



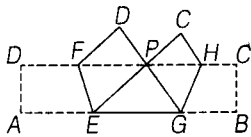
# 2008 年北京市中学生数学竞赛 初二年级试题解答

一、选择题(满分 25 分,每小题只有一个正确答案,答对得 5 分)

1. 自然数  $a, b, c, d$  满足  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$ , 则  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$  等于( ).

- (A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{3}{16}$  (C)  $\frac{7}{32}$  (D)  $\frac{15}{64}$

2. 如右图所示,  $ABCD$  是一张长方形纸片, 将  $AD, BC$  折起, 使  $A, B$  两点重合于  $CD$  边上的点  $P$ , 然后压平得折痕  $EF$  与  $GH$ . 若  $PE = 8\text{cm}$ ,  $PG = 6\text{cm}$ ,  $EG = 10\text{cm}$ . 则长方形纸片  $ABCD$  的面积为( ).



- (A)  $105.6(\text{cm})^2$  (B)  $110.4(\text{cm})^2$   
(C)  $115.2(\text{cm})^2$  (D)  $124.8(\text{cm})^2$

3. 化简  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$  的结果是( ).

- (A) 1 (B)  $\sqrt{3}$  (C) 2 (D) 4

4.  $\triangle ABC$  所在平面上的点  $P$ , 使得  $\triangle ABP, \triangle BCP$  和  $\triangle ACP$  的面积相等, 这样的点  $P$  的个数是( ).

- (A) 8 (B) 4 (C) 3 (D) 1

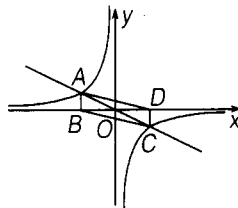
5. 在直角坐标系中, 设点  $A(-1, -2), B(4, -1), C(m, 0), D(n, n)$  为四边形的四个顶点, 当四边形  $ABCD$  的周长最短时,  $\frac{m}{n}$  的值为( ).

- (A) -2 (B) -1 (C)  $-\frac{1}{2}$  (D) 1

题号	1	2	3	4	5
答案	D	C	C	B	A

二、填空题(满分 35 分,每小题 7 分,将答案写在下面相应的空格中)

1. 如右图所示, 过原点的直线与反比例函数  $y = -\frac{7}{x}$  的图像交于



点  $A$  和  $C$ , 自点  $A$  和点  $C$  作  $x$  轴的垂线, 垂足分别为  $B$  和  $D$ , 则四边形  $ABCD$  的面积等于\_\_\_\_\_.

2. 方程组

$$\begin{cases} 2x + y = z - 1 \\ 8x^3 + y^3 = z^2 - 1 \end{cases}$$

的正整数解  $(x, y, z)$  为\_\_\_\_\_.

3. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle CAB = 70^\circ$ ,  $\angle CAB$  的平分线与  $\angle ACB$  的平分线相交于  $I$ , 若  $AC + AI = BC$ , 则  $\angle ACB$  等于\_\_\_\_\_度.

4. 已知  $A = \frac{1^2 + 2^2}{1 \times 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \times 3} + \frac{3^2 + 4^2}{3 \times 4} + \dots + \frac{1003^2 + 1004^2}{1003 \times 1004} + \frac{1004^2 + 1005^2}{1004 \times 1005}$ , 则  $A$  的整数部分是\_\_\_\_\_.

5. 凸五边形  $ABCDE$  中,  $\angle BAE + \angle AED = 270^\circ$ ,  $\angle BCD = 90^\circ$ ,  $AB = 3, BC = 12, CD = 5, DE = 4, AE = 8$ . 则五边形  $ABCDE$  的面积等于\_\_\_\_\_.

题号	1	2	3	4	5
答案	14	(1, 3, 6)	$75^\circ$	2008	55.2

三、(满分 10 分)

已知  $\frac{x}{y+z+u} = \frac{y}{z+u+x} = \frac{z}{u+x+y} =$

$\frac{u}{x+y+z}$ , 求  $\frac{x+y}{z+u} + \frac{y+z}{u+x} + \frac{z+u}{x+y} + \frac{u+x}{y+z}$  的值.

解 由  $\frac{x}{y+z+u} = \frac{y}{z+u+x} = \frac{z}{u+x+y} =$

$$\frac{u}{x+y+z},$$

$$\text{则 } \frac{x+y+z+u}{y+z+u} = \frac{x+y+z+u}{z+u+x} =$$

$$\frac{x+y+z+u}{u+x+y} = \frac{x+y+z+u}{x+y+z}.$$

①如果分子  $x+y+z+u \neq 0$ , 则由分母推得  $x=y=z=u$ .

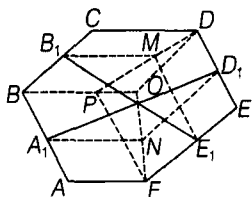
$$\text{此时 } \frac{x+y}{z+u} + \frac{y+z}{u+x} + \frac{z+u}{x+y} + \frac{u+x}{y+z} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

②如果分子  $x+y+z+u=0$ ,

$$\text{则 } x+y=-(z+u), y+z=-(u+x),$$

$$\text{此时 } \frac{x+y}{z+u} + \frac{y+z}{u+x} + \frac{z+u}{x+y} + \frac{u+x}{y+z} = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4.$$

四、(满分 15 分) 如图, 在六边形  $ABCDEF$  中,  $AB \parallel DE, BC \parallel EF, CD \parallel FA, AB+DE=BC+EF, A_1D_1=B_1E_1, A_1, B_1, D_1, E_1$  分别是  $AB, BC, DE, EF$  的中点. 求证:  $\angle CDE = \angle AFE$ .



证明 作  $\square ABPF$ , 连接  $DP$ , 取  $PD$  的中点  $M$ ,  $BCDP$  是梯形. 连接  $B_1M, E_1M$ , 由梯形中位线定理, 知  $B_1M \parallel CD \parallel BP \parallel AF, ME_1 \parallel DE \parallel FP \parallel AB$ , 且  $B_1M = \frac{BP+CD}{2} = \frac{AF+CD}{2}, E_1M = \frac{PF+DE}{2} = \frac{AB+DE}{2}$ .

同理, 作  $\square BCDO$ , 连接  $OF$ , 取  $FO$  的中点  $N$ , 连接  $A_1N, D_1N$ , 则由梯形中位线定理, 知  $A_1N \parallel AF \parallel BO \parallel CD, ND_1 \parallel EF \parallel OD \parallel BC$ , 且

$$A_1N = \frac{AF+BO}{2} = \frac{AF+CD}{2},$$

$$D_1N = \frac{EF+OD}{2} = \frac{EF+BC}{2} = \frac{AB+DE}{2}.$$

在  $\triangle B_1ME_1$  与  $\triangle A_1ND_1$  中,  $B_1M =$

$$A_1N, E_1M = D_1N,$$

又因为  $A_1D_1 = B_1E_1$ ,

所以  $\triangle B_1ME_1 \cong \triangle A_1ND_1$ .

因此  $\angle B_1ME_1 = \angle A_1ND_1$ ,

所以  $\angle CDE = \angle AFE$ .

五、(满分 15 分) 求证:

(1) 一个自然数的平方被 7 除的余数只能是 0, 1, 4, 2.

(2) 对任意的正整数  $n$ ,  $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$  不被 7 整除. 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数.

证明 (1) 设自然数  $m = 7q + r$  ( $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ), 则

$$m^2 = (7q+r)^2 = 49q^2 + 14qr + r^2.$$

由于  $r^2$  只能取 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 被 7 除的余数对应为 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. 因此, 一个自然数的平方被 7 除的余数只能是 0, 1, 4, 2.

(2) 由于  $n(n+2)(n+4)(n+6) = (n^2+6n)(n^2+6n+8)$ , ( $n=1, 2, 3, \dots$ ),

$$\text{令 } k = n^2 + 6n, \text{ 则}$$

$$n(n+2)(n+4)(n+6) = (n^2+6n)(n^2+6n+8) = k(k+8), \text{ 其中 } k \geq 7.$$

$$\text{则 } \sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)} = \sqrt{k(k+8)} = \sqrt{k^2+8k}, \text{ 其中 } k \geq 7.$$

$$\text{由于 } k^2+6k+9 < k^2+8k < k^2+8k+16,$$

$$\text{所以 } (k+3)^2 < k^2+8k < (k+4)^2.$$

$$\text{因此 } k+3 < \sqrt{k^2+8k} < k+4.$$

$$\text{即 } [\sqrt{k^2+8k}] = k+3.$$

$$\text{也就是 } [\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}] = k+3 = n^2+6n+3 = (n+3)^2-6.$$

如果  $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$  被 7 整除, 必须只需  $(n+3)^2$  被 7 除余 6, 然而一个自然数的平方被 7 除的余数只能为 0, 1, 4 和 2 中的一个, 因此对任意的正整数  $n$ ,  $(n+3)^2-6$  不能被 7 整除, 也就是  $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$  不能被 7 整除.

中学生数学