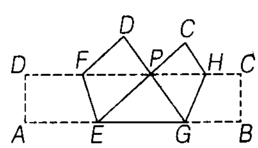
2008年北京市中学生数学竞赛初二年级试题解答

一、选择题（满分25分，每小题只有一个正确答案，答对得5分）

1. 自然数a,b,c,d满足$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$，则$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^5}+\frac{1}{d^6}$等于（　　）.

(A)$\frac{1}{8}$　(B)$\frac{3}{16}$　(C)$\frac{7}{32}$　(D)$\frac{15}{64}$

2. 如右图所示，$ABCD$是一张长方形纸片，将AD、BC折起，使A、B两点重合于CD边上的点P，然后压平得折痕EF与GH. 若$PE=8$cm，$PG=6$cm，$EG=10$cm. 则长方形纸片$ABCD$的面积为（　　）.



(A)105.6(cm)^2　(B)110.4(cm)^2

(C)115.2(cm)^2　(D)124.8(cm)^2

3. 化简$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$的结果是（　　）.

(A)1　(B)$\sqrt{3}$　(C)2　(D)4

4. $\triangle ABC$所在平面上的点P，使得$\triangle ABP$、$\triangle BCP$和$\triangle ACP$的面积相等，这样的点P的个数是（　　）.

(A)8　(B)4　(C)3　(D)1

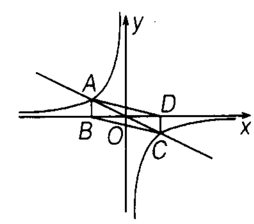
5. 在直角坐标系中，设点$A(-1,-2)$，$B(4,-1)$，$C(m,0)$，$D(n,n)$为四边形的四个顶点，当四边形$ABCD$的周长最短时，$\frac{m}{n}$的值为（　　）.

(A)-2　(B)-1　(C)$-\frac{1}{2}$　(D)1

题号	1	2	3	4	5
答案	D	C	C	B	A

二、填空题（满分35分，每小题7分，将答案写在下面相应的空格中）

1. 如右图所示，过原点的直线与反比例函数$y=-\frac{7}{x}$的图像交于点A和C，自点A和点C作x轴的垂线，垂足分别为B和D，则四边形$ABCD$的面积等于________.



2. 方程组
$$\begin{cases}2x+y=z-1\\8x^3+y^3=z^2-1\end{cases}$$
的正整数解(x,y,z)为________.

3. 在$\triangle ABC$中，$\angle CAB=70^\circ$，$\angle CAB$的平分线与$\angle ACB$的平分线相交于I，若$AC+AI=BC$，则$\angle ACB$等于________度.

4. 已知$A=\frac{1^2+2^2}{1\times2}+\frac{2^2+3^2}{2\times3}+\frac{3^2+4^2}{3\times4}+\cdots+\frac{1003^2+1004^2}{1003\times1004}+\frac{1004^2+1005^2}{1004\times1005}$，则$A$的整数部分是________.

5. 凸五边形$ABCDE$中，$\angle BAE+\angle AED=270^\circ$，$\angle BCD=90^\circ$，$AB=3$，$BC=12$，$CD=5$，$DE=4$，$AE=8$. 则五边形$ABCDE$的面积等于________.

题号	1	2	3	4	5
答案	14	(1,3,6)	75°	2008	55.2

三、（满分10分）

已知$\frac{x}{y+z+u}=\frac{y}{z+u+x}=\frac{z}{u+x+y}=\frac{u}{x+y+z}$，求$\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}$的值.

解　由$\frac{x}{y+z+u}=\frac{y}{z+u+x}=\frac{z}{u+x+y}=$

$\frac{u}{x+y+z}$，

则 $\frac{x+y+z+u}{y+z+u}=\frac{x+y+z+u}{z+u+x}=\frac{x+y+z+u}{u+x+y}=\frac{x+y+z+u}{x+y+z}$.

①如果分子 $x+y+z+u\neq0$，则由分母推得 $x=y=z=u$.

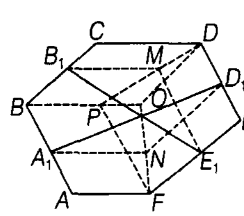
此时 $\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}=1+1+1+1=4$.

②如果分子 $x+y+z+u=0$，

则 $x+y=-(z+u)$，$y+z=-(u+x)$，

此时 $\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$.

四、（满分 15 分）如图，在六边形 $ABCDEF$ 中，$AB\parallel DE$，$BC\parallel EF$，$CD\parallel FA$，$AB+DE=BC+EF$，$A_1D_1=B_1E_1$，A_1、B_1、D_1、E_1 分别是 AB、BC、DE、EF 的中点.求证：$\angle CDE=\angle AFE$.



证明 作▱$ABPF$，连接 DP，取 PD 的中点 M，$BCDP$ 是梯形.连接 B_1M、E_1M，由梯形中位线定理，知 $B_1M\parallel CD\parallel BP\parallel AF$，$ME_1\parallel DE\parallel FP\parallel AB$，且 $B_1M=\frac{BP+CD}{2}=\frac{AF+CD}{2}$，$E_1M=\frac{PF+DE}{2}=\frac{AB+DE}{2}$.

同理，作▱$BCDO$，连接 OF，取 FO 的中点 N，连接 A_1N，D_1N，则由梯形中位线定理，知 $A_1N\parallel AF\parallel BO\parallel CD$，$ND_1\parallel EF\parallel OD\parallel BC$，且

$A_1N=\frac{AF+BO}{2}=\frac{AF+CD}{2}$，

$D_1N=\frac{EF+OD}{2}=\frac{EF+BC}{2}=\frac{AB+DE}{2}$.

在 $\triangle B_1ME_1$ 与 $\triangle A_1ND_1$ 中，$B_1M=A_1N$，$E_1M=D_1N$，

又因为 $A_1D_1=B_1E_1$，

所以 $\triangle B_1ME_1\cong\triangle A_1ND_1$.

因此 $\angle B_1ME_1=\angle A_1ND_1$，

所以 $\angle CDE=\angle AFE$.

五、（满分 15 分）求证：

(1)一个自然数的平方被 7 除的余数只能是 0，1，4，2.

(2)对任意的正整数 n，$[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$ 不被 7 整除.其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

证明 (1)设自然数 $m=7q+r$ $(r=0,1,2,3,4,5,6)$，则

$m^2=(7q+r)^2=49q^2+14qr+r^2$.

由于 r^2 只能取 0，1，4，9，16，25，36，被 7 除的余数对应为 0，1，4，2，2，4，1.因此，一个自然数的平方被 7 除的余数只能是 0，1，4，2.

(2)由于 $n(n+2)(n+4)(n+6)=(n^2+6n)(n^2+6n+8)$，$(n=1,2,3\cdots\cdots)$，

令 $k=n^2+6n$，则

$n(n+2)(n+4)(n+6)=(n^2+6n)(n^2+6n+8)=k(k+8)$，其中 $k\geqslant7$.

则 $\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}=\sqrt{k(k+8)}=\sqrt{k^2+8k}$，其中 $k\geqslant7$.

由于 $k^2+6k+9<k^2+8k<k^2+8k+16$，

所以 $(k+3)^2<k^2+8k<(k+4)^2$.

因此 $k+3<\sqrt{k^2+8k}<k+4$.

即 $[\sqrt{k^2+8k}]=k+3$.

也就是 $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]=k+3=n^2+6n+3=(n+3)^2-6$.

如果 $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$ 被 7 整除，必须只需 $(n+3)^2$ 被 7 除余 6，然而一个自然数的平方被 7 除的余数只能为 0，1，4 和 2 中的一个，因此对任意的正整数 n，$(n+3)^2-6$ 不能被 7 整除，也就是 $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$ 不能被 7 整除.