一樣多，那麼一筐桃子最多有多少個？

10. 如圖， $\triangle ABC$ 面積為 70，各邊上均為三等分點，求陰影部分的面積。

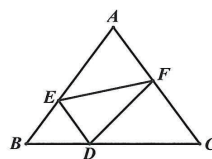


11. 求
$$\begin{cases} xy = xz + 3 \\ yz = xy + xz - 7 \end{cases}$$
 的正整數解。

12. 某部落語言中共有 9 個字母，如果兩個單詞長度相同且只有一個字母不同，我們稱這兩個單詞是「相似的」。那麼，該部落所有單詞最少可以分為多少組，才能保證每組內任意兩個單詞均不相似？

三. 解答下列各題 (每小題 15 分, 共 30 分, 要求寫出詳細過程)

13. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=125$ ， $BC=150$ 。D、E、F 分別是邊 BC、CA、AB 上的點，當 $\triangle DEF$ 的周長最小時，求 $\triangle DEF$ 的面積。



14. 2017 名選手參加淘汰賽，每輪至多有一名選手輪空，直至賽出冠軍為止。已知每名選手的編號互不相同，求證：至少存在一場比賽，比賽雙方編號的差不少於 96。