

2010年北京市中学生数学竞赛(初二)

中图分类号: G424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2011)03-0025-03

一、选择题(每小题5分,共25分)

1. 设 x, y 为实数, 满足

$$x + y = 1, x^4 + y^4 = \frac{7}{2}.$$

则 $x^2 + y^2$ 的值是().

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

2. 如图1, 直线 $k \parallel l$,

$\angle 4 - \angle 3 = \angle 3 - \angle 2$
 $= \angle 2 - \angle 1 = d > 0$, 其中,
 $\angle 3 < 90^\circ, \angle 1 = 50^\circ$.
 则 $\angle 4$ 最大可能的整数值



图1

是().

- (A) 107° (B) 108°
 (C) 109° (D) 110°

3. 设 p 是质数. 则满足

$$|a + b| + (a - b)^2 = p$$

的整数对 (a, b) 共有()对.

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

4. 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $BC = 2, CA = 3, AB = 4, h_a, h_b, h_c$ 分别表示边 BC, CA, AB 上的高. 则

$$(h_a + h_b + h_c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = ().$$

- (A) $\frac{41}{6}$ (B) $\frac{39}{4}$ (C) $\frac{38}{5}$ (D) $\frac{38}{7}$

5. 如图2, 正方形 $ABCD$ 被直线 OE 分成面积相等的两部分, 已知线段 OD, AD 的长都是正整数, $\frac{CE}{BE} = 20$. 则满足

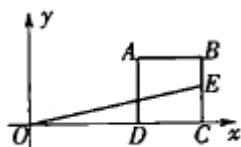


图2

上述条件的正方形 $ABCD$ 面积的最小值是().

- (A) 324 (B) 331 (C) 354 (D) 361

二、填空题(每小题7分,共35分)

1. 如图3, 已知

$$AB = 2, BC = AE = 6,$$

$$CE = CF = 7, BF = 8.$$

则四边形 $ABDE$ 与 $\triangle CDF$ 面积的比值是_____.

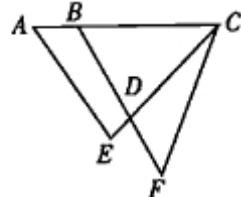


图3

$$2. \text{ 已知 } 4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\sqrt{5} - 2k}}} = \sqrt{5} + 2.$$

则 $k =$ _____.

3. 如图4, 在四边形 $ABCD$ 中, 设 $\angle BAD + \angle ADC = 270^\circ$, 且 E, F 分别为 AD, BC 的中点,

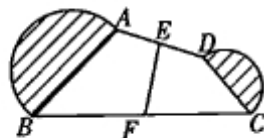


图4

$EF = 4$, 阴影部分分别是以 AB, CD 为直径的半圆. 则这两个半圆面积的和是_____ (圆周率为 π).

4. 计算:

$$\frac{1}{1 \times 2010} + \frac{1}{2 \times 2009} + \dots + \frac{1}{2010 \times 1} - \frac{2010}{2011} \left(\frac{1}{1 \times 2009} + \frac{1}{2 \times 2008} + \dots + \frac{1}{2009 \times 1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 如图5, 在边长为10的正方形 $ABCD$ 中, 内接有六个大小相同的正方形, P, Q, M, N 是落在大正方形边上的小正方形的顶点. 则这六个小正方形的面积和是_____.

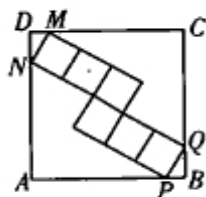


图5

三、(10分)在凸五边形 $ABCDE$ 中,

$$AB = BC = CD = DE = EA,$$

$$\angle ABC = 2 \angle DBE.$$

求证: $\angle ABC = 60^\circ$.

四、(15分)能否将 2010 写成 k 个互不相等的质数的平方和? 如果能, 试求 k 的最大值; 如果不能, 请简述理由.

五、(15分)某次初二数学竞赛, 共有 99 所中学报名参加, 每校参赛者中既有男选手, 也有女选手. 证明: 存在其中的 50 所学校的男选手总数不小于全部男选手总数的一半, 且其参赛的女选手总数也不小于全部女选手总数的一半.

参考答案

一、1. A.

令 $x^2 + y^2 = a$. 则

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \frac{1-a}{2}.$$

$$\text{又 } x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$$

$$= a^2 - 2\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 + a - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a - 1 = 7$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ 或 } -4.$$

由于 $a > 0$, 则 $x^2 + y^2 = 2$.

2. C.

$$\text{由 } \angle 3 = 50^\circ + 2d < 90^\circ \Rightarrow d < 20^\circ$$

$$\Rightarrow \angle 4 = 50^\circ + 3d < 50^\circ + 3 \times 20^\circ = 110^\circ$$

$$\Rightarrow \angle 4 \text{ 最大可能的整数值是 } 109^\circ.$$

3. D.

因 $a+b$ 、 $a-b$ 具有相同的奇偶性, 所以, $p=2$.

于是, 整数对 (a, b) 为

$$(1, 1), (-1, -1), (0, 1),$$

$$(1, 0), (-1, 0), (0, -1).$$

共 6 对.

4. B.

设 $\triangle ABC$ 的面积为 S . 则

$$h_a = \frac{2S}{a}, h_b = \frac{2S}{b}, h_c = \frac{2S}{c}.$$

$$\begin{aligned} & \text{故 } (h_a + h_b + h_c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \\ &= \left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \right) \left(\frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a+b+c) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) (2+3+4) = \frac{39}{4}. \end{aligned}$$

5. D.

如图 6, 因为正方形 $ABCD$ 被直线 OE 分成面积相等的两部分, 所以, 直线 OE 通过正方形的中心 P .

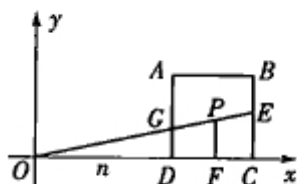


图 6

故 $BE = GD$.

令 $OD = n, AD = m$. 则

$$\frac{CE}{BE} = \frac{CE}{GD} = \frac{OC}{OD} = \frac{n+m}{n} = 20.$$

所以, $m = 19n \geq 19$.

当 $n=1$ 时, $m=19$.

故正方形 $ABCD$ 面积的最小值为 $19^2 = 361$.

二、1. 1.

因 $AC = BF = 8, CE = CF = 7, BC = AE = 6$, 所以, $\triangle AEC \cong \triangle BCF$.

$$\begin{aligned} \text{故 } S_{\text{五边形}ABCFE} &= S_{\triangle AEC} - S_{\triangle BFC} \\ &= S_{\triangle BCF} - S_{\triangle BFC} = S_{\triangle CDF}. \end{aligned}$$

2. -1.

$$\text{注意到 } \sqrt{5} + 2 = 4 + \frac{1}{\sqrt{5} + 2}.$$

$$\text{故 } \sqrt{5} - 2k = \sqrt{5} + 2 \Rightarrow k = -1.$$

3. 8π .

如图 7, 延长 BA 与 CD 交于点 M .

由 $\angle BAD + \angle ADC = 270^\circ$, 得 $\angle BMC$

$$= \angle AMD = 90^\circ.$$

联结 BD , 并取 BD 的中点 P , 再联结 PE .

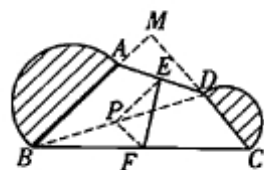


图 7

PF.

由三角形的中位线定理有

$$PE \parallel \frac{AB}{2}, PF \parallel \frac{CD}{2}.$$

因此, $\angle EPF = \angle BMC = 90^\circ$.在 Rt $\triangle EPF$ 中应用勾股定理得

$$PE^2 + PF^2 = EF^2 = 4^2,$$

$$\text{即 } \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = 16.$$

所以,两个阴影半圆面积的和为

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \times 16 = 8\pi.$$

$$4. \frac{1}{2\,021\,055}.$$

对于 $k=2, 3, \dots, 2\,010$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k(2\,011-k)} - \frac{2\,010}{2\,011} \cdot \frac{1}{(k-1)(2\,011-k)} \\ &= \frac{1}{2\,011} \left[\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2\,011-k} \right) - \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{2\,011-k} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\,011} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right). \end{aligned}$$

$$\text{故原式} = \frac{1}{2\,010} + \frac{1}{2\,011} \left(\frac{1}{2\,010} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2\,011 \times 1\,005} = \frac{1}{2\,021\,055}.$$

5. 32. 64.

如图 8, 过每个小正方形的顶点依次作各边的平行线, 构成“弦图”, 其中的小直角三角形长边为 a , 短边为 b . 则

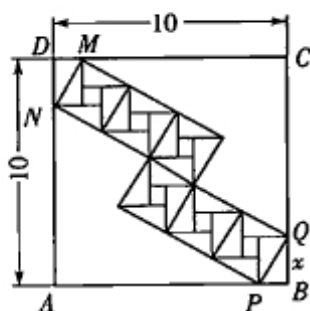


图 8

$$\begin{cases} 2a + 5b = 10, \\ 5a = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 1.2. \end{cases}$$

所以,一个小正方形面积为

$$2^2 + 1.2^2 = 5.44.$$

于是,六个小正方形面积和为

$$5.44 \times 6 = 32.64.$$

三、因为 $\angle ABC = 2 \angle DBE$, 所以,

$$\angle DBE = \angle ABE + \angle CBD.$$

如图 9, 过点

B 作 $BP \parallel AE$, 与 DE 交于点 P.结合 $AB = AE$,知 $\angle PBE = \angle AEB$

$$= \angle ABE.$$

所以, $\angle CBD = \angle DBP$.但由 $BC = CD$, 得 $\angle CDB = \angle CBD$.所以, $\angle CDB = \angle DBP$.因此, $BP \parallel CD$.又 $BP \parallel AE$, 则 $CD \parallel AE$.而 $CD = AE$, 知四边形 $ACDE$ 是平行四边形.于是, $AC = DE$.在 $\triangle ABC$ 中, 由 $AB = BC = AC$, 知 $\triangle ABC$ 是等边三角形.因此, $\angle ABC = 60^\circ$.四、若 2 010 能写成 k 个质数的平方和, 取最小的 10 个互不相等的质数的平方和, 则

$$4 + 9 + 25 + 49 + 121 + 169 +$$

$$289 + 361 + 529 + 841$$

$$= 2\,397 > 2\,010.$$

因此, $k \leq 9$.

易知, 只有一个偶质数 2, 其余质数都是奇数, 而奇数的平方被 8 除余 1.

因为 2 010 被 8 除余 2, 但九个不同质数的平方和被 8 除余 1 或 4, 八个不同质数的平方和被 8 除余 0 或 3, 故 $k \leq 7$.当 $k=7$ 时, 经试算得

$$2^2 + 3^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 + 37^2 = 2\,010.$$

综上, 2 010 可以写成 k 个互不相等的质数的平方和, k 的最大值是 7.事实上, 还可以证明 $k \neq 1, 2, \dots, 6$.

所以, 2 010 只能表示为七个互不相等的质数的平方和.

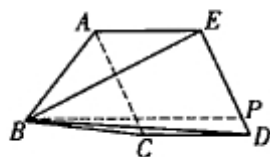
五、将参赛中学编号为 $1, 2, \dots, 99$, 以 x_i ($i=1, 2, \dots, 99$) 表示编号为第 i 所中学男选

图 9

2010年全国高中数学联赛山东赛区预赛

中国分类号: G424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2011)03-0028-07

一、选择题(每小题6分,共60分)

1. 已知 $\{a_n\}$ 是一等差数列, S_n 是其前 n 项之和. 则 $-a_m < a_1 < -a_{m+1}$ 是 $S_m > 0$, $S_{m+1} < 0$ 的() 条件.

- (A) 充分必要
(B) 充分而不必要
(C) 必要而不充分
(D) 既不充分也不必要

2. 已知函数

$$f(x) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+1)x + a$$

在其定义域内既有极大值又有极小值. 则实数 a 的取值范围是().

- (A) $-1 < a < 2$ (B) $a > 2$
(C) $a < -1$ (D) $a > 2$ 或 $a < -1$

3. 若集合 $M = \left\{x \mid \frac{|13-x|}{|15-x|} \leq \frac{1}{2}\right\}$ 和集合

$N = \{x \mid x^2 - 2x + c \leq 0\}$ 满足 $M \cap N = M$, 则实数 c 的取值范围是().

- (A) $c \leq -\frac{44}{9}$ (B) $c \leq -\frac{55}{9}$
(C) $c \leq -\frac{66}{9}$ (D) $c \leq -\frac{77}{9}$

4. 已知 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$2\tan \beta = \tan 2\alpha, \tan(\beta - \alpha) = -2\sqrt{2}.$$

则 $\cos \alpha =$ ().

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

5. 已知整数集合

$$M = \{m \mid x^2 + mx - 36 = 0 \text{ 有整数解}\},$$

集合 A 满足条件:

(1) $\emptyset \subset A \subseteq M$;

(2) 若 $a \in A$, 则 $-a \in A$.

则所有这样的集合 A 的个数为().

- (A) 15 (B) 16 (C) 31 (D) 32

6. 已知 $0 < a < b$, 在 a, b 之间插入一个正数 k , 使 a, k, b 成等比数列; 在 a, b 之间插入两个正数 m, n , 使 a, m, n, b 成等差数列.

则 $(k+1)^2$ 与 $(m+1)(n+1)$ 的大小关系为().

- (A) $(k+1)^2 < (m+1)(n+1)$
(B) $(k+1)^2 = (m+1)(n+1)$
(C) $(k+1)^2 > (m+1)(n+1)$
(D) 不确定

手的数量. 不妨设 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{99}$.

将除第 1 所学校外的 2~99 号学校分为两组.

第一组是编号为 2, 4, ..., 98 的 49 所学校. 男选手总和设为 A_1 , 女选手总和设为 B_1 .

第二组是编号为 3, 5, ..., 99 的 49 所学校. 男选手总和设为 A_2 , 女选手总和设为 B_2 .

由 $x_{2k} \geq x_{2k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, 49$) 得

$$A_1 \geq A_2.$$

由 $x_{2k-1} \geq x_{2k}$ ($k = 2, 3, \dots, 49$) 得

$$A_2 \geq A_1 - x_2 \geq A_1 - x_1.$$

因此, $A_2 + x_1 \geq A_1$.

又在第一组与第二组的选手中, 必有一组(设为 C)的女选手数量不小于两组参赛女选手总数量的一半, 再将编号为 1 的学校加入到 C 组, 所得的 50 所学校的男、女选手也都不小于男、女选手总数的一半.

(李延林 提供)