

竞赛之窗

## 2004年(宇振杯)上海市初中数学竞赛

一、填空题(第1~5题各6分,第6~10题各8分,共70分)

1. 若关于  $x$  的一元二次方程

$$x^2 + (3a-1)x + a + 8 = 0$$

有两个不相等的实根  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < 1, x_2 > 1$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

2. 方程  $\frac{1}{5-x} + \frac{2}{4-x} + \frac{3}{3-x} = -3$  的解是\_\_\_\_\_.

3. 一个二位数的两个数字之积是这个二位数两个数字之和的2倍; 又这个二位数加上9后, 得到的和恰巧是原二位数的个位数与十位数交换位置后的数的2倍. 则原二位数是\_\_\_\_\_.

4. 如图1所示, 在  $\triangle ABC$  中,  $CD, CE$  分别是边  $AB$  上的高和中线,  $CE = BE = 1$ , 又  $CE$  的中垂线过点  $B$ , 且交  $AC$  于点  $F$ . 则  $CD + BF =$ \_\_\_\_\_.

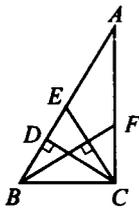


图1

5. 如图2, 分别以  $\text{Rt} \triangle XYZ$  的直角边和斜边为边向外作正方形  $AXZF$ 、正方形  $BCYX$ 、正方形  $DEZY$ . 若直角边  $YZ = 1, XZ = 2$ , 则六边形  $ABCDEF$  的面积为\_\_\_\_\_.

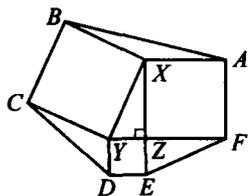


图2

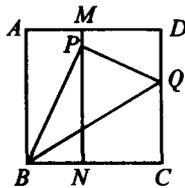


图3

6. 如图3, 正方形纸片  $ABCD$  的面积为1, 点  $M, N$  分别在  $AD, BC$  上, 且  $AM = BN =$

$\frac{2}{5}$ . 将点  $C$  折至  $MN$  上, 落在点  $P$  的位置, 折痕为  $BQ$  ( $Q$  在  $CD$  上), 联结  $PQ$ . 则以  $PQ$  为边长的正方形面积为\_\_\_\_\_.

7. 三个不同正整数  $a, b, c$ , 使  $a + b + c = 133$ , 且任意两个数的和都是完全平方数. 则  $a, b, c$  是\_\_\_\_\_ (不计  $a, b, c$  的顺序).

8. 若实数  $a, b, c, d$  满足  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$ , 则

$$y = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$$

的最大值是\_\_\_\_\_.

9. 已知实系数一元二次方程  $ax^2 + 2bx + c = 0$  有两个实根  $x_1, x_2$ . 若  $a > b > c$ , 且  $a + b + c = 0$ , 则  $d = |x_1 - x_2|$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

10. 如图4, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ , 点  $P, Q$  分别在  $AC, AB$  上, 且  $AP = PQ = QB = BC$ . 则  $\angle A =$ \_\_\_\_\_.

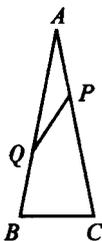


图4

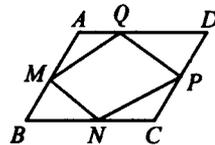


图5

二、(16分) 如图5, 四边形  $PQMN$  是  $\square ABCD$  的内接四边形.

(1) 若  $MP \parallel BC$  或  $NQ \parallel AB$ , 求证:

$$S_{\text{四边形}PQMN} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD};$$

(2) 若  $S_{\text{四边形}PQMN} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$ , 问是否能推出  $MP \parallel BC$  或  $NQ \parallel AB$ ? 证明你的结论.

三、(16分) 设  $n$  是正整数,  $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$  是  $n$  的 4 个连续最小的正整数约数. 若  $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ , 求  $n$  的值.

四、(18分) 如图 6, 已知  $\triangle ABC$ , 且  $S_{\triangle ABC} = 1$ .  $D, E$  分别是  $AC, AB$  上的动点,  $BD$  与  $CE$  相交于点  $P$ , 使  $S_{\text{四边形}BCDE} = \frac{16}{9} S_{\triangle BPC}$ . 求  $S_{\triangle DEP}$  的最大值.

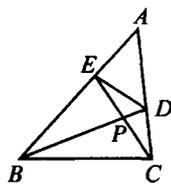


图 6

参考答案

一、1.  $a < -2$  2.  $6, 4 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  3. 6.3 4.  $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

5. 14 6.  $\frac{3}{7}$  7. 12, 52, 69 8. 40 9.  $\sqrt{3} < d < 2\sqrt{3}$

10.  $20^\circ$

二、(1) 不妨设  $MP \parallel BC$ . 则

$$S_{\triangle QMP} = S_{\triangle AMP} = \frac{1}{2} S_{\square AMPD}.$$

同理,  $S_{\triangle NMP} = \frac{1}{2} S_{\square MBPC}.$

$$\text{故 } S_{\text{四边形}PQMN} = \frac{1}{2} (S_{\square AMPD} + S_{\square MBPC}) = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}.$$

(2) 一定能推出  $MP \parallel BC$  或  $NQ \parallel AB$ .

若  $MP \parallel BC$ , 则断言已经成立.

若  $MP$  与  $BC$  不平

行, 如图 7, 过  $M$  作  $MP' \parallel BC$ , 交  $CD$  于  $P'$ ,  $P'$  与  $P$  不重合.

由题设及 (1) 的结果, 有

$$S_{\text{四边形}P'QMN} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD} = S_{\text{四边形}PQMN}.$$

所以,  $S_{\triangle QNP'} = S_{\triangle QNP}.$

从而,  $PP' \parallel QN$ . 故  $QN \parallel AB$ .

三、若  $n$  为奇数, 则  $d_1, d_2, d_3, d_4$  都是奇数. 故

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{4}.$$

矛盾.

若  $4 \mid n$ , 则有  $d_1 = 1, d_2 = 2$ . 由  $d_i^2 \equiv 0$  或  $1 \pmod{4}$

知  $n \equiv 1 + 0 + d_3^2 + d_4^2 \not\equiv 0 \pmod{4}$ . 也矛盾.

从而,  $n = 2(2n_1 - 1)$ ,  $n_1$  为某正整数, 且数组

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = (1, 2, p, q) \text{ 或 } (1, 2, p, 2p),$$

其中  $p, q$  为奇质数.

在前一种情形, 有

$$n = 1^2 + 2^2 + p^2 + q^2 \equiv 3 \pmod{4}. \text{ 矛盾.}$$

则只能是  $n = 1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 = 5(1 + p^2)$ .

故  $5 \mid n$ .

若  $d_3 = 3$ , 则  $d_4 = 5$ , 这将回到前一种情形, 因此, 只能是  $d_3 = p = 5$ , 则  $n = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130$ .

容易验证, 130 的 4 个连续最小的正约数就是 1, 2, 5, 10, 满足条件.

因此,  $n = 130$ .

四、设  $\frac{AE}{AB} = x, \frac{AD}{AC} = y$ , 则

$$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE \cdot AD}{AB \cdot AC} = xy.$$

因为  $S_{\triangle ABC} = 1$ , 所以,

$$S_{\triangle ADE} = xy, S_{\text{四边形}BCDE} = 1 - xy.$$

在  $\triangle ABD$  中, 由梅涅劳斯定理得

$$\frac{BP}{PD} \cdot \frac{DC}{CA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1.$$

$$\text{则 } \frac{BP}{PD} = \frac{CA}{DC} \cdot \frac{EB}{AE} = \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1-x}{x} = \frac{1-x}{x(1-y)}. \quad \textcircled{1}$$

同理,  $\frac{CP}{PE} = \frac{1-y}{y(1-x)}.$

$$\text{于是, } \frac{S_{\triangle DEP}}{S_{\triangle BPC}} = \frac{PD \cdot PE}{PB \cdot PC} = \frac{x(1-y)}{1-x} \cdot \frac{y(1-x)}{1-y} = xy.$$

同时, 由式  $\textcircled{1}$  得

$$\frac{BP}{BD} = \frac{BP}{BP + PD} = \frac{1-x}{1-xy}.$$

$$\text{故 } S_{\triangle BPC} = \frac{BP}{BD} S_{\triangle BCD} = \frac{1-x}{1-xy} \cdot \frac{CD}{CA} S_{\triangle ABC}$$

$$= \frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}.$$

由题设有

$$\frac{(1-x)(1-y)}{1-xy} = S_{\triangle BPC}$$

$$= \frac{9}{16} S_{\text{四边形}BCDE} = \frac{9}{16} (1-xy).$$

令  $u = xy$ , 则

$$9(1-u)^2 = 16[1+u-(x+y)] \leq 16(1-\sqrt{u})^2.$$

注意到  $0 < u < 1$ , 得

$$3(1-u) \leq 4(1-\sqrt{u}), 3(1+\sqrt{u}) \leq 4,$$

$$\text{解得 } 0 < u \leq \frac{1}{9}.$$

$$\text{当且仅当 } x = y = \frac{1}{3} \text{ 时, } u = xy = \frac{1}{9}.$$

$$\text{则 } S_{\triangle DEP} = xy S_{\triangle BPC} = xy \cdot \frac{9}{16} (1-xy) = \frac{9}{16} (-u^2 + u)$$

$$= \frac{9}{16} \left[ -\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right].$$

$$\text{故当 } u = \frac{1}{9}, \text{ 即 } x = y = \frac{1}{3} \text{ 时, } S_{\triangle DEP} \text{ 取最大值 } \frac{1}{18}.$$

(李大元 顾鸿达 刘鸿坤 曾容 叶声扬 命题)