赏析六道美国AMC12数学竞赛题

上海市育才中学(201801)　龚新平

美国高中数学竞赛 AMC10、AMC12 每年都在全球同步进行两次活动，第一次在每年的 2 月初，另一次在 2 月下旬. 由于第一次活动经常和我国的春节冲突，所以，近年来中国区都选择参加第二次的活动，即 AMC10(B)与 AMC12(B). 在每次 AMC10 与 AMC12 测验中，要求学生在 75 分钟内完成 25 道选择题，满分 150 分. 答对一题得 6 分，未答得 1.5 分，答错不倒扣分. 考生成绩在全球前 2.5%至 5%内才有可能获得荣誉证书，并受邀参加美国数学邀请赛(AIME). 在今年 2 月底刚结束的美国 AMC12(B)数学竞赛试卷中出现了不少有创意的问题，笔者认为这些问题对我们中国学生也很有借鉴作用，值得学习、探究和推广. 本文拟对此次 AMC12 竞赛中的最后六道较难的问题进行仔细分析与解答，以飨读者！

问题 1　边长为 3，5，7，11 的所有可能的梯形面积总和可写成 $r_1\sqrt{n_1}+r_2\sqrt{n_2}+r_3$ 的形式，这里 r_1,r_2,r_3 为有理数，n_1,n_2 为不是完全平方数的正整数，求不大于 $r_1+r_2+r_3+n_1+n_2$ 的最大整数.

(A)57　(B)59　(C)61　(D)63　(E)65

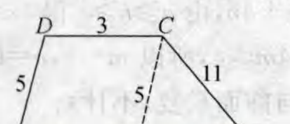

图 1

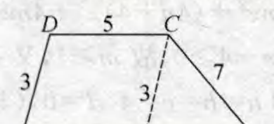

图 2

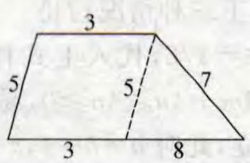

图 3

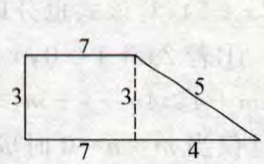

图 4

解　考虑梯形的对边长度的不同组合情况：(1)3 与 7 相对，(2)3 与 11 相对，(3)3 与 5 相对. 对于情况(1)：当 3 与 7 是梯形的上下底时，如图 1，在梯形 $ABCD$ 中作 $CA'\parallel DA$，则 $\triangle A'BC$ 三边长度依次为 4，5，11，由 $4+5<11$ 知这样的 $\triangle A'BC$ 不存在；当 3 与 7 是梯形的两腰长时，如图 2，易知此时 $\triangle A'BC$ 是存在的，由余弦定理知 $\cos\angle B=\frac{19}{21}$，故梯形的高为 $7\sin\angle B=\frac{4}{3}\sqrt{5}$，进而 $S_{梯形}=\frac{32}{3}\sqrt{5}$. 对于情况(2)与(3)，分别对应如图 3，图 4，同理可求面积分别为 $\frac{35}{2}\sqrt{3}$ 或 27，故 $r_1+r_2+r_3+n_1+n_2=\frac{35}{2}+\frac{32}{3}+27+3+5=63\frac{1}{6}$，选(D).

问题 2　等角六边形 $ABCDEF$ 的内接正方形 $AXYZ$ 的顶点 X,Y,Z 分别在边 BC,DE,EF 上，若 $AB=40$，$EF=41(\sqrt{3}-1)$，求正方形 $AXYZ$ 的边长.

(A)$29\sqrt{3}$　　(B)$\frac{21\sqrt{2}}{2}+\frac{41\sqrt{3}}{2}$

(C)$20\sqrt{3}+16$　　(D)$20\sqrt{2}+13\sqrt{3}$

(E)$21\sqrt{6}$

解　如图 5，在等角六边形 $ABCDEF$ 中，设 $\angle AXB=\theta$，$AX=x$，则 $\angle EYZ=60^\circ-\theta$，$\angle ZAF=\theta-30^\circ$，由正弦定理得

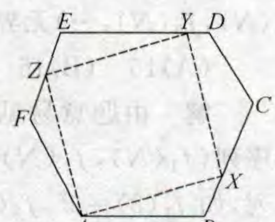

图 5

$$\frac{x}{\sin120^\circ}=\frac{40}{\sin\theta},$$

$$\frac{x}{\sin120^\circ}=\frac{FZ}{\sin(\theta-30^\circ)}=\frac{EZ}{\sin(60^\circ-\theta)}$$

$$=\frac{EF}{\sin(\theta-30^\circ)+\sin(60^\circ-\theta)},$$

从而和差化积易得 $\tan\theta=\frac{20}{21}$，

故 $x=\frac{20\sqrt{3}}{\sin\theta}=29\sqrt{3}$，选(A).

问题3 一只小虫沿着图示的由六边形构成的格子从点 A 爬行到点 B，标记有箭头的边只能按箭头方向爬行，且小虫爬行同一条边不超过一次，则共有多少种不同的爬行路径？

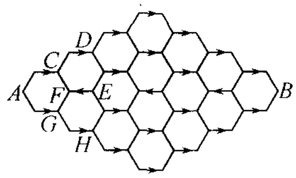

图6

(A)2112 (B)2304 (C)2368

(D)2384 (E)2400

解 由题意结合乘法与加法原理易知：如图6，昆虫从 A 可以先到 C（也可以先到 G），然后有三种不同方法走完第二列六边形：(1)可以直接到 D，或经过 F 与 G 到达 H，这两种走法接下来走完第三列六边形均有四种选择；(2)经过 D,E,F 与 G 到达 H，而这种走法接下来走完第三列仅有两种选择；同理分析可知：昆虫从 A 到 B 不同的爬行路线总数为：$2\times(2\times4+1\times2)\times(4\times4+4\times2)\times(2\times2+1\times1)=2400$. 选(E).

问题4 定义在正整数集上的函数 f_1 满足 $f_1(1)=1$，且对大于1的正整数 n，若其素因数分解为 $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$，则 $f_1(n)=(p_1+1)^{e_1-1}(p_2+1)^{e_2-1}\cdots(p_k+1)^{e_k-1}$，对每个正整数 $m\geqslant2$，记 $f_m(n)=f_1(f_{m-1}(n))$，则区间 $[1,400]$ 内有多少个整数 N，使得序列 $(f_1(N),f_2(N),f_3(N),\cdots)$ 无界？

(A)15 (B)16 (C)17 (D)18 (E)19

解 由题意易见：当 $n=1,2,3,\cdots,31$ 时，序列 $(f_1(N),f_2(N),f_3(N),\cdots)$ 总是周期数列，如 $f_1(8)=3^2$，$f_2(8)=2^2$，$f_3(8)=3^1$，$f_4(8)=1$，$f_5(8)=1$，…；$f_1(27)=2^4$，$f_2(27)=3^3$，$f_3(27)=4^2$，$f_4(27)=3^3$，…等. 而序列 $f_1(32)=3^4$，$f_2(32)=2^6$，$f_3(32)=3^5$，$f_4(32)=2^8$，$f_5(32)=3^7$，…显然是无界序列！同理易见在区间 $1\leqslant n\leqslant400$ 内，$n=2^4\cdot5^2$，$n=2^5\cdot k(k=1,3,5,\cdots,11)$，$n=2^6\cdot k(k=1,3,5)$，$n=2^7\cdot k(k=1,3)$，$n=2^8$ 时对应的序列是无界序列；$n=3^4\cdot k(k=1,2,4)$，$n=3^5$，$n=7^3$ 时对应的序列也都是无界序列，且没有其它. 所以满足条件的序列总共有 $1+6+3+2+1+3+1+1=18$ 个，选(D).

问题5 考虑所有复变量多项式 $P(z)=4z^4+az^3+bz^2+cz+d$，其中系数 a,b,c,d 是整数，满足 $0\leqslant d\leqslant c\leqslant b\leqslant a\leqslant4$，且多项式有模为1的零点，求所有满足条件的多项式对应 $P(1)$ 值的总和.

(A)84 (B)92 (C)100 (D)108 (E)120

解 由题意，先考虑模为1的实根 z_0，显然 $z_0\neq1$，当 $z_0=-1$ 时满足 $4+b+d=a+c$，由条件易知当仅当 $d=0$ 时，$c=b=i(i=0,1,2,3,4)$，$a=4$ 满足条件，对应的 $P(1)4+a+b+c+d$ 分别为 $8,10,12,14,16$；再考虑模为1的虚根 $z_0=x+yi(x,y\in R,x^2+y^2=1)$，则 $\overline{z_0}=x-yi$ 也是实系数多项式 $P(z)$ 的虚根，从而可设 $P(z)=4(z^2-2xz+1)\cdot(z^2+mz+n)(m,n\in R)$，展开易得 $P(z)=4z^4+(4m-8x)z^3+(4n+4-2mx)z^2+(4m-8nx)z+4n$，

由 $4m-8x\geqslant4m-8nx$ 得，$(n-1)x\geqslant0$！

由该式以下三种情况讨论：

(1)若 $x>0$，则 $n\geqslant1$，$d=4n\geqslant4$，故仅当 $n=1$，$a=b=c=d=4$ 时，$P(z)=4(z^4+z^3+z^2+z+1)=4(1-z^5)/(1-z)$，故存在五次单位根满足条件，且 $P(1)=20$；

(2)若 $x=0$，则 $z_0=\pm i$，此时 $P(z)=4z^4+4mz^3+(4n+4)z^2+4mz+4n$，由 $a\geqslant b\geqslant c$ 得 $4n=4m-4\geqslant0$，故 $m\geqslant1$，又 $4m\leqslant4$，所以 $m=1,n=0$，即 $a=b=c=4,d=0$，（与前面重复，不计）；

(3)若 $-1<x<0$，则由 $4\geqslant4m-8x\geqslant4n+4-2mx\geqslant4m-8nx\geqslant4n\geqslant0$，得 $(2x+1)\geqslant m\geqslant n(2x+1)$，对该式也分以下三种情况讨论：

①若 $2x+1=0$，$x=-1/2$，代入上式得 $4\geqslant4m+4\geqslant4n+4+m\geqslant4m+4n\geqslant4n\geqslant0$，易见当且仅当 $m=n=0$ 时成立，此时 $a=b=4,c=d=0$，$P(z)=4z^4+4z^3+4z^2=4z^2(z^2+z+1)=4z^2(1-z^3)/(1-z)$，故存在三次单位根 $\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 满足条件，此时 $P(1)=12$；

②若 $2x+1<0$,则 $n=1$,进而 $m-2x=1$,$mx=2$,故 $x=(-1\pm\sqrt{17})/4$,舍去;

③若 $2x+1>0$,则由 $4\geqslant 4n+4-2mx$,$4m-8nx\geqslant 4n$,$x<0$,易得 $8n\leqslant 4mx\leqslant 4n(2x+1)x$,若 $n=0$,由 $4\geqslant 4m-8x\geqslant 4-2mx\geqslant 4m\geqslant 0$,得 $mx>0$,$m>0$,则 $x>0$,矛盾;若 $0<n\leqslant 1$,则有 $2\leqslant(2x+1)x$,进而 $x\leqslant(-1-\sqrt{17})/4$ 或 $x\geqslant(-1+\sqrt{17})/4$,显然均不符合!综上可知:所有满足条件的 $P(1)$ 总和为 $8+10+12+14+16+20+12=92$,选(B).

点评 该题谨慎细致地分类讨论,保证了不多不漏!这是解决此问题的关键.

问题6 设 $S=\{(x,y)\mid x\in\{0,1,2,3,4\}, y\in\{0,1,2,3,4,5\},(x,y)\neq(0,0)\}$,记所有以 S 中的点为顶点构成的直角三角形组成集合 T,对每个顶点 A,B,C 逆时针排列且点 A 为直角顶点的 $t=\mathrm{Rt}\triangle ABC$,定义 $f(t)=\tan\angle CBA$,求 $\prod\limits_{t\in T}f(t)$ 的值.

(A)1 (B)625/144 (C)125/24

(D)6 (E)625/24

解 由题意如图7,如果直角$\triangle ABC$三个顶点均不在直线 $y=5$ 上,则一定存在关于直线 $y=x$ 对称的另一个直角$\triangle A'B'C'$在集合 S 中,且有 $\tan\angle CBA\cdot\tan\angle C'B'A'=1$;如果三个顶点均不在直线 $y=0$ 上,也一定存在关于直线 $y=x+1$ 对称的另一个$\triangle A'B'C'$在集合 S 中,且有 $\tan\angle CBA\cdot\tan\angle C'B'A'=1$;如果三个顶点均不在直线 $x=0$ 上,也一定存在关于直线 $x=5/2$ 对称的另一个$\triangle A'B'C'$在集合 S 中,此时有 $\tan\angle CBA\cdot\tan\angle C'B'A'=1$!故只需考虑以点(0,5)为其中一个顶点,且直线 $y=5$ 与 $y=0$ 上各至少一个顶点的组成直角$\triangle ABC$的两种情形:①以点(0,5)为一个顶点,另一个顶点在直线 $y=0$ 上,第三个顶点在直线 $y=5$ 上除点(0,5)外的其它情况,显然只有(0,5)分别与$(i,0)$、$(i,5)$$(i=1,2,3,4)$组成直角三角形的四种情形,且易见 $\tan\angle CBA$ 分别为5/1,5/2,5/3,5/4;②以点(0,5)为一个顶点,另一个顶点在直线 $y=0$ 上,第三个顶点在除直线 $y=0$ 和 $y=5$ 外的其它点组成直角三角形三点组的四种情形:{(0,5)、(1,0)、(3,2)},{(0,5)、(1,0)、(3,3)},{(0,5)、(3,0)、(4,1)},{(0,5)、(3,0)、(4,4)},且易见 $\tan\angle CBA$ 分别为2/3,1,1/4,1 从而有 $\prod\limits_{t\in T}f(t)=\frac{5}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{625}{144}$,选(B).

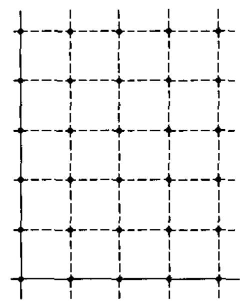

图7

点评 该题利用对称轴巧妙地找到了集合 S 中乘积为1的对应直角三角形,从而将问题简化!

(责审 王雷)

(上接第38页)

例2 (2008浙江理科10)如图2,AB 是平面 α 的斜线段,A 为斜足,若点 P 在平面 α 内运动,使得$\triangle ABP$的面积为定值,则动点 P 的轨迹是( ).

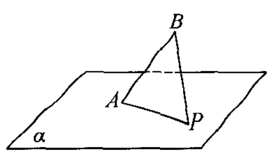

图2

(A)圆 (B)椭圆

(C)一条直线 (D)两条平行线

解析 在运动变化过程中,“点 P 到直线 AB 的距离是个定值”的性质保持不变,而空间中到定直线距离为定值的点的轨迹,是以该直线为轴,该定距离为底面圆半径的圆柱,该圆柱被平面 α 斜截所得截口为椭圆,故选(B).

点评 许多学生的求解,是选各种特殊位置进行尝试,排除(A)(C)(D)而最终得解,显然主要是利用了选择题的“四选一”特性.这虽是“得分”的一种有效方法,但耗时较多,且在科学性与思维的深刻性上多少存在些缺憾.

(责审 曹付生)