2017年全国初中数学联合竞赛试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设7分和0分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试(A)

一、选择题：（本题满分42分，每小题7分）

1．已知实数a,b,c满足$2a+13b+3c=90$，$3a+9b+c=72$，则$\dfrac{3b+c}{a+2b}=$　　　　（　　）

A. 2.　　　B. 1.　　　C. 0.　　　D. -1.

【答】B.

已知等式可变形为$2(a+2b)+3(3b+c)=90$，$3(a+2b)+(3b+c)=72$，解得$a+2b=18$，$3b+c=18$，所以$\dfrac{3b+c}{a+2b}=1$.

2．已知△ABC的三边长分别是a,b,c，有以下三个结论：

（1）以$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$为边长的三角形一定存在；

（2）以a^2,b^2,c^2为边长的三角形一定存在；

（3）以$|a-b|+1,|b-c|+1,|c-a|+1$为边长的三角形一定存在.

其中正确结论的个数为　　　　（　　）

A. 0.　　　B. 1.　　　C. 2.　　　D. 3.

【答】C.

不妨设$a\ge b\ge c$，则有$b+c>a$.

（1）因为$b+c>a$，所以$b+c+2\sqrt{bc}>a$，即$(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2>(\sqrt{a})^2$，即$\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$，故以$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$为边长的三角形一定存在；

（2）以$a=2,b=3,c=4$为边长可以构成三角形，但以$a^2=4,b^2=9,c^2=16$为边长的三角形不存在；

（3）因为$a\ge b\ge c$，所以$|a-b|+1=a-b+1,|b-c|+1=b-c+1,|c-a|+1=a-c+1$，故三条边中$|c-a|+1$大于或等于其余两边，而$(|a-b|+1)+(|b-c|+1)=(a-b+1)+(b-c+1)=a-c+1+1>a-c+1=|c-a|+1$，故以$|a-b|+1$，$|b-c|+1$，$|c-a|+1$为边长的三角形一定存在.

3．若正整数a,b,c满足$a\le b\le c$且$abc=2(a+b+c)$，则称(a,b,c)为好数组.那么，好数组的个数为　　　　（　　）

A. 1.　　　B. 2.　　　C. 3.　　　D. 4.

【答】C.

若(a,b,c)为好数组，则$abc=2(a+b+c)\le 6c$，所以$ab\le 6$.显然，a只能为1或2.

若a=2，由$ab\le 6$可得$b=2$或3，$b=2$时可得$c=4$，$b=3$时可得$c=\dfrac{5}{2}$（不是整数）；

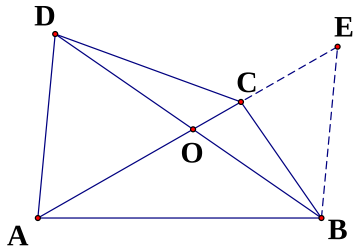
若a=1，则$bc=2(1+b+c)$，于是可得$(b-2)(c-2)=6$，可求得(a,b,c)=（1，3，8）或（1，4，

5）.

综合可知：共有 3 个好数组，分别为（2，2，4），（1，3，8）和（1，4，5）.

4. 设 O 是四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 的交点，若 $\angle BAD+\angle ACB=180°$，且 $BC=3$，$AD=4$，$AC=5$，$AB=6$，则 $\dfrac{DO}{OB}=$ （　　）

A. $\dfrac{10}{9}$.　　B. $\dfrac{8}{7}$.　　C. $\dfrac{6}{5}$.　　D. $\dfrac{4}{3}$.



【答】A.

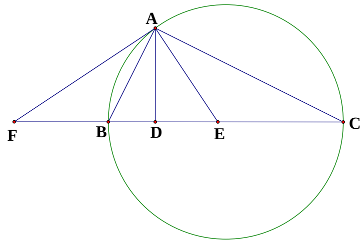
过 B 作 $BE // AD$，交 AC 的延长线于点 E，则 $\angle ABE=180°-\angle BAD=\angle ACB$，所以△ ABC ∽△ AEB，所以 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{BC}{EB}$，所以

$$EB=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{6\times 3}{5}=\frac{18}{5}.$$

再由 $BE // AD$，得 $\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{AD}{BE}=\dfrac{4}{\frac{18}{5}}=\dfrac{10}{9}$.

5. 设 A 是以 BC 为直径的圆上的一点，$AD\perp BC$ 于点 D，点 E 在线段 DC 上，点 F 在 CB 的延长线上，满足 $\angle BAF=\angle CAE$. 已知 $BC=15$，$BF=6$，$BD=3$，则 $AE=$ （　　）

A. $4\sqrt{3}$.　　B. $2\sqrt{13}$.　　C. $2\sqrt{14}$.　　D. $2\sqrt{15}$.



【答】B.

如图，因为 $\angle BAF=\angle CAE$，所以 $\angle BAF+\angle BAE=\angle CAE+\angle BAE$，即 $\angle FAE=\angle BAC=90°$.

又因为 $AD\perp BC$，故 $AD^2=DE\cdot DF=DB\cdot DC$.

而 $DF=BF+BD=6+3=9$，$DC=BC-BD=15-3=12$，所以 $AD^2=DE\cdot 9=3\cdot 12$，所以 $AD=6$，$DE=4$.

从而 $AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$.

6. 对于正整数 n，设 a_n 是最接近 $\sqrt{n}$ 的整数，则 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{200}}=$ （　　）

A. $\dfrac{191}{7}$.　　B. $\dfrac{192}{7}$.　　C. $\dfrac{193}{7}$.　　D. $\dfrac{194}{7}$.

【答】A.

对于任意自然数 k，$(k+\dfrac{1}{2})^2=k^2+k+\dfrac{1}{4}$ 不是整数，所以，对于正整数 n，$\sqrt{n}-\dfrac{1}{2}$ 一定不是整数.

设 m 是最接近 $\sqrt{n}$ 的整数，则 $|m-\sqrt{n}|<\dfrac{1}{2}$，$m\ge 1$.

易知：当 $m\ge 1$ 时，$|m-\sqrt{n}|<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow (m-\dfrac{1}{2})^2<n<(m+\dfrac{1}{2})^2\Leftrightarrow m^2-m+\dfrac{1}{4}<n<m^2+m+\dfrac{1}{4}$.

于是可知：对确定的正整数 m，当正整数 n 满足 $m^2-m+1\le n\le m^2+m$ 时，m 是最接近 $\sqrt{n}$ 的整数，即 $a_n=m$. 所以，使得 $a_n=m$ 的正整数 n 的个数为 $2m$.

注意到 $13^2+13=182<200<14^2+14=210$，因此，$a_1,a_2,\cdots,a_{200}$ 中，有：2 个 1，4 个 2，6 个 3，

8 个 4，……，26 个 13，18 个 14.

所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{200}}=2\times\frac{1}{1}+4\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{3}+\cdots+26\times\frac{1}{13}+18\times\frac{1}{14}=\frac{191}{7}$.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1．使得等式 $\sqrt{1+\sqrt{1+a}}=\sqrt[3]{a}$ 成立的实数 a 的值为_______.

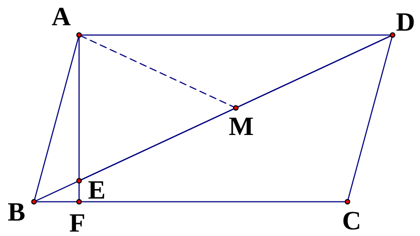
【答】8．

由所给等式可得 $(1+\sqrt{1+a})^3=a^2$.

令 $x=\sqrt{1+a}$，则 $x\geq 0$，且 $a=x^2-1$，于是有 $(1+x)^3=(x^2-1)^2$，整理后因式分解得 $x(x-3)(x+1)^2=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=3$，$x_3=-1$（舍去），所以 $a=-1$ 或 $a=8$.

验证可知：$a=-1$ 是原方程的增根，$a=8$ 是原方程的根.

所以，$a=8$.



2．如图，平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=72°$，$AF\perp BC$ 于点 F，AF 交 BD 于点 E，若 $DE=2AB$，则 $\angle AED=$______.

【答】$66°$.

取 DE 的中点 M，在 Rt△ADE 中，有 $AM=EM=\frac{1}{2}DE=AB$.

设 $\angle AED=\alpha$，则 $\angle AME=180°-2\alpha$，$\angle ABM=\alpha-18°$.

又 $\angle ABM=\angle AMB$，所以 $180°-2\alpha=\alpha-18°$，解得 $\alpha=66°$.

3．设 m,n 是正整数，且 $m>n$.若 9^m 与 9^n 的末两位数字相同，则 $m-n$ 的最小值为_______.

【答】10.

由题意知，$9^m-9^n=9^n\cdot(9^{m-n}-1)$ 是 100 的倍数，所以 $9^{m-n}-1$ 是 100 的倍数，所以 9^{m-n} 的末两位数字是 01，显然，$m-n$ 是偶数，设 $m-n=2t$（t 是正整数），则 $9^{m-n}=9^{2t}=81^t$.

计算可知：81^2 的末两位数字是 61，81^3 的末两位数字是 41，81^4 的末两位数字是 21，81^5 的末两位数字是 01.

所以 t 的最小值为 5，从而可得 $m-n$ 的最小值为 10.

4．若实数 x,y 满足 $x^3+y^3+3xy=1$，则 x^2+y^2 的最小值为_______.

【答】$\frac{1}{2}$.

因为

$$0=x^3+y^3+3xy-1=(x+y)^3+(-1)^3-3x^2y-3xy^2+3xy$$

$$=(x+y-1)[(x+y)^2-(x+y)\cdot(-1)+(-1)^2]-3xy(x+y-1)$$

$=(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)=\dfrac{1}{2}(x+y-1)[(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2]$，

所以 $x=y=-1$ 或 $x+y=1$.

若 $x=y=-1$，则 $x^2+y^2=2$.

若 $x+y=1$，则 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}[(x+y)^2+(x-y)^2]=\dfrac{1}{2}[1+(x-y)^2]\geq\dfrac{1}{2}$，当且仅当 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立.

所以，x^2+y^2 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

第一试(B)

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(c\neq0)$ 的图象与 x 轴有唯一交点，则二次函数 $y=a^3x^2+b^3x+c^3$ 的图象与 x 轴的交点个数为　　　　（　　）

A．0.　　　B．1.　　　C．2.　　　D．不确定.

【答】 C.

因为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有唯一交点，所以 $\Delta_1=b^2-4ac=0$，所以 $b^2=4ac\neq0$.

故二次函数 $y=a^3x^2+b^3x+c^3$ 的判别式 $\Delta_2=(b^3)^2-4a^3c^3=b^6-\dfrac{1}{16}(4ac)^3=b^6-\dfrac{1}{16}(b^2)^3=\dfrac{15}{16}b^6>0$，所以，二次函数 $y=a^3x^2+b^3x+c^3$ 的图象与 x 轴有两个交点.

2．题目和解答与（A）卷第 1 题相同.

3．题目和解答与（A）卷第 3 题相同.

4． 已知正整数 a,b,c 满足 $a^2-6b-3c+9=0$，$-6a+b^2+c=0$，则 $a^2+b^2+c^2=$　（　　）

A. 424.　　　B. 430.　　　C. 441.　　　D. 460.

【答】C.

由已知等式消去 c 整理得 $(a-9)^2+3(b-1)^2=75$，所以 $3(b-1)^2\leq75$，又 b 为正整数，所以 $1\leq b\leq6$.

若 $b=1$，则 $(a-9)^2=75$，无正整数解；

若 $b=2$，则 $(a-9)^2=72$，无正整数解；

若 $b=3$，则 $(a-9)^2=63$，无正整数解；

若 $b=4$，则 $(a-9)^2=48$，无正整数解；

若 $b=5$，则 $(a-9)^2=27$，无正整数解；

若 $b=6$，则 $(a-9)^2=0$，解得 $a=9$，此时 $c=18$.

因此，$a=9$，$b=6$，$c=18$，故$a^2+b^2+c^2==441$.

5. 设O是四边形$ABCD$的对角线AC、BD的交点，若$\angle BAD+\angle ACB=180°$，且$BC=3$，$AD=4$，$AC=5$，$AB=6$，则$\dfrac{DO}{OB}=$ （　　）

A. $\dfrac{4}{3}$.　　B. $\dfrac{6}{5}$.　　C. $\dfrac{8}{7}$.　　D. $\dfrac{10}{9}$.

【答】D.

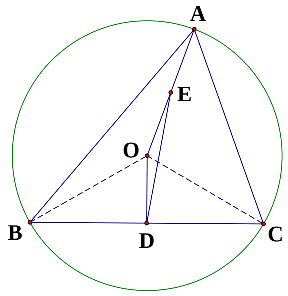
解答过程与（A）卷第 4 题相同.

6．题目和解答与（A）卷第 5 题相同.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1．题目和解答与（A）卷第 1 题相同.

2． 设O是锐角三角形ABC的外心，D,E分别为线段BC,OA的中点，$\angle ACB=7\angle OEL$，$\angle ABC=5\angle OED$，则$\angle OED=$________.



【答】$10°$.

如图，设$\angle OED=x$，则$\angle A\ B$ €5，$\angle ACB=7x$，$\angle DOC=\angle BAC=180°-12x$，$\angle AOC=10x$，所以$\angle AOD=180°-2x$，$\angle ODE=180°-x-(180°-2x)=x$，所以$OD=OE=\dfrac{1}{2}OA=\dfrac{1}{2}OC$，所以$\angle DOC=60°$，从而可得$x=10°$.

3. 题目和解答与（A）卷第 3 题相同.

4. 题目和解答与（A）卷第 4 题相同.

第二试 （A）

一、（本题满分 20 分） 已知实数x,y满足$x+y=3$，$\dfrac{1}{x+y^2}+\dfrac{1}{x^2+y}=\dfrac{1}{2}$，求$x^5+y^5$的值.

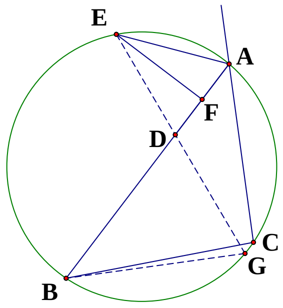
解　由$\dfrac{1}{x+y^2}+\dfrac{1}{x^2+y}=\dfrac{1}{2}$可得$2(x+y+x^2+y^2)=x^3+y^3+x^2y^2+xy$.

设$xy=t$，则$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=9-2t$，$x^3+y^3=(x+y)[(x+y)^2-3xy]=3(9-3t)$，代入上式可得$2(3+9-2t)=3(9-3t)+t^2+t$，解得$t=1$或$t=3$.　　**……………………10 分**

当$t=3$时，$xy=3$，又$x+y=3$，故x,y是一元二次方程$m^2-3m+3=0$的两实数根，但易知此方程没有实数根，不合题意.　　**……………………15 分**

当$t=1$时，$xy=1$，又$x+y=3$，故x,y是一元二次方程$m^2-3m+1=0$的两实数根，符合题意.此时

$$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(x+y)x^2y^2=(9-2t)\cdot[3(9-3t)]-3t^2=123.$$ **……………………20 分**



二、（本题满分 25 分）如图，△ ABC 中，$AB>AC$，$\angle BAC=45°$，E 是 $\angle BAC$ 的外角平分线与△ ABC 的外接圆的交点，点 F 在 AB 上且 $EF\perp AE$. 已知 $AF=1$，$BF=5$，求△ ABC 的面积.

解　在 FB 上取点 D，使 FD＝AF，连接 ED 并延长，交△ ABC 的外接圆于点 G.

由 EF⊥AD，AF＝FD 知△AED 是等腰三角形，所以

∠AED＝180°－2 ∠EAD＝∠BAC，　**……………………10 分**

所以 $\overset{\frown}{AG}=\overset{\frown}{BC}$，所以 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BG}$，所以 AC＝BG.　**……………………15 分**

又∠BGE＝∠BAE＝∠ADE＝∠BDG，所以 BG＝BD，所以 AC＝BD＝5－1＝4，　**……………………20 分**

△ ABC 的 AB 边上的高 $h=AC\sin 45°=2\sqrt{2}$.

所以，△ ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot h=\dfrac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.　**……………………25 分**

三、（本题满分 25 分）求所有的正整数数对 (a,b)，使得 $a^3=49\times 3^b+8$.

解　显然，　$49\times 3^b+8$ 为奇数，所以 a 为奇数.

又因为 $a^3=49\times 3^b+8\geq 49\times 3+8>5^3$，所以 $a>5$.　**……………………5 分**

由 $a^3=49\times 3^b+8$ 可得 $a^3-8=49\times 3^b$，即 $(a-2)(a^2+2a+4)=7^2\times 3^b$.　**……………………10 分**

设 $(a-2,a^2+2a+4)=d$，则 d 为奇数.注意到 $a^2+2a+4=(a-2)(a+4)+12$，所以 $d\,|\,12$，所以 d ＝1 或 3.　**……………………15 分**

若 d ＝1，则有 $\begin{cases}a-2=7^2,\\ a^2+2a+4=3^b,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-2=3^b,\\ a^2+2a+4=7^2,\end{cases}$ 均无正整数解.　**……………………20 分**

若 d ＝3，则有 $\begin{cases}a-2=3\times 7^2,\\ a^2+2a+4=3^{b-1},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-2=3^{b-1},\\ a^2+2a+4=3\times 7^2,\end{cases}$ 解得 $a=11$，$b=3$.

所以，满足条件的正整数对只有一个，为（11，3）.　**……………………25 分**

第二试　（B）

一、（本题满分 20 分）已知实数 a,b,c 满足 $a\leq b\leq c$，$a+b+c=16$，$a^2+b^2+c^2+\dfrac{1}{4}abc=128$，求 c 的值.

解　设 $a+b=x$，$ab=y$，依题意有 $x^2-2y+(16-x)^2+\dfrac{1}{4}y(16-x)=128$，整理得

$(x-8)^2=\dfrac{1}{8}y(x-8)$，

所以 $x=8$ 或 $y=8(x-8)$.　**……………………10 分**

（1）若 $x=8$，则 $a+b=8$，此时 $c=8$.

（2）若 $y=8(x-8)$，即 $ab=8(a+b-8)$，则 $(a-8)(b-8)=0$，所以 $a=8$ 或 $b=8$.

当 $a=8$ 时，结合 $a\le b\le c$ 可得 $a+b+c\ge 24$，与 $a+b+c=16$ 矛盾.
当 $b=8$ 时，结合 $a\le b\le c$ 及 $a+b+c=16$ 可得 $a=0$，$c=8$.
综合可知：$c=8$. ……………………**20 分**

二、（本题满分 25 分）求所有的正整数 m，使得 $2^{2m-1}-2^m+1$ 是完全平方数.

解 当 $m=1$ 时，$2^{2m-1}-2^m+1=1$ 是完全平方数. ……………………**5 分**

当 $m>1$ 时，设 $2^{2m-1}-2^m+1=n^2$（n 为正整数）.

注意到 $2^{2m-1}-2^m+1=2\cdot(2^{m-1})^2-2\cdot 2^{m-1}+1=(2^{m-1}-1)^2+(2^{m-1})^2$，故可得

$(2^{m-1}-1)^2+(2^{m-1})^2=n^2$， ……………………**10 分**

所以 $2^{2m-2}=n^2-(2^{m-1}-1)^2=(n+2^{m-1}-1)(n-2^{m-1}+1)$. ……………………**15 分**

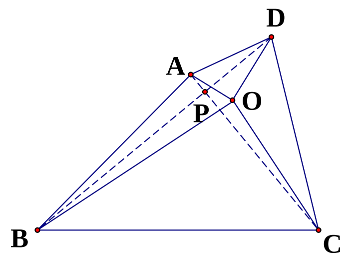
设 $x=n-2^{m-1}+1$，$y=n+2^{m-1}-1$，则 $x<y$，$xy=2^{2m-2}$，所以 x,y 均为 2 的方幂.

……………………**20 分**

又 $y-x=2^m-2$ 被 4 除余数为 2，所以，只可能 $x=2$，$y=2^m$，故 $2\times 2^m=2^{2m-2}$，解得 $m=3$.

综上可知：满足条件的正整数 m 有两个，分别为 1 和 3. ……………………**25 分**

三、（本题满分 25 分）如图，O 为四边形 $ABCD$ 内一点，$\angle OAD=\angle OCB$，$OA\perp OD$，$OB\perp OC$. 求证：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.



证明 由题设条件可知 $\angle AOD=\angle BOC=90°$，又 $\angle OAD=\angle OCB$，所以 $\triangle AOD\backsim\triangle COB$， ……………………**5 分**

所以 $\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{AO}{CO}$，从而 $\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{AO}{OD}$. ……………………**10 分**

又 $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=\angle AOB+\angle AOD=\angle DOB$，所以 $\triangle AOC\backsim\triangle DOB$，所以 $\angle OAC=\angle ODB$. ……………………**15 分**

设 AC 和 BD 交于点 P，则 $\angle APD=\angle AOD=90°$，所以 $AC\perp DB$， ……………………**20 分**

所以 $AB^2+CD^2=(AP^2+PB^2)+(PD^2+PC^2)=(AP^2+PD^2)+(PB^2+PC^2)=AD^2+BC^2$.

……………………**25 分**