二、质数与合数

[竞赛要点]

质数 一个大于1的正整数 a,如果仅有1与 a 这两个正约数,那么 a 叫做质数,也叫素数.

合数 如果一个正整数 a 除了1与 a 这两个正约数外还有其他正约数,那么 a 叫做合数.

质因数 如果一个正整数 a 的一个约数 p 是质数,则 p 叫做 a 的质因数,也可称为质约数.

值得指出的是,质数与合数都是大于1的正整数.1既不是质数也不是合数.如果说单数和双数是正整数集的一种分类的话,那么正整数集的另一种分类方式就是将全体正整数分成1、质数和合数三类.所有正的偶数中除了2是质数外,其他均为合数.2是最小的质数.

[方法述要]

定理1 设 a 是一个大于1的正整数,则 a 的大于1的最小正约数 p 一定是质数.

证 若 p 不是质数,因 $p>1$,由定义知,p 有不同于1与其本身的正约数 q,即 $1<q<p$,且 $q\mid p$,于是 $q\mid a$,这与 p 是 a 的大于1的最小正约数矛盾.

定理1说明,凡大于1的整数至少有一个质因数.

定理2 若 p 是质数,则对于任一整数 a,或者 $p\mid a$,或者 $(p,a)=1$.

证 因 $(p,a)\mid p$,$(p,a)\geqslant 1$,而 p 是质数,因此,或者 $(p,a)=1$,或者 $(p,a)=p$,即 $p\mid a$.

推论 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$ 都是整数,p 为质数,若 $p\mid a_1a_2\cdots a_n$,则存在 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 使得 $p\mid a_k$.

证 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都不能被 p 整除,则 $(p,a_i)=1(i=1,2,\cdots,n)$,于是由互质的性质有 $(p,a_1a_2\cdots a_n)=1$.

另一方面,$p\mid a_1a_2\cdots a_n$,故 $(p,a_1a_2\cdots a_n)=p$,从而有 $p=1$.矛盾.

定理3 质数有无穷多个.

证 设 p 是任一质数,令 $a=p!+1$,由定理1,a 有一个质因数 q,即 $q\mid p!+1$,且 $q>1$.又因为 $(p!,p!+1)=1$,所以,$q\nmid p!$,从而 $q>p$,即对任意的质数 p,存在比

p 更大的质数 q，证毕.

定理 4 形如 $4n-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 的质数有无穷多个.

证 显然 3 是一个形如 $4n-1$ 的质数. 对于任一形如 $4n-1$ 的质数 p，令 $a=4(p!)-1$. 由定理 1，a 至少有一个质因数，与定理 3 的证明相仿，a 的所有质因数都大于 p. 显然，a 的任一质因数都是奇数，而奇数可以写成 $4n+1$ 或 $4n-1$. 但

$$(4m+1)(4n+1)=4(4mn+m+n)+1,$$

所以 a 的质因数不能都是形如 $4n+1$ 型的，其中至少有一个为形如 $4n-1$ 型的数. 这就是说，对于任一形如 $4n-1$ 型的质数 p，存在一个比 p 更大的形如 $4n-1$ 型的质数，故 $4n-1$ 型的质数有无穷多个. 证毕.

合数显然有无穷多个. 如大于 2 的偶数都是合数.

定理 5 对于任意大于 1 的正整数 n，存在 n 个相继的合数.

证 考虑 n 个相继的整数

$$(n+1)!+2,(n+1)!+3,\cdots,(n+1)!+n+1,$$

因 $k\mid(n+1)!+k(k=2,3,\cdots,n+1)$，故这 n 个相继的整数都是合数. 证毕.

下面给出一个常用的质数判定定理：

定理 6 设 n 是大于 1 的整数，若所有不大于 $\sqrt{n}$ 的质数都不整除 n，则 n 为质数.

证 设 p 是大于 1 的 n 的最小约数，由定理 1 知，p 是质数. 如果 n 是合数，则存在正整数 q，使得 $n=p\cdot q$，且 $q>1$. 由 p 的最小性有 $p\leqslant q$. 于是 $p^2\leqslant p\cdot q=n$， 所以 $p\leqslant\sqrt{n}$. 这说明不大于 $\sqrt{n}$ 的质数 p 能整除 n，与假设矛盾，故 n 必为质数.

定理 7(算术基本定理) 任何大于 1 的自然数都可以分解成质因数的乘积，如果不考虑这些质因数的顺序，这种分解方法是惟一的.

例如：把 42，120，4536 分解成质因数的乘积，分解如下：

$$42=2\times3\times7,120=2^3\times3\times5,4536=2^4\times3^4\times5\times7$$

一般地，设 N 为整数，且 $N>1$，则 $N=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdots p_m^{k_m}$， ①

其中 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n$ 为质数，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为非负整数.

通常称①式为自然数的标准分解式.

定理 8(约数个数定理) 设自然数 N 的标准分解式为 $N=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdots p_m^{k_m}$，那么 N 的正约数的个数为 $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)$.

例如：将 84 分解成质因数的乘积是 $84=2^2\times3\times7$，由约数个数定理可知 84 的约数的个数是 $(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=12$ 个. 事实上，这 12 个约数是这样得来的：2^2 的非 1 的约数有 $2,2^2$ 也是 84 的约数，3、7 是 84 另 2 个约数，它们之间的乘积 $2\times3,2\times7,2^2\times3,2^2\times7,3\times7,2\times3\times7,2^2\times3\times7$ 共 7 个均是 84 的约数，再加上 1 是 84 的约数，所以 84 的约数总共是 12 个.

一般地，对自然数 $N(N>1)$，若 N 的标准分解式为 $N=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdots p_m^{k_m}$，则对每

个质因数 $p_i(i=1,2,3,\cdots,n)$来说,$1,p_i,p_i^2,\cdots,p_i^{k_i}$ 都是 N 的约数(共有 k_i+1 个,且互不相同),这些约数的各种可能之积仍是 N 的约数.因此,N 的正约数的总个数为 $(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)\cdots(k_m+1)$.

[赛题精析]

例 1 求75600 的约数的个数.

解 将 75600 分解成质因数乘积的形式 $75600=2^4\times3^3\times5^2\times7$.

由约数个数定理可知:75600 的约数的个数是

$$(4+1)\times(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=160 \text{ 个}.$$

例 2 我们称恰有 8 个正约数的自然数叫"好"数,求最小的"好"数.

解 因为 $8=1\times8=2\times2\times2=4\times2$,

所以"好"数的标准分解式只有如下三种形式:p^7(p 为质数);$p_1^3p_2$(p_1,p_2 为不同的质数);$p_1p_2p_3$(p_1,p_2,p_3 为不同的质数).

因为要求"好"数中的最小数,所以标准分解式中质数的取值应尽可能地小.$2^7=128$,$2^3\times3=24$,$2\times3\times5=30$.故最小的"好"数是 24.

例 3 已知 $1176\times a=b^4$,a、b 为自然数,求 a 的最小值.

解 将 1176 分解成质因数的乘积,得 $1176=2^3\times3\times7^2$,

$1176\times a=2^3\times3\times7^2\times a=b^4$,$a,b$ 为自然数.

故 a 的最小值 $=2\times3^3\times7^2=2646$.

例 4 对于任何大于 1 的自然数 n,试证明 n^4+4 是合数.

分析 从合数的概念出发,将 n^4+4 分解成两个因式的乘积,再证明每个因式是大于 1 的.

证明
$$\begin{aligned}n^4+4&=n^4+4n^2-4n^2+4=(n^2+2)^2-(2n)^2\\&=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2).\end{aligned}$$

由于 $n>1$, 所以 $n^2+2n+2>1$,$n^2-2n+2>1$.故 n^4+4 是合数.

例 5 设 a,b,c,d 是自然数,并且 $a^2+b^2=c^2+d^2$,证明 $a+b+c+d$ 一定是合数.

证明 因为 a,b,c,d 是自然数,所以 $a+b+c+d>2$.

因为 a,b,c,d 分别与a^2,b^2,c^2,d^2 的奇偶性相同,所以 $a+b+c+d$ 与$a^2+b^2+c^2+d^2$ 的奇偶性也相同.$a^2+b^2+c^2+d^2=2(c^2+d^2)$为偶数.

因为 $a+b+c+d$ 也为偶数,同时又有 $a+b+c+d>2$,故 $a+b+c+d$ 一定是合数.

例 6 已知质数 p,q 满足 $p+q=1999$,求$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$的值.

解 因为 $p+q=1999$ 是一个奇数，所以质数 p,q 中必为一个是奇数，另一个是偶数.

又因为正偶数中只有 2 是质数，所以 p,q 中有一个是 2，另一个是 1997.

故 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1997}=\frac{1999}{3994}$.

例 7 已知 a,b,c 是质数，它们满足 $a\cdot b^b\cdot c+a=2000$，求 a,b,c 的值.

分析 运用自然数的标准分解形式是惟一的，将 2000 分解成质因数的乘积. 因为 $a\cdot b^b\cdot c+a=a(b^b+c)$，来分析质因数 a 的取值.

解 已知 $a\cdot b^b\cdot c+a=2000$，即 $a(b^b\cdot c+1)=2\times1000=2^4\times5^3$.

因为 a 为质数，所以 a 只能取 2 或者 5.

当 $a=2$ 时，$2\times(b^b\cdot c+1)=2000$，$b^b\cdot c=999=3^3\times37$，

因为自然数 999 的标准分解式是惟一的，可以发现 $b=3,c=37$.

当 $a=5$ 时，$5\times(b^b\cdot c+1)=2000$，$b^b\cdot c=399=3\times7\times19$，

无论 c 取 3,7,19，都不能求得质数 b，故 a 不可能取 5.

综上所述，$a=2,b=3,c=37$.

例 8 如图 2-1，立方体的每个面上都写有一个自然数，并且相对两个面所写两数之和都相等，若 18 的对面写的是质数 a，14 的对面写的是质数 b，35 的对面写的是质数 c，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.

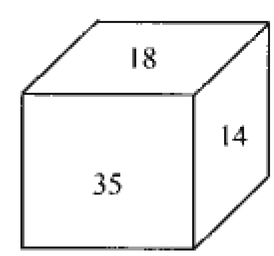

图 2-1

解 由已知条件知：$a+18=b+14=c+35$.

由 $a+18=b+14$ 得，$a-b=-4$ 是偶数，所以 a,b 的奇偶性相同.

由 $a+18=c+35$ 得，$a-c=17$ 是奇数，所以 a,c 的奇偶性相反，又因为 a,b,c 都是质数，而且正偶数中只有 2 是质数，所以 $c=2$.

解方程组 $\begin{cases}a+18=35+c,\\ b+14=35+c,\end{cases}$ 求得 $\begin{cases}a=19,\\ b=23.\end{cases}$

故 $a^2+b^2+c^2=2^2+19^2+23^2=894$.

例 9 求出使得 $p,p+10,p+14$ 都是质数的所有整数 p.

分析 p 是质数，但首先是整数. 因此，由余数定理知 p，只能是 $3k,3k+1,3k+2$ 三种形式之一.

解 若 $p=3k+1$（k 是非负整数），则 $p+14=3k+1+14=3\times(k+5)$，这说明 $p+14$ 是合数，与已知的 $p+14$ 是质数矛盾，故 $p\neq3k+1$.

若 $p=3k+2$（k 是非负整数），则 $p+10=3k+2+10=3\times(k+4)$，这说明 $p+10$ 是合数，与已知的 $p+10$ 是质数矛盾，故 $p\neq3k+2$.

若 $p=3k$（k 为正整数），则当 $k>1$ 时，p 是合数，与已知的 p 是质数矛盾，故 k 只

能是 1，此时 $p=3$. 故只有 $p=3$ 时，使得 $p, p+10, p+14$ 都是质数.

例 10 设 p 是给定的质数，再将不超过 p 的所有质数分成两组：$a, b, c, \cdots, k$；$\alpha, \beta, \cdots, \gamma$. 且知数 x 满足 $x=abc\cdots k-\alpha\beta\cdots\gamma$，$1<x<p^2$，求证：$x$ 是质数.

证 假设 x 不是质数，则由 $x>1$ 知，x 是合数. 由 $x<p^2$ 可知 x 必有一个质约数小于 p，设这个质约数为 q，则 q 是 $a, b, c, \cdots, k$；$\alpha, \beta, \cdots, \gamma$ 中的某一个. 于是有

$$q \mid x=abc\cdots k-\alpha\beta\cdots\gamma.$$

若 q 是 $a, b, c, \cdots, k$ 中的一个，则必有 $q \mid abc\cdots k$，从而 $q \mid \alpha\beta\cdots\gamma$.

从而 q 也是 $\alpha, \beta, \cdots, \gamma$ 中的一个，这是不可能的. 所以 x 是质数.

例 11 设 $p>3$，且 p 与 $p+2^n$ 均为质数，求证：$p+2^{n+1}$ 为合数（其中 $n\in\mathbf{N}^*$）.

证 对 p 和 2^n 按模 3 讨论.

因为 p 为质数，且 $p>3$，所以 p 是 $3k+1$ 或 $3k+2$ 型的数. 又显然 2^n 是 $3k+1$ 或 $3k+2$ 型的数.

当 2^n 为 $3k+1$ 型的数时，由于 2^n+p 为质数，所以 p 是 $3k+1$ 型的数. 令 $2^n=3m_1+1$，$p=3m_2+1$，则 $2^{n+1}+p=2(3m_1+1)+3m_2+1=3m+3$，其中 $m=2m_1+m_2$.

故 $3 \mid 2^{n+1}+p$，又 $2^{n+1}+p>3$，故 $2^{n+1}+p$ 是合数.

当 2^n 为 $3k+2$ 型的数时，由于 2^n+p 为质数，所以 p 是 $3k+2$ 型的数. 此时，令 $2^n=3m_1+2$，$p=3m_2+2$，则 $2^{n+1}+p=2(3m_1+2)+3m_2+2=3m+6$，其中 $m=2m_1+m_2$.

故 $3 \mid 2^{n+1}+p$，又 $2^{n+1}+p>6$，所以 $2^{n+1}+p$ 是合数.

综上所述，我们证明了 $2^{n+1}+p$ 是合数.

例 12 （1）设 p 是质数，$p>3$，求证：$24 \mid p^2-1$；

（2）设 c 不能被质数的平方整除，且 $a^2 \mid b^2c$，证明，$a \mid b$.

（1）**证** 因为 $24=3\times8$，且 $(3,8)=1$，所以只需证明 $3 \mid p^2-1$，$8 \mid p^2-1$.

（ⅰ）证 $3 \mid p^2-1$. 事实上，$p-1, p, p+1$ 是三个连续整数，故其中必有一个被 3 整除. 又 $p>3$ 为质数，所以 $p-1, p+1$ 中有一个被 3 整除，故 $3 \mid (p-1)(p+1)$，即 $3 \mid p^2-1$.

（ⅱ）证 $8 \mid p^2-1$. 事实上，由 $p-1, p+1$ 是相邻的偶数，故其中必有一个是 4 的倍数，所以 $(p-1)(p+1)$ 是 8 的倍数，即 $8 \mid p^2-1$.

综上所述，我们证明了 $24 \mid p^2-1$.

（2）**证** 设

$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，$\alpha_i\geqslant0$，$i=1,2,\cdots,s$；

$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$，$\beta_i\geqslant0$，$i=1,2,\cdots,s$；

$c=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_s^{\gamma_s},\gamma_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,s$;

则 $a^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_s^{2\alpha_s}$；$b^2=p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_s^{2\beta_s}$；

于是 $b^2c=p_1^{2\beta_1+\gamma_1}p_2^{2\beta_2+\gamma_2}\cdots p_s^{2\beta_s+\gamma_s}$；

由于 $a^2\mid b^2c$，由例 1 的结论，得 $0\leqslant 2\alpha_i\leqslant 2\beta_i+\gamma_i$. 又因 c 不能被质数的平方整除，所以 $0\leqslant\gamma_i\leqslant 1$，于是 $0\leqslant 2\alpha_i\leqslant 2\beta_i+1$.

所以 $0\leqslant\alpha_i\leqslant\beta_i+\frac{1}{2}$，$i=1,2,\cdots,s$. 但 α_i,β_i 均为正整数，故必有 $0\leqslant\alpha_i\leqslant\beta_i$，$i=1,2,\cdots,s$，所以 $a\mid b$. 证毕.

[能力训练]

1. 求出 100 以内的质数.
2. 求出满足关系式 $abc=5(a+b+c)$ 的质数 a,b,c.
3. 已知质数 p 与奇数 q 的和为 11，求 p,q.
4. 对于大于 3 的自然数 n，n 和 $n+2$ 都是质数，求证：$6\mid n+1$.
5. 设 $m\mid 1+(m-1)!$，求证：m 为质数.
6. 试证：对每个正整数 n，数 $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1}2\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1}$ 是合数.
7. 若质数 $p\geqslant 5$ 且 $2p+1$ 是质数，那么 $4p+1$ 一定是合数.
8. 证明当 n 为大于等于 3 的整数时，2^n-1 与 2^n+1 中至少有一个是合数.
9. 求三个质数，使其积为其和的 5 倍.
10. 已知当 $x=\alpha,\beta,\gamma$ 时，ax^2+bx+c 都是质数 p 的倍数，并且 p 不能整除 $\alpha-\beta$，$\beta-\gamma$，$\gamma-\alpha$，求证：无论 x 是怎样的整数，都有 $p\mid(ax^2+bx+c)$.
11. p 是质数，$q=4^p+p^4+4$ 也是质数，求 q 的值.
12. 是否存在这样的六个连续正整数

$n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5$，

把它们任意分成两部分(每部分至少有一个数)，使得一部分的所有数的乘积等于另一部分所有数的乘积.