数学竞赛中的图论问题

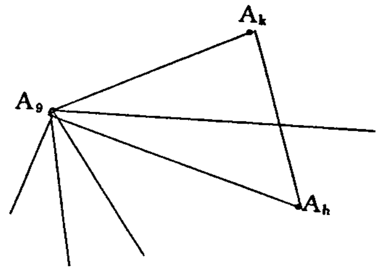
魏遲荪
(陕西师范大学数学与信息科学学院 教授 西安 710062)

摘 要: 图论是应用数学的一个重要分支, 图论方法是研究二元关系的重要工具。本文通过 9 个国内外数学竞赛的典型问题, 展示了运用图论思想分析、阐述、解决问题的过程, 用以提高学习者分析问题的能力, 增强"用数学"的意识。

关键词: 数学竞赛; 图论
中图分类号: O 157. 5 **文献标识码**: A **文章编号**: 1009- 3826(2002)02- 0100- 03

图论中的"图"指的是有序三元组 $G(V(G), E(G), \Psi_G)$, 其中关联函数 Ψ_G 是从 $E(G)$ 到 $V(G)$ 中的元素对构成的集合 $V^{(2)}(G)=\{(u,v)\mid u,v\in V(G)\}$的映射, 在众多实际问题中, $V(G)$ 往往代表我们所研究的对象集合, 于是 $E(G)$ 就反映了对象集合中的二元关系. 大千世界中, 二元关系比比皆是, 比如交通运输问题中, 两地之间有无直通道路; 自动化生产线上, 两道工序是否衔接; 微观世界中, 两个带电粒子的排斥、吸引; 社会生活中, 两个人是否相识, 两个部门之间有无制约关系, 两个国家是结盟还是对峙……. 由于二元关系的普遍性, 决定了图论方法应用的广泛性. 通过图论课程的学习, 理解掌握图论的这一思想方法, 对于增强我们的数学应用意识, 推进数学教学改革是十分有益的. 由于图论在考察青少年的数学洞察力、创造思维和数学的机敏等方面有独到的作用, 因而一直受到数学教育界的青睐, 一些高层次数学竞赛中经常出现以图论知识为背景或运用图论思想方法来处理的问题, 比如中学生国际数学奥林匹克竞赛(IMO)第 6 届第 4 题, 20 届第 6 题, 21 届第 2 题, 32 届第 4 题, 33 届第 3 题等等. 对此, 我在《图论基础》教材中已给予了充分重视. 为了帮助参加函授学习的学员加深对中学数学竞赛中图论方法的理解, 提高指导数学竞赛和数学课外活动的能力, 下面我们再来分析几个数学竞赛中的图论问题.

问题 1 已知 9 个人中 A_1 与 2 个人握过手, A_2、A_3 各与 4 个人握过手, A_4、A_5、A_6、A_7 各与 5 个人握过手, A_8、A_9 各与 6 个人握过手. 证明这 9 个人中至少可以找到 3 个人, 他们互相握过手.



分析 用 9 个点表示 9 个人, 如果 A_i 与 A_j 握过手, 就连一条边 (A_i, A_j). 已知 A_9 的相邻点有 6 个, 其中必有 A_k 不同于 A_1、A_2、A_3, 由题设对于这个点有 $d(A_k)\geq 5$. 在与 A_9 相邻的其余 5 个点中, 一定有点 A_h 与 A_k 相邻, 否则 $d(A_k)\leq 9-1-5=3$, 矛盾. 于是 A_9、A_k、A_h 就是一个三角形的 3 个顶点, 它表示的三个人互相握过手.

问题 2 有 $2n\ (n\geq 2)$ 个人在一起聚会, 若每个人至少同其中 n 个人认识, 证明从这 $2n$ 个人中总可以找出 4 个人来, 这 4 个人可以围着圆桌坐下, 使得每个人旁边都是他认识的人.

收稿日期 2002- 02- 25

分析　用 $2n$ 个点表示 $2n$ 个人, 如果两人互相认识, 就在相应两点间连一条边, 这样得到一个简单图 G. 已知 G 中任一顶点 v_i, 有 $d(v_i)\geq 4$, 欲证明 G 中必有四边形存在

如果 $G=K_{2n}$, 结论显然 如果 $G\neq K_{2n}$, 那么 G 中有两个不相邻顶点 v_1、v_2, 由于 $d(v_1)+d(v_2)\geq 2n$, G 中除 v_1、v_2 外只有 $2n-2$ 个顶点, 因此其中至少有两个点(记为 v_3、v_4)与 v_1、v_2 都相邻, 于是 v_1、v_2、v_3、v_4 构成四边形

以上两例, 我们都用连边表示相应的两个对象具有某种关系(握手、认识……), 那么, 能否用连边表示对象间不具有某种关系呢? 当然可以, 我们看下一个问题

问题 3　9 位数学家在一次国际数学会议上相遇, 他们中的任意 3 个人中, 至少有两个人可以用同一种语言对话 如果每位数学家至多可说 3 种语言, 证明至少有 3 位数学家可以用同 1 种语言对话

分析　仍用 v_1、v_2、……v_9 这九个点表示九位数学家, 但当 2 人不能用同一种语言对话时, 才用边连接相应的两个顶点, 这样得到简单图 G. 因为任意 3 个人中至少有 2 个可以用同一种语言对话, 所以 G 中任意三个顶点中至少有两个点是不相邻的 这就是说, G 中没有三边形

我们在 G 中任取一个点, 不妨记为 v_1. 如果① $d(v_1)\leq 4$, 那么在 G 中 v_1 的不相邻点至少有 $9-1-4=4$ 个, 这就是说 v_1 至少可以与 4 个人对话, 但是每位数学家至多可说三种语言, 因此 v_1 一定与 2 位数学家, 不妨记为 v_2、v_3, 用同一种语言对话 于是 v_1、v_2、v_3 这 3 个人可以用同一种语言对话 ② $d(v_1)>4$, 即 $d(v_1)\geq 5$, 不妨设 v_2、v_3、……v_6 都是 v_1 的邻接点 由于 G 中没有三边形, 所以 v_2 与 v_3、v_4、v_5、v_6 都不相邻, 因此 $d(v_2)\leq 4$, 这又回到①, 得证

《图论基础》附录例 3 中, 我们分别把"认识"和"不认识"作为连边的条件, 用两种不同的方法解决了同一个问题, 大家要很好的领会, 以便开阔解题的思路

问题 4　如果在一次会议上, 每个人都至少与 $\delta\geq 2$ 个人交换过意见, 证明一定可以找到 k 个人 v_1、v_2、……v_k, 使得 v_1 与 v_2 交换过意见, v_2 与 v_3 交换过意见, ……, v_{k-1} 与 v_k 交换过意见, v_k 与 v_1 交换过意见 这里 k 为大于 δ 的某个整数

分析　用点表示人, 如果 2 人交换过意见, 就在相应两点间连一条边, 这样得到一个简单图 G. 已知 G 中每个点的度数不小于 δ, 要证明的结论是 G 有一个长度为 $k>\delta$ 的圈

在 G 中取一条最长道路 μ, 设 μ 的一个端点为 v_1, 则与 v_1 邻接的 δ 个点 v_2、v_3、……$v_{\delta+1}$ 全在 μ 上, 否则地话, μ 还可以再延长, 这与 μ 的"最长性"矛盾 沿着 μ 走过 v_1、v_2、……$v_{\delta+1}$ 然后回到 v_1, 这就是一个长度大小 δ 的圈, 圈上两个相邻点所代表的人彼此交换过意见

问题 5　有一个团体有 2002 个人, 而且任意 4 个中均存在一个人认识另外 3 个人, 问该团体中认识所有其他人的成员至少有几个?

分析　作一个 2002 阶的简单图 G. 每个顶点表示团体中的一个成员, 互相认识则相应顶点连边 我们断言, 至少有一个人认识所有其它人, 即 $\exists x\in V(G)$, $d(x)=2001$ 不然地话, $\forall x\in V(x)$, 均有 $d(x)<2001$ 于是 G 中存在一对点 x、y, $xy\notin E(G)$, 在 G 的其余 2000 个点中, 任取 u, 若 u 与 x, y 全相邻, 则因 $d(u)<2001$, 所以 G 中必有 u 的不相邻点 v, 于是 $\{x, y, u, v\}$ 这 4 点中没有 1 点与另外 3 点都相邻, 矛盾 若 u 与 x, y 不全相邻, v 与 x, y 也不全相邻, 则 $\{x, y, u, v\}$ 与已知矛盾 因而只存在一点 u 与 x, y 不全相邻, 而所有其它点 v 均与 x, y 都相邻 但 v 必有它的不相邻点 w (否则, $d(v)=2001$, 矛盾), 这样 $\{x, y, v, w\}$ 与已知矛盾

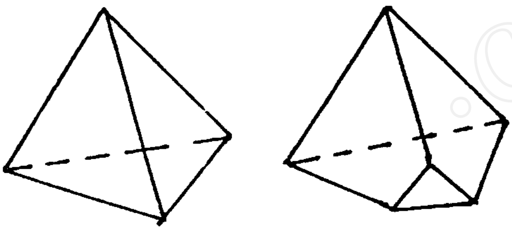
在给定条件下, 该团体中认识所有其他人的成员有多少个呢? 通过上面的论证已找到了一个 x_1, 将它排除在外, 其余 2001 人仍满足"任意 4 个人中均存在一个认识另外 3 个人", 同上可知, 能够找到 x_2 认识所有其他 2000 个人, 当然 x_1 与 x_2 也互相认识, 于是 x_2 认识 G 中所有其它 2001 个人 去掉 x_1、x_2 后同样又可以找到 x_3, 认识所有其他人

……, 如此继续下去, 直到余下 4 个人, 由已知, 其中又有 1 个认识所有其他人 因而仅在最后余下的 3 人中无法进一步判断, 其他 $2002-3=1999$ 个人均认识所有其他人

问题 6　某大型集会有 2001 个人参加, 已知每个人都至少认识其中一个人, 证明必有一个人至少认识其中 2 个人

分析　用一个顶点表示一个人, 两个人认识则在相应顶点间连边 在这个 2001 阶图 G 中, 若每个人仅认识一个人, 则 1 度顶点的个数为奇数 与度数定理矛盾, 所以必定有人至少认识 2 个人

观察一个四面体, 它的四个面都是由奇数条边"围"成的, 如果砍掉它的一个角, 在所得到的五面体中, 由奇数条边"围"成的面数成了 2



类似的实验使我们猜测:

问题 7　任何多面体中, 由奇数条边"围"成的面数必为偶数

分析　在多面体的每个面上任取一点作为这个面的代表, 两个面若有公共边, 则相应两点间连一条边 这样一个面由 k 条边"围"成, 相应的点就"伸"出 k 条边, 换句话说, 这个点的度数就是 k. 由于任何图中奇顶点的个数都是偶数, 所以奇数条边"围"成的面数必为偶数

问题 8　16 个城市举行足球联赛, 每个城市各派甲、乙两队参加 同一城市的两队不比赛, 不同城市的球队相互都要比赛 当比赛进行了若干场后, A 市甲队的领队统计除本队外其他各队已赛场数均不相同 此时, A 市的乙队已赛过多少场?

分析　16 个城市共有 32 支球队, 可以作成一个 32 阶图 G. 两队已比赛, 则在相应顶点间连边 A 市甲队领队统计时, 除该队外各队已赛场数作成集合 $E=\{0, 1, \cdots\cdots, 30\}$. 对于每一个 $k\in E$, 有唯一的球队 $P(k)$, 它恰与 k 支球队进行过比赛 对于球队 $P(30)$ 来说, 它除了与本市另一支球队未比赛外, 与其他球队全进行过比赛, 这样其他城市球队的比赛场数不会是 0, 由此可知 $P(30)$ 与 $P(0)$ 是同一城市的球队 与 $P(1)$ 比赛的只有一个队, 自然是 $P(30)$, 因此 $P(0)$ 与 $P(1)$ 是仅有的与 $P(29)$ 未曾比赛的球队, 但已知 $P(0)$ 与 $P(30)$ 是同城球队, 所以 $P(1)$ 与 $P(29)$ 是同城球队 同理可以推断, $P(j)$ 与 $P(30-j)$ $(j=2, 3, \cdots\cdots, 14)$ 是同一城市的球队 于是 A 市的乙队是 $P(15)$, 即它已赛了 15 场

问题 9　在大厅中聚了 100 个客人, 他们中每个人至少与另外 67 个人相互认识 证明: 这些人中一定可以找到 4 个人, 他们彼此都认识

分析　用 100 个点代表 100 个人, 两人认识则在相应顶点间连一条边, 得到 100 阶图 G, 且 $\forall x\in v(G)$, 有 $d(x)\geq 67$. 要证明, G 中存在一个 4 阶子图是完全图

$\forall x\in v(G)$, 令 $N(x)=\{y\mid(x, y)\in E(G)\}$, $N(x)$ 中至少有 67 个点, 从中任取 $y\in N(x)$, 再令 $N(y)=\{z\mid(y, z)\in E(G)\}$, $N(y)$ 中也至少有 67 个点, 故 $|N(x)\cap N(y)|\geq|N(x)|+|N(y)|-100=34$, 于是可取 $z\in N(x)\cap N(y)$, 又 $N(z)$ 中也至少有 67 个点, 因而 $|N(z)\cap N(x)\cap N(y)|\geq|N(z)|+|N(x)\cap N(y)|-100\geq 67+34-100=1$, 这就是说, 必有点 $w\in N(x)\cap N(y)\cap N(z)$, 于是 $G[\{x, y, z, w\}]\cong K_4$, 这 4 个点代表的人互相都认识

为了保证有 4 个人互相认识, 这 100 个人每个人都至少认识 67 个人 能不能比"67"再少一些? 这个问题留给读者思考. 一般地说, 在 n 个人的聚会中, 为了保证至少有 4 个人相互认识, 要求这 n 个人中的每一个人至少与 m 个人相互认识, 这里 m 与 n 有什么关系?如果把"4"改为"5", 又当如何?数理之妙, 在于变化, 有兴趣的读者不妨试探一下.

〔责任编辑　张淑霞〕