赏析几道美国 AMC12 数学竞赛题

龚新平

(上海市育才中学，201801)

美国高中数学竞赛 AMC10、AMC12 每年都在全球同步进行两次活动，第一次在每年的 2 月初，另一次在 2 月下旬. 由于第一次活动经常和我国的春节冲突，所以近年来中国区都选择参加第二次的活动，即 AMC10(B) 与 AMC12(B). 在每次 AMC10 与 AMC12 测验中，要求学生在 75 分钟内完成 25 道选择题，满分 150 分，答对一题得 6 分，未答得 1.5 分，答错不倒扣分. 考生成绩在全球前 2.5% 至 5% 内才有可能获得荣誉证书，并受邀参加美国数学邀请赛(AIME). 在今年 2 月底刚结束的美国 AMC12(B) 数学竞赛试卷中出现了不少有创意的问题，笔者认为这些问题对我们中国学生也很有借鉴作用，值得学习、探究和推广. 本文拟对此次 AMC12 竞赛中的最后六道较难的问题进行仔细分析与解答，以飨读者！

问题 1　A trapezoid has side lengths 3, 5, 7, and 11. The sum of all the possible areas of the trapezoid can be written in the form of $r_1\sqrt{n_1}+r_2\sqrt{n_2}+r_3$, where r_1, r_2, and r_3 are rationalnumbers and n_1 and n_2 are positive integers not divisible by the square of a prime. What is the greatest integer less than or equal to $r_1+r_2+r_3+n_1+n_2$?

(A) 57.　　(B) 59.

(C) 61.　　(D) 63.

(E) 65.

译文　边长为 3, 5, 7, 11 的所有可能的梯形面积总和可写成 $r_1\sqrt{n_1}+r_2\sqrt{n_2}+r_3$ 的形式，这里 r_1, r_2, r_3 为有理数，n_1, n_2 为不是完全平方数的正整数，求不大于 $r_1+r_2+r_3+n_1+n_2$ 的最大整数.

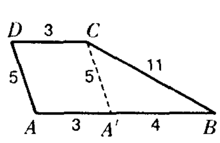

图 1

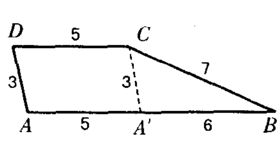

图 2

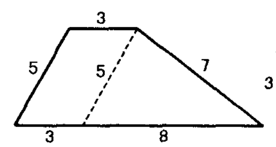

图 3

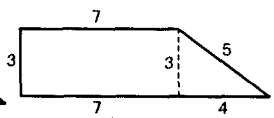

图 4

解　考虑梯形的对边长度的不同组合情况：(1) 3 与 7 相对，(2) 3 与 11 相对，(3) 3 与 5 相对.

对于情况(1)，当 3 与 7 是梯形的上下底时，如图 1，在梯形 $ABCD$ 中作 $CA'//DA$，则 $\triangle A'BC$ 的三边长度依次为 4, 5, 11，由 $4+5<11$ 知这样的 $\triangle A'BC$ 不存在；当 3 与 7 是梯形的两腰长时，如图 2，易知此时 $\triangle A'BC$ 是存在的，由余弦定理得 $\cos\angle B=\frac{19}{21}$，故梯形的高为 $7\sin\angle B=\frac{4}{3}\sqrt{5}$，进而 $S_{梯形}=\frac{32}{3}\sqrt{5}$.

对于情况(2)与(3)，分别对应图 3 和图 4，同理可求得面积分别为 $\frac{35}{2}\sqrt{3}$ 或 27.

故 $r_1+r_2+r_3+n_1+n_2=\frac{35}{2}+\frac{32}{3}+27+3+5=63\frac{1}{6}$，故选($D$).

问题 2　Square AXYZ is inscribed in equiangular hexagon ABCDEF with X on $\overline{BC}$, Y on $\overline{DE}$, and Z on $\overline{EF}$. Suppose that $AB=40$ and $EF=41(\sqrt{3}-1)$. What is the side-length of the square?

(A) $29\sqrt{3}$.　　(B) $\frac{21\sqrt{2}}{2}+\frac{41\sqrt{3}}{2}$.

(C) $20\sqrt{3}+16$.　　(D) $20\sqrt{2}+13\sqrt{3}$.

(E) $21\sqrt{6}$.

译文　等角六边形 $ABCDEF$ 的内接正方形 $AXYZ$ 的顶点 X, Y, Z 分别在边 BC, DE, EF 上，若 $AB=40$, $EF=41(\sqrt{3}-1)$，求正方形 $AXYZ$ 的边长.

解　如图 5，在等角六边形 $ABCDEF$ 中，设

$\angle AXB=\theta, AX=x$，则 $\angle EYZ=60^{\circ}-\theta, \angle ZAF=\theta-30^{\circ}$，由正弦定理得 $\frac{x}{\sin 120^{\circ}}=\frac{40}{\sin\theta}$，

$$\frac{x}{\sin 120^{\circ}}=\frac{FZ}{\sin(\theta-30^{\circ})}=\frac{EZ}{\sin(60^{\circ}-\theta)}$$
$$=\frac{EF}{\sin(\theta-30^{\circ})+\sin(60^{\circ}-\theta)},$$

从而和差化积易得 $\tan\theta=\frac{20}{21}$，故 $x=\frac{20\sqrt{3}}{\sin\theta}=29\sqrt{3}$，选(A).

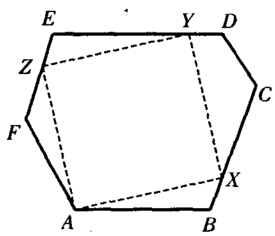

图 5

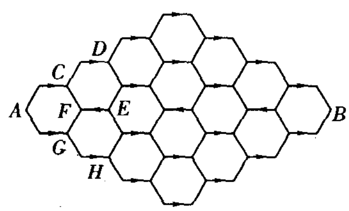

图 6

问题 3　A bug travels from A to B along the segments in the hexagonal lattice pictured below. The segments marked with an arrow can be traveled only in the direction of the arrow, and the bug never travels the same segment more than once. How many different paths are there?

(A)2112.　　(B)2304.

(C)2368.　　(D)2384.

(E)2400.

译文　一只小虫沿着如图6所示的由六边形构成的格子从点 A 爬行到点 B，标记有箭头的边只能按箭头方向爬行，且小虫爬行同一条边不超过一次，则共有多少种不同的爬行路径?

解　由题意结合乘法与加法原理易知：如图6，昆虫从 A 可以先到 C(也可以先到 G)，然后有三种不同方法走完第二列六边形：

(1) 可以直接到 D，或经过 F 与 G 到达 H，这两种走法接下来走完第三列六边形均有四种选择；

(2) 经过 D,E,F 与 G 到达 H，而这种走法接下来走完第三列仅有两种选择；

同理分析可知：昆虫从 A 到 B 不同的爬行路线总数为：$2\times(2\times4+1\times2)\times(4\times4+4\times2)\times(2\times2+1\times1)=2400$. 选($E$).

问题 4　Define the function f_1 on the positive integers by setting $f_1(1)=1$ and if $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ is the prime factorization of $n>1$, then $f_1(n)=(p_1+1)^{e_1-1}(p_2+1)^{e_2-1}\cdots(p_k+1)^{e_k-1}$. For every $m\geqslant 2$, let $f_m(n)=f_1(f_{m-1}(n))$. For how many N in the range $1\leqslant N\leqslant 400$ is the sequence $(f_1(N), f_2(N), f_3(N),\cdots)$ unbounded?

(A)15.　　(B)16.

(C)17.　　(D)18.

(E)19.

译文　定义在正整数集上的函数 f_1 满足 $f_1(1)=1$，且对大于1的正整数 n，若其素因数分解为 $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$，则 $f_1(n)=(p_1+1)^{e_1-1}(p_2+1)^{e_2-1}\cdots(p_k+1)^{e_k-1}$，对每个正整数 $m\geqslant 2$，记 $f_m(n)=f_1(f_{m-1}(n))$，则区间[1,400]内有多少个整数 N，使得序列 $(f_1(N), f_2(N), f_3(N),\cdots)$ 无界?

解　由题意易见：当 $n=1,2,3,\cdots,31$ 时，序列 $(f_1(N), f_2(N), f_3(N),\cdots)$ 总是周期数列，如：

$f_1(8)=3^2, f_2(8)=2^2, f_3(8)=3^1, f_4(8)=1, f_5(8)=1,\cdots$;

$f_1(27)=2^4, f_2(27)=3^3, f_3(27)=4^2, f_4(27)=3^3,\cdots$；等.

而序列 $f_1(32)=3^4, f_2(32)=2^6, f_3(32)=3^5, f_4(32)=2^8, f_5(32)=3^7,\cdots$ 显然是无界序列!

同理易见：在区间 $1\leqslant n\leqslant 400$ 内，$n=2^4\cdot 5^2$，$n=2^5\cdot k(k=1,3,5,\cdots,11)$，$n=2^6\cdot k(k=1,3,5)$，$n=2^7\cdot k(k=1,3)$，$n=2^8$ 时对应的序列是无界序列；$n=3^4\cdot k(k=1,2,4)$，$n=3^5$，$n=7^3$ 时对应的序列也都是无界序列，且没有其它.

所以，满足条件的序列总共有 $1+6+3+2+1+3+1+1=18$ 个，选(D).

问题 5　Consider all polynomials of a complex variable, $P(z)=4z^4+az^3+bz^2+cz+d$, where a, b, c, and d are integers, $0\leqslant d\leqslant c\leqslant b\leqslant a\leqslant 4$, and the polynomial has a zero z_0 *with* $|z_0|=1$. What is the sum of all values $P(1)$ over all the polynomials with these properties?

(A)84.　　(B)92.

(C)100. (D)108.

(E)120.

译文 考虑所有复变量多项式 $P(z)=4z^4+az^3+bz^2+cz+d$，其中系数 a,b,c,d 是整数，满足 $0\leqslant d\leqslant c\leqslant b\leqslant a\leqslant 4$，且多项式有模为1的零点，求所有满足条件的多项式对应 $P(1)$ 值的总和.

解 由题意，先考虑模为1的实根 z_0，显然 $z_0\neq 1$，当 $z_0=-1$ 时满足 $4+b+d=a+c$，由条件易知当且仅当 $d=0$ 时，$c=b=i(i=0,1,2,3,4)$，$a=4$ 满足条件，对应的 $P(1)=4+a+b+c+d$ 分别为8,10,12,14,16；

再考虑模为1的虚根 $z_0=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R},x^2+y^2=1)$，则 $\overline{z_0}=x-y\mathrm{i}$ 也是实系数多项式 $P(z)$ 的虚根，从而可设 $P(z)=4(z^2-2xz+1)\cdot(z^2+mz+n)(m,n\in\mathbf{R})$，展开易得

$P(z)=4z^4+(4m-8x)z^3+(4n+4-2mx)z^2+(4m-8nx)z+4n.$

由 $4m-8x=a\geqslant c=4m-8nx$ 得 $(n-1)x\geqslant 0$！以下分三种情况讨论：

(1) 若 $x>0$，则 $n\geqslant 1$，$d=4n\geqslant 4$，又 $0\leqslant d\leqslant 4$，故只可能 $d=4$，$n=1$，从而 $a=b=c=d=4$，$P(z)=4(z^4+z^3+z^2+z+1)=\dfrac{4(1-z^5)}{1-z}$，故存在五次单位根满足条件，且 $P(1)=20$；

(2) 若 $x=0$，则 $z_0=\pm\mathrm{i}$，此时 $P(z)=4z^4+4mz^3+(4n+4)z^2+4mz+4n$，由 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d\geqslant 0$ 得 $4m\geqslant 4n+4\geqslant 4m\geqslant 4n\geqslant 0$，所以 $4m-4=4n\geqslant 0$，故 $m\geqslant 1$，又 $c=4m\leqslant 4$，所以 $m=1$，$n=0$，即 $a=b=c=4$，$d=0$(与前面重复，不计)；

(3) 若 $-1<x<0$，则由 $4\geqslant 4m-8x\geqslant 4n+4-2mx\geqslant 4m-8nx\geqslant 4n\geqslant 0$ 得 $2x+1\geqslant m\geqslant n(2x+1)$，对该式也分以下三种情况讨论：

① 若 $2x+1=0$，$x=-\dfrac{1}{2}$，代入上式得 $4\geqslant 4m+4\geqslant 4n+4+m\geqslant 4m+4n\geqslant 4n\geqslant 0$，易见当且仅当 $m=n=0$ 时成立，此时 $a=b=4$，$c=d=0$，$P(z)=4z^4+4z^3+4z^2=4z^2(z^2+z+1)=\dfrac{4z^2(1-z^3)}{1-z}$，故存在三次单位根 $\omega=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 满足条件，此时 $P(1)=12$；

② 若 $2x+1<0$，则 $n=1$，进而 $m-2x=1$，$mx=2$，故 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$，舍去；

③ 若 $2x+1>0$，则由 $4\geqslant 4n+4-2mx$，$4m-8nx\geqslant 4n$，$x<0$，易得 $8n\leqslant 4mx\leqslant 4n(2x+1)x$，若 $n=0$，由 $4\geqslant 4m-8x\geqslant 4-2mx\geqslant 4m\geqslant 0$，得 $mx>0$，$m>0$，则 $x>0$，矛盾；若 $0<n\leqslant 1$，则有 $2\leqslant(2x+1)x$，进而 $x\leqslant\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$ 或 $x\geqslant\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$，显然均不符合！

综上可知：所有满足条件的 $P(1)$ 值的总和为 $8+10+12+14+16+20+12=92$，选(B).

点评 该题谨慎细致地分类讨论，保证了不多不漏！这是解决此问题的关键.

问题6 Let $S=\{(x,y):x\in\{0,1,2,3,4\},y\in\{0,1,2,3,4,5\},\text{and }(x,y)\neq(0,0)\}$. Let T be the set of all right triangles whose vertices are in S. For every right triangle t = $\triangle ABC$ with vertices A, B, and C in counter-clockwise order and right angle at A, let f(t) = $\tan\angle CBA$. What is $\prod_{t\in T}f(t)$?

(A) 1. (B) $\dfrac{625}{144}$.

(C) $\dfrac{125}{24}$. (D) 6. (E) $\dfrac{625}{24}$.

译文 设 $S=\{(x,y)\mid x\in\{0,1,2,3,4\},y\in\{0,1,2,3,4,5\},(x,y)\neq(0,0)\}$，记所有以 S 中的点为顶点构成的直角三角形组成集合 T，对每个顶点 A,B,C 逆时针排列且点 A 为直角顶点的 $t=\mathrm{Rt}\triangle ABC$，定义 $f(t)=\tan\angle CBA$，求 $\prod_{t\in T}f(t)$ 的值.

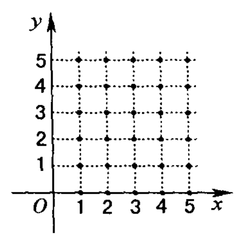

图7

解 如图7，由题意，如果直角三角形 $\triangle ABC$ 的三个顶点均不在直线 $y=5$ 上，则一定存在关于直线 $y=x$ 对称的另一个直角三角形 $\triangle A'B'C'$ 在集合 S 中，且有 $\tan\angle CBA\cdot\tan\angle C'B'A'=1$；如果三个顶点均不在直线 $y=0$ 上，也一定存在关于直线 $y=x+1$ 对称的另一个三角形 $\triangle A'B'C'$ 在集合 S 中，且有 $\tan\angle CBA\cdot\tan\angle C'B'A'=1$；如果三个顶点均不在直线 $x=0$ 上，也一定存在关于直线 $x=\dfrac{5}{2}$ 对称的另一个三角形 $\triangle A'B'C'$ 在集合 S 中，此时有 $\tan\angle CBA\cdot\tan\angle C'B'A'=1$.

因此,只需考虑以点(0,5)为其中一个顶点,且直线 $y=5$ 与 $y=0$ 上各至少一个顶点的组成直角三角形 $\triangle ABC$ 的两种情形:

① 以点(0,5)为一个顶点,另一个顶点在直线 $y=0$ 上,第三个顶点在直线 $y=5$ 上除点(0,5)外的其它情况,显然只有(0,5)分别与 $(i,0)$、$(i,5)$ $(i=1,2,3,4)$ 组成直角三角形的四种情形,且易见 $\tan\angle CBA$ 分别为 $\frac{5}{1},\frac{5}{2},\frac{5}{3},\frac{5}{4}$;

② 以点(0,5)为一个顶点,另一个顶点在直线 $y=0$ 上,第三个顶点在除直线 $y=0$ 和 $y=5$ 外的其它点组成直角三角形三点组的四种情形:$\{(0,5),(1,0),(3,2)\}$,$\{(0,5),(1,0),(3,3)\}$,$\{(0,5),(3,0),(4,1)\}$,$\{(0,5),(3,0),(4,4)\}$,且易见 $\tan\angle CBA$ 分别为 $\frac{2}{3},1,\frac{1}{4},1$.

从而有 $\prod\limits_{t\in T}f(t)=\frac{5}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot1\cdot\frac{1}{4}\cdot1=\frac{625}{144}$,选(B).

点评 该题利用对称轴巧妙地找到了集合 S 中乘积为1的对应直角三角形,从而将问题简化!

(收稿日期:2012-05-06)

一道上海市数学竞赛试题的另解

黄春亮 指导教师 彭 成

(江苏省上冈中学高二16班,224731)

2011年上海市高中数学竞赛(新知杯)第10题:

如图1,在 $\triangle ABC$ 中,点 O 为 BC 的中点,点 M、N 分别在边 AB、AC 上,且 $AM=6$,$MB=4$,$AN=4$,$NC=3$,$\angle MON=90°$. 求 $\angle A$ 的大小.

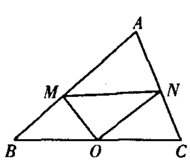

图1

文[1]给出了这道试题的四种方法,这里借助于向量的线性表示,给出一个无需添加辅助线的解答,算是对文[1]四种方法的一个补充.

解 $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}$

$=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$.

同理可得 $\overrightarrow{NO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{14}\overrightarrow{AC}$.

由 $\angle MON=90°$ 得 $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{NO}=0$.

故 $(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{10}\overrightarrow{AB})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{14}\overrightarrow{AC})=0$,

即 $\frac{9}{35}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{20}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{28}\overrightarrow{AC}^2=0$,

得 $\frac{9}{35}\times10\times7\times\cos A-\frac{1}{20}\times10^2-\frac{1}{28}\times7^2=0$,

所以 $\cos A=\frac{3}{8}$,即 $\angle A=\arccos\frac{3}{8}$.

参考文献:

[1] 缪雪松.一道数学竞赛题的几种解题思路.中学数学月刊,2011(10).

(收稿日期:2012-04-18)