例 5 计算 $\frac{1}{1-\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{1+\sqrt[4]{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$

解 原式 $=\frac{2}{1-\sqrt{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\frac{4}{1-\sqrt{3}}=-2$.

6 拆项相消

例 6 化简

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$$

分析 先分母有理化,再合并同类二次根式

解 原式

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{9}-\sqrt{8}$

$=-1+\sqrt{9}=-1+3=2$

7 巧用化积

例 7 化简 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{10}+3+\sqrt{15}}$.

分析 将分母先分组,前两项一组,后两项一组;

$\because \sqrt{6}+\sqrt{10}=\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

又 $\because 3+\sqrt{15}=\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$,

分母可因式分解为 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

即原式 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$ 分子,分母都除以 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

原式 $=1/(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 再分母有理化达到目的.

解 原式 $=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

8 巧妙构成

例 8 已知 $a=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}$,

求 $\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^3}$ 的值.

解 $\because a=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}$ ①

$\therefore \sqrt[3]{2}a=2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$ ②

②—①得 $(\sqrt[3]{2}a-1)a=1$

$\therefore 1/a=\sqrt[3]{2}-1$

原式 $=(\sqrt[3]{2}-1)[3+3(\sqrt[3]{2}-1)+(\sqrt[3]{2}-1)^2]$

$=(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)=(\sqrt[3]{2})3-1=1$.

数学竞赛的几种解题技巧

福建云霄一中 张绍庆

数学竞赛是思维层次及智力水平的竞争,竞赛题题型新且活,难度较大.解决竞赛题往往感到不得要领,难以下手.这里介绍初二数学竞赛的几种解题技巧,供参考.

1 根式、二次根式

二次根式是初二数学的主要内容,也是初中数学竞赛的热点,近几年初中数学竞赛都出现过.

1.1 复合二次根式 $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ 可化为两个简单根式的代数和的公式

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

(其中: $a^2-b=k^2$, k 为正数)

当 $a^2-b=k^2$, k 为正数,复合二次根式用直接配方较方便:

如: $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3})^2+1-2\sqrt{3}}{2}}$

$=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

例 1 化简 $\frac{\sqrt{23-6\sqrt{6-4\sqrt{2}}}}{3+\sqrt{2}}$ (第 11 届“希望杯”初二第二试)

解 原式 $=\frac{\sqrt{23-6\sqrt{6-2\sqrt{8}}}}{3+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{23-6\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}}}{3+\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{23-6(2-\sqrt{2})}}{3+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}{3+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}}{3+\sqrt{2}}=1$

(评析:本题连续应用两次复合二次根式化简.)

1.2 抓规律,分母有理化

例 2 求 $M=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+$

$\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2002}}$ 的整数部分.

分析 观察分母 $\sqrt{2}+\sqrt{1}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $\sqrt{4}+\sqrt{3}$, $\cdots$, $\sqrt{2001}+\sqrt{2002}$ 有递增规律,可用分母有理化抵消有关项.

解 分母有理化:

$$M=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{2001}-\sqrt{2000})+(\sqrt{2002}-\sqrt{2001})$$
$$=\sqrt{2002}-1.$$

$\because$ $45^2=2025, 44^2=1936$, $1936<2002<2025$,

$\therefore$ M 的整数部分为 43.

(**评析** 注意首项、末项及各抵消后余下的项)

1.3 灵巧换元

例 3 求值:

$$\frac{2^{\frac{1}{11}}}{2^{\frac{1}{11}}+\sqrt{2}}+\frac{2^{\frac{2}{11}}}{2^{\frac{2}{11}}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{10}{11}}}{2^{\frac{10}{11}}+\sqrt{2}}$$

解 设 $a=2^{\frac{1}{22}}$,则原式

$$=\frac{a^2}{a^2+a^{11}}+\frac{a^4}{a^4+a^{11}}+\cdots+\frac{a^{10}}{a^{10}+a^{11}}+$$
$$+\frac{a^{12}}{a^{12}+a^{11}}+\frac{a^{14}}{a^{14}+a^{11}}+\cdots+\frac{a^{20}}{a^{20}+a^{11}}$$
$$=\left(\frac{1}{1+a^9}+\frac{1}{1+a^7}+\cdots+\frac{1}{1+a}\right)+\left(\frac{a}{a+1}+\frac{a^3}{a^3+1}+\cdots+\frac{a^9}{a^9+1}\right)$$
$$=\frac{1+a}{1+a}+\frac{1+a^3}{1+a^3}+\frac{1+a^5}{1+a^5}+\frac{1+a^7}{1+a^7}+\frac{1+a^9}{1+a^9}$$
$$=5.$$

2 求分式的值

2.1 根据条件求分式的值是分式变形的重要内容,其技巧性较强

例 4 已知 $a+b+c=0$,求

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$ 的值.

解 由已知 $a+b+c=0$, 得 $(a+b)^2=c^2$,

$\therefore$ $a^2+b^2-c^2=-2ab$, 同理 $b^2+c^2-a^2=-2bc$

$c^2+a^2-b^2=-2ac$, $\therefore$原式$=-\dfrac{1}{2bc}-\dfrac{1}{2ac}-\dfrac{1}{2ab}=0$

例 5 已知 $a+b+c=0$, 求

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}$$ 的值.

解 由 $a^2=(b+c)^2$ 及 $b+c=-a$ 得:

$$2a^2+bc=2(b+c)^2+bc=2b^2+5bc+2c^2$$
$$=(2b+c)(b+2c)=[b+(b+c)][c+(b+c)]$$
$$=(b-a)(c-a)$$

同理 $2b^2+ac=(a-b)(c-b)$.

$\therefore$ 原式=

$$\frac{a^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{b^2}{(a-b)(c-b)}+\frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$$
$$=\frac{a^2c-a^2b+ab^2-b^2c-c^2a+c^2b}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{(a-b)(ac+bc-ab-c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{(a-b)(c-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$$

(**评析** 本题利用 $a^2=(b+c)^2$ 及 $b+c=-a$ 先把第一式变形,再根据轮换对称式规律对其余二式同理变形,使公分母为$(a-b)(b-c)(c-a)$. 实际上,在竞赛中,此类题多出现在选择、填空中,可利用 $a+b+c=0$ 的条件,用赋值法解答,轻而易举.如:例 4 中 $a=-3$, $b=1$, $c=2$ 符合 $a+b+c=0$ 的条件,则

原式$=\dfrac{1}{1+4-9}+\dfrac{1}{4+9-1}+\dfrac{1}{9+1-4}=0$

例 5 中可令 $a=1, b=0, c=-1$,

则原式$=\dfrac{1}{2}+0+\dfrac{1}{2}=1$.

2.2 活用公式拆项

公式: $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ (n 为正整数)则

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}.$$

例 6 $\dfrac{1998}{1999}$ 是否一定可以表示成 1998 个互不相同的真分数的和,并且每个真分数的分母不超过 4×10^6? (1999 年初二"希望杯)

解 $\dfrac{1998}{1999}=1-\dfrac{1}{1999}=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{1998\times1999}$

$1998\times1999<2\times10^3\times2\times10^3=4\times10^6$.

∴ 此题的结论是“可以”.

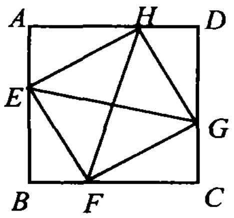
3 平几面积问题

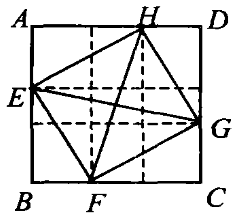
初二学生接触平几只一年多,知识面较窄,竞赛题出现平几问题须运用基础知识及有关解题方法加以考虑.

面积问题的基本方法是:

1、 直接运用面积公式和性质运算
2、 等积变换
3、 割补法

例7 如图,$EFGH$ 是正方形 $ABCD$ 的内接四边形,$\angle BEG$ 与 $\angle CFH$ 都是锐角.已知 $EG=3$,$FH=4$,四边形 $EFGH$ 的面积为 5.求正方形 $ABCD$ 的面积.(2000 年全国初中数学竞赛题)





解 如图,在正方形 $ABCD$ 中,过 E、F、G、H 分别作对边的垂线,得矩形 $PQRT$,设 $ABCD$ 得边长为 a,$PQ=b$, $QR=c$, 由勾股定理得 $b=\sqrt{3^2-a^2}$,$c=\sqrt{4^2-a^2}$.由 $S_{\triangle AEH}=S_{\triangle THE}$,$S_{\triangle BEF}=S_{\triangle PEF}$,$S_{\triangle CFG}=S_{\triangle QFG}$,$S_{\triangle DGH}=S_{\triangle RGH}$ 得 $S_{四边形ABCD}+S_{矩形PQRT}=2S_{四边形EFGH}$.则 $a^2+bc=2\times5$. $a^2+\sqrt{3^2-a^2}\cdot\sqrt{4^2-a^2}=10$, $5a^2=44$, $a^2=\dfrac{44}{5}$,即 $S_{正方形ABCD}=\dfrac{44}{5}$.

(评析:割补应注意前后图形得等积变换,本题通过作垂线,割补得出 $2S_{四边形EFGH}=S_{正方形ABCD}+S_{矩形PQRT}$,这是等积变换的基本方法.)

根据初二的知识范围,平时同学们多总结解题规律,激发学习兴趣,将能发现很多的解题技巧.

数形结合在解题中的应用

福建安溪县东溪中学　　陈玉燕

数形给合是中学数学重要的思想之一.数和形反映了事物的两个方面,数无形,少直观;形无数,难入微.因此,在解决有关数的问题时,需画出图形或结合给出的图形去寻求数之间的联系;在解决形的问题时,又常常通过数的计算去找到图形之间的联系.这种数形结合的思想是解决数学问题的切入点,从而较易找到解题途径,达到化繁为简的目的.下面通过三个例子对数形结合思想作一简介.

例 1 正数 a、b、c、A、B、C 满足条件 $a+A=b+B=c+C=k$.求证: $aB+bC+cA<k^2$ (第 21 届全国数学竞赛)

证明 为讨论方便,不妨先设 $a\ge b\ge c$,则 $A\le B\le C$,根据已知条件,可构造以 k 为边长的正方形(如图 1).

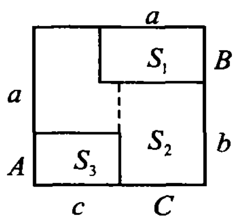


图 1

则有 $S_1=aB,S_2=bC$, $S_3=cA$.显然, $S_1+S_2+S_3<S_{正方形}$.所以, $aB+bC+cA<k^2$.

例 2 确定 k 的最大整数值,使二次方程 $2x^2+k^2x+bk-1=0$ 有一个实根比 0 大,另一个实根比 −3 小.

分析 此题可通过一元二次方程与二次函数的关系,来实现求 k 的最大整数值的目的.设 $y=2x^2+k^2x+6k-1$,当它的图象如图 2 所示时,有符合题意的两个实根,由图可见,条件是当 $x=0$ 及 $x=-3$ 时, $y<0$,即

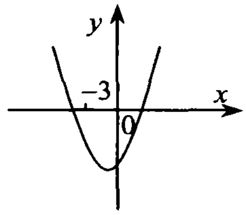


图 2