八、$[x]$与$\{x\}$

[竞赛要点]

定义1 对于一切实数 x，$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 如$[\pi]=3$，$[\sqrt{2}]=1$，$[2.7]=2$，$[-7.5]=-8$，$[-0.1]=-1$.

定义2 对于一切实数 x，用$\{x\}$表示 $x-[x]$. 如$\{3.74\}=0.74$，$\{-7.3\}=0.7$.

从以上定义可以推出，若 $x=n+\alpha$，n 为整数，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，则$[x]=n$，$\{x\}=\alpha$，$x=[x]+\{x\}$.

由于$\{x\}$与$[x]$有密切的联系，故我们将研究的重点放在$[x]$上，$\{x\}$的问题可以通过式子 $x=[x]+\{x\}$转化为$[x]$的问题.

[方法述要]

性质1 ①$[x]\leqslant x<[x]+1$；

②$x-1<[x]\leqslant x$；

③$0\leqslant\{x\}<1$.

证明 ①对任意的实数 x，有 $x=[x]+\alpha$，其中 $0\leqslant\alpha<1$.

显然$[x]\leqslant x=[x]+\alpha<[x]+1$，即$[x]\leqslant x<[x]+1$；

②对任意的实数 x，有 $x=[x]+\alpha$，$0\leqslant\alpha<1$. $x-1=[x]-(1-\alpha)<[x]\leqslant[x]+\alpha$，即 $x-1<[x]\leqslant x$；

③$\{x\}=x-[x]$.

因为 $x-1<[x]\leqslant x$，所以 $0\leqslant\{x\}<1$.

性质2 ①$[n+x]=n+[x]$，n 为整数；

②$[x]+[y]\leqslant[x+y]$；

③$\{x\}+\{y\}\geqslant\{x+y\}$；

④若 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$，则$[xy]\geqslant[x][y]$.

证明 ①对于任意的实数 x，有 $x=[x]+\alpha$，其中 $0\leqslant\alpha<1$.

因为 $n+x=n+[x]+\alpha=(n+[x])+\alpha$，$n+[x]$为整数，$0\leqslant\alpha<1$，

所以$[n+x]=n+[x]$；

②对任意的实数 x，y，有 $x=[x]+\alpha_1$，$y=[y]+\alpha_2$，其中 $0\leqslant\alpha_1<1$，$0\leqslant\alpha_2<1$.

$x+y=[x]+\alpha_1+[y]+\alpha_2=([x]+[y])+\alpha_1+\alpha_2$.

因为 $0\leqslant\alpha_1<0,0\leqslant\alpha_2<1$,所以 $0\leqslant\alpha_1+\alpha_2<2$.
当 $0\leqslant\alpha_1+\alpha_2<1$ 时,$[x+y]=[x]+[y]$.
当 $1\leqslant\alpha_1+\alpha_2<2$ 时,$[x+y]=[x]+[y]+1>[x]+[y]$.
综上所述得 $[x]+[y]\leqslant[x+y]$;
③由于$[x]+[y]\leqslant[x+y]$ (已证),
$[x]=x-\{x\},[y]=y-\{y\},[x+y]=x+y-\{x+y\}$,
所以 $x-\{x\}+y-\{y\}\leqslant x+y-\{x+y\}$,
即 $\{x\}+\{y\}\geqslant\{x+y\}$;
④对于任意的实数 x,y 有:
$x=[x]+\alpha_1,0\leqslant\alpha_1<1,y=[y]+\alpha_2,0\leqslant\alpha_2<1$,
由 $x\geqslant0,y\geqslant0$, 得$[x]\geqslant0,[y]\geqslant0$.

$$xy=([x]+\alpha_1)([y]+\alpha_2)=[x][y]+([x]\alpha_2+[y]\alpha_1+\alpha_1\alpha_2)$$

由$[x]\geqslant0,[y]\geqslant0,\alpha_1\geqslant0,\alpha_2\geqslant0$,
得$[x]\alpha_2+[y]\alpha_1+\alpha_1\alpha_2\geqslant0$.
故$[xy]\geqslant[x][y]$.

性质 3 若$[x]=[y]$,则$|x-y|<1$.

证明 设$x=[x]+\alpha_1,0\leqslant\alpha_1<1,y=[y]+\alpha_2,0\leqslant\alpha_2<1$,
$x-y=[x]+\alpha_1-[y]-\alpha_2=([x]-[y])+(\alpha_1-\alpha_2)=\alpha_1-\alpha_2$.
因为 $0\leqslant\alpha_1<1,0\leqslant\alpha_2<1$,
所以 $-1<\alpha_1-\alpha_2<1$,即$|\alpha_1-\alpha_2|<1$,
故$|x-y|=|\alpha_1-\alpha_2|<1$.

性质 4 $[-x]=\begin{cases}-[x]-1, & x\text{ 不是整数时;}\\ -[x], & x\text{ 是整数时.}\end{cases}$

证明 设 $x=[x]+\alpha,0\leqslant\alpha<1,-x=-[x]-\alpha$.
当 x 为整数时,
$\alpha=0,-x=-[x],[-x]=[-[x]]=-[x]$;
当 x 不为整数时,

$$0<\alpha<1,-x=-[x]-\alpha=-[x]-1+1-\alpha$$
$$=-([x]+1)+(1-\alpha),$$

由 $0<\alpha<1$,得 $0<1-\alpha<1$.
故$[-x]=-([x]+1)=-[x]-1$.
综合上面两种情形得:

$$[-x]=\begin{cases}-[x]-1, & x\text{ 不是整数时;}\\ -[x], & x\text{ 是整数时.}\end{cases}$$

性质 5　若 a,b 是两整数，且 $b>0$，则 $a=b\left[\frac{a}{b}\right]+b\left\{\frac{a}{b}\right\}$.

证明　a,b 是两个整数，由整除理论可知

$$a=bq+r\quad(q\text{ 为整数},0\leqslant r<b)\qquad ①$$

在①式两边同时除以 b，得 $\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}$.

因为 q 是整数，$0\leqslant\frac{r}{b}<1$，所以 $\left[\frac{a}{b}\right]=q$，$\left\{\frac{a}{b}\right\}=\frac{r}{b}$.

将 $q=\left[\frac{a}{b}\right]$，$r=b\left\{\frac{a}{b}\right\}$ 代入①式得 $a=b\left[\frac{a}{b}\right]+b\left\{\frac{a}{b}\right\}$.

[赛题精析]

例 1　$8.01\times1.24+8.02\times1.23+8.03\times1.22$ 的整数部分是多少？

分析　这类求$[x]$的问题，主要是估计 x 在哪两个相邻整数之间.

$(a+c)(b-c)=ab-ac+bc-c^2=ab-(a-b)c-c^2$. 在 $a>b$ 时，

$$(a+c)(b-c)<ab.$$

即两个数的乘积，在大数增加一个值，小数减少同一个值时，乘积变小. 可利用这一事实比较题目中三项的大小.

解　根据分析中所说可知 $8.01\times1.24>8.02\times1.23>8.03\times1.22$.
从而 $8.01\times1.24+8.02\times1.23+8.03\times1.22<8.01\times1.24\times3<8\times1.25\times3=30$.
又 $8.01\times1.24+8.02\times1.23+8.03\times1.22>8\times(1.24+1.23+1.22)=8\times3.69>29$.
所以$[8.01\times1.24+8.02\times1.23+8.03\times1.22]=29$.

说明　要定出$[x]$，必须对 x 作上、下两方面的估计，而且上界与下界之间应当只有一个整数. 如果上、下界之间多于一个整数，必须改进上界或下界的估计，直至它们之间只有一个整数.

例 2　解方程：$2[x]=x+2\{x\}$.

解　原方程可变为 $2[x]=[x]+\{x\}+2\{x\}$.

即
$$3\{x\}=[x].$$

因 $0\leqslant\{x\}<1$，故 $0\leqslant[x]<3$，于是$[x]$只可能为 $0,1,2$，且 $x=[x]+\{x\}=\frac{4[x]}{3}$.

当$[x]=0$ 时，$x=0$；当$[x]=1$ 时，$x=\frac{4}{3}$；当$[x]=2$ 时，$x=\frac{8}{3}$.

例 3　已知 $S=\dfrac{1}{\frac{1}{1949}+\frac{1}{1950}+\frac{1}{1951}+\cdots+\frac{1}{2004}}$，求 S 的整数部分.

解　本题用最粗略的估计就可以达到目的.

一方面，$S<\dfrac{1}{56\times\dfrac{1}{2004}}=\dfrac{2004}{56}=35\dfrac{44}{56}$；

另一方面，$S>\dfrac{1}{56\times\dfrac{1}{1949}}=\dfrac{1949}{56}=34\dfrac{45}{56}$，

所以 $[S]=35$.

例 4 若 $x>0$，且 $[x]^2=x(x-[x])$，求 $x-\dfrac{1}{x}$. ①

解 因 $x>0$，故 $[x]\geqslant 0$，且 $0\leqslant\{x\}<1$，由①得

$$[x]^2=([x]+\{x\})\cdot\{x\}<[x]+1,$$

即

$$0\leqslant[x]<\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2.$$

即 $[x]=0$ 或 1.

当 $[x]=0$ 时，由①得 $x^2=0$，即 $x=0$，与 $x>0$ 不符.

当 $[x]=1$ 时，由①得 $x^2-x=1$，即 $x-\dfrac{1}{x}=1$.

例 5 解方程 $x+2\{x\}=3[x]$.

分析 用 $\{x\}=x-[x]$ 代入原方程，将方程转化为前面两个例子的类型.

解 用 $\{x\}=x-[x]$ 代入原方程，原方程变形为：

$$x+2x-2[x]=3[x]$$

即 $3x=5[x]$，$x=\dfrac{5}{3}[x]$. ①

因为 $[x]\leqslant x<[x]+1$，所以 $[x]\leqslant\dfrac{5}{3}[x]<[x]+1$.

$0\leqslant\dfrac{2}{3}[x]<1$，$0\leqslant[x]<\dfrac{3}{2}$，$[x]=0$ 或 $[x]=1$.

当 $[x]=0$ 时，由①可知 $x=0$；当 $[x]=1$ 时，由①可知 $x=\dfrac{5}{3}$.

经验证 $x=0$，$x=\dfrac{5}{3}$ 均为原方程的解.

例 6 在1000！的末尾有多少个0？

分析 只须考察1000！中含10的最高次幂指数，因 $10=2\times5$，2与5都是素数，且明显地可以看出1000！中含2的最高次幂指数高于5的最高次幂指数，故1000！中含10的最高次幂指数即其中含5的最高次幂指数，所以

$$\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{5^2}\right]+\left[\frac{1000}{5^3}\right]+\left[\frac{1000}{5^4}\right]=200+40+8+1=249$$

即为1000！末尾的0的个数.

例 7 解方程 $|x+1|-|x-1|=[x]$.

分析 对 x 进行分区间讨论,去掉绝对值符号.

解 当 $x<-1$ 时,原方程变形为:$-(x+1)+(x-1)=[x]$.解得 $[x]=-2$,即 $-2\leqslant x<-1$.

当 $-1\leqslant x<1$ 时,原方程变形为:$(x+1)+(x-1)=[x]$,整理得:$x=\dfrac{[x]}{2}$.

因为 $[x]\leqslant x<[x]+1$,所以 $[x]\leqslant\dfrac{[x]}{2}<[x]+1$.

解得 $[x]=-1,[x]=0$,即 $x=-\dfrac{1}{2},x=0$;

当 $x\geqslant1$ 时,原方程变形为:$(x+1)-(x-1)=[x]$,

解得 $[x]=2$,即 $2\leqslant x<3$.

故原方程的解为:$-2\leqslant x<-1,2\leqslant x<3,x=-\dfrac{1}{2},x=0$.

例 8 求 $\left[\dfrac{23\times1}{101}\right]+\left[\dfrac{23\times2}{101}\right]+\left[\dfrac{23\times3}{101}\right]+\cdots+\left[\dfrac{23\times100}{101}\right]$ 的值.

解 因为 $[n+x]=n+[x]$(x 为一切实数),$[-x]=-1-[x]$(当 x 不是整数时).

又 23 和 101 都是质数,所以 $\dfrac{23\times1}{101},\dfrac{23\times2}{101},\cdots,\dfrac{23\times100}{101}$ 都不是整数.

$$\left[\frac{23\times100}{101}\right]=\left[\frac{23\times101}{101}-\frac{23}{101}\right]=23+\left[-\frac{23}{101}\right]=23-1-\left[\frac{23\times1}{101}\right],$$

即 $\left[\dfrac{23\times100}{101}\right]+\left[\dfrac{23\times1}{101}\right]=22$.

同理 $\left[\dfrac{23\times(100-i)}{101}\right]=\left[\dfrac{23\times(100-i-1)}{101}\right]=23+\left[-\dfrac{23\times(i+1)}{101}\right]$.

又 $1\leqslant i<99$,$\dfrac{23\times(i+1)}{101}$ 不是整数,故 $\left[-\dfrac{23\times(i+1)}{101}\right]=-1-\left[\dfrac{23\times(i+1)}{101}\right]$,

即 $\left[\dfrac{23\times(100-i)}{101}\right]+\left[\dfrac{23\times(i+1)}{101}\right]=22$.

故原式 $=22\times50=1100$.

例 9 证明 $\left[\dfrac{[x]}{n}\right]=\left[\dfrac{x}{n}\right]$,$x$ 为正实数,n 为自然数.

分析 要证明的是当 $x>0$ 时,$\left[\dfrac{[x]}{n}\right]$ 与 $\left[\dfrac{x}{n}\right]$ 的关系.根据 $[x]$ 的定义和性质 1 可知 $\left[\dfrac{x}{n}\right]\leqslant\dfrac{x}{n}<\left[\dfrac{x}{n}\right]+1$.

证明 由性质 1 可知:$\left[\dfrac{x}{n}\right]\leqslant\dfrac{x}{n}<\left[\dfrac{x}{n}\right]+1$,$\left[\dfrac{x}{n}\right]$ 为整数.

式子两边同乘以 n 得:$n\times\left[\dfrac{x}{n}\right]\leqslant x<\left(\left[\dfrac{x}{n}\right]+1\right)\times n$.

因为 $x \geqslant n \times \left[\frac{x}{n}\right]$，而 $n \times \left[\frac{x}{n}\right]$为整数，所以$[x] \geqslant n \times \left[\frac{x}{n}\right]$.

又 $x < \left(\left[\frac{x}{n}\right]+1\right) \times n$，而$\left(\left[\frac{x}{n}\right]+1\right) \times n$ 为整数，

所以$[x] < \left(\left[\frac{x}{n}\right]+1\right) \times n$.

即 $n \times \left[\frac{x}{n}\right] \leqslant [x] < \left(\left[\frac{x}{n}\right]+1\right) \times n$,

式子两边同除以 n 得：$\left[\frac{x}{n}\right] \leqslant \frac{[x]}{n} < \left[\frac{x}{n}\right]+1$.

故 $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$.

例 10 证明：对任意实数 x，有$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$.

证明 注意到 $x=[x]+\{x\}$，$0 \leqslant \{x\}<1$，有 $x+\frac{1}{2}=[x]+\{x\}+\frac{1}{2}$，

$2x=2[x]+2\{x\}$.

可分以下两种情形：

（ⅰ）当 $0 \leqslant \{x\}<\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{2} \leqslant \{x\}+\frac{1}{2}<1$，$0 \leqslant 2\{x\}<1$，故$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=2[x]=[2x]$.

（ⅱ）当$\frac{1}{2} \leqslant \{x\}<1$ 时，$0 \leqslant \{x\}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$，$0 \leqslant 2\{x\}-1<1$，

$x+\frac{1}{2}=[x]+\{x\}+\frac{1}{2}=[x]+1+\{x\}-\frac{1}{2}$,

$2x=2[x]+2\{x\}=2[x]+1+2\{x\}-1$,

故 $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]+[x]+1=2[x]+1$；$[2x]=2[x]+1$.

从而，有$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$.

例 11 x 是实数，问前 1000 个正整数中有多少个可以表示成

$$[2x]+[4x]+[6x]+[8x] \tag{①}$$

的形式？

分析 当 $x=0$ 时，$[8x]=0$. x 每增加$\frac{1}{8}$，$[8x]$增加 1. $[6x]$、$[4x]$、$[2x]$也都具有类似的性质.

解 当 $x<0$ 时，式①表示负数. 当 x 在区间$[0,1]$中（即 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时），有 13 个分数是$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{4}$或$\frac{1}{2}$乘以整数，它们是 $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, 1$.

当 x 从左到右，每经过一个分数，式①的值就增加一个整数. 而在每两个这样的分数之

间,式①的值保持不变.于是在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,式①除表示 0 外,还表示 12 个正整数,最后一个(在 $x=1$ 时)是 20.

因此前 20 个正整数中,有 12 个可由式①表示.

由于 x 增加 1,式①增加

$$2+4+6+8=20.$$

所以当 $1<x\leqslant 2$ 时,式①又表示 12 个正整数,每一个是上述的 1 个正整数加 20,最后一个是 40.

依此类推,在每个区间 $(n-1,n]$ (n 是正整数)上,式①表示 12 个正整数,最后一个是 $20n$.当 $n=50$ 时,便得到 1000.

于是,在前 1000 个正整数中,有 $12\times 50=600$ 个可以表示成式①的形式.

例 12 实数满足 $\{x\}+\{\frac{1}{x}\}=1$. ①

求证:x 为无理数.

证明一 显然 $x\neq\pm 1$.若 x 为整数且 $x\neq\pm 1$,则 $\{x\}=0$,$0<\{\frac{1}{x}\}<1$,$\{x\}+\{\frac{1}{x}\}$ 不是整数,与方程①不符.

假设 x 不为整数但为有理数,设 $x=\frac{q}{p}$,$(p,q)=1$,$p>0$.

(i)若 $0<q<p$,则 $0<\frac{q}{p}<1$,$p=qs+r$,这里 $s\geqslant 1$,$0\leqslant r\leqslant q-1$,且 $\frac{p}{q}=s+\frac{r}{q}$,$0<\frac{r}{q}<1$,故 $\{x\}+\{\frac{1}{x}\}=\frac{q}{p}+\frac{p}{q}-s=\frac{p^2+q^2}{pq}-s$.

因 $(p,q)=1$,故 $pq\nmid p^2+q^2$,即 $\frac{p^2+q^2}{pq}$ 不是整数.与方程①不符.

(ii)若 $q<0$,且 $|q|<p$,则 $-1<\frac{q}{p}<0$,$p=-qs+r$,这里 $0<r\leqslant -q-1$,且 $\frac{p}{q}=-s+\frac{r}{q}$,$-1\leqslant\frac{r}{q}<0$,所以 $\{x\}+\{\frac{1}{x}\}=\frac{q}{p}-1+\frac{p}{q}-(-s-1)$.

不是整数,与方程①不符.

同理可知,若 $|q|>p$,仍有 $\{x\}+\{\frac{1}{x}\}\neq 1$.

综上所述,满足方程①的实数 x 必为无理数.

证明二 由方程①得 $x+\frac{1}{x}=[x]+[\frac{1}{x}]+1$ 为整数.令 $x+\frac{1}{x}=k$ (k 为整数),则 $x^2-kx+1=0$.

由 $\Delta=k^2-4\geqslant 0$ 可知,$|k|\geqslant 2$.

若 $|k|\geqslant 3$,则 $x=\frac{1}{2}(k\pm\sqrt{k^2-4})$.若 x 为有理数,则 k^2-4 为完全平方数.令 k^2

初中数学竞赛培优教程·专题讲座

$-4=h^2$,有 $k^2-h^2=4$.

但$|k|\geqslant 3$时,两平方数之差不小于 5,矛盾.

综上所述,满足方程①的实数 x 必为无理数.

[能力训练]

1.若 x 为自然数,解方程$[1.9x]=10$.

2.若 x 为正数,解方程$[1.9x]=19$.

3.解方程$[x]^2=\{x\}\cdot[x]$.

4.满足$[-1.77x]=[-1.7]x$ 的整数有多少个?

5.已知$[x]=[y]$,求证:$|x-y|<1$.

6.解方程$[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$.

7.设 $n>2$,n 为正整数,求证:$\left[\frac{n(n+1)}{4n-2}\right]=\left[\frac{n+1}{4}\right]$.

8.已知 n 为正整数,求方程 $x^2-[x^2]=(x-[x])^2$.在 $1\leqslant x\leqslant n$ 中根的个数.

9.解方程$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$.

10.解方程组$\begin{cases}3[x]+2(y-[y])=7,\\3(x-[x])-[y]=4.\end{cases}$

11.若 x,y 都是自然数,解关于 x,y 的方程$[1.9x]+[8.8y]=36$.

12.证明:设 $a<0$,当且仅当$-\frac{N}{N-1}<a<-\frac{N-1}{N}$时,$[a],[2a],\cdots,[Na]$互不相同,$\left[\frac{1}{a}\right],\left[\frac{2}{a}\right],\cdots,\left[\frac{N}{a}\right]$也互不相同.