智浪教育---普惠英才文库

[2] 刘新春. 高三数学复习"九戒"[J]. 理科考试研究,2001(12).
[3] 索云旺. 高中数学解题教学的五条基本原则[J] 教学与管理,2002(1).
[4] 范家祥. 浅谈高三数学试题讲评方法[J]. 中学数学研究,2003(3).
[5] 艾为学. 从数学新课程标准谈中学生数学学习中"消化不良"现象的成因和矫正[J]. 数学教学通讯,2004(1).
[6] 韩保席. 浅谈高三数学复习的几点看法[J]. 数学教学通讯,2004(4).

与递推数列有关的概率综合题例析

王 勇
(湖北省襄樊市第一中学 441000)

以能力立意是高考数学命题的指导思想,在知识网络并交点处设计 试题是高考数学命题的新特点和大方向. 与递推数列有关的概率综合题正是在这种背景下"闪亮登场",频频出现在各级各类考试题中. 由于这类题目涵盖的知识点多且传统内容与新增内容交汇自然贴切,数学思想和方法考查充分,考生普遍感到难以下手,考试时经常弃而不答,令人惋惜!

求解这类综合题要求学生掌握互斥事件,独立事件的概率及递推数列的相关知识,同时要具备分析、综合、归纳、推理等理性思维方法进行正确合理地判断、推理,建立起递推数列模型,由局部的已知探索全局的未知,并能准确清晰有条理地进行表述. 下面笔者采撷六例子以分析,供参考.

例1 有人玩掷硬币走跳棋的游戏. 已知硬币出现正反面的概率都是$\frac{1}{2}$,棋盘上标有第0站、第1站、第2站、…、第100站. 一枚棋子开始在第0站,棋手每掷一次硬币棋子向前跳动一次,若掷出正面,棋子向前跳一站(从k到$k+1$);若掷出反面,棋子向前跳二站(从k到$k+2$),直到棋子跳到第99站(胜利大本营)或跳到第100站(失败集中营)时,该游戏结束. 设棋子跳到第n站的概率为P_n.

(1) 求P_0、P_1、P_2的值;

(2) 求证:$P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$,其中$n\in\mathbf{N},2\leqslant n\leqslant 99$;

(3) 求P_{99}及P_{100}的值.

分析 (1) 应用必然事件概率为1,分类讨论并用互斥事件概率公式及相互独立事件概率公式计算;

(2) 分情况讨论,得到概率间的递推关系式,变形关系式获证;

(3) 应用叠加抵消求和法求出P_{99},再根据递推关系得到P_{100}或根据必然事件概率为1得到P_{100}.

解析 (1) 棋子开始在第0站为必然事件,所以$P_0=1$.

第一次掷硬币出现正面,棋子跳到第1站,其概率为$\frac{1}{2}$,所以$P_1=\frac{1}{2}$.

棋子跳到第2站有下列两种情况:

① 前二次掷硬币均出现正面,其概率为$\frac{1}{4}$;

② 第一次掷硬币出现反面,其概率为$\frac{1}{2}$.

所以$P_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

(2) 棋子跳到第$n(2\leqslant n\leqslant 99)$站有下列两种情况:

① 棋子先跳到第$n-2$站,又掷出反面,其概率为$\frac{1}{2}P_{n-2}$;

② 棋子先跳到第$n-1$站,又掷出正面,其概率为$\frac{1}{2}P_{n-1}$.

所以$P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$,

从而$P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$.

维普资讯 http://www.cqvip.com

(3) 由(1)与(2)知,数列$\{P_n-P_{n-1}\}$是首项为$P_1-P_0=-\frac{1}{2}$、公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列,即

$$P_n-P_{n-1}=(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})^{n-1}=(-\frac{1}{2})^n.$$

于是$P_1-P_0=-\frac{1}{2}$,

$$P_2-P_1=(-\frac{1}{2})^2,$$

$$P_3-P_2=(-\frac{1}{2})^3.$$

……

$$P_{98}-P_{97}=(-\frac{1}{2})^{98},$$

$$P_{99}-P_{98}=(-\frac{1}{2})^{99}.$$

$$\therefore\quad P_{98}-P_0=(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})^2+\cdots+(-\frac{1}{2})^{98},$$

$$P_{99}-P_0=(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})^2+\cdots+(-\frac{1}{2})^{99},$$

故 $$P_{98}=1+\frac{(-\frac{1}{2})[1-(-\frac{1}{2})^{98}]}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}[2+(\frac{1}{2})^{98}],$$

$$P_{99}=1+\frac{(-\frac{1}{2})[1-(-\frac{1}{2})^{99}]}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{2})^{100}].$$

于是 $$P_{100}=\frac{1}{2}P_{98}=\frac{1}{3}[1+(\frac{1}{2})^{99}].$$

点评 (1)掷硬币,走跳棋是儿时玩的一种游戏,棋中某站还常设计成陷阱、电梯等等.本题据此抽象、简化而得到.

(2)解决本题必须理解必然事件、随机事件、互斥事件以及相互独立事件等概念,另外还必须掌握等比数列的定义、通项及求和公式,最后还要有阅读理解、分类讨论、归纳综合的能力.

例2 有人玩掷骰子动棋游戏,棋盘分为A、B两方,开始时把棋子放在A方,根据下列①、②、③的规定移动棋子:①骰子出现1点时,不能动棋子;②出现2、3、4、5点时,把棋子移向对方;③出现6点时,如果棋子在A方就不动;如果在B方,就移至A方.把骰子掷了n次后,棋子仍然在A方的概率记为P_n.

(1)对于任意$n\in\mathbf{N}$,证明(P_n,P_{n+1})总在过定点$(\frac{5}{9},\frac{5}{9})$,斜率为$-\frac{1}{2}$的直线上;

(2)求P_n.

解析 (1)把骰子掷了$n+1$次,棋子仍在A方的概率为P_{n+1},有两种情况应当考虑:

①第n次棋子在A方,其概率为P_n,且第$n+1$次骰子出现1点或6点,不动棋子,其概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,因此,第①种情况产生的概率为$\frac{1}{3}P_n$;

②第n次棋子在B方,其概率为$1-P_n$,且第$n+1$次骰子出现2、3、4、5或6点,其概率为$\frac{5}{6}$,因此,第②种情况产生的概率为$\frac{5}{6}(1-P_n)$.

变形得$P_{n+1}-\frac{5}{9}=-\frac{1}{2}(P_n-\frac{5}{9})$.

所以点(P_n,P_{n+1})总在过定点$(\frac{5}{9},\frac{5}{9})$,斜率为$-\frac{1}{2}$的直线上.

(2)$P_0=1,P_1=\frac{1}{3}P_0+\frac{5}{6}(1-P_0)=\frac{1}{3}$,

又因$\dfrac{P_{n+1}-\frac{5}{9}}{P_n-\frac{5}{9}}=-\frac{1}{2}$,(利用(1)的结论)知$\{P_n-\frac{5}{9}\}$是首项为$P_1-\frac{5}{9}=\frac{1}{3}-\frac{5}{9}=-\frac{2}{9}$,公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列,

$$\therefore P_n-\frac{5}{9}=-\frac{2}{9}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1},$$

即$$P_n=\frac{5}{9}+\frac{(-1)^n}{9\cdot 2^{n-2}}.$$

例3 A、B两人拿两颗骰子做抛掷游戏,规则如下:若掷出的点数之和为3的倍数,原掷骰子的人再继续掷,若掷出的点数之和不是3的倍数,就由对方接着掷,第一次由A开始掷.

(1)若第n次由A掷的概率为P_n,求P_n;

(2)前4次抛掷中A恰好掷2次的概率为多少?

解析 (1)第$n+1$次由A掷这一事件,包括第

维普资讯 http://www.cqvip.com

n次由A掷，第$n+1$次继续由A掷这一事件，以及第n次由B掷，第$n+1$次由A掷这一事件.

两骰子点数和为3的倍数分别为：1+2，2+4，1+5，4+5，3+3，6+6，3+6，其概率为$\frac{5\times2+2}{36}=\frac{1}{3}$，则两骰子点数之和不为3的倍数的概率为$\frac{2}{3}$. 所以第$n$次由$A$掷，第$n+1$次继续由$A$掷的概率为$\frac{1}{3}P_n$，第$n$次由$B$掷，第$n+1$次由$A$掷的概率为$\frac{2}{3}(1-P_n)$.

$$\begin{aligned}\text{因此 } P_{n+1}&=\frac{1}{3}P_n+\frac{2}{3}(1-P_n)\\&=-\frac{1}{3}P_n+\frac{2}{3}(n\in\mathbf{N}^*),\end{aligned}$$

$$\text{故 } P_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(P_n-\frac{1}{2}\right).$$

注意到第一次A开始掷，则$P_1=1$，于是$\{P_n-\frac{1}{2}\}$组成首项为$P_1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，公比为$-\frac{1}{3}$的等比数列.

$$\therefore P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

$$\text{即 } P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

(2) 由于第1次由A掷，则只要第2次、第3次、第4次这3次中再由A掷一次即可，所以所求概率

$$\begin{aligned}P=&P_1P_2(1-P_3)(1-P_4)\\&+P_1(1-P_2)P_3(1-P_4)\\&+P_1(1-P_2)(1-P_3)P_4.\end{aligned}$$

$$\text{由(1)可知：} P_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

$$P_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9},$$

$$P_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{13}{27},$$

$$\text{故 } P=\frac{100}{243}.$$

例4 (1) 某带电粒子每秒钟向左或右移动一个单位，设它向右移动的概率为$\frac{2}{3}$，向左移动的概率为$\frac{1}{3}$，求100秒钟后带电粒子距原位置20个单位的概率；

(2) 某带电粒子向前移动一个单位的概率为$\frac{2}{3}$，向前移动2个单位的概率为$\frac{1}{3}$，求移动到距原位置100个单位处的概率.

解析 (1) 距原位置右方20个单位的概率为$C_{100}^{60}(\frac{2}{3})^{60}(\frac{1}{3})^{40}$，距原位置左方20个单位的概率为$C_{100}^{60}(\frac{1}{3})^{60}(\frac{2}{3})^{40}$，所以100秒后带电粒子距原位置20个单位的概率为$C_{100}^{60}(\frac{2}{9})^{40}[(\frac{2}{3})^{20}+(\frac{1}{3})^{20}]$.

(2) 设向前移动到距原位置n个单位的概率为P_n，则$P_1=\frac{2}{3}$，$P_2=(\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$.

移动到距原位置$n+2$个单位处有两种情况：

① 从距原位置n个单位处移动到$n+2$个单位处；

② 从距原位置$n+1$个单位处移动到$n+2$个单位处.

$$\text{故 } P_{n+2}=\frac{1}{3}P_n+\frac{2}{3}P_{n+1},$$

$$\therefore P_{n+2}-P_{n+1}=-\frac{1}{3}(P_{n+1}-P_n).$$

因此数列$\{P_{n+1}-P_n\}$是以P_2-P_1为首项，$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列，则

$$\begin{aligned}P_{n+1}-P_n&=(P_2-P_1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{9}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\therefore (P_{n+1}-P_n)+(P_n-P_{n-1})+\cdots+(P_2-P_1)\\&=\frac{1}{12}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right],\end{aligned}$$

$$\text{即 } P_{n+1}-P_1=\frac{1}{12}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

$$\begin{aligned}\text{故 } P_{100}&=P_1+\frac{1}{12}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{99}\right]\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^{99}\right]\\&=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{100}.\end{aligned}$$

例5 质点A位于数轴$x=0$处，质点B位于$x=2$处. 这两个质点每隔1秒就向左或向右移动1个单位，设向左移动的概率为$\frac{1}{3}$，向右移动的概率为

维普资讯 http://www.cqvip.com

$\frac{2}{3}$.

(1) 求3秒后,质点A在点 $x=1$ 处的概率;

(2) 求2秒后,质点A、B同时在点 $x=2$ 处的概率;

(3) 假设质点C在 $x=0,x=1$ 两处之间移动,并满足:当质点C在 $x=0$ 处时,1秒后必移到 $x=1$ 处;当质点C在 $x=1$ 处时,1秒后分别以 $\frac{1}{2}$ 的概率停留在 $x=1$ 处或移到 $x=0$ 处.今质点C在 $x=1$ 处,求8秒后质点C在 $x=1$ 处的概率.

解析 (1)3秒后,质点A到 $x=1$ 处,必须经过两次向右,一次向左移动,所以 $P=C_3^2\cdot(\frac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$.

(2)2秒后,质点A、B同时在点 $x=2$ 处,必须质点A两次向右,且质点B一次向左、一次向右,故 $P=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot C_2^1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{16}{81}$.

(3) 设第n秒后,质点C在 $x=1$ 处的概率为 x_n,质点C在 $x=0$ 处的概率为 y_n,由题意可知

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+y_n.$$

由 $x_n+y_n=1$,得 $x_{n+1}=1-\frac{1}{2}x_n$,

$$\therefore 3x_{n+1}-2=-\frac{1}{2}(3x_n-2).$$

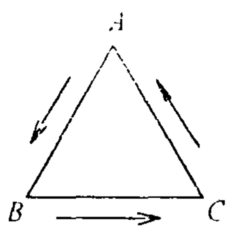
因此 $\{3x_n-2\}$ 是首项为 $3x_1-2=3\times\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{2}$,公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

于是得 $x_n=\frac{1}{3}[2+(-\frac{1}{2})^n]$,

故当 $n=8$ 时,$x_8=\frac{171}{256}$.

所以8秒后质点C在 $x=1$ 处的概率为 $\frac{171}{256}$.

例6 如图,某人从正△ABC的顶点B开始掷一个骰子,然后把一个棋子从一个顶点沿着一条边移到下一个顶点,如果骰子出现偶数点就沿着图中箭头方向移动,如果骰子出现奇数点,就沿与箭头相反的方向移动,由此试回答以下问题:



(1) 分别掷第一次、第二次及第三次,求每次棋子移动到A、B、C的概率各是多少?

(2) 由(1)归纳出第n次棋子移到A、C点的概率之间的关系,并说明理由;

(3) 设棋子第n次移到A、B、C各点的概率分别为 p_n、q_n、r_n,证明: $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\lim\limits_{n\to\infty}q_n=\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\frac{1}{3}$.

解析 (1)若掷出1、3、5点移向左邻顶点,掷出2、4、6点则移向右邻顶点,故这些移法的概率都为 $\frac{1}{2}$,停在同一顶点的概率都为0,因此经第一次移动到B的概率为0,移到A、C的概率都为 $\frac{1}{2}$.

经两次移到A,只可能是经C到A,它的概率是 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$;移到C,即经A到C的概率与上相同,也是 $\frac{1}{4}$;移到B是经A到B或经C到B,其概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

经三次移到A,只可能是B或C移来,其概率为 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$,由此列出下表:

	A	B	C
第一次	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
第二次	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
第三次	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

(2) 由(1)可归纳出第n次移到A、C的概率总是相等的.设第n次移到A、B、C点的概率分别为 p_n、q_n、r_n,由题意可知,第n次移到A时,是由第n-1次的B或C移来,

$$\therefore p_n=\frac{1}{2}(q_{n-1}+r_{n-1}).$$

同理 $r_n=\frac{1}{2}(p_{n-1}+q_{n-1})$.

两式相减得 $p_n-r_n=\frac{1}{2}(r_{n-1}-p_{n-1})$.

$\because p_1=r_1=\frac{1}{2},p_2=r_2=\frac{1}{4}$,

$\therefore p_n=r_n$.

(3) 由(2)知 $p_n=r_n$,由此得 $p_{n-1}=r_{n-1}$,

$$\therefore p_n=\frac{1}{2}(q_{n-1}+p_{n-1}).$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

$\because p_{n-1}+q_{n-1}+r_{n-1}=1$, 由 $p_{n-1}=r_{n-1}$ 得 $q_{n-1}=1-2p_{n-1}$.

代入 $p_n=\frac{1}{2}(q_{n-1}+p_{n-1})$ 化简得

$p_n=\frac{1}{2}(1-p_{n-1})$,

整理可得 $p_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}(p_{n-1}-\frac{1}{3})$.

从而知数列 $\{p_n-\frac{1}{3}\}$ 是首项为 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列,

$\therefore p_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$,

故 $p_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$,

$q_n=1-2p_n=1-2[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}]$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$.

又 $r_n=p_n$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}p_n=\lim\limits_{n\to\infty}q_n=\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\frac{1}{3}$.

破解一类综合题的几种途径

管宏斌

(江苏省通州高级中学 226300)

高中数学中，绝对值问题是一颗璀璨的“明珠”，可谓常考常新，在2004年各地高考数学试卷中既受命题者的青睐. 其中它与二次函数的综合，更是一曲优美的“交响乐”，成为高考中的“新宠”. 绝对值和二次函数所构成的综合题，由于它们在知识上具有综合性，题型上具有新颖性，解题方法上具有灵活性，思维方式上具有抽象性，所以高考命题者常“乐此不疲”地去编制该类试题，但学习者对此却往往不得要领，这类综合题由此“曲高和寡”而难以“亲近”. 本文从求解策略出发，就近年来各类考试中的部分相关考题，进行分类剖析，权作抛砖，以期广大师生能够从中受到启发，进而归纳出一般解题思考方法.

1 巧启公式——化繁难

公式 $|a|-|b|\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$ 在处理含绝对值问题时的作用有时是不可替代的，求解中常用于不等式放缩、求最值等，思路简洁、明快，解法自然、迅捷.

例1 已知 $f(x)=x^2+ax+b$ 与 x 轴两交点的横坐标为 x_1、x_2，若 $|a|+|b|<1$，求证：$|x_1|<1$ 且 $|x_2|<1$.

解 由韦达定理知 $\begin{cases}x_1+x_2=-a,\\x_1x_2=b,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}|x_1+x_2|=|a|,\\|x_1x_2|=|b|.\end{cases}$ 代入 $|a|+|b|<1$，得

$|x_1+x_2|+|x_1x_2|<1$.

又 $|x_1|-|x_2|\leq|x_1+x_2|$,

$\therefore |x_1|-|x_2|+|x_1x_2|\leq|x_1+x_2|+|x_1x_2|<1$,

即 $|x_1|-|x_2|+|x_1||x_2|<1$，则

$|x_1|(1+|x_2|)<1+|x_2|$.

又 $\because 1+|x_2|>0$, $\therefore |x_1|<1$.

同理可知 $|x_2|<1$.

例2 函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，若函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 均无公共点，求证：

(1) $4ac-b^2>1$;

(2) 对一切实数 x，恒有 $|ax^2+bx+c|>\frac{1}{4|a|}$.

分析 (1) 略.

(2) $|ax^2+bx+c|=\left|a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\right|$.

由(1)可知 $a(x+\frac{b}{2a})^2$ 与 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 非异号,

$\therefore |ax^2+bx+c|=\left|a(x+\frac{b}{2a})^2\right|+\left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|$