递推数列在排列组合与概率中的应用

刘庆成

（江西省永新县第二中学，343400）

数列是高中数学的重要内容，也是高考考查的重点，特别是递推数列，在数学问题中的广泛应用越来越引起人们的重视. 下面就递推数列在排列组合与概率应用题中的应用作探讨，以供参考.

一、递推式为 $a_n = pa_{n-1} + q$（p、q 为常数且 $p \neq 1$）

这类数列求通项方法为构造等比数列 $\left\{a_n + \frac{q}{p-1}\right\}$ 或 $\{a_n - a_{n-1}\}$.

例1 某种电路开关闭合后，会出现红灯或绿灯闪动，已知开关第一次闭合后，出现红灯与绿灯的概率都是 $\frac{1}{2}$，从开关第二次闭合起，若前次出现红灯，则下一次出现红灯的概率为 $\frac{1}{3}$，出现绿灯的概率为 $\frac{2}{3}$，若前次出现绿灯，则下一次出现红灯的概率为 $\frac{3}{5}$，出现绿灯的概率为 $\frac{2}{5}$，求：

(1) 第二次闭合后出现红灯的概率是多少？

(2) 第 n 次闭合后出现红灯的概率是多少？

分析 本题综合考查互斥事件、独立事件等概率知识，第(2)问中要求计算第 n 次闭合后出现红灯的概率，显然应与数列联系起来，借助数列的递推公式求解.

解 (1) 第一次出现红灯，第二次也出现红灯的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，第一次出现绿灯，第二次出现红灯的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$，故第二次闭合后出现红灯的概率为 $\frac{1}{6} + \frac{3}{10} = \frac{7}{15}$.

(2) 设第 n 次出现红灯的概率为 P_n，则第 $n-1$ 次出现红灯的概率为 P_{n-1}，出现绿灯的概率为 $1 - P_{n-1}$.

若第 $n-1$ 次出现红灯，则第 n 次又出现红灯的概率为 $\frac{1}{3}P_{n-1}$.

若第 $n-1$ 次出现绿灯，则第 n 次出现红灯的概率为 $\frac{3}{5}(1 - P_{n-1})$.

于是有 $$P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{3}{5}(1 - P_{n-1}),$$

即 $$P_n = -\frac{4}{15}P_{n-1} + \frac{3}{5}.$$

$$\because P_n - \frac{9}{19} = -\frac{4}{15}\left(P_{n-1} - \frac{9}{19}\right),$$

$\therefore$ 数列 $\left\{P_n - \frac{9}{19}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{38}$，公比为 $-\frac{4}{15}$ 的等比数列，

$$\therefore P_n = \frac{1}{38}\left(-\frac{4}{15}\right)^{n-1} + \frac{9}{19}(n \in \mathbf{N}^*).$$

所以第 n 次闭合后出现红灯的概率是

$$\frac{1}{38}\left(-\frac{4}{15}\right)^{n-1} + \frac{9}{19}(n \in \mathbf{N}^*).$$

评注 本题第(2)问是概率与数列问题的交汇与综合题目，首先从题目问法上发现它与数列的关系，其次要合理设出未知量，依题意建立数列的递推公式，然后再利用数列知识求解. 本题也可构造公比为 $-\frac{4}{15}$ 的等比数列 $\{P_n - P_{n-1}\}$，然后再用累加法求解.

例2 设棋子在正四面体 $ABCD$ 的表面从一个顶点移向另外3个顶点是等可能事件，现抛掷骰子，根据其点数决定棋子是否移动，

若投出的点数是奇数，则棋子不动；若投出的点数是偶数，棋子移动到另一顶点，若棋子的初始位置在顶点 A，回答下列问题：

(1) 投掷一次骰子，棋子到达顶点 B 的概率；

(2) 投掷两次骰子，棋子到达顶点 B 的概率；

(3) 投掷 n 次骰子，棋子到达顶点 B 的概率.

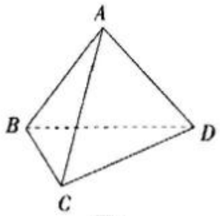

图 1

分析 若投掷一次骰子就能达到 B 点，则投出点数为偶数且棋子由 A 移到 B；若投掷两次骰子，棋子到达 B 点，则两次点数或者都为偶数，即棋子先由 A 移到 C 或 D 再移到 B，或者一奇一偶（包括先奇后偶和先偶后奇），即棋子先不动再从 A 移到 B 和棋子先由 A 移到 B 再不动.

投 n 次骰子，棋子到达顶点 B 的概率与第 $n-1$ 次到达 B 的概率有关，可以利用递推数列体现这两个概率的关系.

解 (1) 设投掷一次骰子，棋子到达 B 点的概率为 P_1，则 $P_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

(2) 设投掷两次骰子，棋子到达 B 点的概率为 P_2，则 $P_2=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

(3) 设投掷 n 次骰子，棋子达到 B 点的概率为 p_n，则投掷 $n-1$ 次骰子，棋子到达 B 点的概率为 P_{n-1}. 于是有

$$P_n=P_{n-1}\times\frac{1}{2}+(1-P_{n-1})\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3},$$

即
$$P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{6}.$$

$$\therefore P_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{4}\right),$$

则数列 $\{P_n-\frac{1}{4}\}$ 是以 $P_1-\frac{1}{4}$ 即 $-\frac{1}{12}$ 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

$$\therefore P_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

即 $$P_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4\times 3^n}(n\in\mathbf{N}^*).$$

故投掷 n 次骰子棋子就能到达 B 的概率为 $\frac{1}{4}-\frac{1}{4\times 3^n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

评注 本例需综合运用等可能事件、互斥事件、对立事件的概率，第(3)问中应先找出数列的递推关系式，再依递推式的特点求出概率.

例3 体育课上，4名同学互相传球，要求接球后马上传给别人，由甲开始作为第一次传球，经过10次传球后球仍回到甲手中的传球方式有多少种？

分析 若记 n 次传球后球仍回到甲手中的传球方式有 a_n 种.

首先甲发球，球传出后自然不在他手中，故 $a_1=0$. 经二次传球情形为：先由甲发球给其他三人中的一位，此人再传回到甲手中，故 $a_2=3$.

经 $n-1$ 次传球后球回到甲手中的不同传球方式共有 3^{n-1} 种，这些方式中既包括了经第 n 次传球由他人将球传回到甲手中的 a_n 种方式，又包括了球经第 $n-1$ 次传球正好落入甲手中的 a_{n-1} 种方式，故有

$$a_n+a_{n-1}=3^{n-1},$$

上式可变形为 $\frac{a_n}{3^n}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}+\frac{1}{3}$.

$$\therefore \frac{a_n}{3^n}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}-\frac{1}{4}\right),$$

从而数列 $\left\{\frac{a_n}{3^n}-\frac{1}{4}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{3}-\frac{1}{4}$ 为首项，$-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，易得

$$a_n=\frac{3}{4}[3^{n-1}+(-1)^n].$$

取 $n=10$ 可得 $a_{10}=14\ 763$，即经10次传球后球仍回到甲手中的传球方式有14 763种.