

2017年全国初中数学联合竞赛试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设7分和0分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试(A)

一、选择题：(本题满分42分，每小题7分)

1. 已知实数 a, b, c 满足 $2a+13b+3c=90$, $3a+9b+c=72$, 则 $\frac{3b+c}{a+2b} =$ ()

A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

【答】B.

已知等式可变形为 $2(a+2b)+3(3b+c)=90$, $3(a+2b)+(3b+c)=72$, 解得 $a+2b=18$,

$3b+c=18$, 所以 $\frac{3b+c}{a+2b}=1$.

2. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别是 a, b, c , 有以下三个结论:

(1) 以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 为边长的三角形一定存在;

(2) 以 a^2, b^2, c^2 为边长的三角形一定存在;

(3) 以 $|a-b|+1, |b-c|+1, |c-a|+1$ 为边长的三角形一定存在.

其中正确结论的个数为

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

【答】C.

不妨设 $a \geq b \geq c$, 则有 $b+c > a$.

(1) 因为 $b+c > a$, 所以 $b+c+2\sqrt{bc} > a$, 即 $(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 > (\sqrt{a})^2$, 即 $\sqrt{b}+\sqrt{c} > \sqrt{a}$, 故以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 为边长的三角形一定存在;

(2) 以 $a=2, b=3, c=4$ 为边长可以构成三角形, 但以 $a^2=4, b^2=9, c^2=16$ 为边长的三角形不存在;

(3) 因为 $a \geq b \geq c$, 所以 $|a-b|+1=a-b+1, |b-c|+1=b-c+1, |c-a|+1=a-c+1$, 故三条边中 $|c-a|+1$ 大于或等于其余两边, 而 $(|a-b|+1)+(|b-c|+1)=(a-b+1)+(b-c+1)=a-c+1+1 > a-c+1=|c-a|+1$, 故以 $|a-b|+1, |b-c|+1, |c-a|+1$ 为边长的三角形一定存在.

3. 若正整数 a, b, c 满足 $a \leq b \leq c$ 且 $abc=2(a+b+c)$, 则称 (a, b, c) 为好数组. 那么, 好数组的个数为 ()

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

【答】C.

若 (a, b, c) 为好数组, 则 $abc=2(a+b+c) \leq 6c$, 所以 $ab \leq 6$. 显然, a 只能为 1 或 2.

若 $a=2$, 由 $ab \leq 6$ 可得 $b=2$ 或 3, $b=2$ 时可得 $c=4$, $b=3$ 时可得 $c=\frac{5}{2}$ (不是整数);

若 $a=1$, 则 $bc=2(1+b+c)$, 于是可得 $(b-2)(c-2)=6$, 可求得 $(a, b, c) = (1, 3, 8)$ 或 $(1, 4,$

5) .

综合可知：共有 3 个好数组，分别为 (2, 2, 4)，(1, 3, 8) 和 (1, 4, 5) .

4. 设 O 是四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 的交点，若 $\angle BAD + \angle ACB = 180^\circ$ ，且 $BC = 3$ ， $AD = 4$ ， $AC = 5$ ， $AB = 6$ ，则 $\frac{DO}{OB} =$ ()

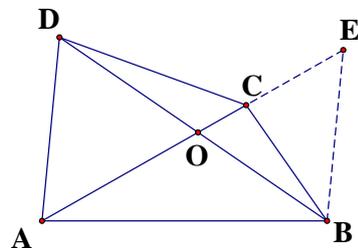
- A. $\frac{10}{9}$. B. $\frac{8}{7}$. C. $\frac{6}{5}$. D. $\frac{4}{3}$.

【答】A.

过 B 作 $BE \parallel AD$ ，交 AC 的延长线于点 E ，则 $\angle ABE = 180^\circ - \angle BAD = \angle ACB$ ，所以 $\triangle ABC \sim \triangle AEB$ ，所以 $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{EB}$ ，所以

$$EB = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{6 \times 3}{5} = \frac{18}{5}.$$

再由 $BE \parallel AD$ ，得 $\frac{DO}{OB} = \frac{AD}{BE} = \frac{4}{\frac{18}{5}} = \frac{10}{9}$.



5. 设 A 是以 BC 为直径的圆上的一点， $AD \perp BC$ 于点 D ，点 E 在线段 DC 上，点 F 在 CB 的延长线上，满足 $\angle BAF = \angle CAE$. 已知 $BC = 15$ ， $BF = 6$ ， $BD = 3$ ，则 $AE =$ ()

- A. $4\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{14}$. D. $2\sqrt{15}$.

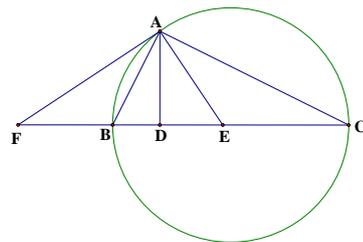
【答】B.

如图，因为 $\angle BAF = \angle CAE$ ，所以 $\angle BAF + \angle BAE = \angle CAE + \angle BAE$ ，即 $\angle FAE = \angle BAC = 90^\circ$.

又因为 $AD \perp BC$ ，故 $AD^2 = DE \cdot DF = DB \cdot DC$.

而 $DF = BF + BD = 6 + 3 = 9$ ， $DC = BC - BD = 15 - 3 = 12$ ，所以 $AD^2 = DE \cdot 9 = 3 \cdot 12$ ，所以 $AD = 6$ ， $DE = 4$.

从而 $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$.



6. 对于正整数 n ，设 a_n 是最接近 \sqrt{n} 的整数，则 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{200}} =$ ()

- A. $\frac{191}{7}$. B. $\frac{192}{7}$. C. $\frac{193}{7}$. D. $\frac{194}{7}$.

【答】A.

对于任意自然数 k ， $(k + \frac{1}{2})^2 = k^2 + k + \frac{1}{4}$ 不是整数，所以，对于正整数 n ， $\sqrt{n} - \frac{1}{2}$ 一定不是整数.

设 m 是最接近 \sqrt{n} 的整数，则 $|m - \sqrt{n}| < \frac{1}{2}$ ， $m \geq 1$.

易知：当 $m \geq 1$ 时， $|m - \sqrt{n}| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow (m - \frac{1}{2})^2 < n < (m + \frac{1}{2})^2 \Leftrightarrow m^2 - m + \frac{1}{4} < n < m^2 + m + \frac{1}{4}$.

于是可知：对确定的正整数 m ，当正整数 n 满足 $m^2 - m + 1 \leq n \leq m^2 + m$ 时， m 是最接近 \sqrt{n} 的整数，

即 $a_n = m$. 所以，使得 $a_n = m$ 的正整数 n 的个数为 $2m$.

注意到 $13^2 + 13 = 182 < 200 < 14^2 + 14 = 210$ ，因此， a_1, a_2, \dots, a_{200} 中，有：2 个 1，4 个 2，6 个 3，

8 个 4, …… , 26 个 13, 18 个 14.

$$\text{所以 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{200}} = 2 \times \frac{1}{1} + 4 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{3} + \cdots + 26 \times \frac{1}{13} + 18 \times \frac{1}{14} = \frac{191}{7}.$$

二、填空题: (本题满分 28 分, 每小题 7 分)

1. 使得等式 $\sqrt{1+\sqrt{1+a}} = \sqrt[3]{a}$ 成立的实数 a 的值为_____.

【答】 8.

由所给等式可得 $(1+\sqrt{1+a})^3 = a^2$.

令 $x = \sqrt{1+a}$, 则 $x \geq 0$, 且 $a = x^2 - 1$, 于是有 $(1+x)^3 = (x^2 - 1)^2$, 整理后因式分解得

$$x(x-3)(x+1)^2 = 0, \text{ 解得 } x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -1 \text{ (舍去), 所以 } a = -1 \text{ 或 } a = 8.$$

验证可知: $a = -1$ 是原方程的增根, $a = 8$ 是原方程的根.

所以, $a = 8$.

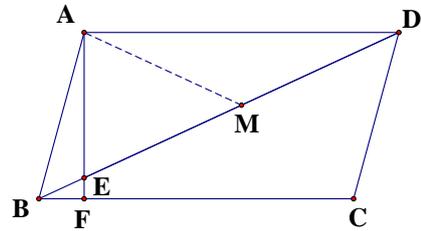
2. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 72^\circ$, $AF \perp BC$ 于点 F , AF 交 BD 于点 E , 若 $DE = 2AB$, 则 $\angle AED =$ _____.

【答】 66° .

取 DE 的中点 M , 在 $\text{Rt} \triangle ADE$ 中, 有 $AM = EM = \frac{1}{2} DE = AB$.

设 $\angle AED = \alpha$, 则 $\angle AME = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle ABM = \alpha - 18^\circ$.

又 $\angle ABM = \angle AMB$, 所以 $180^\circ - 2\alpha = \alpha - 18^\circ$, 解得 $\alpha = 66^\circ$.



3. 设 m, n 是正整数, 且 $m > n$. 若 9^m 与 9^n 的末两位数字相同, 则 $m - n$ 的最小值为_____.

【答】 10.

由题意知, $9^m - 9^n = 9^n \cdot (9^{m-n} - 1)$ 是 100 的倍数, 所以 $9^{m-n} - 1$ 是 100 的倍数, 所以 9^{m-n} 的末两位数字是 01, 显然, $m - n$ 是偶数, 设 $m - n = 2t$ (t 是正整数), 则 $9^{m-n} = 9^{2t} = 81^t$.

计算可知: 81^2 的末两位数字是 61, 81^3 的末两位数字是 41, 81^4 的末两位数字是 21, 81^5 的末两位数字是 01.

所以 t 的最小值为 5, 从而可得 $m - n$ 的最小值为 10.

4. 若实数 x, y 满足 $x^3 + y^3 + 3xy = 1$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为_____.

【答】 $\frac{1}{2}$.

因为

$$0 = x^3 + y^3 + 3xy - 1 = (x+y)^3 + (-1)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 3xy$$

$$= (x+y-1)[(x+y)^2 - (x+y) \cdot (-1) + (-1)^2] - 3xy(x+y-1)$$

$$= (x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1) = \frac{1}{2}(x+y-1)[(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2],$$

所以 $x=y=-1$ 或 $x+y=1$.

若 $x=y=-1$, 则 $x^2+y^2=2$.

若 $x+y=1$, 则 $x^2+y^2 = \frac{1}{2}[(x+y)^2+(x-y)^2] = \frac{1}{2}[1+(x-y)^2] \geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时等号成立.

所以, x^2+y^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

第一试(B)

一、选择题:(本题满分 42 分, 每小题 7 分)

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(c \neq 0)$ 的图象与 x 轴有唯一交点, 则二次函数 $y=a^3x^2+b^3x+c^3$ 的图象与 x 轴的交点个数为 ()

A. 0. B. 1. C. 2. D. 不确定.

【答】C.

因为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有唯一交点, 所以 $\Delta_1=b^2-4ac=0$, 所以 $b^2=4ac \neq 0$.

故二次函数 $y=a^3x^2+b^3x+c^3$ 的判别式 $\Delta_2=(b^3)^2-4a^3c^3=b^6-\frac{1}{16}(4ac)^3=b^6-\frac{1}{16}(b^2)^3=\frac{15}{16}b^6$

>0 , 所以, 二次函数 $y=a^3x^2+b^3x+c^3$ 的图象与 x 轴有两个交点.

2. 题目和解答与 (A) 卷第 1 题相同.

3. 题目和解答与 (A) 卷第 3 题相同.

4. 已知正整数 a, b, c 满足 $a^2-6b-3c+9=0$, $-6a+b^2+c=0$, 则 $a^2+b^2+c^2 =$ ()

A. 424. B. 430. C. 441. D. 460.

【答】C.

由已知等式消去 c 整理得 $(a-9)^2+3(b-1)^2=75$, 所以 $3(b-1)^2 \leq 75$, 又 b 为正整数, 所以 $1 \leq b \leq 6$.

若 $b=1$, 则 $(a-9)^2=75$, 无正整数解;

若 $b=2$, 则 $(a-9)^2=72$, 无正整数解;

若 $b=3$, 则 $(a-9)^2=63$, 无正整数解;

若 $b=4$, 则 $(a-9)^2=48$, 无正整数解;

若 $b=5$, 则 $(a-9)^2=27$, 无正整数解;

若 $b=6$, 则 $(a-9)^2=0$, 解得 $a=9$, 此时 $c=18$.

因此, $a=9$, $b=6$, $c=18$, 故 $a^2+b^2+c^2=441$.

5. 设 O 是四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 的交点, 若 $\angle BAD + \angle ACB = 180^\circ$, 且 $BC=3$, $AD=4$, $AC=5$, $AB=6$, 则 $\frac{DO}{OB} =$ ()

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{6}{5}$. C. $\frac{8}{7}$. D. $\frac{10}{9}$.

【答】D.

解答过程与 (A) 卷第 4 题相同.

6. 题目和解答与 (A) 卷第 5 题相同.

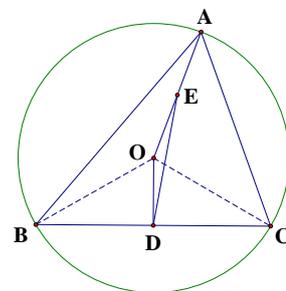
二、填空题: (本题满分 28 分, 每小题 7 分)

1. 题目和解答与 (A) 卷第 1 题相同.

2. 设 O 是锐角三角形 ABC 的外心, D, E 分别为线段 BC, OA 的中点, $\angle ACB = 7\angle OEL$, $\angle ABC = 5\angle OED$, 则 $\angle OED =$ _____.

【答】 10° .

如图, 设 $\angle OED = x$, 则 $\angle ABC = 5x$, $\angle ACB = 7x$, $\angle DOC = \angle BAC = 180^\circ - 12x$, $\angle AOC = 10x$, 所以 $\angle AOD = 180^\circ - 2x$, $\angle ODE = 180^\circ - x - (180^\circ - 2x) = x$, 所以 $OD = OE = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OC$, 所以 $\angle DOC = 60^\circ$, 从而可得 $x = 10^\circ$.



3. 题目和解答与 (A) 卷第 3 题相同.

4. 题目和解答与 (A) 卷第 4 题相同.

第二试 (A)

一、(本题满分 20 分) 已知实数 x, y 满足 $x+y=3$, $\frac{1}{x+y^2} + \frac{1}{x^2+y} = \frac{1}{2}$, 求 $x^5 + y^5$ 的值.

解 由 $\frac{1}{x+y^2} + \frac{1}{x^2+y} = \frac{1}{2}$ 可得 $2(x+y+x^2+y^2) = x^3 + y^3 + x^2y^2 + xy$.

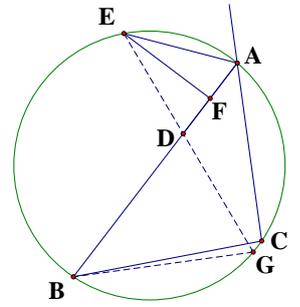
设 $xy = t$, 则 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 9 - 2t$, $x^3 + y^3 = (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] = 3(9 - 3t)$, 代入上式可得 $2(3+9-2t) = 3(9-3t) + t^2 + t$, 解得 $t=1$ 或 $t=3$10 分

当 $t=3$ 时, $xy=3$, 又 $x+y=3$, 故 x, y 是一元二次方程 $m^2 - 3m + 3 = 0$ 的两实数根, 但易知此方程没有实数根, 不合题意.15 分

当 $t=1$ 时, $xy=1$, 又 $x+y=3$, 故 x, y 是一元二次方程 $m^2 - 3m + 1 = 0$ 的两实数根, 符合题意. 此时

$$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - (x+y)x^2y^2 = (9-2t) \cdot [3(9-3t)] - 3t^2 = 123. \dots\dots\dots 20 \text{分}$$

二、(本题满分 25 分)如图, $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $\angle BAC = 45^\circ$, E 是 $\angle BAC$ 的外角平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点, 点 F 在 AB 上且 $EF \perp AE$. 已知 $AF = 1$, $BF = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



解 在 FB 上取点 D , 使 $FD = AF$, 连接 ED 并延长, 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 G .

由 $EF \perp AD$, $AF = FD$ 知 $\triangle AED$ 是等腰三角形, 所以
 $\angle AED = 180^\circ - 2\angle EAD = \angle BAC$,10 分

所以 $\widehat{AG} = \widehat{BC}$, 所以 $\widehat{AC} = \widehat{BG}$, 所以 $AC = BG$15 分

又 $\angle BGE = \angle BAE = \angle ADE = \angle BDG$, 所以 $BG = BD$, 所以 $AC = BD = 5 - 1 = 4$,20 分

$\triangle ABC$ 的 AB 边上的高 $h = AC \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$.

所以, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$25 分

三、(本题满分 25 分) 求所有的正整数数对 (a, b) , 使得 $a^3 = 49 \times 3^b + 8$.

解 显然, $49 \times 3^b + 8$ 为奇数, 所以 a 为奇数.

又因为 $a^3 = 49 \times 3^b + 8 \geq 49 \times 3 + 8 > 5^3$, 所以 $a > 5$5 分

由 $a^3 = 49 \times 3^b + 8$ 可得 $a^3 - 8 = 49 \times 3^b$, 即 $(a-2)(a^2 + 2a + 4) = 7^2 \times 3^b$10 分

设 $(a-2, a^2 + 2a + 4) = d$, 则 d 为奇数. 注意到 $a^2 + 2a + 4 = (a-2)(a+4) + 12$, 所以 $d | 12$, 所以 $d = 1$ 或 315 分

若 $d = 1$, 则有 $\begin{cases} a-2 = 7^2, \\ a^2 + 2a + 4 = 3^b, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-2 = 3^b, \\ a^2 + 2a + 4 = 7^2, \end{cases}$ 均无正整数解.20 分

若 $d = 3$, 则有 $\begin{cases} a-2 = 3 \times 7^2, \\ a^2 + 2a + 4 = 3^{b-1}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-2 = 3^{b-1}, \\ a^2 + 2a + 4 = 3 \times 7^2, \end{cases}$ 解得 $a = 11, b = 3$.

所以, 满足条件的正整数对只有一个, 为 $(11, 3)$25 分

第二试 (B)

一、(本题满分 20 分) 已知实数 a, b, c 满足 $a \leq b \leq c$, $a + b + c = 16$, $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{4}abc = 128$, 求 c 的值.

解 设 $a + b = x$, $ab = y$, 依题意有 $x^2 - 2y + (16 - x)^2 + \frac{1}{4}y(16 - x) = 128$, 整理得

$$(x-8)^2 = \frac{1}{8}y(x-8),$$

所以 $x = 8$ 或 $y = 8(x-8)$10 分

(1) 若 $x=8$, 则 $a+b=8$, 此时 $c=8$.

(2) 若 $y=8(x-8)$, 即 $ab=8(a+b-8)$, 则 $(a-8)(b-8)=0$, 所以 $a=8$ 或 $b=8$.

当 $a=8$ 时, 结合 $a \leq b \leq c$ 可得 $a+b+c \geq 24$, 与 $a+b+c=16$ 矛盾.

当 $b=8$ 时, 结合 $a \leq b \leq c$ 及 $a+b+c=16$ 可得 $a=0$, $c=8$.

综合可知: $c=8$20 分

二、(本题满分 25 分) 求所有的正整数 m , 使得 $2^{2m-1}-2^m+1$ 是完全平方数.

解 当 $m=1$ 时, $2^{2m-1}-2^m+1=1$ 是完全平方数.5 分

当 $m>1$ 时, 设 $2^{2m-1}-2^m+1=n^2$ (n 为正整数).

注意到 $2^{2m-1}-2^m+1=2 \cdot (2^{m-1})^2 - 2 \cdot 2^{m-1} + 1 = (2^{m-1}-1)^2 + (2^{m-1})^2$, 故可得

$$(2^{m-1}-1)^2 + (2^{m-1})^2 = n^2, \quad \text{.....10 分}$$

$$\text{所以 } 2^{2m-2} = n^2 - (2^{m-1}-1)^2 = (n+2^{m-1}-1)(n-2^{m-1}+1). \quad \text{.....15 分}$$

设 $x=n-2^{m-1}+1$, $y=n+2^{m-1}-1$, 则 $x < y$, $xy=2^{2m-2}$, 所以 x, y 均为 2 的方幂.20 分

又 $y-x=2^m-2$ 被 4 除余数为 2, 所以, 只可能 $x=2$, $y=2^m$, 故 $2 \times 2^m = 2^{2m-2}$, 解得 $m=3$.

综上所述: 满足条件的正整数 m 有两个, 分别为 1 和 3.25 分

三、(本题满分 25 分) 如图, O 为四边形 $ABCD$ 内一点, $\angle OAD = \angle OCB$,

$OA \perp OD$, $OB \perp OC$. 求证: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

证明 由题设条件可知 $\angle AOD = \angle BOC = 90^\circ$, 又 $\angle OAD = \angle OCB$, 所以 $\triangle AOD \sim \triangle COB$,5 分

$$\text{所以 } \frac{OD}{OB} = \frac{AO}{CO}, \text{ 从而 } \frac{OC}{OB} = \frac{AO}{OD}. \quad \text{.....10 分}$$

又 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = \angle AOB + \angle AOD = \angle DOB$, 所以 $\triangle AOC \sim \triangle DOB$, 所以 $\angle OAC = \angle ODB$15 分

设 AC 和 BD 交于点 P , 则 $\angle APD = \angle AOD = 90^\circ$, 所以 $AC \perp DB$,20 分

$$\text{所以 } AB^2 + CD^2 = (AP^2 + PB^2) + (PD^2 + PC^2) = (AP^2 + PD^2) + (PB^2 + PC^2) = AD^2 + BC^2. \quad \text{.....25 分}$$

