竞赛之窗

2004年(宇振杯)上海市初中数学竞赛

一、填空题(第1~5题各6分,第6~10题各8分,共70分)

1. 若关于 x 的一元二次方程

$$x^2+(3a-1)x+a+8=0$$

有两个不相等的实根 x_1、x_2,且 $x_1<1$,$x_2>1$,则实数 a 的取值范围是______.

2. 方程 $\frac{1}{5-x}+\frac{2}{4-x}+\frac{3}{3-x}=-3$ 的解是______.

3. 一个二位数的两个数字之积是这个二位数两个数字之和的2倍;又这个二位数加上9后,得到的和恰巧是原二位数的个位数与十位数交换位置后的数的2倍.则原二位数是______.

4. 如图1所示,在 $\triangle ABC$ 中,CD、CE 分别是边 AB 上的高和中线,$CE=BE=1$,又 CE 的中垂线过点 B,且交 AC 于点 F.则 $CD+BF=$______.

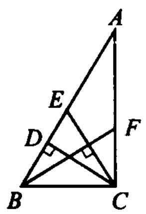

图1

5. 如图2,分别以 $Rt\triangle XYZ$ 的直角边和斜边为边向形外作正方形 $AXZF$、正方形 $BCYX$、正方形 $DEZY$.若直角边 $YZ=1$,$XZ=2$,则六边形 $ABCDEF$ 的面积为______.

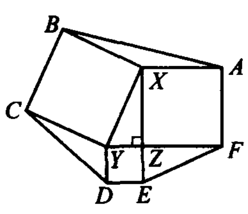

图2

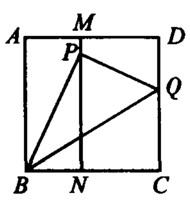

图3

6. 如图3,正方形纸片 $ABCD$ 的面积为1,点 M、N 分别在 AD、BC 上,且 $AM=BN=\frac{2}{5}$.将点 C 折至 MN 上,落在点 P 的位置,折痕为 BQ(Q 在 CD 上),联结 PQ.则以 PQ 为边长的正方形面积为______.

7. 三个不同正整数 a、b、c,使 $a+b+c=133$,且任意两个数的和都是完全平方数.则 a、b、c 是______(不计 a、b、c 的顺序).

8. 若实数 a、b、c、d 满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=10$,则

$$y=(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$$

的最大值是______.

9. 已知实系数一元二次方程 $ax^2+2bx+c=0$ 有两个实根 x_1、x_2.若 $a>b>c$,且 $a+b+c=0$,则 $d=|x_1-x_2|$ 的取值范围是______.

10. 如图4,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,点 P、Q 分别在 AC、AB 上,且 $AP=PQ=QB=BC$.则 $\angle A=$______.

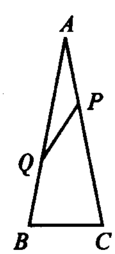

图4

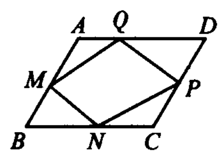

图5

二、(16分)如图5,四边形 $PQMN$ 是 $\square ABCD$ 的内接四边形.

(1)若 $MP\parallel BC$ 或 $NQ\parallel AB$,求证:

$$S_{四边形PQMN}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD};$$

(2)若 $S_{四边形PQMN}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$,问是否能推出 $MP\parallel BC$ 或 $QN\parallel AB$?证明你的结论.

三、(16 分)设 n 是正整数，$d_1<d_2<d_3<d_4$ 是 n 的 4 个连续最小的正整数约数. 若 $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$，求 n 的值.

四、(18 分)如图 6，已知$\triangle ABC$，且 $S_{\triangle ABC}=1$. D、E 分别是 AC、AB 上的动点，BD 与 CE 相交于点 P，使 $S_{四边形BCDE}=\frac{16}{9}S_{\triangle BPC}$. 求 $S_{\triangle DEP}$ 的最大值.

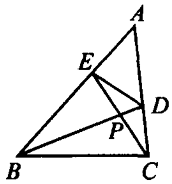

图 6

参考答案

一、1. $a<-2$ 2. $6, 4\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3. 63 4. $\frac{7\sqrt{3}}{6}$ 5. 14 6. $\frac{3}{7}$ 7. 12, 52, 69 8. 40 9. $\sqrt{3}<d<2\sqrt{3}$ 10. $20°$

二、(1)不妨设 $MP /\!/ BC$. 则

$S_{\triangle QMP}=S_{\triangle AMP}=\frac{1}{2}S_{\square AMPD}$.

同理，$S_{\triangle NMP}=\frac{1}{2}S_{\square MBCP}$.

故 $S_{四边形PQMN}=\frac{1}{2}(S_{\square AMPD}+S_{\square MBCP})=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

(2)一定能推出 $MP /\!/ BC$ 或 $NQ /\!/ AB$.

若 $MP /\!/ BC$，则断言已经成立.

若 MP 与 BC 不平行，如图 7，过 M 作 $MP' /\!/ BC$，交 CD 于 P'，P' 与 P 不重合.

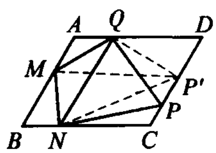

图 7

由题设及(1)的结果，有

$S_{四边形P'QMN}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}=S_{四边形PQMN}$.

所以，$S_{\triangle QNP'}=S_{\triangle QNP}$.

从而，$PP' /\!/ QN$. 故 $QN /\!/ AB$.

三、若 n 为奇数，则 d_1、d_2、d_3、d_4 都是奇数. 故

$n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2\equiv1+1+1+1\equiv0 \pmod 4$.

矛盾.

若 $4\mid n$，则有 $d_1=1$，$d_2=2$. 由 $d_i^2\equiv0$ 或 $1 \pmod 4$ 知 $n\equiv1+0+d_3^2+d_4^2\not\equiv0 \pmod 4$. 也矛盾.

从而，$n=2(2n_1-1)$，n_1 为某正整数，且数组

$(d_1,d_2,d_3,d_4)=(1,2,p,q)$ 或 $(1,2,p,2p)$，

其中 p、q 为奇质数.

在前一种情形，有

$n=1^2+2^2+p^2+q^2\equiv3 \pmod 4$. 矛盾.

则只能是 $n=1^2+2^2+p^2+(2p)^2=5(1+p^2)$.

故 $5\mid n$.

若 $d_3=3$，则 $d_4=5$，这将回到前一种情形，因此，只能是 $d_3=p=5$，则 $n=1^2+2^2+5^2+10^2=130$.

容易验证，130 的 4 个连续最小的正约数就是 1, 2, 5, 10，满足条件.

因此，$n=130$.

四、设 $\frac{AE}{AB}=x$，$\frac{AD}{AC}=y$，则

$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AE\cdot AD}{AB\cdot AC}=xy$.

因为 $S_{\triangle ABC}=1$，所以，

$S_{\triangle ADE}=xy$，$S_{四边形BCDE}=1-xy$.

在$\triangle ABD$ 中，由梅涅劳斯定理得

$\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DC}{CA}\cdot\frac{AE}{EB}=1$.

则 $\frac{BP}{PD}=\frac{CA}{DC}\cdot\frac{EB}{AE}=\frac{1}{1-y}\cdot\frac{1-x}{x}=\frac{1-x}{x(1-y)}$. ①

同理，$\frac{CP}{PE}=\frac{1-y}{y(1-x)}$.

于是，$\frac{S_{\triangle DEP}}{S_{\triangle BPC}}=\frac{PD\cdot PE}{PB\cdot PC}=\frac{x(1-y)}{1-x}\cdot\frac{y(1-x)}{1-y}=xy$.

同时，由式①得

$\frac{BP}{BD}=\frac{BP}{BP+PD}=\frac{1-x}{1-xy}$.

故 $S_{\triangle BPC}=\frac{BP}{BD}S_{\triangle BCD}=\frac{1-x}{1-xy}\cdot\frac{CD}{CA}S_{\triangle ABC}$

$=\frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}$.

由题设有

$\frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}=S_{\triangle BPC}$

$=\frac{9}{16}S_{四边形BCDE}=\frac{9}{16}(1-xy)$.

令 $u=xy$，则

$9(1-u)^2=16[1+u-(x+y)]\leqslant16(1-\sqrt{u})^2$.

注意到 $0<u<1$，得

$3(1-u)\leqslant4(1-\sqrt{u})$，$3(1+\sqrt{u})\leqslant4$，

解得 $0<u\leqslant\frac{1}{9}$.

当且仅当 $x=y=\frac{1}{3}$ 时，$u=xy=\frac{1}{9}$.

则 $S_{\triangle DEP}=xyS_{\triangle BPC}=xy\,\frac{9}{16}(1-xy)=\frac{9}{16}(-u^2+u)$

$=\frac{9}{16}\left[-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$.

故当 $u=\frac{1}{9}$，即 $x=y=\frac{1}{3}$ 时，$S_{\triangle DEP}$ 取最大值 $\frac{1}{18}$.

(李大元 顾鸿达 刘鸿坤 曾容 叶声扬 命题)