二十六、组合计数

[竞赛要点]

组合问题经常涉及到计数，计算具有某种性质的事物的数量、多少等等. 计数就是数数，它是组合数学的基本内容之一，也是数学竞赛中经常涉及的问题.

[方法述要]

解决这类问题的方法大都是特殊的、技巧性的方法. 常用的方法有极端性原理、构造法、枚举法、抽屉原理、整数性质、染色对应等等. 用这些方法时，不能直接照搬，要认真分析问题，找出问题的本质，才能有效地解决问题.

1. 枚举法：把符合要求的安排一一列举出来，既不重复，又无遗漏，从而得到所求安排的总数。枚举法是最原始、最基本、最简单的计数方法.

2. 加法原理和乘法原理：

加法原理：如果完成一件工作有 n 类方法，在第一类方法中有 m_1 种方法，在第二类方法中有 m_2 种方法，…，在第 n 类方法中有 m_n 种方法，那么，完成这件工作共有：$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.

乘法原理：如果完成一件工作，需要分成 n 个步骤，完成第一步有 m_1 种方法，完成第二步有 m_2 种方法，…，完成第 n 步有 m_n 种方法，那么，完成这件工作共有：$N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种方法.

运用加法原理的关键在于恰当地进行分类，使所分类别不重复不遗漏；运用乘法原理的关键在于分步骤，要正确地设计分步的程序，使每步之间既互相联系，又彼此独立.

3. 配对法（一一对应法）：如果能将符合条件 A 的所有安排与符合条件 B 的所有安排配成对，形成一一对应关系，则符合条件 A 的安排与符合条件 B 的安排数相等.

配对法是计数问题中技巧性较强的常用方法，它可以将较难计数的问题转化为较容易的计数问题.

[赛题精析]

例 1 书架上有不同的中文书 20 本，不同的英文书 10 本，现从书架上取书，试问：

(1) 取出一本书，有多少种不同的取法？

(2) 取出中文书和英文书各一本，有多少种不同的取法？

解 (1)这个问题应该用加法原理,因为从书架上取书有两类办法:第一类办法取中文书,可以从 20 本书中任选一本,有 20 种方法;第二类办法取英文书,可以从 10 本书中任选一本,有 10 种方法.所以不同的取书方法总共有:$N=20+10=30$(种).

(2)这与上一个问题不同,应该用乘法原理.取出中文书和英文书各一本这件事情,可以分为下面两个步骤完成:第一步取一本中文书,有 20 种方法;第二步取一本英文书,有 10 种方法.所以由乘法原理,20 本中文书取遍后共有:$N=20\times10=200$(种).

例 2 12名选手参加乒乓球单打比赛,每打一场比赛淘汰一名选手,问共需打几场比赛,才能产生冠军?

解 每场比赛恰好淘汰一名选手,即比赛场次与被淘汰的选手是一一对应,也就是说比赛场次与被淘汰的人数相等。显然,计算淘汰人数,比计算比赛场次容易得多,因为冠军只有 1 人,为产生冠军要淘汰 11 人($12-1=11$),所以要打 11 场比赛才能产生冠军.

例 3 由 $n\times n$ 个边长为 1 的小正方形拼组成的正方形棋盘中,求由若干个小方格能组成的所有正方形的数目.

解 将由若干个小方格组成的正方形分成 n 类.

第 1 类:边长为 1 的正方形,有 n^2 个;

第 2 类:边长为 2 的正方形,有$(n-1)^2$ 个;

第 3 类:边长为 3 的正方形,有$(n-2)^2$ 个;

……

第 n 类:边长为 n 的正方形,有 1^2 个.

由加法原理,这些正方形的总个数为

$$N=n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

例 4 有6 个 1 克重的球,1 个 2 克重的球,1 个 3 克重的球,共 8 个球.把这 8 个球从①到⑧编上号,放到天平上称,就成图 26-1,26-2,26-3 所示状态.

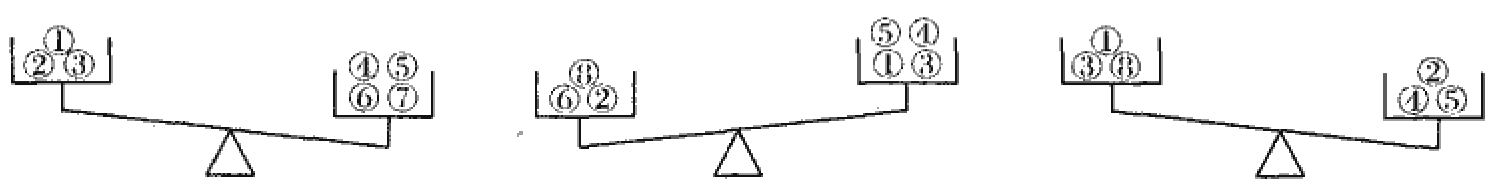

图 26-1　　图 26-2　　图 26-3

问:①2 克重的球是几号球? ②3 克重的球是几号球?

解 3 克重的球是 2 克重的球与 1 克重的球的重量的和.所以上面的三个图中,3 克重的球决不在轻的一边,即号码不是 1、2、3、4、5、8.而从图 26-1,立即看出 3 克重的球在左边(如果其中没有 3 克重的球,左边至多 $1+1+2=4$ 克重,不超过右边的重量).

因此 3 克重的球号码是 6.

从图 26-2,还看出 2 克重的球不在右边(否则两边应当平衡),即号码不是 1、3、4、5.

再由图 26-3,2 克重的球在右边,因而号码是 2.

本题不需要特别的技巧,只需要分析的能力.

例 5 满足 $x+y\leqslant n$ 的正整数解 (x,y) 共有多少个?其中 n 为正整数.

解 因为 x,y 都取正整数,故有 $1\leqslant x\leqslant n-1$,$1\leqslant y\leqslant n-1$.

当 $x=1$ 时,y 可取 $1,2,\cdots,n-1$,共得 $n-1$ 个解;

当 $x=2$ 时,y 可取 $1,2,\cdots,n-2$,共得 $n-2$ 个解;

当 $x=3$ 时,y 可取 $1,2,\cdots,n-3$,共得 $n-3$ 个解;

…

当 $x=n-1$ 时,y 可取 1,共得 1 个解.

由加法原理,得解数为 $N=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$(个).

例 6 (1)已知△ABC 是等边三角形,点 P 是△ABC 所在平面上符合下列条件的点:使△ABP,△BCP,△CAP 都是等腰三角形.问满足条件的点 P 一共有多少个?

(2)已知△ABC 是等腰三角形,其中 $AB=AC$,点 P 是△ABC 所在平面上符合下列条件的点:使△ABP 和△ACP 都是等腰三角形.问满足条件的点 P 一共有多少个?

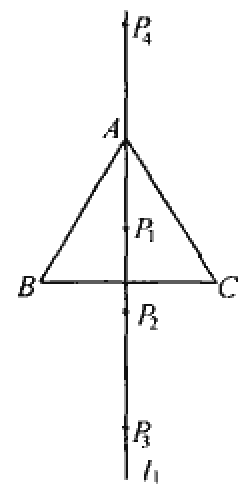

图 26-4

解 (1)如图 26-4,在等边△ABC 的一条对称轴 l_1 上应有 P_1,P_2,P_3,P_4 四个点满足条件;同理在△ABC 的另两条对称轴上也分别有四个点满足条件(其中都包括 P_1 点),故满足条件的点 P 共有 $4\times3-2=10$(个).

(2)如图 26-5,以 A 为圆心,AB 长为半径画圆 A.则⊙A 上有无数个点(除 BA,CA 的延长线与⊙A 的交点)都满足条件,即满足条件的点 P 有无数个.

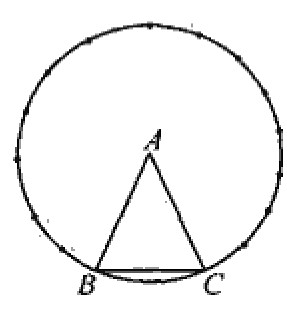

图 26-5

例 7 在正五边形 $ABCDE$ 所在平面内能找到点 P,使得△PCD 与△BCD 的面积相等,并且△ABP 为等腰三角形,这样的不同的点 P 的个数是多少?

分析 利用等积变换和交轨法,通过作图可以求解,注意△ABP 的底边有三种可能.

解 如图 26-6,点 P 只能在直线 l_1 与直线 l_2 上,其中 l_2 与直线 CD 的距离等于 l_1 与直线 CD 的距离.等腰△APB 的底边是 AB 时,AB 的中垂线与 l_1,l_2 分别交于

P_1、P_2 点；底边是 PA 时，以 B 为圆心，BA 为半径在直线 l_1 上截得点 P_3，P_4；底边是 PB 时，点 E 符合条件.

所以共有 5 个点 P_1，P_2，P_3，P_4，E 符合条件.

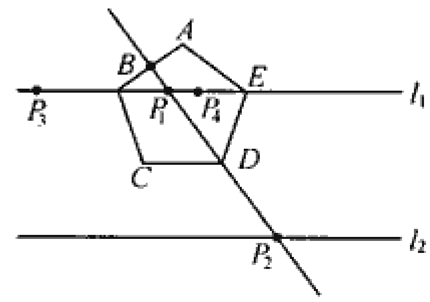

图 26-6

例 8　把1600 颗花生分给 100 只猴子. 证明：不管怎么分，至少有 4 只猴子得到的花生一样多，并设计一种分法没有 5 只猴子得到一样多的花生.

解　如果没有 4 只猴子得到的花生一样多，那么这 100 只猴子至少得到

$$3\times(1+2+\cdots+33)+34=3\times\frac{34\times33}{2}+34=1717.$$

颗花生，与已知不符. 所以必有 4 只猴子得到的花生一样多.

为了使 5 只猴子不可能得到一样多的花生，我们可以将猴子分为 25 组. 每组 4 只猴子，得到的花生一样多，而不同组的猴子得到的花生不一样多. 这时，平均每只猴子得 16 颗花生，所以可设这 25 组，每组中猴子得到的花生分别为

$$4,5,\cdots,15,16,17,\cdots,27,28$$

这时总数正好为 $4\times(4+5+\cdots+28)=4\times\dfrac{4+28}{2}\times25=1600$.

例 9　参加大型团体操表演的学生共 240 名，他们面对教练站成一行，从左至右按 1，2，3，4，5，…，依次报数. 教练要求全体学生记住各自报的数，并做下列动作：先让报的数是 3 的倍数的全体同学向后转；接着让报的数是 5 的倍数的全体同学向后转；最后让报的数是 7 的倍数的全体同学向后转. 问：(1)此时还有多少名同学面对教练；(2)现在面对教练的同学中，从左到右第 66 位同学所报的数是几.

解　(1)因为凡报的数是 15，21，35 的倍数而不是 105 的倍数的同学都是两次向后转，仍面向教练.

因为：凡报的数是 3 的倍数而不是 15，21 的倍数；凡报的数是 5 的倍数而不是 15，35 的倍数；凡报的数是 7 的倍数而不是 21，35 的倍数的同学，仅有一次向后转，都背向教练. 所以面向教练的同学的人数为

$$240-\{[\frac{240}{3}]+[\frac{240}{5}]+[3\ \frac{240}{7}]\}+2\{[\frac{240}{15}]+[\frac{240}{21}]+[\frac{240}{35}]\}-4[\frac{240}{105}]=136(\text{人})$$

($[x]$表示对 x 取整).

(2)同理，第 1 号到第 105 号的同学中，面向教练的有 60 名.

可见面向教练的同学中，从左至右第 66 位同学所报的数必大于 105. 现从下面的大于 105 的一列整数中，划去 3，5，7 的倍数但不是 15，21，35 的倍数的数，得 106，107，109，113，116，118，119，…，再由剩下的数中从左至右数第 6 个数，即是 118.

所以面向教练的第 66 位同学所报的数是 118.

例 10　用1，2，…，99，100 共 100 个数排成一个数列：$a_1,a_2,\cdots,a_{99},a_{100}$　　　(*)

已知数列中第 6 个是 $a_6=60$，第 94 个是 $a_{94}=98$. 如果相邻两个数 $a_i>a_{i+1}$，就将它们交换位置. 如此操作，直到左边的数都小于右边的数为止. 请回答最少实行了多少次交换？最多实行了多少次交换？

解 每交换一次就减少一个逆序. 所以(*)中有多少个逆序，就需要实行多少次交换.

问题就是确定(*)中的逆序总数最小是多少？最大是多少？

由于(*)中 $a_6=60$，所以 $1,2,\cdots,59$ 中至少有 $59-5=54$ 个在 a_6后面，即 60 至少与其他数的数形成 54 个逆序.

又 $a_{94}=98$，所以在 a_{94}后面的 6 项中，至少有 $6-2=4$ 个数比 a_{94}小，即 98 至少与其他的数形成 4 个逆序.

所以(*)中逆序的总数$\geqslant 54+4=58$.

这就表明(*)中逆序的总数最小是 58. 换句话说，最少需实行 58 次交换.

另一方面，在 a_6 前面至多有 5 个数比 60 大，在它的后面至多有 59 个数比 60 小，所以 60 至多与其他数形成 $5+59=64$ 个逆序.

又在 a_{94}前面至多有 2 个数比 98 大，在它后面至多有 6 个数比 98 小，所以 98 至多与其他数形成 $2+6=8$ 个逆序.

去掉 60 与 98 后，其余 98 个数至多形成 4753 个逆序.

所以(*)中逆序的总数$\leqslant 64+8+4753=4825$.

这就表明(*)中逆序的总数最大是 4825，换句话说，最多需实行 4825 次交换.

例 11 如图 26-7，电流从导线的上端载着信号流向下端. 中途遇到交叉点，电流便(向右、向左或向下)拐弯. 最后在下端得到的信号是 B、C、A.

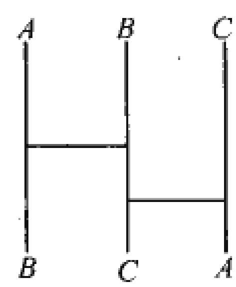

图 26-7

如图 26-8，希望在下端得到的信号是 H,G,F,E,D,C,B,A. 应当在相邻的竖线之间加几条横线(每两条横线没有公共点)，怎样加？

解 在两条相邻的竖线之间加一条横线，得出的信号顺序与原来上端的两个信号顺序正好相反，即增加或减少了一个逆序.

现在 8 个字母的排列 H,G,F,E,D,C,B,A 中，逆序数是$\dfrac{7\times 8}{2}=28$，所以加的横线条数$\geqslant 28$.

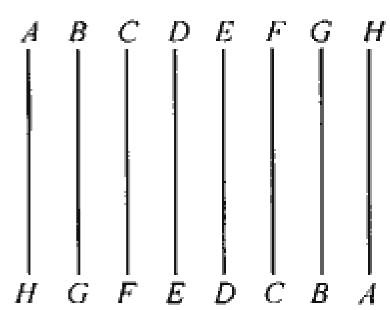

图 26-8

图 26-9 表明加 28 条横线即可达到目的，所以至少应加 28 条横线.

例 12 某地举办足球循环赛，每个参赛队都与其他队各赛一场，胜一场积 3 分，平一场积 1 分，负一场积 0 分. 已知有一个队积分最多，但他胜的场数最少. 问至少有几队参赛才可能有这样的结果.

解 称积分最多的为冠军.设冠军队胜 n 场,平 m 场,则他共积 $3n+m$ 分.由题设其余各队胜的场数不少于 $n+1$,即积分不少于 $3(n+1)$.但至少有一队踢过平局,他的积分不少于 $3(n+1)+1$.由 $3n+m>3(n+1)+1$,得 $m\geqslant 5$.冠军队必至少胜一场,否则冠军队积分将少于各队的平均分.若冠军队仅胜一场,即 $n=1$,则冠军队积分为 $m+3$.其余各队积分最多为 $m+2$,除冠军队外,还有 $m+1$ 个队.所以参赛的所有队积分总和将小于或等于 $(m+3)+(m+2)(m+1)=m^2+4m+5$.

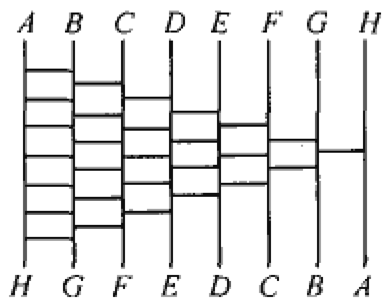

图 26-9

另一方面,各场比赛两队积分和至少有 2 分,且有胜场的为 3 分.共比赛了 $\frac{1}{2}(m+2)(m+1)$ 场,所以参赛的所有队积分总和将大于或等于 $\frac{1}{2}(m+2)(m+1)\times 2+2(m+1)+1=m^2+5m+5$.

所以 $m^2+5m+5\leqslant m^2+4m+5\Rightarrow m\leqslant 0$,与 $m\geqslant 5$ 矛盾.

所以冠军队至少胜两场,参赛队至少有 8 队.

下面找出一个恰有 8 个队且又满足题意的情况.设有 A,B,C,D,E,F,G,H 共 8 个队,A 队是积分最多但只胜两场的队(见下表).

	A	B	C	D	E	F	G	H	积分
A		1	1	1	1	1	3	3	11
B	1		3	3	3	0	0	0	10
C	1	0		3	3	3	0	0	10
D	1	0	0		3	3	3	0	10
E	1	0	0	0		3	3	3	10
F	1	3	0	0	0		3	3	10
G	0	3	3	0	0	0		3	9
H	0	3	3	3	0	0	0		9

[能力训练]

一、选择题

1. 用正五棱柱的 10 个顶点中的 5 个顶点作四棱锥的 5 个顶点,共可得到四棱锥(　　)

(A)184 个　　(B)170 个　　(C)162 个　　(D)156 个

2. 以 2、3、4、5 这四个数字组成没有重复数字的四位数,所有这些四位数之和的个位数字是(　　)

(A)8　　(B)6　　(C)4　　(D)2

3. 幼儿园里有 4 男、4 女共 8 个小朋友,围成圆圈作游戏,规定男女相间,共有不同

的围法(　　)

(A)576 种　　(B)288 种　　(C)144 种　　(D)70 种

4.能被 3 整除并且含有数字 9 的三位数有(　　)

(A)72 个　　(B)84 个　　(C)96 个　　(D)108 个

二、填空题

5.用 22 根火柴棒作为周长围成的三角形,可以围成________个不同的三角形.

6.平面上有六个圆两两相交,其中任何三个圆不共点,它们把平面分成了________部分.

7.数 3 可以用四种方法表示为 1 个或几个正整数的和,如 3,1+2,2+1,1+1+1,试问 2004 可用________种类似于上面的方法表示出来.

8.某次数学竞赛共有 15 个题,下表是对于做对 $n(n=0,1,2,\cdots,15)$ 个题的人数的统计:

n	0	1	2	3	……	12	13	14	15
做对 n 个题的人数	7	8	10	21	……	15	6	3	1

如果又知其中做对 4 个题和 4 个题以上的学生,每人平均做对 6 个题,做对 10 个题和 10 个题以上的学生,每人平均做对 4 个题,那么这个表至少统计了________人.

三、解答题

9.五对孪生兄妹参加 k 个组的活动,求满足下列规定的 k 的最小值:

(1)孪生兄妹不在同一组;

(2)非孪生关系的任意两个人都恰好共同参加过一个组的活动;

(3)有一个人只参加两个组的活动.

10.4 个人聚会,每人各带了 2 件礼品,分赠给其余 3 个人中的 2 人.试证明:至少有两对人,每对人是互赠过礼品的.

11.圆上有 12 个点,其中一个点涂了红色,还有一个点涂了蓝色,其余 10 个点不涂色.以这些点为顶点的凸多边形中,其顶点包含红点及蓝点的多边形称为“双色多边形”,只包含红点或蓝点的多边形称为“红多边形”或“蓝多边形”,其余称为“无色多边形”.试问:以这 12 个点为顶点的所有凸多边形中(边数可以从 3~12 边),双色多边形的个数与无色多边形的个数哪一种多?多多少?

12.有 1 000 个编有号码为 000,001,…,999 的小球和 100 个编有号码 00,01,…,99 的盒子.如果盒子的号码由小球的号码删去一个数字得到,那么这个小球被允许放入这只盒子.问是否可以选出 50 只盒子把所有的球都装完.