二十七、染色问题

[竞赛要点]

我们把要求作出或者证明存在满足某种染色性质的点列、格点、直线、四边形区域和图形等问题叫做染色问题.把用染色作为一种数学工具去分析问题、解决问题的思维方法叫做染色方法.

[方法述要]

染色问题是一类与抽屉原理和图论知识联系在一起的数学问题.根据染色的对象(点、线段或区域)不同,我们把它分为点染色、线段染色和区域染色三类.不论是哪类染色问题,它们大都围绕同色点或同色三角形展开分析讨论.

染色方法处理数学问题的思维模式为:通过对点、线或区域进行合理的染色,建立原问题的染色模型,然后对染色模型进行研究,获得原问题的解.

[赛题精析]

例 1 证明:在任何 6 个人中,总有 3 个人相互认识或者互不认识.

证法 1 用点 $v_1,v_2,\cdots,v_6$ 表示 6 个人.如果 2 个人相识,则相应的两点之间连一条红边,否则就连一条蓝边.由此得到双色完全图 K_6,要证明的结论转化为:双色完全图 K_6 中必有 1 个同色三角形,这是显然的,事实上,从 v_1 引出的 5 条边只添有 2 种颜色,其中总有 3 条边是同色的,不妨设 v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4 都是红边,现在考虑三角形 $v_2v_3v_4$,若其中至少有 1 条红边,例如 v_2v_3,则 $v_1v_2v_3$ 就是红色的三角形,否则 $v_2v_3v_4$ 就是蓝色的三角形.总之,K_6 中必有同色的三角形.

证法 2 设 A 是 6 个人中的 1 个,假定 A 和 3 个人互相认识.如果这 3 个人中有 B、C 相互认识,那么 A,B,C 这 3 个人便满足条件,如果和 A 认识的 3 个人彼此都不认识,那么这 3 个人也满足条件.

现在假设 A 认识的人数少于 3 人,那么有 3 个人不认识 A,如果他们之中有 B、C 彼此不认识,那么 A,B,C 满足条件.如果和 A 不相识的 3 个人中,任意 2 个人彼此相识,那么这 3 人也满足条件.

例 2 某班有 49 名学生,坐成七行七列,每个座位的前后左右均称为它的邻座,要使全班每个同学都离开自己的位子坐到邻座上去,问这种方案能否实现?

解 把七行七列的座位转化成 7×7 的方格表，每个格子代表一个座位，然后对此 7×7 方格表的第一格染上白色和蓝色之一，满足相邻两格不同色，如图 27-1，则所谓每个人离开自己的座位坐到邻座上去，即要从白格进入蓝格或从蓝格进入白格，而实际上图中的白格为 25 格，蓝格为 24 格，所以白格的人不可能都进入蓝格，也就是原方案是不可能实现的.

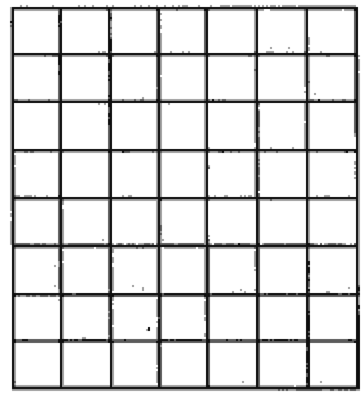

图 27-1

例 3 某班有 22 名同学，男女各占一半，他们围成一圈开营火晚会，证明一定能找到一位两旁都是女生的同学.

解 将 22 个座位用黑白两种颜色相间染色，使每一个座位与相邻两个座位的染色不相同，如图 27-2.

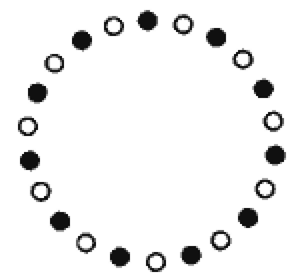

图 27-2

假设没有一位学生的两旁都是女生，那么 11 个染有黑色的座位中至多坐 5 名女生，否则一定有两个相邻的染黑色的座位上是女生，与没有一位学生的两旁都是女生矛盾. 同理，11 个染有白色的座位中至多坐 5 名女生. 因此，22 个座位中至多只能坐 10 名女生，与题目已知的有 11 名女生相矛盾. 所以，一定能找到一位两旁都是女生的学生.

许多棋盘上的覆盖问题都是与染色联系在一起的. 棋盘覆盖的问题可以用二色法来巧妙地证明. 请看下面的例子.

例 4 将正十三边形的每个顶点染成黑色或染成白色，每顶点只染成一色. 证明：存在三个同色顶点，它们刚好成为一个等腰三角形的顶点.

证明 设其 13 个顶点依次为 $A_1,A_2,\cdots,A_{12},A_{13}$. 若 13 个顶点都染成黑色或都染成白色，则结论显然成立. 则只需考虑 13 个顶点中有染黑色也有染白色的情形. 这时必有相邻两顶点同色，不妨设 A_1,A_2 同色，现考虑 A_{13},A_1,A_2,A_3,A_8 这 5 个顶点，由抽屉原理知其中必有三顶点同色，这又分为下列三种情形：

(1) A_{13},A_1,A_2,A_3 中有三点同色，又 A_1、A_2 同色，则 A_{13},A_1,A_2,A_3 同色. 这时 $\triangle A_1A_2A_3$ 为三顶点同色的等腰三角形.

(2) A_{13},A_3,A_8 同色，这时 $\triangle A_{13}A_3A_8$ 为三顶点同色的等腰三角形.

(3) A_1,A_2,A_8 同色，这时 $\triangle A_1A_2A_8$ 为三顶点同色的等腰三角形.

说明 由本例可见，抽屉原理、分类思想往往伴随染色问题和染色方法.

例 5 一个 3×7 的方格棋盘，每个方格染成黑色或白色. 求证：对任何一种染色方式，在棋盘中必定包含一个四角上的方格同色的矩形，如图 27-3 中虚线方框所示.

证明 为方便起见，我们称方格棋盘中横向排列的方格为行，竖向排列的方格为列，如图 27-4. 图 27-4 中第 2 行第 3 列这个方格记为(2,3). 我们注意到棋盘中是否包含一个四角上的方格同色的矩形，其结论与行(列)与行(列)的交换无关.

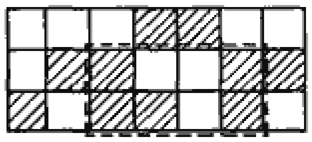

图 27-3

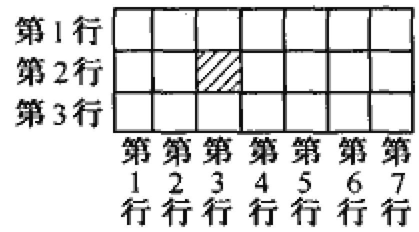

图 27-4

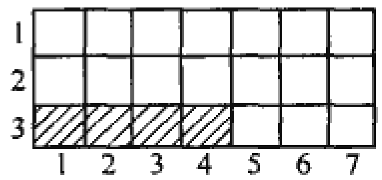

图 27-5

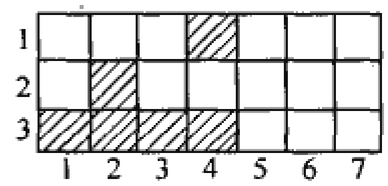

图 27-6

由抽屉原理,第 3 行中的 7 个方格至少有 4 个同色,不妨设为黑色(带阴影)并取(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),如图 27-5. 现在考虑第 1,2 行中第 1,2,3,4 列这 8 个方格,如果第 1 行或第 2 行中至少有 2 个黑色方格,则棋盘中存在一个四角上的方格同色(黑色)的矩形,问题已经得证;结果第 1 行或第 2 行每行最多出现 1 个黑色方格,如图 27-6,则在第 1,2 行中必存在一个四角上的方格均为白色的矩形,如图 27-6,则在第 1,2 行中必存在一个四角上的方格均为白色的矩形,如图 27-6 中以(1,1),(2,1),(1,3),(2,3)为四角的矩形. 问题也得证.

例 6 证明:用 15 块大小是 4×1 的矩形瓷砖和一块大小是 2×2 的正方形瓷砖,不能恰好覆盖 8×8 的正方形地面.

证法一 如图 27-7,用间隔为两格且与副对角线平行的小格同色的染色方式,以黑白两种颜色将整个地面染色. 显然,地面上黑、白格各有 32 个.

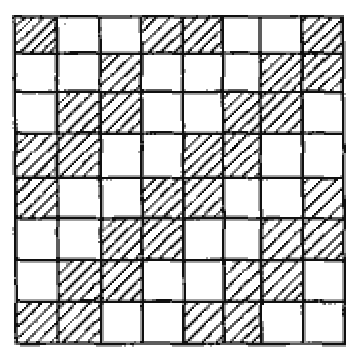

图 27-7

第一块 4×1 的瓷砖不论是横盖还是竖盖,也不论盖在何处,总是盖住二黑二白,又因为与副对角线平行的斜线上的格子总是同色,而与主对角线平行的斜线上的相邻两格总是异色,则不论怎么放置,一块 2×2 的瓷砖总是盖住三黑一白或三白一黑,于是 15 块 4×1 的瓷砖铺盖后还剩下两白格和两黑格,它不可能用一块 2×2 的瓷砖盖住. 因此命题得证.

证法二 用1、2、3、4 种颜色如图 27-8 那样染色,使与主对角线平行的斜线上的格子总是保持同色. 于是不论如何放置 4×1 的瓷砖,总是盖住四种颜色的格子各一格,而一块 2×2 的瓷砖盖住的四格中与主对角线平行的斜线上的两格总是同色. 即一块 2×2 的瓷砖不论如何放置也不能同时盖住四种不同颜色的格子,而 15 块 4×1 的瓷砖铺盖后,剩下

1,2,3,4 种颜色的格子各一个,它不可能用一块 2×2 的瓷砖盖住,因此命题得证.

1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1

图 27-8

例 7 把正三角形划分为 n^2 个同样的小正三角形,把这些小正三角形的一部分标上号码 $1,2,\cdots,m$,使得号码相邻的三角形有相邻边.求证:$m^2\leqslant n^2-n+1$.

证明 将 n^2 个小正三角形如图 27-9 那样染色.这时黑三角形共有

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$个,而白三角形共有

$1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$个.

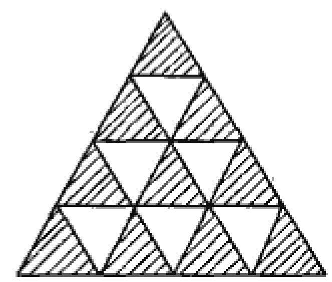

图 27-9

显然两个有相邻号码的三角形染有不同颜色,因而标号码的黑三角形仅能比白三角形多 1,因此编号的三角形数不超过 $2\times\dfrac{n(n-1)}{2}+1=n^2-n+1$ 个.

例 8 圆周上有 12 个点,其中有 1 个点涂了红色,还有 1 个点涂了蓝色;其余 10 个点没有涂色,以这些点为顶点的凸多边形中,其顶点包含了红点及蓝点的多边形称为双色多边形;只包含红点(蓝点)的称为红色(蓝色)多边形,不包含红点及蓝点的称为无色多边形.问是双色多边形的个数多,还是无色多边形的个数多?两者相差多少个?

解 从任一个双色 $n(n\geqslant5)$边形来考虑,显然在双色 $n(n\geqslant5)$边形中去掉红顶点及蓝顶点后,得到一个无色 $n-2$ 边形,并且不同的双色 n 边形去掉红、蓝顶点后得到的是不同的无色 $n-2$ 边形;反过来,对任一个无色多边形,添上红、蓝顶点后,总可以得到 1 个双色多边形,由此可见,无色多边形(从 3 边到 10 边)的个数与双色多边形(从 5 边形到 12 边形)的个数相等.

因此,双色多边形的个数多.

多出来的数目恰是双色三角形和双色四边形的数目,容易算出双色三角形有 10 个;双色四边形有$\dfrac{1}{2}\times10\times9=45$ 个.即双色多边形个数比无色的多 55 个.

例 9 能否把 $1,1,2,2,3,3,\cdots,1997,1997,1998,1998$ 这 3996 个数,按照某种顺

序排成一行，使得两个 1 之间夹着一个数，两个 2 之间夹着两个数，两个 3 之间夹着三个数，…，两个 1998 之间夹着 1998 个数？请证明你的结论.

分析 考虑本题的条件，其中有以下信息：(1)每个数是成对出现的；(2)1,2,3,…，1998 共有 1998 个不同的数，1998 是偶数；(3)两个奇数之间夹着奇数个数；两个偶数之间夹着偶数个数.据此我们可以试着从“奇偶性分析”及“染色”入手解题.

证明 设 3996 个数的一个排列为：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{3995},a_{3996}$，我们将这些数所占的位置按奇数位染黑色，偶数位染白色，于是有黑色位置的数和白色位置的数各 1998 个，图 27-10.

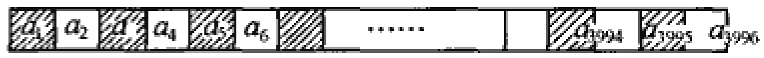

图 27-10

由已知，某两个相同偶数之间夹着偶数个数，所以这两个相同偶数必占据一个黑色位置和一个白色位置，从而 1998 个偶数所占据的黑色位置 $A_1=999$(个)，所占据的白色位置 $B_1=999$(个)；又某两个奇数之间夹着奇数个数，所以这两个奇数要么都都占据黑色位置，要么占据白色位置，于是 1998 个奇数所占据的黑色位置 $A_2=2a$(个)，所占据的白色位置 $B_2=2b$(个)，其中 $a+b=999$.

综上所述，这 3996 个数共占据黑色位置

$A=A_1+A_2=999+2a$(个)；

共占据白色位置

$B=B_1+B_2=999+2b$(个).

由于 $a+b=999$ 为奇数，所以 a,b 奇偶不同，必有 $a\neq b$，从而得 $A\neq B$，这与黑色位置与白色位置各为 1998 个相矛盾，所以本题所要求的这种排法是不存在的.

例 10 有17 位科学家，其中每个人和其他所有人通信，他们通信中只讨论 3 个题目，且每 2 个科学家之间只讨论 1 个题目.求证：至少有 3 个科学家相互之间讨论同一个题目.

证明 将科学家对应于点，两科学家之间讨论的题目对应两点连线的颜色，原题转化为：17 个点两两相连，相连的边分别用红、蓝、白之一染色，每边一色.证明必存在同色三角形.

A_1 点引出的 16 条边，根据抽屉原理，其中至少有 6 条同色，不妨设 6 条边同为红色，另外 6 个端点分别为 $A_2,A_3,\cdots,A_7$.再考虑这 6 个点两两连线的颜色，如果其中有一条为红色，则存在红色三角形；如果其中任一边都不是红色的，那么只能是蓝、白两色，于是由 A_2 引出的 5 条边 $A_2A_3,A_2A_4,\cdots,A_2A_7$ 至少有 3 条同色.不妨设 A_2A_3，A_2A_4，A_2A_5 同为蓝色，考虑$\triangle A_3A_4A_5$ 的三边，若有一边为蓝色，则存在蓝色三角形；若任一边都是白色，则$\triangle A_3A_4A_5$ 为白色三角形，命题成立.

例 11 设计一种方案，将平面上所有整点染色，每一点染成白色、红色或黑色中的一种颜色，并满足下列两个条件：①每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线上；②对于任意白点 A，红点 B 及黑点 C，总可以找到一个红点 D，使得四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形.

分析 为使所要求的平行四边形"相对稳定"，不妨将它的一条对角线 AC 相对固定，即使黑点 C 和白点 A 限制在一条直线上，而将线外的整点全部染成红色，这样条件②满足. 为使条件①满足，只需将任一条过两个整数点(实际上就一定通过无数多个整数点)且不与 x 轴平行的直线上的整数点交替染成黑白即可.

解 给出具体的做法：将 y 轴上的整点 $(0,2n)$ 染成白色，$(0,2n+1)$ 染成黑色(n 为整数)，平面上其余所有的整点全染成红色，这种染色方法显然满足条件①. 下面证明它也满足条件②.

根据取法，设 $A(0,y_1)$ 中 y_1 为偶数，则点 A 染白色；$(0,y_3)$ 中 y_3 为奇数，则 C 点染黑色；$B(x_2,y_2)$ 中，$x_2\neq 0$，x_2，y_2 为整数，则点 B 染红色. 因为点 B 不在由 A，C 两点所决定的直线 y 轴上，所以 A，B，C 三点不共线. 取点 $D(-x_2,y_1+y_3-y_2)$. 因为 $-x_2\neq 0$，又 $y_1+y_3-y_2$ 为整数，所以点 D 也染红色. 此外，因为 AC 和 BD 的中点都是点 $\left(0,\dfrac{y_1+y_3}{2}\right)$，因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

例 12 用任意方式将平面上每一个点染成黑色或白色. 求证：平面上必存在一个边长为 1 或 $\sqrt{3}$ 的正三角形，它的三个顶点都是同色的.

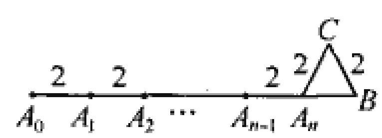

图 27-11

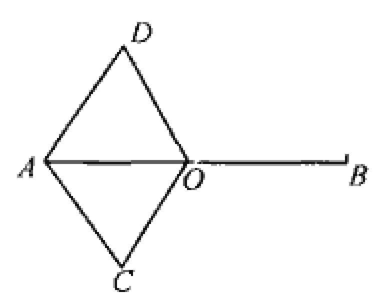

图 27-12

证明 如果平面内每一个点都同色，那么命题显然成立. 如果平面内的点不都同色，可以证明平面内必有距离为 2 的异色两点. 证明如下：设 A，B 为平面的异色两点，若 $AB\leqslant 2$，则必能在平面内找到一点 C，使 $AC=BC=2$，C 与 A，或与 B 异色，也就是平面内必有距离等于 2 的异色两点；如果 $AB>2$，那么在 AB 上依次截取 $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_{n-1}A_n=2$，使 $A_nB\leqslant 2$，图 27-11. 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中有一个点与 A 异色，那么已证明了平面内存在距离为 2 的异色两点. 如果 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 都与 A 同色，那么 A_n 与 B 异色，我们可以另取一点 C，使 $CA_n=CB=2$，图 27-11，那么 C 必与 A_n，B 之一异色. 所以，当平面内的点不都同色时，必存在距离等于 2 的异色两点，不妨设为 A，B，点 O 为 AB 的中点，如图 27-12，则 O 与 A，B 之一同色，设 O 与 A 同色，以 AO 为一边，在 AB 的两侧各作一等边三角形 AOD，AOC，如图 27-12. 如果 C，D 中有一点与 A 同色，设为 C，则 $\triangle CAO$ 为边长为 1 的顶点同色三角形；如果 C，D 皆与 A 异色，则 C，D 与 B 同色，这时 $\triangle CDB$ 为边长为 $\sqrt{3}$ 的顶点同色三角形. 所以所求证的命题

成立.

[能力训练]

1. 在一个 3×5 的棋盘上去掉位于第 2 行第 1 列的方格，则残缺棋盘上不存在日形覆盖.

2. 在 4 行 18 列的方格纸中，每个小方格染成红色、蓝色或黄色. 试构造一种染色方式，使方格纸中找不到一个四角同色矩形.

3. 一个凸 n 边形如果能被它的不相交的对角线划分成三角形，并且使得多边形的每个顶点恰好是奇数个这些三角形的顶点. 试证：n 是 3 的倍数.

4. 有 15 位数学家在一次国际会议上相遇，其中任意 3 人中都至少有 2 人可讲同一种语言. 如果已知每个人最多能讲三种语言，则至少有 4 人能讲同一种语言.

5. 已知 6 点，每 3 点不共线. 证明：以这些点为顶点的三角形中一定有一个三角形的最大边是另一个三角形的最小边.

6. 用大小为 1×1，2×2，3×3 的瓷砖铺一个 23×23 的正方形地面. 证明：要无重叠地铺满地面，必须有 1×1 的正方形瓷砖.

7. 设 S 为平面上的一个有限点集（点数 $\geqslant5$），其中若干个点染上红色，其余的点染上蓝色. 设任何 3 个及 3 个以上的同色的点不共线，求证：存在 1 个三角形，使得：

(1) 它的 3 个顶点同色；

(2) 这个三角形至少有一条边上不包含另一种颜色的点.

8. 将边长是 2 的正方形角上去掉一个边长是 1 的正方形，用所得到的图形去覆盖一个 5×7 的方格纸，可以重叠，但图形不可超出整个方格纸. 那么是否可能使方格纸中的每个边长是 1 的小方格上覆盖图形重叠的层数都相等？证明你的结论.

9. 如图 27-13，3 行 7 列的小方格每一格任意染上红色或蓝色. 求证：存在一个矩形，它的四个角上的小方格颜色相同.

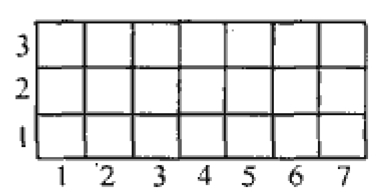

图 27-13

10. 在正 $6n+1$ 边形中，将 k 个顶点染成红色，其余顶点染成蓝色，证明：具有同色顶点的等腰三角形数目不依赖于染色方法.

11. 将平面上的所有的点染成红色或蓝色，试构造一种染色方式，使平面上找不到一个顶点同色而边长等于定长的等边三角形.

12. 已知 $\triangle ABC$ 内有 n 个点（$n\geqslant1$，点不在边上，无三点共线），连同点 A，B，C 共 $(n+3)$ 个点. 以这些点为顶点，把 $\triangle ABC$ 划分成若干个互不重叠的小三角形. 若把 A，B，C 三点分别染成红色、蓝色和黄色，其余 n 个点每点任意染上红、蓝、黄三色中的一种颜色. 证明：三顶点都不同色的小三角形的总数必是奇数.