二十八、逻辑推理

[竞赛要点]

有些问题，不是进行许多计算、分析数量关系或图形的变换来得出答案和结论的．问题的条件也不是算式、数字和图形，而是一些相互关联的事实．题目需根据条件进行有根有据的分析推理，作出正确的判断，得出问题的答案，这类问题就是逻辑推理问题．

[方法述要]

逻辑学的主要内容有形式逻辑和数理逻辑等．在本讲里，我们介绍如何应用形式逻辑的基本规律来解一些逻辑推理问题．

形式逻辑的基本理论是：

1．同一律：在同一时间、同一关系下，对同一事物保持同一的认识．同一律要求我们：①对同一对象，只能用同一概念来表达；②对不同的对象，应当用不同概念来表达．同一律强调思维稳定性．

2．矛盾律：在同一时间、同一关系下，对同一事物的两个互相矛盾的判断不能都真，必有一假．违反矛盾律的思维是自相矛盾的思维，这种矛盾叫做逻辑矛盾．矛盾律的作用是消除自相矛盾的思维．

3．排中律：在同一时间、同一关系下，对同一事物的两个相反的判断不能都假，必有一真，两者之间没有第三种中间性质的判断存在．排中律强调非此即彼，是归谬法的推理依据．排中律保持思维的清晰性，排除模棱两可的思维．

4．充足理由律：每个判断必须有充足的理由，它是客观世界因果关系在人们思维中的反映．违反充足理由律的思维是无所依据的思维．

解决逻辑推理问题的基本方法：

演绎法．即从题设的某些条件或结论的反面出发，经过分析推理，排除不可能的情形，从而得出正确结论的方法．

表格法．即将问题中的信息(条件)反映在一张表格上，让条件与条件、条件与结论之间的联系明朗化，促进有效推理，使得问题获解的方法．

画图法．即把问题中的元素表示为点，将元素间的关系表示为线，从而利用图形的直观性进行推理的方法．

[赛题精析]

例 1 小明、小强、小华三个人参加迎春杯赛,他们是来自金城、沙市、水乡的选手,并分别获得一、二、三等奖. 现在知道:

(1)小明不是金城的选手;

(2)小强不是沙市的选手;

(3)金城的选手不是一等奖;

(4)沙市的选手得二等奖;

(5)小强不是三等奖.

根据上述情况,小华是________的选手. 他得的是________等奖.

分析 首先弄清题意,选手所在城市与获奖情况,这两个方面有一定的联系. 搞清这一联系,即各个城市的选手分别得哪一等奖,其余的问题便容易了.

解 由于(3)、(4),金城的选手得三等奖. 从而水乡的选手得一等奖.

由于(2)、(5),小强是水乡的选手.

由于(1),小明是沙市的选手.

所以小华是金城的选手,他得的是三等奖.

例 2 某学校举办数学竞赛,A,B,C,D,E 五位同学得了前五名,发奖前,老师让他们猜一猜各人的名次排列情况

A 说:B 第三名,C 第五名.

B 说:E 第四名,D 第五名.

C 说:A 第一名,E 第四名.

D 说:C 第一名,B 第二名.

E 说:A 第三名,D 第四名.

老师说:每个名次都有猜对. 问这五位同学的名次是怎样排列的?

解 依题意列表如下:

名次 / 判断	一	二	三	四	五
A			B		C
B				E	D
C	A			E	
D	C	B			
E			A	D	

由表可见,被猜为第二名的只有 B 一人,则可以判断定 B 是第二名,而不是第三

名.并由此推知 A 是第三名.由 A 是第三名推知 C 是第一名.并由此推知 D 是第五名,则可知 E 是第四名.

因此,五位同学的名次排列为:C 是第一名,B 是第二名,A 是第三名,E 是第四名,D 是第五名.

例 3 听到一声响,原来我房间的窗玻璃被打破了,询问了院子里的四个孩子,得到的回答是;

A 说:"B 打破的".

B 说:"D 打破的".

C 说:"不是我打破的".

D 说:"B 说谎".

已知其中只有一个孩子说了真话,而且肇事者也只是其中一个人,是谁?

解 我们利用形式逻辑的矛盾律,用穷举法逐一排除,直到找出谁是肇事者.

用 A,B,C,D 表示四人分别说了真话,$\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D}$ 表示四人分别说了谎.

(1)如果 A 是肇事者,则由已知可得 $\bar{A},\bar{B},C,D$,矛盾;(2)如果 B 是肇事者,则得 $A,\bar{B},C,D$,矛盾;(3)如果 D 是肇事者,则得 $\bar{A},B,C,\bar{D}$,矛盾;(4)如果 C 是肇事者,则得 $\bar{A},\bar{B},\bar{C},D$,成立.所以,$D$ 说了真话,C 是肇事者.

例 4 某次体育比赛共有 $n(n\geqslant 3)$名选手参加,每两名选手都比赛一局.现知无平局出现,而且每个选手都未能击败所有对手.求证:其中必存在 3 名选手甲、乙和丙,使得甲胜乙、乙胜丙、丙胜甲.

证明 题中的条件"都比赛一局、无平局以及无全胜"是形式逻辑的同一律的反映.

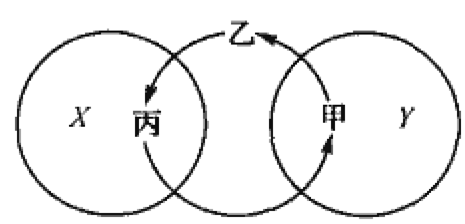


图 28-1

这次比赛一定有赢局最多的选手(可能不止一个),我们从这个极端情况着眼,把赢局最多的选手中的一位作为乙,其余的选手,因无平局出现,故可分为两个集合,设输给乙的选手所组成的集合为 X,胜乙的选手所组成的集合为 Y,图 28-1.因为乙不全胜,故集合 Y 不是空的,Y 中任选一选手作为甲,则甲胜乙.

如果甲胜集合 X 中的每一选手,则甲赢的局数比乙还多,这与乙赢局最多的假设矛盾,故集合 X 中至少有一选手丙,丙胜甲.这样我们就找到了 3 名选手,使得甲胜乙、乙胜丙、丙胜甲.

上面证明过程中使用了反证法,反证法的推理依据是形式逻辑中的排中律.

例 5 甲、乙、丙三人每次从写有整数 $m,n,k(0<m<n<k)$的三张卡片中摸出一张,并按卡片上的数字取相同数目的石子,放回卡片算做完一次游戏,然后再继续进行.当他们做了 $N(N\geqslant 2)$次游戏后,甲有 20 粒石子,乙有 10 粒石子,丙有 9 粒石子,并且知道最后一次乙摸的是 k,那么第一次游戏时,摸到 n 的是(　　).

(A)必是甲　　(B)必是乙　　(C)必是丙　　(D)或甲或乙

解　N 次游戏所取卡片数字总和为

$N\cdot(m+n+k)=20+10+9=39=3\times 13$,

又 $m+n+k>3$,故 $N=3,m+n+k=13$,

由甲得 20 粒石子,且 $0<m<n<k$,知 $k\geqslant 7$.

又知乙得 10 粒石子,则 $k\leqslant 8$,又由 $m+n+k=13$,知 $m<3$.

由以上条件分析知 $k=8,n=4,m=1$.

因此,甲、乙、丙三人三次得石子数为

	(1)	(2)	(3)
甲	8	8	4
乙	1	1	8
丙	4	4	1

故第一次摸到 n 的是丙.

例 6　一个国家的居民不是骑士就是无赖,骑士不说谎,无赖永远说谎.我们遇到该国居民 A、B、C.A 说:"如果 C 是骑士,那么 B 是无赖."C 说:"A 和我不同,一个是骑士,一个是无赖."这三个人中,谁是骑士,谁是无赖?

解　解此题的关键在于先从 C 说的那句话入手.如果 C 是骑士,那么 C 说的是真话,则 A、C 两个人中一定 A 是无赖;如果 C 是无赖,那么 C 说的是假话,也就是说 C 所说的"A 和我不同"不正确,由此可知 A 和 C 一样,也是无赖.

从这里我们就能看到,不管 C 是骑士还是无赖,总能得到 A 是无赖的结论.因此,A 说的"如果 C 是骑士,那么 B 是无赖"是谎话.现在 A 断定的是"C 是骑士"这一前提下的情况,如果 C 不是骑士的话,那么 A 所说的话并非不正确,与 A 永远说谎不符.由此可见 C 一定是骑士,同时 B 也一定是骑士,否则 A 说的话便正确了.所以最后的结论为,B、C 为骑士,A 为无赖.

例 7　一个骰子六个面的数字分别为 0、1、2、3、4、5.开始掷骰子后,当掷到的总点数超过 12 就停止不掷了.请问:这种掷骰子的游戏最可能出现的总点数是多少?

分析　这个问题不定因素很多.如:我们并不知道(也无需知道)每次掷出的数是多少,我们也不知道(也无需知道)投掷几次后,总的点数和将超过 12.但注意到骰子面上的数字分别是 0～5,欲使掷出的数字和超过 12,倒数第二次所达到的数字就必须有一个范围.弄清倒数第二次投掷后的点数和是解答本题的关键.

解　欲使最后一次投掷的点数和超过 12,倒数第二次投掷所达到的点数和最大数为 12,最小数为 8,共有 5 种情况.

如果倒数第二次总点数等于12，再投一次后可能达到的(超过12)总点数将分别为13、14、15、16、17，而且机会是均等的；

如果倒数第二次总点数等于11，再投一次超过12的总点数的可能值分别为13、14、15、16；

依次类推，…，如果倒数第二次总点数等于8，再投一次超过12的总点数只可能是13(此时，最后一次投掷出现的点数必须是5).

综上所述可知，超过12的最可能出现的总点数值是13(它在每一种情况下都可能出现).

例8 从1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13这13个数中最多可以选出多少个数，使它们中任意两个数之差既不等于5，也不等于8？

解 我们首先将这13个数按以下规则排成一个圈：相邻两个数差不是5就是8，按顺时针方向1的旁边放6，6的旁边放11(两数差为5)，在11的旁边放3(两数差为8)，…，如图28-2.

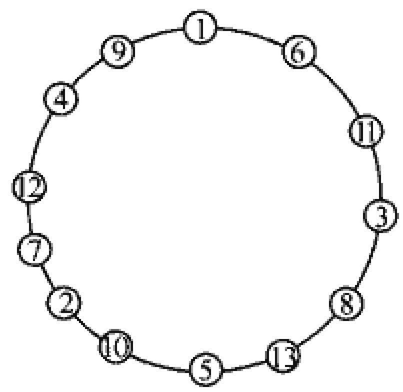


图28-2

从圈上的13个数中，每隔一个数选出一个，共可选出6个数，它们之间任意两个数之差既不等于5也不等于8.

另外，至多也只能选出6个数.

先任意选定一个数，不妨设它是1，在剩下的12个数中，与1相邻的两个数6、9不能再选(因为它们与1差5或8). 于是只剩下10个数，我们将这10个数按相邻关系，分成5组，每组中最多只能再选一个数. 所以，在这圆圈上最多只能选出 $1+5=6$ 个数，它们之间的差既不等于5也不等于8. 例如这6个数可以是1，11，8，5，2，12. 当然，这种选法不是惟一的.

例9 有一次四人游泳比赛，比赛之前四名选手 A，B，C，D 进行预测性会谈.

A 说：我肯定得第一.

B 说：我绝对不会得最末名.

C 说：我不能得第一，也不会是最末名.

D 说：那我是最后一名.

比赛揭晓，发现他们之中只有一位预测错误，而且无并列名次，请指出是哪一位选手预测错误.

解法一 根据已知条件，列出下表，表中"+"所在的列表示预测的名次.

根据形式逻辑的矛盾律，推理如下：

条件 名次 / 选手	1	2	3	4
A	+0			
B	+1	+0	+0	
C		+	+	
D				+

(1)若 B 预测错误,则 B 是第 4 名,又 D 第 4 名,这里与无并列名次矛盾,同理,C,D 预测错误也会引出矛盾.这样,推出 A 预测错误.预测错误的名次在它所在的方格中写上"0",正确的写上"1".

(2)因为一个名次 1 人,则 B 肯定第 1 名.

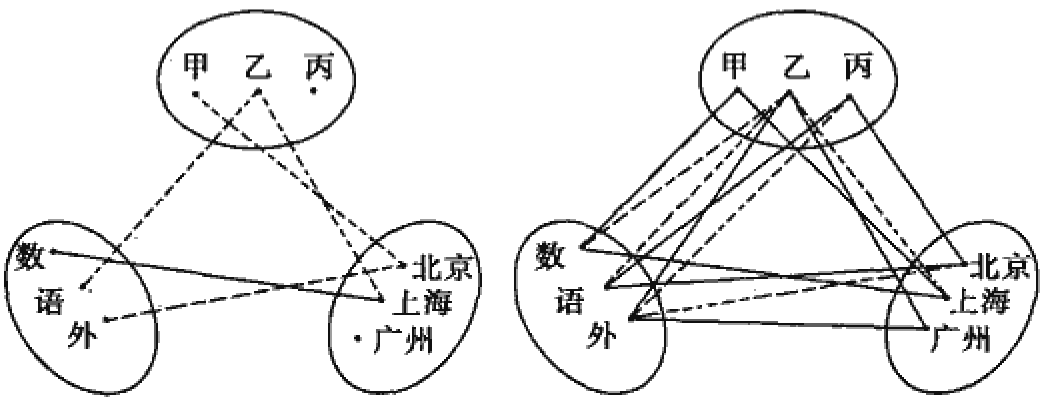
(3)前已推得 D 猜测正确.

(4)由(1)、(2)、(3)可知 A、C 占据 2、3 名.

因此,A 猜测错误,名次有两种情形:$B_1A_2C_3D_4$ 或 $B_1C_2A_3D_4$.

例 10 甲、乙、丙三人在北京、上海、广州的中学里教不同的课程:数学、语文、外语.已知:(1)甲不在北京工作,乙不在上海工作.(2)在北京工作的人不教外语.(3)在上海工作的人教数学.(4)乙不教语文.问这些人各在哪个城市教什么课程?

解 将问题中的事物分成三类:名字代号一类,教学课程一类和城市一类,类中元素用点来表示,如图 28-3(1).若它们描述不同人的特征,则不同类的两个点用虚线连结.若它们对应于一个人的特征,则不同类的两个点用实线连结.图 28-3(1)包含问题给定类的全部元素及其间的关系.



(1) (2)

图 28-3

现作虚线"数·乙",如图 28-3(2).因为"上海"对应于"数学"而"上海"不对应于"乙",即"数学"不可能对应于"乙".

用图对这问题进行运算:如果在以三个不同类为顶点的三角形中,一条边是实线,

第二条边是虚线，则第三条边应当是虚线. 显然，若某一点是用虚线连结第二类的两个点，则它应该用实线连结这个类的第三点，因此作实线"外·乙".

现作虚线"北京·乙"因为在三角形"乙·外·北京"中"乙·外"是实线，而"外·北京"是虚线.

作实线"广州·乙". 因为"乙·北京"，"乙·上海"是虚线.

现作实线"外·广州". 如果在以不同类的点为顶点的三角形中，两条边是实线，则第三条边也应该是实线. 因此，第一个实线三角形"乙·外·广州"作出来了.

同理，作实线"北京·丙"，"上海·甲"，"外·广州"，"语·北京"，"语·丙". 实线三角形"乙·外·广州"，"甲·数·上海"和"丙·语·北京"的各顶点给出题设问题的答案：乙在广州教外语，甲在上海教数学，丙在北京教语文.

例 11 有红、黄、蓝、白、紫五种颜色的珠子各一颗，用纸包好，在桌子上排成一排，五个人猜各包里珠子的颜色.

甲猜：第二包是紫色，第三包是黄色；

乙猜：第二包是蓝色，第四包是红色；

丙猜：第一包是红色，第五包是白色；

丁猜：第三包是蓝色，第四包是白色；

戊猜：第二包是黄色，第五包是紫色.

猜完后，打开纸包一看，每人都猜对了一种，并且每包都有一个人猜对.

请你也猜一猜，他们各自都猜中了哪一种颜色的珠子？

解 画出表⑤所示，第一行表示珠子的颜色，表中的数字表示各人所猜的包数，第一列表示五个人.

表⑤

	红	蓝	黄	白	紫
甲			3		2
乙	4	2			
丙	1			5	
丁		3		4	
戊			2		5

由于题目条件申明每人都猜对了一种，每包都有一个人猜对，因此，表中每一行的两个数有且仅有一个正确；表中所标志出的 10 个数中，1，2，3，4，5 各有且仅有一个是正确的，每一列中的两个数中，有且仅有一个是正确的.

注意到，包数 1 在表中只出现 1 次（丙猜第 1 包是红色），按条件，这个猜测应是正确的，以此为突破口，展开推理.

表⑥

	红	蓝	黄	白	紫
甲			3√		2×
乙	4×	2√			
丙	①√			5×	
丁		3×		4√	
戊			2×		5√

我们用"√"表示"正确",用"×"表示"不正确",用"→"表示推理的路线.在数字上画一个圈表示推理的出发点,表⑥即可清晰简明地表现出推理的过程.

通过表上推理知,甲猜中第 3 包是黄色,乙猜中第 2 包是蓝色,丙猜中第 1 包是红色,丁猜中第 4 包是白色,戊猜中第 5 包是紫色.

例 12 有一个如图那样的方块网,每个小方块里有 1 个人,在这些人中间,有人戴着帽子,有人没戴.每一个人都只能看见自己前方后方和斜方的人的头,如图 28-4 所示 A 方块里的人能看见 8 个人的头,B 方块里的人能看见 5 个人的头,C 方块里的人能看见 3 个人的头.自己看不见自己的头.在图 28-5 的方格中,写着不同方块里的人能看见的帽子的数量.请在图中找出戴帽子的人的方块,并把它涂成黑色.

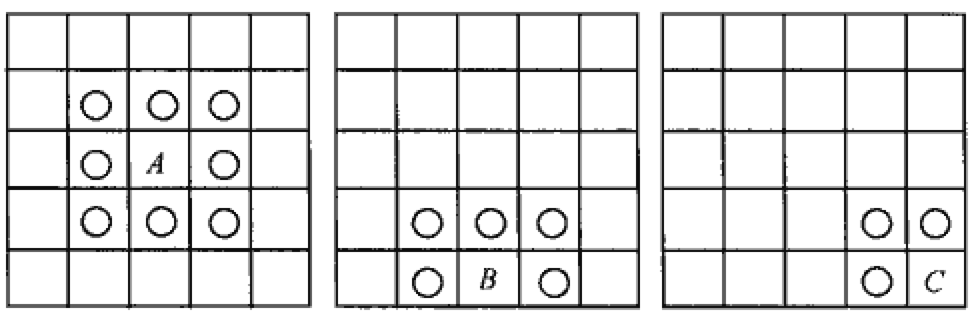


图 28-4

分析 本题解法很多.从图 28-5 中数最大的方格(即标 7 的方格)与数最小的方格(即标 1 的方格)入手,较为简单.

1	3	3	3	1
3	6	5	7	4
1	5	3	4	1
3	7	5	7	4
2	4	3	3	1

图 28-5

解 右上角的方格标 1,说明它周围的 3 个方格中,只有一个人戴帽子.

右上角附近有一个标 7 的方格,说明它周围的 8 个方格中,只有一个未戴帽子.

综合上述两段即知右上角附近标 3 与 4 的两个方格中,恰有 1 个人戴帽子.标 7 的方格中的人不戴帽子,并且这个方格周围的方格中,所有人都戴帽子,只有标 3 与 4 的方格中,恰有 1 个人未戴帽子.标 4 的方格,周围有 4 个人戴帽子,而标 7 的方格中的人不戴帽子,所以标 3 的方格中的人戴帽子.从而标 4 的方格中的人不戴帽子,图 28-6.

右下角的情况与右上角相同.从而在图 28-6 中,第 3 列全为黑色,第 4 列与第 5 列

各有 3 个黑色的方格.

现在考察左下角附近标 7 的方格与第三行第一列标 1 的方格. 同样的道理,标 7 的方格不涂黑,它的周围的方格都涂黑色,但标 3 与 5 的两个方格恰有一个涂黑.

由于左下角的方格标 2,而标 7 的方格不涂黑,所以左下角附近的标 3、标 4 的方格均涂黑,从而第三行第二列标 5 的方格不涂黑.

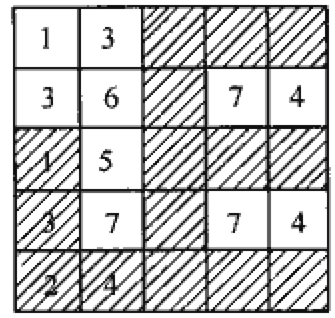


图 28-6

最后,由于第三行第一列的方格标 1,它下面标 3 的方格已涂黑,所以第二行标 3、6 的两个方格均不涂黑.

第二行第二个方格标 6,它下方标 5 的方格、左方标 3 的方格均不涂黑,所以其他与它相邻的方格均涂黑,即第一行标 1、3 的两个方格涂黑.

本题的答案如图 28-7.

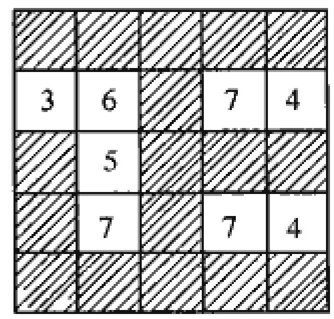


图 28-7

[能力训练]

1. 甲、乙、丙三人中有两种人,一种人只说真话,一种人只说谎话. 甲说:"乙、丙都说谎话."乙坚决否认,但丙说:"乙确实说谎话."问:甲、乙、丙中有几个人说真话?

2. 某刑事案件的六个嫌疑分子 A,B,C,D,E,F 交待了以下材料:

A 说:"B 与 F 作案."B 说:"D 与 A 作案."

C 说:"B 与 E 作案."D 说:"A 与 C 作案."

E 说:"F 与 A 作案."F 没说话.

司法人员根据充分证据确信此案是两人合作的,且有四人各说对一个罪犯的名字,一个说的全不对,那么罪犯是__________.

3. 某次考试满分是 100 分,A,B,C,D,E 五人参加了这次考试.

A 说:"我得了 94 分."

B 说:"我在五人中得分最高."

C 说:"我的得分是 A 和 D 的平均分."

D 说:"我的得分恰好是五人的平均分."

E 说:"我比 C 多得 2 分,并且五人中居第二."

如果他们讲的都是真话,并且各人得分都是整数,那么,A,B,C,D,E 五个人的得分各是多少?

4. 老师想了解学生的爱好,上课以后,老师请喜欢音乐和喜欢下象棋的学生举起手来,音乐爱好者举左手,象棋爱好者举右手,结果,在举左手的人中,有 30% 的人举起了

两只手；在象棋爱好者和绘画爱好者进行类似试验中，结果，在举手的人中，有35%的学生举两只手；在音乐爱好者和绘画爱好者进行的第三次试验中，结果，在举手的人中，有40%的人举起了两只手.离开教室后，老师才想起来，忘记问哪些人这三方面都爱好.虽然如此，这位教师仍然肯定地说，他所问的学生里，显然有这三方面都爱好的学生.

请问，这位老师如此有把握地作出判断，有充分根据吗？

5.甲、乙、丙三人手中各有若干粒糖，第一次甲给乙和丙的颗数各等于乙、丙手中原有的颗数，第二次乙给甲和丙的颗数各等于甲、丙两人手中现有的颗数，第三次丙给甲，乙两人手中的颗数各等于甲、乙两人手中现有的颗数，这时，甲、乙、丙三人手中恰好每人有8颗糖.问甲、乙、丙三人原有多少颗糖？

6.有A,B,C三个足球队，两两比赛一场，一共比赛了三场，每个队的比赛情况如下：

	胜	负	平	入球	失球
A	2			6	2
B	1	1		4	4
C		2		2	6

根据上表结果，写出三场球赛的具体比分.

7.A,B,C三人进行小口径步枪射击比赛，每个人射击6次，并且都得了71分，三人得分的情况从小到大排列为：

$$1,1,1,2,2,3,3,5,5,10,10,10,20,20,20,25,25,50.$$

已知A首先射击两次共得22分，C第一射击只得3分.请根据条件判断，是谁射中了靶心？

8.有n个人参加一个会议，其中每两个相互认识的人都没有共同的熟人，证明这时每个人的熟人个数都相同.

9.在一次大学排球冠亚军争夺赛中，有四队参加决赛，他们是：生物系，历史系，数学系和中文系.有三位学生在谈论这次决赛的最后结果：

“听说，中文系稳得亚军，数学系只能得第三名.”第一位同学似乎很有把握地说.

“是这样？不见得吧！”另一位同学反驳说，“得冠军的是中文系，亚军应该是生物系.”

“你们都搞错了”第三位同学更正说：“亚军是历史系，而数学系只能得第四名.”

最后结果表明每一个学生所说其中一个是正确的，而一个是错误的.

试问这次决赛中名次的前后是怎样的？

10.车间要来一名新工程师，A,B,C,D,E五名青工分别听到这位工程师的情况

是：

A：北京来的男王工程师，毕业于交大；

B：北京来的女丁工程师，毕业于清华；

C：杭州来的男马工程师，毕业于浙大；

D：北京来的女李工程师，毕业于清华；

E：上海来的男王工程师，毕业于浙大.

工程师来到之后，这五名青工才发现每人所听到的四种情况只有一种是正确的.你能说出这位工程师的真实情况吗？

11.有一正方体，将它各个面上分别标上字母 a,b,c,d,e,f.甲、乙、丙三个同学从三个不同的角度去观察此正方体，观察结果如图28-8所示.问这个正方体各个面上的字母的对面各是什么字母？

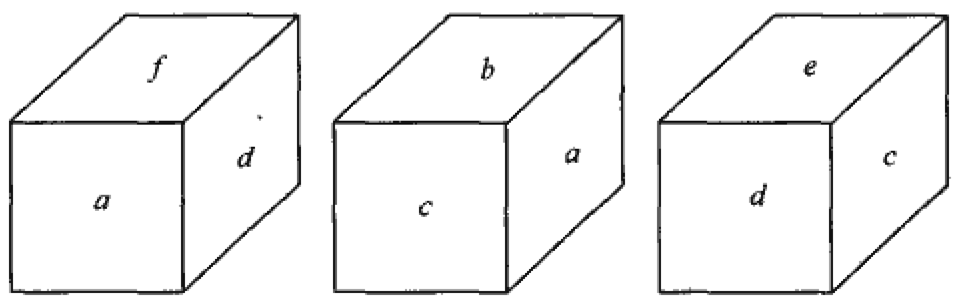


图 28-8

12.调查某班同学的文具盒，得到如下结果：

(Ⅰ)有钢笔的同学，没有圆珠笔；

(Ⅱ)有圆珠笔的同学，也有毛笔；

(Ⅲ)有铅笔的同学，没有毛笔；

(Ⅳ)没有铅笔的同学，有圆珠笔.

根据上述调查结果，小明得出下述五点结论：

□(1)有毛笔的同学也有钢笔.

□(2)没有毛笔的同学有钢笔.

□(3)有圆珠笔的同学人数与有毛笔的同学人数相同.

□(4)没有任何同学同时有圆珠笔和铅笔.

□(5)有钢笔的同学也有铅笔.

小明的结论是否正确？请你在每个结论前的方框内，你认为正确的打“√”；不一定正确的打“×”.