竞赛之窗

2004年(宇振杯)上海市初中数学竞赛

一、填空题(第1~5题各6分,第6~10题各8分,共70分)

1.若关于 x 的一元二次方程

$$x^2+(3a-1)x+a+8=0$$

有两个不相等的实根 x_1、x_2,且 $x_1<1$,$x_2>1$,则实数 a 的取值范围是______.

2.方程 $\frac{1}{5-x}+\frac{2}{4-x}+\frac{3}{3-x}=-3$ 的解是______.

3.一个二位数的两个数字之积是这个二位数两个数字之和的2倍;又这个二位数加上9后,得到的和恰巧是原二位数的个位数与十位数交换位置后的数的2倍.则原二位数是______.

4.如图1所示,在 $\triangle ABC$ 中,CD、CE 分别是边 AB 上的高和中线,$CE=BE=1$,又 CE 的中垂线过点 B,且交 AC 于点 F.则 $CD+BF=$______.

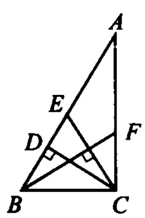

图1

5.如图2,分别以 Rt$\triangle XYZ$ 的直角边和斜边为边向形外作正方形 $AXZF$、正方形 $BCYX$、正方形 $DEZY$.若直角边 $YZ=1$,$XZ=2$,则六边形 $ABCDEF$ 的面积为______.

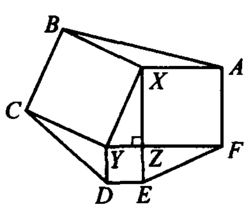

图2

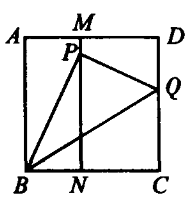

图3

6.如图3,正方形纸片 $ABCD$ 的面积为1,点 M、N 分别在 AD、BC 上,且 $AM=BN=\frac{2}{5}$.将点 C 折至 MN 上,落在点 P 的位置,折痕为 BQ(Q 在 CD 上),联结 PQ.则以 PQ 为边长的正方形面积为______.

7.三个不同正整数 a、b、c,使 $a+b+c=133$,且任意两个数的和都是完全平方数.则 a、b、c 是______(不计 a、b、c 的顺序).

8.若实数 a、b、c、d 满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=10$,则

$$y=(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$$

的最大值是______.

9.已知实系数一元二次方程 $ax^2+2bx+c=0$ 有两个实根 x_1、x_2.若 $a>b>c$,且 $a+b+c=0$,则 $d=|x_1-x_2|$ 的取值范围是______.

10.如图4,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,点 P、Q 分别在 AC、AB 上,且 $AP=PQ=QB=BC$.则 $\angle A=$______.

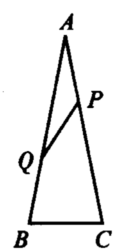

图4

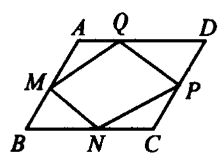

图5

二、(16分)如图5,四边形 $PQMN$ 是 $\square ABCD$ 的内接四边形.

(1)若 $MP\parallel BC$ 或 $NQ\parallel AB$,求证:

$$S_{四边形PQMN}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD};$$

(2)若 $S_{四边形PQMN}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$,问是否能推出 $MP\parallel BC$ 或 $QN\parallel AB$?证明你的结论.

三、(16分)设 n 是正整数，$d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ 是 n 的4个连续最小的正整数约数．若 $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$，求 n 的值．

四、(18分)如图6，已知△ ABC，且 $S_{\triangle ABC} = 1$．D、E 分别是 AC、AB 上的动点，BD 与 CE 相交于点 P，使 $S_{四边形BCDE} = \frac{16}{9} S_{\triangle BPC}$．求 $S_{\triangle DEP}$ 的最大值．

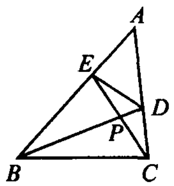

图6

参考答案

一、1. $a < -2$　2. $6, 4 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$　3. 63　4. $\frac{7\sqrt{3}}{6}$　5. 14　6. $\frac{3}{7}$　7. 12,52,69　8. 40　9. $\sqrt{3} < d < 2\sqrt{3}$　10. $20°$

二、(1)不妨设 $MP // BC$．则

$S_{\triangle QMP} = S_{\triangle AMP} = \frac{1}{2} S_{\square AMPD}$．

同理，$S_{\triangle NMP} = \frac{1}{2} S_{\square MBCP}$．

故 $S_{四边形PQMN} = \frac{1}{2}(S_{\square AMPD} + S_{\square MBCP}) = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$．

(2)一定能推出 $MP // BC$ 或 $NQ // AB$．

若 $MP // BC$，则断言已经成立．

若 MP 与 BC 不平行，如图7，过 M 作 $MP' // BC$，交 CD 于 P'，P' 与 P 不重合．

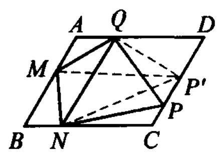

图7

由题设及(1)的结果，有

$S_{四边形P'QMN} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD} = S_{四边形PQMN}$．

所以，$S_{\triangle QNP'} = S_{\triangle QNP}$．

从而，$PP' // QN$．故 $QN // AB$．

三、若 n 为奇数，则 d_1、d_2、d_3、d_4 都是奇数．故

$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 1+1+1+1 \equiv 0 \pmod 4$．

矛盾．

若 $4 \mid n$，则有 $d_1 = 1, d_2 = 2$．由 $d_i^2 \equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$ 知 $n \equiv 1 + 0 + d_3^2 + d_4^2 \not\equiv 0 \pmod 4$．也矛盾．

从而，$n = 2(2n_1 - 1)$，n_1 为某正整数，且数组

$(d_1, d_2, d_3, d_4) = (1, 2, p, q)$或$(1, 2, p, 2p)$，

其中 p、q 为奇质数．

在前一种情形，有

$n = 1^2 + 2^2 + p^2 + q^2 \equiv 3 \pmod 4$．矛盾．

则只能是 $n = 1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 = 5(1 + p^2)$．

故 $5 \mid n$．

若 $d_3 = 3$，则 $d_4 = 5$，这将回到前一种情形，因此，只能是 $d_3 = p = 5$，则 $n = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130$．

容易验证，130的4个连续最小的正约数就是1,2,5,10，满足条件．

因此，$n = 130$．

四、设 $\frac{AE}{AB} = x, \frac{AD}{AC} = y$，则

$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE \cdot AD}{AB \cdot AC} = xy$．

因为 $S_{\triangle ABC} = 1$，所以，

$S_{\triangle ADE} = xy$，$S_{四边形BCDE} = 1 - xy$．

在△ ABD 中，由梅涅劳斯定理得

$\frac{BP}{PD} \cdot \frac{DC}{CA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1$．

则 $\frac{BP}{PD} = \frac{CA}{DC} \cdot \frac{EB}{AE} = \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1-x}{x} = \frac{1-x}{x(1-y)}$．　①

同理，$\frac{CP}{PE} = \frac{1-y}{y(1-x)}$．

于是，$\frac{S_{\triangle DEP}}{S_{\triangle BPC}} = \frac{PD \cdot PE}{PB \cdot PC} = \frac{x(1-y)}{1-x} \cdot \frac{y(1-x)}{1-y} = xy$．

同时，由式①得

$\frac{BP}{BD} = \frac{BP}{BP + PD} = \frac{1-x}{1-xy}$．

故 $S_{\triangle BPC} = \frac{BP}{BD} S_{\triangle BCD} = \frac{1-x}{1-xy} \cdot \frac{CD}{CA} S_{\triangle ABC}$

$= \frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}$．

由题设有

$\frac{(1-x)(1-y)}{1-xy} = S_{\triangle BPC}$

$= \frac{9}{16} S_{四边形BCDE} = \frac{9}{16}(1 - xy)$．

令 $u = xy$，则

$9(1-u)^2 = 16[1 + u - (x+y)] \leqslant 16(1 - \sqrt{u})^2$．

注意到 $0 < u < 1$，得

$3(1-u) \leqslant 4(1 - \sqrt{u})$，$3(1 + \sqrt{u}) \leqslant 4$，

解得 $0 < u \leqslant \frac{1}{9}$．

当且仅当 $x = y = \frac{1}{3}$ 时，$u = xy = \frac{1}{9}$．

则 $S_{\triangle DEP} = xyS_{\triangle BPC} = xy\frac{9}{16}(1 - xy) = \frac{9}{16}(-u^2 + u)$

$= \frac{9}{16}\left[-\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$．

故当 $u = \frac{1}{9}$，即 $x = y = \frac{1}{3}$ 时，$S_{\triangle DEP}$ 取最大值 $\frac{1}{18}$．

(李大元　顾鸿达　刘鸿坤　曾　容　叶声扬　命题)