二十二、应用性问题

[竞赛要点]

列方程是解应用题的核心步骤.列方程的实质就是找出已知条件和未知数的关系,把这种关系用代数式表达出来并根据题目中的等量关系把代数式用等号联结起来.了解一些物理、化学方面的常识,如工作效率×工作时间=工作量,速度×时间=距离,溶质=溶液×质量分数,在解决追及问题、相遇问题等等时列方程是必须的.

相遇问题指的是两个运动物体从两地出发,相向而行,在途中的某处相遇.若两地间距离为 S,两个运动物体的速度分别是 v_1,v_2,从出发到相遇所经过的时间分别是 t_1,t_2,则有 $S=v_1t_1+v_2t_2$.

追及问题是指两运动物体同向而行,一个物体追及另一物体,若两物体的距离为 S,两物体的速度分别为 v_1、v_2($v_1>v_2$),从出发到追及用的时间是 t_1 和 t_2,则 $S=v_1t_1-v_2t_2$.

[方法述要]

1.在生产、生活、科学技术领域有许多问题离不开数学的应用.列方程解应用题,是为了解决实际问题的需要,也是把实际问题中的数量关系归结为数学问题,建立数学模型,解决相应问题的重要方法.

2.正确分析、理解题意,寻找出问题中所含的已知量与未知量之间的关系,挖掘出问题中隐含的条件,建立数量关系式是解应用题的关键;明确题目中的一些名词、术语的含义,如仰角、俯角、方向角、坡度、利润、利率、质量分数等,可以为解题提供正确思路.

3.列方程解应用题的一般步骤:①认真审题,分析已知量和未知量及它们的关系;②设未知数,并根据数量关系列出有关代数式;③找等量关系,列出方程(或方程组);④解方程;⑤检验并写出答案.

4.解应用题是初中几何、代数联系实际,综合运用知识、技能和培养能力的重要组成部分,要注意综合利用几何推理、代数计算等知识来灵活处理实际问题.

5.在列方程解应用题的过程中,审题是解决问题的基础;找出等量关系列方程是解决问题的关键;恰当设未知数是使问题简化的手段;画线段图、列分析表可使解题思路形象、清晰,所以要根据不同的具体情况,把握好解题的每一步.

6.解应用题中的检验，除了解方程的必要检验之外，还要检验是否符合问题的实际意义.

[赛题精析]

例1 一电器经营户，同时以2000元价格卖出一台空调、一台彩电，其中空调盈利25%，彩电则亏本20%.问这笔买卖店家能否盈利？

解 两件电器售价都是2000元，一个盈利、一个亏本，说明进价不同，需分别求出两件电器各自的进价，显然空调进价低于售价，彩电进价高于售价.

设空调进价 x 元，根据题意，得 $\frac{2000-x}{x}\times 100\%=25\%$，解得 $x=1600$(元)，利润 $=2000-1600=400$(元).

设彩电进价为 y 元，根据题意，得 $\frac{200-y}{y}\times 100\%=-20\%$，解得 $y=2500$(元)，利润 $=2000-2500=-500$(元).

这笔买卖的总利润：$400-500=-100$(元).所以店家不能盈利.

例2 某个体企业以5万元资金投入生产，在第一年中得到一定的利润，已知这5万元资金加上第一年的利润一起在第二年得到利润2612.5元，而且第二年的利率比第一年多0.5%，第一年的利率是多少？

解 区别利润与利率：利润是投资经营所赚的钱，利率是指利润与本金的比率.

本利和 = 本金 ×(1 + 利率)$^{\text{年数}}$，利润 = 本金 × 利率.

设第一年利率为 x，则5万元资金第一年的本利和 $=5(1+x)$ 万元，第二年再生产时，已知利率为 $x+0.5\%$，那么第二年所得利润为 $5(1+x)(x+0.5\%)$，所以依题意列方程得：$5(1+x)(x+0.5\%)=0.26125$.解得 $x_1=0.045$，$x_2=-1.05$(x_2 为负值，不合题意，舍去).所以，第一年利率为4.5%.

例3 五个人完成一项任务，如果第一、二、三人同时工作需要7.5小时，第一、三、五人同时工作需要5小时，第一、三、四人同时工作需要6小时，第二、四、五人同时工作需要4小时，问五人同时工作需用多少时间？

分析 五人同时工作需用的时间与五人的工作效率有关，故设五个人各自的工作效率为辅助参数.

解 设5人同时工作需用 t 小时，第一、二、三、四、五人的工作效率分别为 x，y，z，u，v.依题意有

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{1}{7.5} & ① \\ x+z+v=\dfrac{1}{5} & ① \\ x+z+u=\dfrac{1}{6} & ③ \\ y+u+v=\dfrac{1}{4} & ④ \\ t=\dfrac{1}{x+y+z+u+v} & ⑤ \end{cases}$$

①+②+③+④×2 得 $3(x+y+z+u+v)=1$,

即 $$x+y+z+u+v=\frac{1}{3}, \quad ⑥$$

将⑥式代入到⑤式中得:$t=\dfrac{1}{x+y+z+u+v}=3$(小时).

答:五个人同时工作需用 3 小时完成任务.

例 4 一队旅客乘坐汽车,要求每辆汽车的旅客人数相等.起初每辆汽车乘了 22 人,结果剩下 1 人未上车;如果有一辆汽车空着开走,那么所有旅客正好能平均分乘到其他各车上.已知每辆汽车最多只能容纳 32 人.求起初有多少辆汽车?有多少个旅客?

解 设起初有汽车 m 辆,开走一辆空车后,平均每辆车所乘旅客为 n 人,由于 $m\geqslant1$,$n\leqslant32$,依题意有 $22m+1=n(m-1)$.所以 $n=\dfrac{22m+1}{m-1}=22+\dfrac{23}{m-1}$.

因为 n 为正整数,所以$\dfrac{23}{m-1}$为正整数,因此 $m-1=1$ 或 23.所以 $m=2$ 或 24.

当 $m=2$ 时,$n=45$(不合题意,舍去);当 $m=24$ 时,$n=23$(符合题意).

所以旅客人数为 $n(m-1)=23\cdot(24-1)=529$(人).

答:起初有汽车 24 辆,有乘客 529 人.

例 5 某团体从甲地到乙地,甲、乙两地相距 100 千米.团体中的一部分人乘车先行,余下的人步行,先坐车的人到途中某处下车步行,汽车返回接先步行的那部分人,已知步行时速 8 千米,汽车时速 40 千米.问要使大家在下午 4 点钟同时到达乙地,必须在什么时候出发?

分析 这个问题实质上要求的是如果按题设的行走方式,至少需要多少个小时,注意到先坐车后步行的人和先步行后坐车的人所用的时间总量是相等的.利用这个等量关系可以列方程.

解 设先坐车的一部分人下车地点距甲地 x 千米,这一部分人下车地点距另一部分人的上车地点相距 y 千米.如图 22-1.

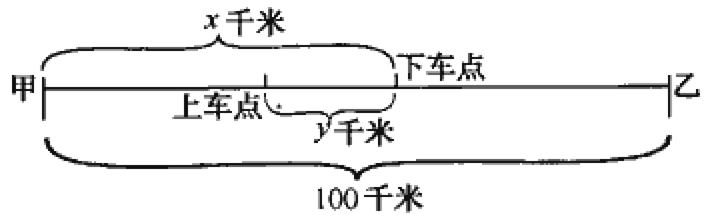

图 22-1

汽车走$(x+y)$千米的时间与先步行后乘车的那一部分人从甲地走到上车点所用的时间相等.列出方程：$\frac{x-y}{8}=\frac{x+y}{40}$. ①

先乘车后步行的一部分人从下车点到终点步行所用的时间等于汽车从下车点返回接另一部分人到终点所用的时间，得出方程$\frac{100-x}{8}=\frac{y}{40}+\frac{y+100-x}{40}$. ②

解方程组$\begin{cases}\frac{x-y}{8}=\frac{x+y}{40}\\ \frac{100-x}{8}=\frac{y}{40}+\frac{y+100-x}{40}\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=75,\\ y=50.\end{cases}$

从甲到乙地共用$\frac{x}{40}+\frac{100-x}{8}=5$小时.

答：要使大家下午4点钟同时到达目的地，必须在中午11点出发.

例 6 如图22-2，据气象卫星云图显示，有一股强热带风暴(台风)10小时后，将在距A城正东方向300千米的B城登陆，并继续以每小时30千米的速度向北偏西60°的BF方向移动，风暴中心200千米的范围内是受风暴影响的区域，(1)A城是否受到这次风暴的影响？为什么？

(2)若A城受到这次风暴影响，那么A城遭受这次风暴影响的时间约有几小时？

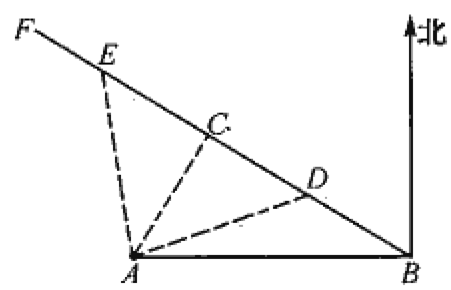

图 22-2

解 (1)A城是否会受到这次风暴影响，取决于A城与BF的距离是否小于200千米，而A到BF的距离是从A到BF的垂线段AC的长.因为$\angle ABC=30°$，所以$AC=\frac{1}{2}AB=150$(千米)<200(千米)，所以A城必受影响.

(2)要计算A城受影响的时间，就要计算BF上到A的距离小于200千米的线段的长.设BF上D,E两点到A的距离为200千米，则风暴中心在线段DE上时，对A城有影响，而在DE以外时，对A城没有影响.由$AC=150,AD=200$，得$DC=50\sqrt{7}$，$DE=100\sqrt{7}$.所以A城受风暴影响的时间为$\frac{100\sqrt{7}\text{千米}}{30\text{千米/小时}}\approx 9$小时.

例 7 团体购买公园门票，票价如下：

购票人数	1～50	51～100	100 以上
每人门票价	13 元	11 元	9 元

今有甲、乙两个旅游团，若分别购票，两团总计应付门票费 1314 元，若合在一起作为一个团体购票，总计支付门票费 1008 元，问这两个旅游团各有多少人？

解 因为 $1008>9\times101$，所以两团的总人数超过 100 人，由 $1008\div9=112$ 知，两团的总人数为 112 人.

设一团有 x 人，另一团有 y 人，由 $x+y=112$ 知 x、y 中至少有一个大于 50，又因 $112\times11=1232<1314$，可知 x，y 不会都大于 50，若有一团超过 100 人，另一团不足 12 人时，门票总钱数至多为 $900+13\times12=1056<1314$.

于是可以断定一定有一团人数不超过 50，另一团人数超过 50，但不超过 100，为确定起见，不妨设 $1\leqslant x\leqslant50$，$51\leqslant y\leqslant100$.

则
$$\begin{cases}x+y=112, & ①\\13x+11y=1314, & ②\end{cases}$$

①×11 得 $11x+11y=1232$， ③

②－③得 $2x=82$，

解得 $x=41$，代入①得 $y=71$.

答：一团人数为 41 人，另一团人数为 71 人.

说明 对于含有比例的应用题运用参数法，有助于分析问题中的数量关系和列方程.

例 8 有一个牧场，为了规划饲养量，划出两块相等面积的草地进行放牧试验. 设草每天都在匀速生长（草每天增长量相等），结果一块草地放牧 24 头牛，6 天吃完牧草，另一块放牧 21 头牛，则 8 天吃完牧草. 设每头牛吃草的量是相等的. 问：(1)要使牧草始终吃不完，这块草地上最多放牧几头牛？(2)如果放牧 14 头牛，这块草地能维持多少天放牧？

解 题中草的生长速度和牛吃草是一组反方向的相对运动，类似行船问题的基本公式：

逆水速度＝船在静水中的速度－水流速度.

我们把草的生长速度看作水流速度，牛吃草的速度看作船速，可得到：

草减少的速度＝牛吃草的速度－草生长的速度.

(1)设草的总量为 s，每天生长量为 v_1，每头牛每天吃草量为 v_2，则：

$$\begin{cases}s=6(24v_2-v_1),\\s=8(21v_2-v_1).\end{cases}\quad 解得\ v_1=12v_2,$$

即草的每天生长量等于 12 头牛每天的吃草量，所以要使这块草地的牧草始终吃不完，最多放牧 12 头牛.

(2)由(1)得草的总量 $s=6(24v_2-v_1)=6(24v_2-12v_2)=72v_2$,

即$\dfrac{72v_2}{14v_2-v_1}=\dfrac{72v_2}{14v_2-12v_2}=36$,如果放牧 14 头牛,这块草地能维持 36 天放牧.

例 9 如图 22-3,要剪切如图(1)(尺寸单位 mm)所示的甲、乙两种直角梯形零件,且使两种零件的数量相等.有两种面积相等的矩形铝板可供选用:第一种长 500mm,宽 300mm(如图(2)),第二种长 600mm,宽 250mm(如图(3)).

(1)填空:为了充分利用材料,应选用第________种铝板,这时一块铝板最多能剪甲、乙两种零件共________个,剪下这几个零件后,剩余的边角料的面积是 100mm^2.

(2)画图:从图(2)或图(3)中选出你要用的铝板示意图,在上面画出剪切线,并把边角料用阴影表示出来.

解 本题是一道几何拼图题,其操作性较强.

解答本题首先要对零件数量作出估计:甲种直角梯形的面积是 40000mm^2,乙种直角梯形的面积是 30000mm^2,两种直角梯形的面积和是 70000mm^2;而两种铝板的面积都是 150000mm^2,显然每一块铝板至多能剪下两对甲、乙两种零件.具体的操作剪切如图(4)所示,其边角余料如图阴影部分所示.

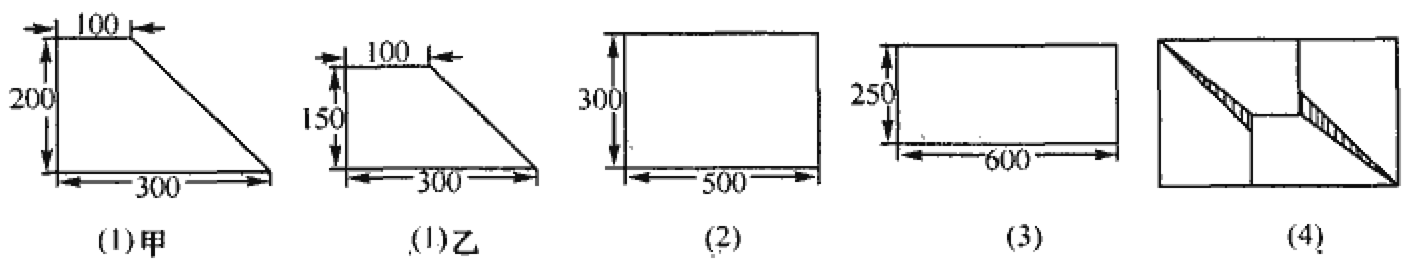

图 22-3

例 10 国家电力总公司为了改善农村用电电费过高的现状,目前正在全国各地农村进行电网改造.莲花村有四个村庄 A,B,C,D 正好位于一个正方形的四个顶点,现计划在四个村庄联合架设一条线路,他们设计了四种架设方案,如图 22-4 中的实线部分.请你帮助计算一下,哪种架设方案最省线.(以下数据可供参考:$\sqrt{2}=1.414,\sqrt{3}=1.732,\sqrt{5}=2.236$)

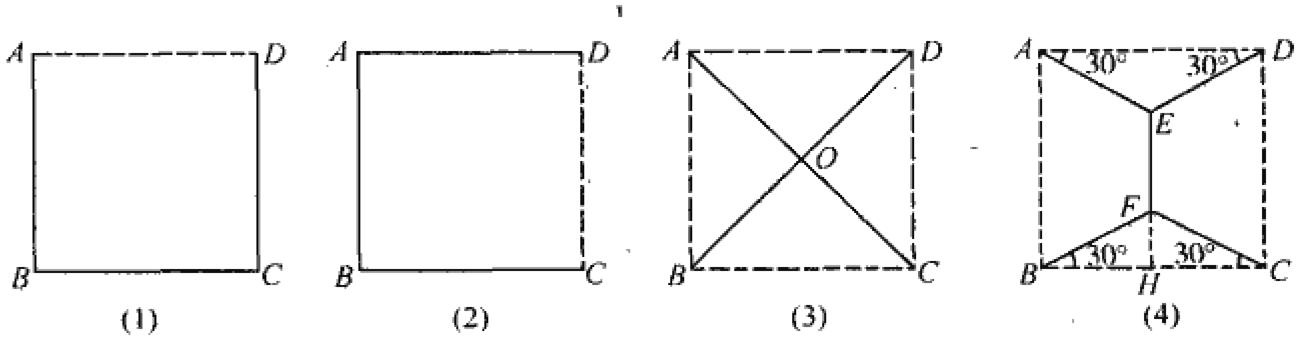

图 22-4

解 不妨设正方形的边长为 1(也可以设为 a),所以问题的实质实际上是比较线段和的大小.

(1)图(1),(2)中的总线段长分别为 $AB+BC+CD=3$,$DA+AB+BC=3$.

(2)图(3)中,总线路长为 $AC+BD=2\sqrt{2}=2.828$.

(3)图(4)中,延长 EF 交 BC 于点 H,则 $FH\perp BC$,$BH=HC$.

由$\angle FBH=30°$,$BH=\frac{1}{2}$及勾股定理得 $EA=ED=FB=FC=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$FH=\frac{\sqrt{3}}{6}$,$EF=1-2FH=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 此时,总线路长为 $4EA+EF=\frac{4}{3}\sqrt{3}+1-\frac{\sqrt{3}}{3}=2.732$.

显然 $3>2.828>2.732$. 所以图(4)的连结线路最短,即图(4)的架设方案最省钱.

说明 本例属于选择最佳设计方案问题,类似的问题还有:

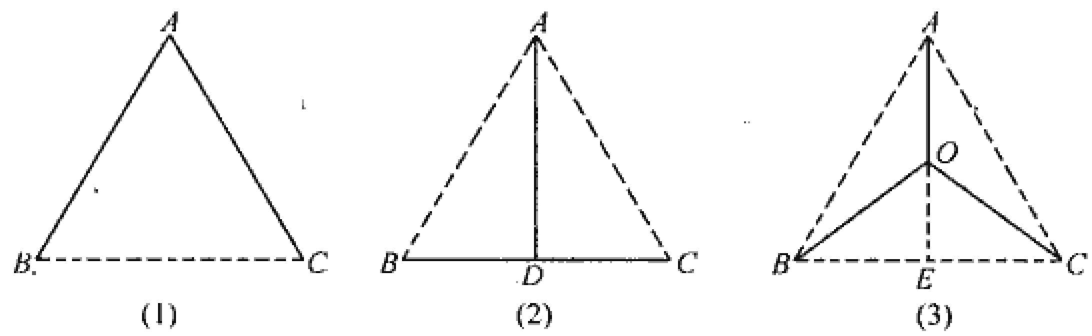

图 22-5

如图 22-5,由于水资源缺乏,B、C 两地不得不从黄河上的抽水站 A 处引水,这就需要在 A,B,C 之间铺设地下输水管道. 有人设计了三种铺设方案:如图 22-5(1)、(2)、(3),图中实线表示管道铺设线路. 在图(2)中,$AD\perp BC$ 于 D;在图(3)中,$OA=OB=OC$,为减少渗漏,节约水资源,并降低工程造价,铺设线路应尽量缩短. 已知$\triangle ABC$ 恰好是一个边长为 a 的等边三角形,请你通过计算,判断哪个铺设方案最好.

解 图(1)所示方案的线路总长为 $AB+AC=2a$;图(2),在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,$AD=AB\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,所以图(2)所示方案的线路总长为 $AD+BC=(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)a$;图(3),延长 AO 交 BC 于 E,因为 $AB=AC$,$OB=OC$,所以 $OE\perp BC$,$BE=EC=\frac{a}{2}$,在$\mathrm{Rt}\triangle OBE$ 中,$OB=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,所以图(3)所示方案的线路总长为 $OA+OB+OC=3OB=\sqrt{3}a$. 比较可知:$\sqrt{3}a<(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)a<2a$,所以图(3)所示的方案最好.

例 11 在某高尔夫球场的一斜坡处立有一旗标 AB(旗标与水平面垂直). 一高尔夫球从斜坡 O 点处抛出,如图 22-6,该球擦过旗杆顶 B 处落地时进入斜坡的另一洞穴 C 处. 已知点 A 与点 O 距离为$\frac{\sqrt{5}}{2}$米,旗杆 AB 高为 3 米,点 C 的垂直高度为 3.5 米,点

C 与点 O 的水平距离为 7 米;以 O 为坐标原点,水平方向与竖直方向分别为 x 轴,y 轴建立坐标系.(1)求高尔夫球经过的抛物线的解析式(高尔夫球的直径忽略不计);

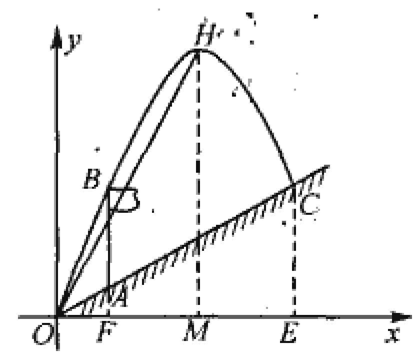

图 22-6

(2)图中标出了高尔夫球所达到的最高点 H,求 OH 与水平线 Ox 之间夹角的正切.

解 (1)这是一个与二次函数有关的实际应用题,是函数与几何的综合题,同时又需要有列方程解应用题的思想方法,找到相应的等量关系.根据已知的条件,依照图中的几何图形,可相应求得点 O,点 C 的坐标为 $O(0,0)$,$C(7,3.5)$,要求点 B 的坐标,只要求得旗标点 A 的坐标即可.为此,延长 BA 交 Ox 于点 F,作 $CE\perp x$ 轴,由于 $AF\parallel CE$,通过 $\triangle OAF\backsim\triangle OCE$ 得到$\frac{AF}{CE}=\frac{OF}{OE}=\frac{OA}{OC}=\frac{1}{7}$,$CE=\frac{7}{2}$,$OE=7$,$CO=\frac{7}{2}\sqrt{5}$,$OA=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$\therefore$ $AF=\frac{1}{7}CE=\frac{1}{2}$,$OF=\frac{1}{7}OE=1$ 且 $AB=3$, $\therefore$点 B 坐标为$(1,3.5)$.

综合点 O,点 B,点 C 的坐标,代入抛物线的解析式:$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$得到:$c=0$①,$a+b+c=\frac{7}{2}$②,$49a+7b+c=\frac{7}{2}$③,解得 $a=-\frac{1}{2}$,$b=4$,$c=0$,则所求的抛物线的解析式为:$y=-\frac{1}{2}x^2+4x$.由于 CO 的水平距离为 7 米,故自变量的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant7$.

对于第(2)小题,要求 OH 与水平线 Ox 之间夹角的正切,需求得点 H 的坐标,而点 H 为抛物线的顶点,将二次函数的解析式运用配方法可得:$y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8$,则点 H 为$(4,8)$,则 $\tan\angle HOx=\frac{8}{4}=2$,所以所求的正切值为 2.

例 12 甲、乙两人连续 6 年对某县农村甲鱼养殖业的规模(产量)进行调查,提供了两个方面的信息,如图 22-7(甲)、(乙)所示.

甲调查表明:每个甲鱼池平均产量从第 1 年 1 万只甲鱼上升到第 6 年 2 万只.

乙调查表明:甲鱼池个数由第 1 年的 30 个减少到第 6 年的 10 个.

请你根据提供的信息说明:

(1)第 2 年甲鱼池的个数及全县出产甲鱼总数.

(2)到第 6 年这个县的甲鱼养殖业的规模比第 1 年是扩大了还是缩小了?说明理由.

(3)哪一年的规模最大?说明理由.

解 本题是一个图表信息处理和较难的数学建模问题.

(1)直接由图表中读出:第 2 年甲鱼池的个数为 26 个,全县出产甲鱼的总数为 26

$\times 1.2=31.2$(万只).

(2)由于第1年出产甲鱼总数30万只,而第6年出产甲鱼总数为20万只,所以规模缩小.

(3)由于甲鱼养殖实际上是一个动态过程,所以必须找出每池产量与年份的动态关系以及池数与年份的动态关系.

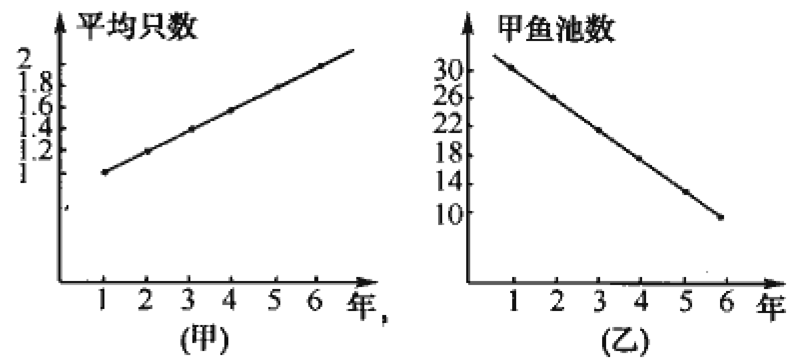

图 22-7

由图甲知直线 $y_{甲}=kx+b$ 经过点(1,1)和点(6,2),可求得 $k=0.2,b=0.8$.

所以 $y_{甲}=0.2(x+4)$.

同理可得图乙直线 $y_{乙}=4(-x+\frac{17}{2})$.

设第 x 年规模最大,即求

$y_{甲}\cdot y_{乙}=0.2(x+4)\cdot 4(-x+\frac{17}{2})=-0.8x^2+3.6x+27.2$ 的最大值.

令 $y_{甲}\cdot y_{乙}=y$,则 $y=-0.8(x-2\frac{1}{4})^2+37.25$

按理接下去的回答是非常简单的了,但要注意到 x 表示的是年份,所以要取整数.即 $x=2$ 时,$y_{max}=-0.8\times 4+3.6\times 2+27.2=31.2$(万只).

说明 1.要充分利用图像所给出的信息,能直接从图上读出的信息一定要及时读出.

2.看懂图表所表示的实际意义,这是学生的弱项,应重点练习.

3.处理数学模型请千万注意字母所代表的实际意义,若本例中回答 $x=2\frac{1}{4}$ 时,$y_{max}=37.25$,就不符合实际.

[能力训练]

1.今年父亲的年龄与兄妹两人年龄之和相等,且哥哥比妹妹大4岁,已知24年前父亲的年龄是兄妹年龄之和的5倍,那么今年父亲、兄、妹各多少岁?

2.某工程 A,B 两人合作4天可完成,A,C 两人合作5天可完成,又 B,C 两人合作12天可完成.若 A,B,C 三人一起做,则几天可完成?

3.牛顿问题:甲、乙、丙三块草地,长得一样密、一样快.甲地面积 $3\frac{1}{3}$ 公顷,可供12头牛吃4周;乙地10公顷,可供21头牛吃9周;丙地24公顷,丙地可供几头牛吃18周?

4.甲、乙两人承包一项工程,如果甲单独做,比两人合做要多用3天才能完成;如果

乙单独做，则比甲单独做还要多用 9 天才能完成，求两人合做需几天完成.

5. 某学校期中数学考试中，甲班的平均分是 70 分，乙班的平均分是 72 分，两班的总分是 5040 分，问甲、乙两班各有多少人？

6. 有若干间宿舍和若干名学生，若 4 人一间，则余下 20 名学生无宿舍安排，若每间住 8 人，则有一间不空也不满，问有多少间宿舍和多少名学生？

7. A，B 两地相距 20 千米，甲、乙两人分别从 A、B 两地同时相向而行，两小时后在途中相遇，然后甲返回 A 地，乙仍继续前进，当甲回到 A 地时，乙离 A 地还有 2 千米，求甲、乙的速度.

8. 一客轮逆水行驶，船上一乘客掉了一件物品浮在水面上. 等到乘客发现后，轮船立即掉头去追所掉的物品. 已知轮船从掉头到追上这件物品用了 5 分钟，问乘客是几分钟后发现所掉的物品？

9. 汽艇与小木筏同时离开码头 A 顺水出发，汽艇顺水航行 96 千米，到达 B 处立即掉头返回，到 A 处需 14 个小时，若已知汽艇在返回途中离码头 24 千米处与顺水漂来的木筏相遇，求汽艇在静水和顺水中的速度.

10. 某市参加初中数学竞赛的初三甲、乙班学生共 a 人，其中甲班平均每人得 70 分，乙班平均每人得 60 分，该校总分为 740 分，问甲、乙班参赛各多少人？

11. 有甲、乙两容量均为 20 升的容器，甲盛纯酒精，而乙容器是空的. 第一次自甲容器内倒出若干升于乙容器内，再将乙容器用水填满；第二次再将乙容器内的混合液填满甲容器，第三次再将甲容器回倒入乙容器 $6\frac{2}{3}$ 升，则这时两容器内所含纯酒精量恰好相等，问第一次从甲容器倒出酒精多少升？

12. 图 22-8 是某风景区的旅游路线示意图，其中 B，C，D 为风景点，E 为两条路的交叉点，图中数据为相应两点间的路程(单位：千米). 一学生从 A 处出发，以 2 千米/小时的速度步行游览，每个景点的逗留时间均为 0.5 小时.

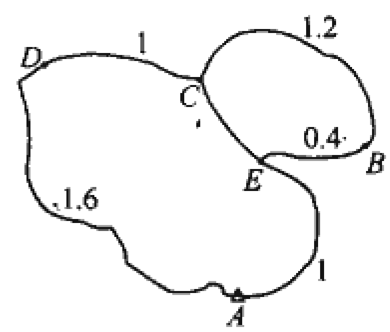

图 22-8

①当他沿着路线 $A—D—C—E—A$ 游览回到 A 处时，共用 3 小时，求 CE 的长.

②若此学生打算从 A 处出发，步行速度与在景点的逗留时间不变，且在 4 小时内看完三个景点返回 A 处，请你为他设计一条步行路线，并说明这样设计的理由.(不考虑其他因素)