三角函数

几何中的两个基本量是：线段的长度和角的大小.三角函数的本质就是用线段长度之比来表示角的大小，从而将两个基本量联系在一起，使我们可以借助三角变换或三角计算来解决一些较难的几何问题.三角函数不仅是一门有趣的学问，而且是解决几何问题的有力工具.

1. 角函数的计算和证明问题

在解三角函数问题之前，除了熟知初三教材中的有关知识外，还应该掌握：

（1）三角函数的单调性 当 a 为锐角时，sina 与 tga 的值随 a 的值增大而增大；cosa 与 ctga 随 a 的值增大而减小；当 a 为钝角时，利用诱导公式转化为锐角三角函数讨论.

注意到 sin45°=cos45°＝$\frac{\sqrt{2}}{2}$，由(1)可知，当时 0＜a＜45°时，cosa＞sina；当 45°＜a＜90°时，cosa＜sina.

(2)三角函数的有界性|sina|≤1，|cosa|≤1，tga、ctga 可取任意实数值（这一点可直接利用三角函数定义导出）.

例 1（1986 年全国初中数学竞赛备用题）在△ABC 中，如果等式 sinA+cosA=$\frac{7}{12}$成立，那么角 A 是（　　）

（A）锐角　　（B）钝角　　（C）直角

分析　对 A 分类，结合 sinA 和 cosA 的单调性用枚举法讨论.

解当 A=90°时，sinA 和 cosA=1；

当 45°＜A＜90°时 sinA＞$\frac{\sqrt{2}}{2}$，cosA＞0，

∴sinA+cosA＞$\frac{\sqrt{2}}{2}$；

当 A=45°时，sinA+cosA=$\sqrt{2}$；

当0＜A＜45°时，sinA＞0,cosA＞$\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴sinA+cosA＞$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∵$\sqrt{2}$,1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$都大于$\frac{7}{12}$.

∴淘汰（A）、（C），选（B）.

例2（1982年上海初中数学竞赛题）ctg67°30′的值是（　　）

（A）$\sqrt{2}$-1　　　（B）2-$\sqrt{2}$　　　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$-1

（D）$\frac{1}{2}$　　　（E）$\frac{2}{5}$

分析　构造一个有一锐角恰为67°30′的Rt△，再用余切定义求之.

解　如图36-1，作等腰Rt△ABC，设∠B=90°，AB=BC=1.延长BA到D使AD=AC，连DC，则AD=AC=$\sqrt{2}$，∠D=22.5°，∠DCB=67.5°.这时，

ctg67°30′=ctg∠DCB=$\frac{CB}{DB}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.

∴选(A).

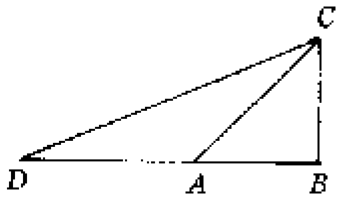

图36 1

例 3(1990 年南昌市初中数学竞赛题)如图,在△ABC 中,∠A 所对的 BC 边的边长等于 a,旁切圆⊙O 的半径为 R,且分别切 BC 及 AB、AC 的延长线于 D，E，F.求证:

$$R\leqslant a\cdot\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}}.$$

证明　　作△ABC 的内切圆 O′,分别切三边于 G,H,K.由对称性知 GE=KF(如图 36-2).设 GB=a，BE=x，KC=y,CF=b.则

x+a=y+b,　　　　　　①

且 BH=a,BD=x,HC=y,DC=b.于是,

x−a=y−b.　　　　　　②

①+②得,x=y.从而知 a=b.

∴GE=BC=a.

设⊙O′半径为 r.显然 R+r≤OO′ (当 AB=AC)时取等号.

作 O′M⊥EO 于 M,则 O′M=GE=a,∠OO′M= $\frac{A}{2}$.

∴R+r≤ $\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}, R-r=atg\frac{A}{2}$.

两式相加即得 R≤ $a\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}}$.

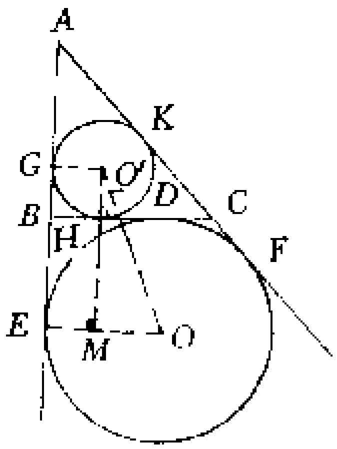

图 36-2

例 4（1985 年武汉等四市初中联赛题）凸 4n+2 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_{4n+2}$（n 为自然数）各内角都是 30° 的整数倍，已知关于 x 的方程：

$x^2+2x\sin A_1+\sin A_2=0$　　①

$x^2+2x\sin A_2+\sin A_3=0$　　②

$x^2+2x\sin A_3+\sin A_1=0$　　③

都有实根，求这凸 4n+2 边形各内角的度数.

解∵各内角只能是 30°、60°、120°、150°，

∴正弦值只能取 $\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1.$

当 $\sin A_1=\frac{1}{2}$ 时，∵$\sin A_2\geqslant\frac{1}{2}$, $\sin A_3\geqslant\frac{1}{2}$,

∴方程①的判别式

$\triangle_1=4（\sin^2A_1-\sin A_2）\leqslant 4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\pi 0.$ 40

方程①无实根，与已知矛盾，故 $\sin A_1\neq\frac{1}{2}.$.

当 $\sin A_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\sin A_2 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin A_3 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴方程①的判别式

$\triangle_1=4(\sin^2 A_1-\sin A_2)=4\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi\, 0.$

方程①无实根，与已知矛盾，故 $\sin A_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

综上所述，可知 $\sin A_1=1$，$A_1=90°$.

同理，$A_2=A_3=90°$.

这样其余 4n-1 个内角之和为 $4n\times180°-3\times90°=720°n-270°$,这些角均不大于 $150°$.

$\therefore 720°\cdot n-270° \le (4n-1)150°, \therefore n\le 1.$ 又 n 为自然数，∴n=1, 凸 n 边形为 6 边形, 且

$A_4+A_5+A_6=4\times180°-3\times90°=450°, \therefore A_4=A_5=A_6=150°.$

2. 解三角形和三角法

定理 ΔABC的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B.$

推论设 ΔABC与$\Delta A'B'C'$的三边和面积分别为 a、b、c、S 与 a′、b′、c′、S′. 若 $\angle C=\angle C'$(或$\pi-\angle C'$),则$\frac{S}{S'}=\frac{ab}{a'b'}$.

我们在正、余弦定理之前介绍上述定理和推论是为了在解三角形和用三角函数解几何题时有更大的自由.

（1） 解三角形

例 5（第 37 届美国中学生数学竞赛题）在图 36-3 中，AB 是圆的直径，CD 是平行于 AB 的弦，且 AC 和 BD 相交于 E，∠AED=α，△CDE 和△ABE 的面积之比是(　　).

(A)cosα (B)sinα (C)$\cos^2\alpha$ (D)$\sin^2\alpha$ (E)1-sinα

解　如图，因为 AB∥DC,AD=CB,且△CDE∽△ABE,BE=AE,因此 $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABE}}=\left(\frac{DE}{BE}\right)^2=\left(\frac{DE}{AE}\right)^2$.

连结 AD，因为 AB 是直径，所以∠ADB=90°.在直角三角形 ADE 中，DE=AEcosα.

∴ $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABE}}\cos^2\alpha.$ 应选(C).

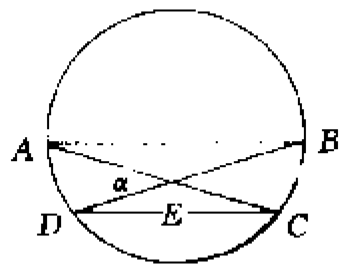

图 36-3

例 6　(1982 年上海初中数学竞赛题)如图 36-4,已知 Rt△斜边 AB=c,∠A=α,求内接正方形的边长.

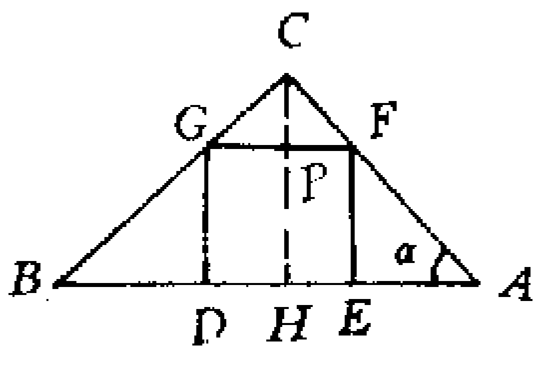

图 36-4

解　过 C 作 AB 的垂线 CH，分别与 GF、AB 交于 P、H，则由题意可得

$CH=CA\cdot\sin\alpha=c\cos\alpha\sin\alpha$

又∵△ABC∽△GFC，∴$\frac{CP}{GF}=\frac{CH}{AB}$，即

$\frac{CH-GF}{GF}=\frac{CH}{AB}$.利用合比定理可得：$\frac{CH}{GF}=\frac{CH+AB}{AB}$.从而$GF=\frac{CH\cdot AB}{CH+AB}$

$=\frac{c\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot c}{c\cos\alpha\sin\alpha+c}=\frac{c\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha+1}$.

（2） 三角法.利用三角知识（包括下一讲介绍的正、余弦定理）解几何问题的方法叫三角法.其特点是将几何图形中的线段，面积等用某些角的三角函数表示，通过三角变换来达到计算和证明的目的，思路简单，从而减少几何计算和证明中技巧性很强的作辅助线的困难.

例7（1986年全国初中数学竞赛征集题）如图36-5，在△ABC中，BE、CF是高，∠A=$45°$，则△AFE和四边形FBCE的面积之比是（ ）

（A） 1∶2（B）2∶3（C）1∶1（D）3∶4

解 由BE、CF是高知F、B、C、E四点共圆，得AF·AB=AE·AC.

$\therefore\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AF\cdot AE}{AB\cdot AC}=\frac{AF\cdot AE\cdot AE\cdot AC}{AB\cdot AC\cdot AF\cdot AB}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^2$. 在Rt△ABE中，∠ABE=$45°$，

$\therefore\frac{AE}{AB}=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}.\therefore\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. ∴$S_{\triangle AFE}$∶$S_{FBCE}$=1∶1.应选(C).

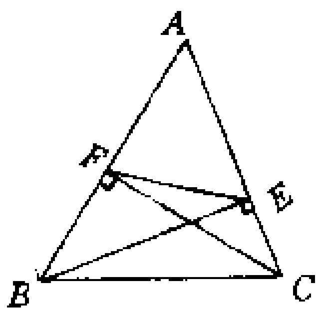

图 36-5

例8 (1981年上海中学生数学竞赛题)在△ABC中∠C为钝角,AB边上的高为h,求证:AB＞2h.

证明　　如图 36-6,AB=AD+BD=h(ctgA+ctgB)　　　　　①

∵∠C 是钝角,∴∠A+∠B＜$90°$,∴ctgB＞ctg($90°$-A)=tgA.②

由①、②和代数基本不等式，得 $AB \phi h(ctgA + tgA) \ge 2h\sqrt{ctgAtgA} = 2h.$

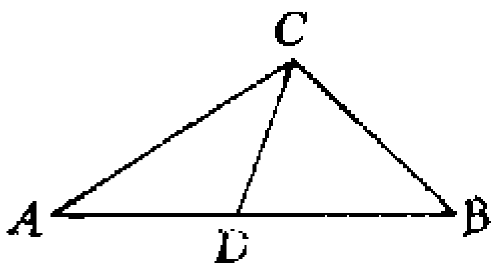

图 36-6

例 9　　　　　　　　　　（第 18 届国际数学竞赛题）已知面积为 32cm^{2}的平面凸四边形中一组对边与一条对角线之长的和为 16cm.试确定另一条对角线的所有可能的长度.

解　　如图 36-7，设四边形 ABCD 面积 S 为 32cm^2, 并设 AD=y,AC=x,BC=z.则 x+y+z=16(cm)由

$$S = \frac{1}{2}xy\sin\theta + \frac{1}{2}xz\sin\varphi, |\sin\theta| \le 1, |\sin\varphi| \le 1, \text{有} S \le \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xz = \frac{1}{2}x(y+z) = \frac{1}{2}x(16-x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[64-(x-8)^2\right] \le 32.$$

但 S=32，∴sinθ=1,sinφ =1,且 x-8=0.故 θ=$\varphi = \frac{\pi}{2}$,且

x=8,y+z=8.这时易知另一条对角线 BD 的长为 $\sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2}(cm).$ 此处无图

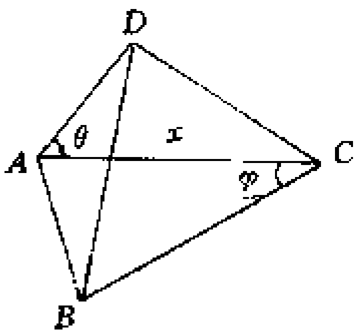

图 36-7

例 10　　(1964 年福建中学数学竞赛题)设 a、b、c 是直角三角形的三边，c 为斜边，整数 n≥3,求证:$a^n+b^n<c^n$.

分析　如图 34-8,注意到 Rt△ABC 的边角关系:a=csinα>0,b=ccosα>0,可将不等式转化为三角不等式 $\sin^n\alpha+\cos^n\alpha<1$ 来讨论.

证明　设直角三角形一锐角∠BAC=α(如图),则

$\sin\alpha=\dfrac{a}{c},\cos\alpha=\dfrac{b}{c}.\Theta\ |\sin\alpha|\ \pi\ 1,|\cos\alpha|\ \pi\ 1,\therefore$ 当 $n\geq 3$ 时,$\sin^n\alpha\ \pi\ \sin^2\alpha.$

$\cos^n\alpha\ \pi\ \cos^2\alpha.$ 于是 $\sin^n\alpha+\cos^n\alpha\ \pi\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$ 即 $\left(\dfrac{a}{c}\right)^n=\left(\dfrac{b}{c}\right)^n\ \pi\ 1.$ 故 $a^n+b^n\ \pi\ c^n.$

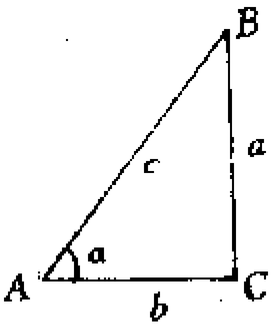

图 36 8