2009 年全国初中数学联合竞赛试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试

一、选择题（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1. 设 $a=\sqrt{7}-1$，则 $3a^3+12a^2-6a-12=$ （　　）

A.24.　　B. 25.　　C. $4\sqrt{7}+10$.　　D. $4\sqrt{7}+12$.

【答】A.

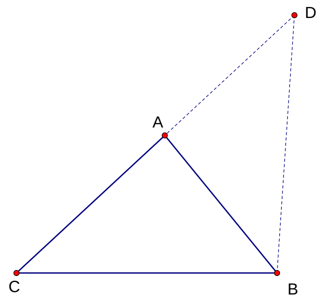
由 $a=\sqrt{7}-1$，得 $a^2=8-2\sqrt{7}=6-2a$，故 $a^2+2a=6$.所以

$$3a^3+12a^2-6a-12=3a(a^2+2a)+6a^2-6a-12=6a^2+12a-12=6\times6-12=24.$$

2. 在△ABC 中，最大角∠A 是最小角∠C 的两倍，且 AB＝7，AC＝8，则 BC＝ （　　）

A. $7\sqrt{2}$.　　B. 10.　　C. $\sqrt{105}$.　　D. $7\sqrt{3}$.

【答】C.



延长 CA 至 D，使 AD＝AB，则 $\angle D=\angle ABD=\frac{1}{2}\angle CAB=\angle C$，所以△CBD ∽ △DAB，所以 $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{BD}$，故 $BD^2=AB\cdot CD=7\times(8+7)=105$，所以 $BD=\sqrt{105}$. 又因为 $\angle C=\angle D$，所以 $BC=BD=\sqrt{105}$.

3. 用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，则方程 $x^2-2[x]-3=0$ 的解的个数为 （　　）

A.1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

【答】C.

由方程得 $x^2-3=2[x]$，而 $[x]\le x$，所以 $x^2-3\le 2x$，即 $x^2-2x-3\le 0$，解得 $-1\le x\le 3$，从而 $[x]$ 只可能取值 $-1,0,1,2,3$.

当 $[x]=-1$ 时，$x^2=1$，解得 $x=-1$；

当 $[x]=0$ 时，$x^2=3$，没有符合条件的解；

当 $[x]=1$ 时，$x^2=5$，没有符合条件的解；

当 $[x]=2$ 时，$x^2=7$，解得 $x=\sqrt{7}$；

当$[x]=3$时，$x^2=9$，解得$x=3$.

因此，原方程共有 3 个解.

4. 设正方形 ABCD 的中心为点 O，在以五个点 A、B、C、D、O 为顶点所构成的所有三角形中任意取出两个，它们的面积相等的概率为　　（　　）

A. $\frac{3}{14}$.　　B. $\frac{3}{7}$.　　C. $\frac{1}{2}$.　　D. $\frac{4}{7}$.

【答】B.

不妨设正方形的面积为 1.容易知道，以五个点 A、B、C、D、O 为顶点所构成的三角形都是等腰直角三角形，它们可以分为两类：

（1）等腰直角三角形的直角顶点为正方形 ABCD 的四个顶点之一，这样的三角形有 4 个，它们的面积都为$\frac{1}{2}$；

（2）等腰直角三角形的直角顶点为正方形 ABCD 的中心 O，这样的三角形也有 4 个，它们的面积都为$\frac{1}{4}$.

所以以五个点 A、B、C、D、O 为顶点可以构成 4＋4＝8 个三角形，从中任意取出两个，共有 28 种取法.

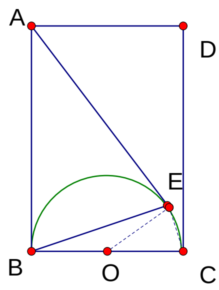
要使取出的两个三角形的面积相等，则只能都取自第（1）类或都取自第（2）类，不同的取法有 12 种.

因此，所求的概率为$\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$.

5. 如图，在矩形 ABCD 中，AB＝3，BC＝2，以 BC 为直径在矩形内作半圆，自点 A 作半圆的切线 AE，则$\sin\angle$CBE ＝　　（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.　　B. $\frac{2}{3}$.　　C. $\frac{1}{3}$.　　D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

【答】 D.



设 BC 的中点为 O，连接 OE、CE.

因为 AB⊥BC，AE⊥OE，所以 A、B、O、E 四点共圆，故∠BAE＝∠COE.

又 AB＝AE，OC=OE，所以△ABE∽△OCE，因此$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BE}}=\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{3}$，即$\mathrm{BE}=3\mathrm{CE}$.

又 CE⊥BE，所以$\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{BE}^2+\mathrm{CE}^2}=\sqrt{10}\,\mathrm{CE}$，故$\sin\angle\mathrm{CBE}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BC}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

6. 设n是大于 1909 的正整数，使得$\frac{n-1909}{2009-n}$为完全平方数的n的个数是　　（　　）

A.3.　　B. 4.　　C. 5.　　D. 6.

【答】B.

设$2009-n=a$，则$\frac{n-1909}{2009-n}=\frac{100-a}{a}=\frac{100}{a}-1$，它为完全平方数，不妨设为$\frac{100}{a}-1=m^2$（其中$m$为正整数），则$\frac{100}{a}=m^2+1$.

验证易知，只有当$m=1,2,3,7$时，上式才可能成立.对应的a值分别为 50，20，10，2.

因此，使得 $\dfrac{n-1909}{2009-n}$ 为完全平方数的 n 共有 4 个，分别为 1959，1989，1999，2007.

二、填空题（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1． 已知 t 是实数，若 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+t-1=0$ 的两个非负实根，则 $(a^2-1)(b^2-1)$ 的最小值是____________.

【答】 -3.

因为 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+t-1=0$ 的两个非负实根，所以

$$\begin{cases}\Delta=(-2)^2-4(t-1)\geq 0,\\ ab=t-1\geq 0,\\ a+b=2,\end{cases}\qquad \text{解得} 1\leq t\leq 2.$$

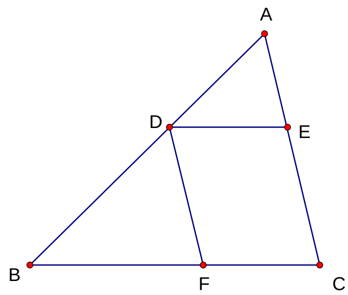
$$(a^2-1)(b^2-1)=(ab)^2-(a^2+b^2)+1=(ab)^2-(a+b)^2+2ab+1=(t-1)^2-4+2(t-1)+1=t^2-4$$

，

当 $t=1$ 时，$(a^2-1)(b^2-1)$ 取得最小值 -3.

2． 设 D 是△ABC 的边 AB 上的一点，作 DE//BC 交 AC 于点 E，作 DF//AC 交 BC 于点 F，已知△ADE、△DBF 的面积分别为 m 和 n，则四边形 DECF 的面积为______.

【答】 $2\sqrt{mn}$.



设△ABC 的面积为 S，则因为△ADE∽△ABC，所以 $\dfrac{AD}{AB}=\sqrt{\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S}}$.

又因为△BDF∽△BAC，所以 $\dfrac{BD}{AB}=\sqrt{\dfrac{S_{\Delta BDF}}{S}}$.

两式相加得 $\sqrt{\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S}}+\sqrt{\dfrac{S_{\Delta BDF}}{S}}=\dfrac{AD}{AB}+\dfrac{BD}{AB}=1$，即 $\sqrt{\dfrac{m}{S}}+\sqrt{\dfrac{n}{S}}=1$，解得 $S=(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2$.

所以四边形 DECF 的面积为 $(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2-m-n=2\sqrt{mn}$.

3． 如果实数 a,b 满足条件 $a^2+b^2=1$，$|1-2a+b|+2a+1=b^2-a^2$，则 $a+b=$______.

【答】 -1.

因为 $a^2+b^2=1$，所以 $-1\leq a\leq 1,-1\leq b\leq 1$.由 $|1-2a+b|+2a+1=b^2-a^2$ 可得

$|1-2a+b|=b^2-a^2-2a-1=1-a^2-a^2-2a-1=-2a^2-2a$，从而 $-2a^2-2a\geq 0$，解得 $-1\leq a\leq 0$.

从而$1-2a+b\geq 0$，因此$1-2a+b=-2a^2-2a$，即$1+b=-2a^2=-2(1-b^2)$，整理得$2b^2-b-3=0$，解得$b=-1$（另一根$b=\frac{3}{2}$舍去）.

把$b=-1$代入$1+b=-2a^2$计算可得$a=0$，所以$a+b=-1$.

4. 已知a,b是正整数，且满足$2(\sqrt{\frac{15}{a}}+\sqrt{\frac{15}{b}})$是整数，则这样的有序数对$(a,b)$共有_____对.

【答】 7.

设$\sqrt{\frac{15}{a}}+\sqrt{\frac{15}{b}}=\frac{k}{2}$（$k$为正整数），则$\frac{15}{b}=\frac{k^2}{4}+\frac{15}{a}-k\sqrt{\frac{15}{a}}$，故$\sqrt{\frac{15}{a}}$为有理数.

令$\frac{15}{a}=\frac{q^2}{p^2}$，其中$p,q$均为正整数且$(p,q)=1$.从而$aq^2=15p^2$，所以$q^2\mid 15$，故$q=1$，所以$\sqrt{\frac{15}{a}}=\frac{1}{p}$.

同理可得$\sqrt{\frac{15}{b}}=\frac{1}{m}$（其中$m$为正整数），则$\frac{1}{p}+\frac{1}{m}=\frac{k}{2}$.

又$m\geq 1, p\geq 1$，所以$\frac{k}{2}=\frac{1}{p}+\frac{1}{m}\leq 2$，所以$k=1,2,3,4$.

（1）$k=1$时，有$\frac{1}{p}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$，即$(p-2)(m-2)=4$，易求得$(p,m)=(4,4)$或（3,6）或（6,3）.

（2）$k=2$时，同理可求得$(p,m)=(2,2)$.

（3）$k=3$时，同理可求得$(p,m)=(2,1)$或（1,2）.

（4）$k=4$时，同理可求得$(p,m)=(1,1)$.

因此，这样的有序数对(a,b)共有7对，分别为（240,240），（135,540），（540,135），（60,60），（60,15），（15,60），（15,15）.

第二试　（A）

一.（**本题满分20分**）已知二次函数$y=x^2+bx+c\quad(c<0)$的图象与x轴的交点分别为A、B，与y轴的交点为C.设△ABC的外接圆的圆心为点P.

（1）证明：⊙P 与 y 轴的另一个交点为定点.

（2）如果 AB 恰好为⊙P 的直径且 $S_{\triangle ABC}=2$，求 b 和 c 的值.

解　（1）易求得点 C 的坐标为 $(0,c)$，设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，则 $x_1+x_2=-b$，$x_1x_2=c$.

设⊙P 与 y 轴的另一个交点为 D，由于 AB、CD 是⊙P 的两条相交弦，它们的交点为点 O，所以 OA×OB＝OC×OD，则 $OD=\dfrac{OA\times OB}{OC}=\dfrac{|x_1x_2|}{|c|}=\dfrac{|c|}{|c|}=1$.

因为 $c<0$，所以点 C 在 y 轴的负半轴上，从而点 D 在 y 轴的正半轴上，所以点 D 为定点，它的坐标为 (0,1).　　……………………………………10 分

（2）因为 AB⊥CD，如果 AB 恰好为⊙P 的直径，则 C、D 关于点 O 对称，所以点 C 的坐标为 $(0,-1)$，

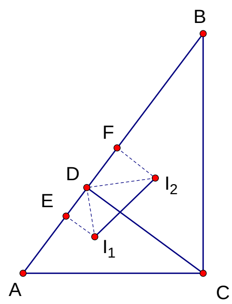
即 $c=-1$.　　……………………………………15 分

又 $AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(-b)^2-4c}=\sqrt{b^2+4}$，所以

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot OC=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+4}\cdot 1=2$，

解得 $b=\pm 2\sqrt{3}$.　　……………………………………20 分

二．（本题满分 25 分）设 CD 是直角三角形 ABC 的斜边 AD 上的高，I_1、I_2 分别是△ADC、△BDC 的内心，AC＝3，BC＝4，求 I_1I_2.



解　作 $I_1E\perp AB$ 于 E，$I_2F\perp AB$ 于 F.

在直角三角形 ABC 中，AC＝3，BC＝4，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$.

又 CD⊥AB，由射影定理可得 $AD=\dfrac{AC^2}{AB}=\dfrac{9}{5}$，故 $BD=AB-AD=\dfrac{16}{5}$，

$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\dfrac{12}{5}$.　　……………………………………5 分

因为 I_1E 为直角三角形 ACD 的内切圆的半径，所以 $I_1E=\dfrac{1}{2}(AD+CD-AC)=\dfrac{3}{5}$.

……………………………………10 分

连接 DI_1、DI_2，则 DI_1、DI_2 分别是∠ADC 和∠BDC 的平分线，所以∠I_1DC＝∠I_1DA＝∠I_2DC＝∠I_2DB＝45°，故∠I_1DI_2＝90°，所以 $I_1D\perp I_2D$，

$$DI_1=\frac{I_1E}{\sin\angle ADI_1}=\frac{\frac{3}{5}}{\sin 45^\circ}=\frac{3\sqrt{2}}{5}.$$ ……………………………15 分

同理，可求得 $I_2F=\frac{4}{5}$， $DI_2=\frac{4\sqrt{2}}{5}$. ……………………………20 分

所以 $I_1I_2=\sqrt{DI_1^2+DI_2^2}=\sqrt{2}$. ……………………………25 分

三.（**本题满分 25 分**）已知 a,b,c 为正数，满足如下两个条件：

$$a+b+c=32 \qquad ①$$

$$\frac{b+c-a}{bc}+\frac{c+a-b}{ca}+\frac{a+b-c}{ab}=\frac{1}{4} \qquad ②$$

证明：以 $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 为三边长可构成一个直角三角形.

证法 1 将①②两式相乘，得 $\left(\frac{b+c-a}{bc}+\frac{c+a-b}{ca}+\frac{a+b-c}{ab}\right)(a+b+c)=8$，

即 $\frac{(b+c)^2-a^2}{bc}+\frac{(c+a)^2-b^2}{ca}+\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}=8$， ……………………………10 分

即 $\frac{(b+c)^2-a^2}{bc}-4+\frac{(c+a)^2-b^2}{ca}-4+\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}=0$，

即 $\frac{(b-c)^2-a^2}{bc}+\frac{(c-a)^2-b^2}{ca}+\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}=0$， ……………………………15 分

即 $\frac{(b-c+a)(b-c-a)}{bc}+\frac{(c-a+b)(c-a-b)}{ca}+\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}=0$，

即 $\frac{(b-c+a)}{abc}[a(b-c-a)-b(c-a+b)+c(a+b+c)]=0$，

即 $\frac{(b-c+a)}{abc}[2ab-a^2-b^2+c^2]=0$，即 $\frac{(b-c+a)}{abc}[c^2-(a-b)^2]=0$，

即 $\frac{(b-c+a)}{abc}(c+a-b)(c-a+b)=0$， ……………………………20 分

所以 $b-c+a=0$ 或 $c+a-b=0$ 或 $c-a+b=0$，即 $b+a=c$ 或 $c+a=b$ 或 $c+b=a$.

因此，以 $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 为三边长可构成一个直角三角形. ……………………………25 分

证法 2 结合①式，由②式可得 $\frac{32-2a}{bc}+\frac{32-2b}{ca}+\frac{32-2c}{ab}=\frac{1}{4}$，

变形，得$1024-2(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{4}abc$　　③　　……………………10 分

又由①式得$(a+b+c)^2=1024$，即$a^2+b^2+c^2=1024-2(ab+bc+ca)$，

代入③式，得$1024-2[1024-2(ab+bc+ca)]=\frac{1}{4}abc$，

即$abc=16(ab+bc+ca)-4096$.　　……………………………15 分

$$(a-16)(b-16)(c-16)=abc-16(ab+bc+ca)+256(a+b+c)-16^3$$

$$=-4096+256\times 32-16^3=0,$$　　……………………………20 分

所以$a=16$或$b=16$或$c=16$.

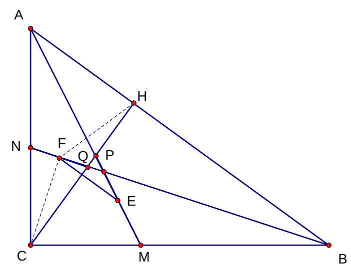
结合①式可得$b+a=c$或$c+a=b$或$c+b=a$.

因此，以$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$为三边长可构成一个直角三角形.　　……………………………25 分

第二试　（B）

一.（本题满分 20 分）题目和解答与（A）卷第一题相同.

二．（本题满分 25 分） 已知△ABC 中，∠ACB＝90°，AB 边上的高线 CH 与△ABC 的两条内角平分线 AM、BN 分别交于 P、Q 两点.PM、QN 的中点分别为 E、F.求证：EF∥AB.



解　因为 BN 是∠ABC 的平分线，所以$\angle ABN=\angle CBN$.

又因为 CH⊥AB，所以

$$\angle CQN=\angle BQH=90^\circ-\angle ABN=90^\circ-\angle CBN=\angle CNB,$$

因此$CQ=NC$.　　……………………………10 分

又 F 是 QN 的中点，所以 CF⊥QN，所以$\angle CFB=90^\circ=\angle CHB$，因此 C、F、H、B 四点共圆.

……………………………15 分

又$\angle FBH=\angle FBC$，所以 FC＝FH，故点 F 在 CH 的中垂线上.　　……………………………20 分

同理可证，点 E 在 CH 的中垂线上.

因此 EF⊥CH.

又 AB⊥CH，所以 EF∥AB.　　……………………………25 分

三.（本题满分 25 分）题目和解答与（A）卷第三题相同.

第二试　（C）

一.（本题满分 20 分）题目和解答与（A）卷第一题相同.

二.（本题满分 25 分）题目和解答与（B）卷第二题相同.

三.（本题满分 25 分）已知 a,b,c 为正数，满足如下两个条件：

$$a+b+c=32 \quad ①$$

$$\frac{b+c-a}{bc}+\frac{c+a-b}{ca}+\frac{a+b-c}{ab}=\frac{1}{4} \quad ②$$

是否存在以 $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 为三边长的三角形？如果存在，求出三角形的最大内角.

解法 1 将①②两式相乘，得 $\left(\frac{b+c-a}{bc}+\frac{c+a-b}{ca}+\frac{a+b-c}{ab}\right)(a+b+c)=8$，

即 $\frac{(b+c)^2-a^2}{bc}+\frac{(c+a)^2-b^2}{ca}+\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}=8$，……………………………10 分

即 $\frac{(b+c)^2-a^2}{bc}-4+\frac{(c+a)^2-b^2}{ca}-4+\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}=0$，

即 $\frac{(b-c)^2-a^2}{bc}+\frac{(c-a)^2-b^2}{ca}+\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}=0$，……………………………15 分

即 $\frac{(b-c+a)(b-c-a)}{bc}+\frac{(c-a+b)(c-a-b)}{ca}+\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}=0$，

即 $\frac{(b-c+a)}{abc}[a(b-c-a)-b(c-a+b)+c(a+b+c)]=0$，

即 $\frac{(b-c+a)}{abc}[2ab-a^2-b^2+c^2]=0$，即 $\frac{(b-c+a)}{abc}[c^2-(a-b)^2]=0$，

即 $\frac{(b-c+a)}{abc}(c+a-b)(c-a+b)=0$，……………………………20 分

所以 $b-c+a=0$ 或 $c+a-b=0$ 或 $c-a+b=0$，即 $b+a=c$ 或 $c+a=b$ 或 $c+b=a$.

因此，以 $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 为三边长可构成一个直角三角形，它的最大内角为 90°.

……………………………25 分

解法 2 结合①式，由②式可得 $\frac{32-2a}{bc}+\frac{32-2b}{ca}+\frac{32-2c}{ab}=\frac{1}{4}$，

变形，得 $1024-2(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{4}abc$　　③　　……………………10 分

又由①式得 $(a+b+c)^2=1024$，即 $a^2+b^2+c^2=1024-2(ab+bc+ca)$，

代入③式，得 $1024-2[1024-2(ab+bc+ca)]=\frac{1}{4}abc$，

即 $abc=16(ab+bc+ca)-4096$.　　……………………………15 分

$(a-16)(b-16)(c-16)=abc-16(ab+bc+ca)+256(a+b+c)-16^3$

$$=-4096+256\times 32-16^3=0,$$ ……………………………20 分

所以 $a=16$ 或 $b=16$ 或 $c=16$.

结合①式可得 $b+a=c$ 或 $c+a=b$ 或 $c+b=a$.

因此，以 $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 为三边长可构成一个直角三角形，它的最大内角为 90°．

………………………………25 分