

# 2007 年北京市中学生数学竞赛高一年级试题

## 参考答案

### 一、选择题

题号	1	2	3	4	5
答案	B	C	A	D	A

### 二、填空题

题号	1	2	3	4	5
答案	6	$2\pi$	$2a$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	1007012

三、解 设  $F(x, y) = ax + b + ay + b - xy$ , 由已知得

$$F(0, 0) = 2b \geq -\frac{1}{4}, \quad \text{即 } b \geq -\frac{1}{8} \quad \text{①}$$

$$F(0, 1) = a + 2b \leq \frac{1}{4} \quad \text{②}$$

$$F(1, 1) = 2a + 2b - 1 \geq -\frac{1}{4},$$

$$\text{即 } a + b \geq \frac{3}{8} \quad \text{③}$$

由②-③得  $a + 2b - (a + b) \leq \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}$ , 即  $b \leq -\frac{1}{8}$ . 结合①立得  $b = -\frac{1}{8}$ .

此时以  $b = -\frac{1}{8}$  代入②、③分别得  $a \leq \frac{1}{2}$ ,  $a \geq \frac{1}{2}$ . 因此得  $a = \frac{1}{2}$ .

因此所求的一次函数只能是  $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ .

另外当  $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$  时,  $F(x, y) =$

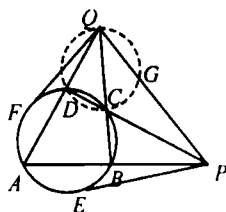
$$\left| \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{4} - xy \right| = \left| x - \frac{1}{2} \right| \cdot \left| \frac{1}{2} - y \right| \leq \frac{1}{2}$$

$\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  对任意的  $x, y \in [0, 1]$  都成立.

答: 所求的一次函数是  $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ .

四、证明 过  $Q, D,$

$C$  三点作辅助圆, 交  $PQ$  于  $G$  点, 连接  $CG$ , 因为  $D, C, G, Q$  四点共圆, 所以  $\angle PGC = \angle QDC =$



$\angle ABC$ . 所以  $P, G, C, B$  四点共圆, 有

$$QF^2 = QC \cdot QB = QG \cdot QP.$$

$$\text{又 } PE^2 = PC \cdot PD = PG \cdot PQ.$$

$$\text{相加得 } PE^2 + QF^2 = PG \cdot PQ + QG \cdot QP = PQ(PG + GQ) = PQ^2.$$

所以, 以线段  $PE, QF, PQ$  为边构成的三角形是直角三角形.

五、证明 不难看出, 数列的各项都是正数, 且是递增的, 即

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

$$\text{而 } x_n^2 = \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right)^2 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{x_{n-1}^2} + 2,$$

$$x_{n-1}^2 = \left(x_{n-2} + \frac{1}{x_{n-2}}\right)^2 = x_{n-2}^2 + \frac{1}{x_{n-2}^2} + 2,$$

... ..

$$x_2^2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 = x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} + 2,$$

$$x_1^2 = \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 = x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 2.$$

上述  $n$  个式子相加得

$$x_n^2 = \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{x_{n-2}^2} + \frac{1}{x_{n-3}^2} + \dots + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_0^2} + x_0^2 + 2n \quad (*)$$

当  $n = 1000$ , 由(\*)式可得

$$x_{1000}^2 > x_0^2 + 2 \times 1000 = 5^2 + 2000 = 2025,$$

所以  $x_{1000} > 45$ .

又当  $n = 1000$  时, 则

$$x_{1000}^2 = \frac{1}{x_{999}^2} + \frac{1}{x_{998}^2} + \frac{1}{x_{997}^2} + \dots + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_0^2} +$$

$$x_0^2 + 2 \times 1000 \quad (\text{下转第 6 页})$$



**简析略证** 如图1, 记  $x$  轴与准线  $l$  交点  $E$ , 过  $A$  作  $AD \perp l$ , 垂足为  $D$ , 则  $AD \parallel FE \parallel BC$ .

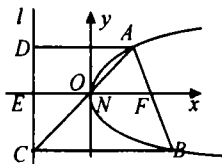


图1

连结  $AC$ , 与  $EF$  相交于点  $N$ , 则由几何知识得

$$\frac{|EN|}{|AD|} = \frac{|CN|}{|AC|} = \frac{|BF|}{|AB|}, \quad \frac{|NF|}{|BC|} = \frac{|AF|}{|AB|},$$

根据抛物线的几何性质

$$|AF| = |AD|, \quad |BF| = |BC|,$$

$$\begin{aligned} \therefore |EN| &= \frac{|AD| \cdot |BF|}{|AB|} \\ &= \frac{|AF| \cdot |BC|}{|AB|} = |NF|, \end{aligned}$$

即  $N$  是  $EF$  的中点, 与抛物线的顶点  $O$  重合,

$\therefore$  直线  $AC$  经过原点  $O$ .

#### 4. 巧用向量

向量是高中教材的新增内容, 由于向量具有几何和代数的双重属性, 以向量为工具, 改变了传统的平面三角、解析几何、立体几何等内容的学习体系, 使几何问题彻底代数化了, 使数形结合思想体现的更深刻、更完善.

**例4** 已知圆  $C: x^2 + y^2 = 4$  和两个定点  $A(-1, 0), B(1, 0)$ , 点  $P$  为圆  $C$  上的动点, 过点  $P$  的圆  $C$  的切线为  $l$ , 点  $A$  关于  $l$  的对称点为  $A'$ , 求  $|A'B|$  的最大值.

**分析** 本题的常规解法是: 首先求出点  $A'$  的轨迹方程, 再利用两点间距离公式去求  $|A'B|$  的表达式(要运用点  $A'$  的轨迹方程将二元函数问题转化为一元函数最值), 进而求出  $|A'B|$  的最大值. 显然, 该方法的运算量大, 过

程繁琐. 而平面向量的几何计算灵活方便, 运用平面向量的运算法则合理安排运算, 使问题的解决变得简洁.

**解** 如图2, 设  $AA'$  与直线  $l$  交于点  $Q$ , 连接  $OP, OQ$ , 由  $O, Q$  分别为  $AB, AA'$  的中点, 得  $OQ \parallel A'B$ , 且  $|A'B| = 2|OQ|$ .

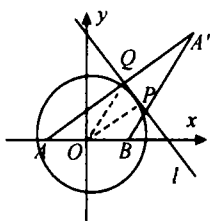


图2

又  $AA' \perp l, OP \perp l$ , 故  $OP \parallel AA'$ .

$$\text{设 } \vec{AQ} = m\vec{OP} (m > 0), \quad |\vec{OP}| = 2,$$

$$\text{则 } \vec{OQ} = \vec{OA} + \vec{AQ} = \vec{OA} + m\vec{OP},$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \vec{OA} + (m-1)\vec{OP},$$

$$\text{由题意得 } OP \perp PQ, \text{ 则 } \vec{OP} \cdot \vec{PQ} = 0.$$

$$\text{即 } \vec{OP} \cdot \vec{OA} + (m-1)\vec{OP}^2 = 0,$$

$$\text{得 } \vec{OP} \cdot \vec{OA} = 4(m-1).$$

$$\begin{aligned} \text{又 } |\vec{OQ}|^2 &= |\vec{OA} + m\vec{OP}|^2 \\ &= \vec{OA}^2 + 2m\vec{OA} \cdot \vec{OP} + m^2 \cdot \vec{OP}^2 \\ &= -4(m-1)^2 + 5, \end{aligned}$$

$$\therefore m > 0,$$

$$\therefore \text{当 } m=1 \text{ 时, } |\vec{OQ}|_{\max}^2 = 5,$$

$$\therefore |\vec{OQ}|_{\max} = \sqrt{5}.$$

$$\therefore |A'B|_{\max} = 2|\vec{OQ}|_{\max} = 2\sqrt{5},$$

此时  $\vec{AQ} = \vec{OP}$ , 点  $P$  的坐标为  $(0, \pm 2)$ , 切线方程为  $y = \pm 2$ , 点  $A'$  的坐标为  $(-1, \pm 4)$ .

(责审 余炳沛)

(上接第7页)

$$< \underbrace{\frac{1}{x_{100}^2} + \frac{1}{x_{100}^2} + \dots + \frac{1}{x_{100}^2}}_{900\text{个}} + \underbrace{\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0^2} + \dots + \frac{1}{x_0^2}}_{100\text{个}}$$

$$2025$$

$$\leq \frac{900}{15^2} + \frac{100}{5^2} + 2025$$

$$= 4 + 4 + 2025$$

$$< 45^2 + 9 < 45^2 + 2 \times 45 \times 0.1 + 0.1^2$$

$$= (45 + 0.1)^2$$

$$= 45.1^2.$$

所以,  $x_{1000} < 45.1$ .

综上所述  $45 < x_{1000} < 45.1$ .

(北京数学会普委会提供)