二十、几何中的旋转变换

[竞赛要点]

1. 旋转的定义

把图形 F 绕平面上的一个定点 O 旋转一个角度 θ，得到图形 F'，这样的由图形 F 到图形 F' 的变换叫做旋转变换，简称旋转，记作 $R(O,\theta)$. 如图 20-1 所示，$\triangle ABC$ 经过旋转后得到 $\triangle A'B'C'$.

为了说理的方便，我们把图形 F 经过旋转变换 $R(O,\theta)$ 后得到的图形 F' 的过程记作

$F \xrightarrow{R(O,\theta)} F'$，简记为 $F \xrightarrow{(O,\theta)} F'$.

点 A 在旋转变换 $R(O,\theta)$ 下的对应点 A' 称为点 A 在该旋转变换下的像，同时，A 称为 A' 的原像. 在图 20-1 中，显然有 $A \xrightarrow{(O,\theta)} A'$，$B \xrightarrow{(O,\theta)} B'$，$C \xrightarrow{(O,\theta)} C'$.

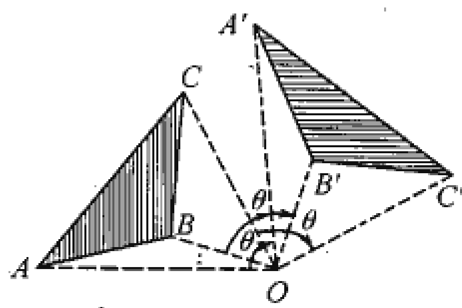

图 20-1

从而 $\triangle ABC \xrightarrow{(O,\theta)} \triangle A'B'C'$.

一般地，若 $F \xrightarrow{(O,\theta)} F'$，则称 F' 为 F 在旋转变换 $R(O,\theta)$ 下的像，F 称为 F' 的原像.

2. 旋转的性质

(1) 在旋转变换下，两点之间的距离不变；

(2) 在旋转变换下，对应点到旋转中心的距离相等；

(3) 在旋转变换下，两直线的夹角不变，两对应直线的夹角等于旋转角；

(4) 在平移变换下，图形 F 与它的像 F' 全等，即 $F \cong F'$.

[方法述要]

把分散的线段、角相对集中起来，从而使已知条件集中在一个我们所熟知的基本图形之中. 利用旋转后产生的新的图形的性质对原图形进行研究，从而使问题得以转化.

[赛题精析]

例 1 已知正方形 $ABCD$，且 $AE = AG$，$\angle EAB = \angle GAD$，求证 $BE = DG$，并且

$BE \perp DG$.

分析 欲证 $BE = DG, BE \perp DG$. 倘若能证得$\triangle ABE$ 绕 A 点旋转 $90°$与$\triangle ADG$ 重合,问题即解决.

证明 $\because AB = AD, \angle BAD = \mathrm{Rt}\angle; AE = AG$,

$\angle EAG = \mathrm{Rt}\angle$,

那么$\angle BAE = \angle DAG$.

$\therefore$ $\triangle ABE$ 绕 A 点旋转 $90°$, AB 与 AD 重合, AE 与 AG 重合. 根据对应线等角定理 $BE = DG, BE \perp DG$.

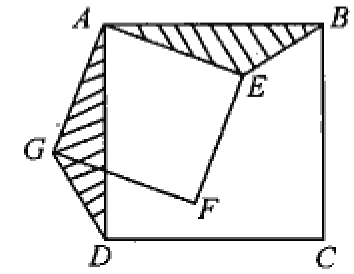

图 20-2

例 2 如图 20-3,设点 E, F 各在正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD 内,求证:$\angle AFE > 45°$.

分析 欲证$\angle AFE > 45°$,为此可创造一个大小为 $45°$ 的角与$\angle AFE$ 产生逻辑上的联系,通过比较来推得结论.

证明 $\because$ $AB = AD, \angle DAB = \angle ABC = \mathrm{Rt}\angle$,

$\therefore$ 把 $\mathrm{Rt}\triangle ADF \xrightarrow{(A,90°)} \mathrm{Rt}\triangle ABG$,点 G 在 CB 的延长线上.

则$\angle GAF = \mathrm{Rt}\angle$.

而 $AG = AF, \angle AFG = 45°, \therefore \angle AFE > \angle AFG = 45°$.

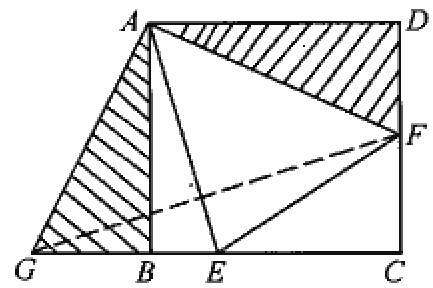

图 20-3

例 3 如图 20-4,已知两个边长为 a 的正六边形,使一个正六边形的一个顶点与另一个正六边形的中心相合. 试求两正六边形重叠部分 $OPABQ$ 的面积.

分析 欲求两正六边形的重叠部分 $OPABQ$ 的面积,可把$\triangle OPA$ 绕 O 点旋转使与$\triangle OQC$ 重合来求解.

解 $\because$ $OA = OC, \angle OAP = \angle OCQ = 60°$,

而$\angle MOQ = \angle AOC$,得$\angle POA = \angle QOC$,于是把$\triangle OPA$ $\xrightarrow{(O,120°)} \triangle OQC$,则 $S_{OPABQ} = S_{OABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

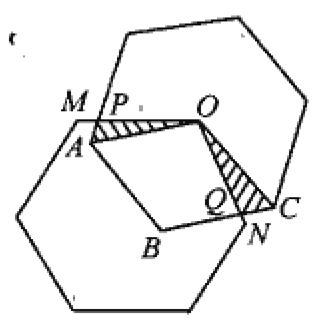

图 20-4

例 4 如图 20-5,设 P 为正$\triangle ABC$ 内一点,$\angle APB = 113°$, $\angle BPC = 123°$,求证:以 AP, BP, CP 为边能构成三角形,并确定所构成的三角形各内角的度数.

证明 将$\triangle APC$ 绕 C 逆时针旋转 $60°$,得$\triangle BCQ$,连 PQ 有 $AP = BQ, CQ = PC$. 故$\triangle PBQ$ 的三边恰等于 PA, PB, PC,因此,以 PA, PB, PC 为边能构成三角形.

又由 $\angle APC = 360° - 113° - 123° = 124°$,

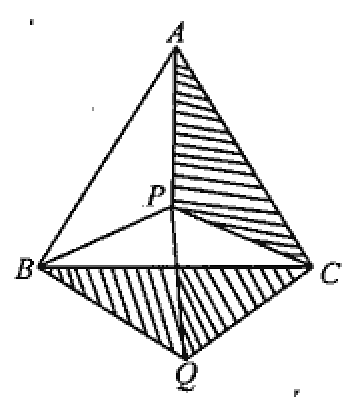

图 20-5

知$\angle BQP=124°-60°=64°$，

又$\angle BPQ=123°-60°=63°$，

得$\angle PBQ=180°-64°-63°=53°$.

即所构成的三角形各内角分别为$64°,63°,53°$.

例 5 如图 20-6，在等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是形内一点，$\angle ADC>\angle ADB$，求证：$BD>CD$.

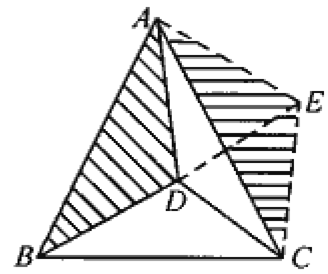

图 20-6

分析 欲证$BD>CD$，虽然BD和CD在同一$\triangle DBC$中，但却难以直接推得结论.

$\because$ $AB=AC$，于是把$\triangle ABD\xrightarrow{(A,\angle BAC)}\triangle ACE$，$CE=BD$，问题变成求证$CE>CD$.

证明 $\because AB=AC$，故把$\triangle ABD\xrightarrow{(A,\angle BAC)}\triangle ACE$.

连DE. $\because AD=AE$，$\therefore \angle ADE=\angle AED$.

又$\angle ADC>\angle ADB=\angle AEC$，

$\therefore \angle ADC-\angle ADE>\angle AEC-\angle AED$，$\angle CDE>\angle CED$.

则$CE>CD$. 而$CE=BD$，$\therefore BD>CD$.

说明 若对本题D点的位置加以限制，得如下命题：在等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是$\triangle ABC$内一点，$\angle ADB=\angle ADC$，则$\angle DBC=\angle DCB$.

例 6 如图 20-7，设$\triangle ABC$的$BC=12\text{cm}$，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$. 如果将$\triangle ABC$绕着C点旋转，使CA落在BC的延长线上，求$\triangle ABC$扫过的面积.

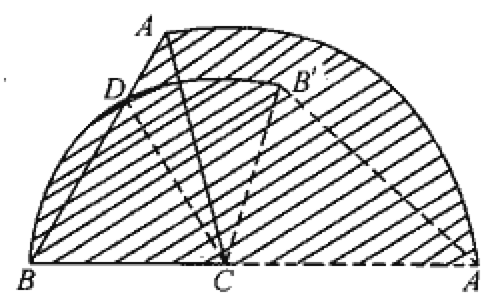

图 20-7

分析 由图 20-7 可知，$\triangle ABC$扫过的面积为封闭图形$BDAA'B$的面积. 设它的面积为S，则

$S=S_{扇形CBD}+S_{\triangle CDA}+S_{扇形CAA'}$.

因BC，$\angle BAC$和$\angle ABC$的大小已知，上述两扇形和三角形的面积不难求得.

解 在$\triangle ABC$中，$AC=\dfrac{BC\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{12\sin60°}{\sin45°}=6\sqrt{6}$.

$\angle ACB=180°-\angle BAC-\angle ABC=180°-45°-60°=75°$，则$\angle ACA'=105°$.

$\therefore$ $S_{扇形CBD}=\pi BC^2\cdot\dfrac{60}{360}=\pi\cdot12^2\cdot\dfrac{60}{360}=24\pi$.

$$S_{\triangle CDA}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot DC\sin\angle ACD=\frac{1}{2}\cdot6\sqrt{6}\cdot12\cdot\sin(75°-60°)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot6\sqrt{6}\cdot12\cdot\sin15°=\frac{1}{2}\cdot6\sqrt{6}\cdot12\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=54-18\sqrt{3}.$$

$S_{扇形CAA'}=\pi\cdot AC^2\cdot\frac{105}{360}=\pi\cdot(6\sqrt{6})^2\cdot\frac{105}{360}=63\pi$.

$\therefore\quad S=24\pi+54-18\sqrt{3}+63\pi=87\pi+54-18\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$.

说明 本题计算中求 sin15°的值，可应用三角公式 $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

例 7 如图 20-8，以△ABC 的 AB，AC 为边向形外作正三角形 LAB，NAC. 再以 BC 为边与△ABC 同侧作正三角形 MBC. 求证：$LANM$ 为一平行四边形.

分析 欲证 $LANM$ 为一平行四边形，可分别证明 $LM\parallel AN$，$LA\parallel MN$.

观察其图，AC 与 AN 夹角为 60°，若能证得 LM 与 AC 交成 60°，那么 $LM\parallel AN$.

于是把△ABC 绕 B 点旋转 60°，证明与△LBM 重合.

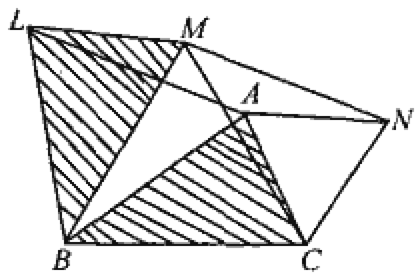

图 20-8

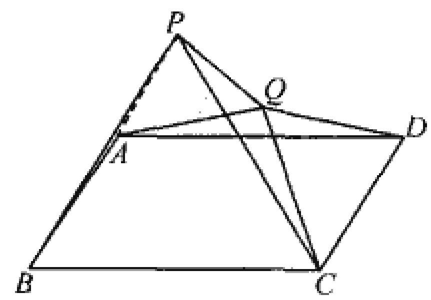

图 20-9

证明 已知△LAB，△MBC 为正三角形，那么 $AB=LB$，$BC=BM$，$\angle ABC=\angle MBC-\angle MBA=\angle LBA-\angle MBA=\angle LBM$.

故把△$ABC\xrightarrow{(B,60^\circ)}$△$LBM$. 根据对应线等角定理 LM 与 AC 交成 60°，而 AN 与 AC 夹角为 60°，故 $LM\parallel AN$.

同理可证 $MN\parallel LA$. 故 $LANM$ 为一平行四边形.

本题的逆命题如下，能否用旋转法来证，请不妨一试.

逆命题 以▱$ABCD$ 的 BC，CD 为边向形内作正三角形 PBC 和 QCD，求证△APQ 为一正三角形(如图 20-9).

例 8 如图 20-10，以△ABC 的各边向形外作正方形 $ABEF$，$BCGH$，$ACIJ$，P，Q，R 各为这三个正方形的中心. 求证 AQ，BR，CP 三线共点.

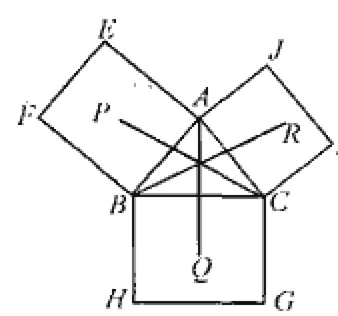

图 20-10

分析 欲证三线 AQ，BR，CP 共点，因点 P，Q，R 可构成一个三角形，若能证得 $AQ\perp PR$，$BR\perp PQ$，$CP\perp QR$，那么 AQ，BR，CP 便交于一点.

证明 取 AB 的中点 O，连 PO，QO，RO. 把△POR 绕 O 点按顺时针方向旋转 90°.

$\because\quad\angle POA=\mathrm{Rt}\angle$，$\angle ROQ=\mathrm{Rt}\angle$，$PO=AO$，$RO=QO$(同上)，

$\therefore$ $\triangle POR$ 落在 $\triangle AOQ$ 的位置.

连 PQ,RQ,则 $AQ \perp PR$,AQ 成了 $\triangle PQR$ 的 PR 边上的高所在直线.

同理可证 BR,CP 分别是 PQ 和 QR 边上的高所在直线.

故 AQ,BR,CP 三线共点.

例 9 如图 20-11,以四边形 $ABCD$ 的各边向形外分别作正方形.它们的中心依次为 P,Q,R,S.求证 $PR \perp QS$,$PR = QS$.

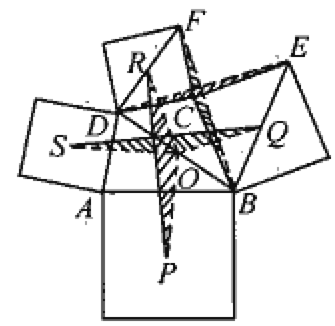

图 20-11

分析 欲证 $PR \perp QS$,$PR = QS$.取 BD 的中点 O,连 OP,OQ,OR,OS.观察 PR,QS 分别在 $\triangle POR$ 和 $\triangle SOQ$ 中.易知 $\angle ROQ = \text{Rt}\angle$,故若能证得 $\triangle POR$ 旋转 $90°$ 与 $\triangle SOQ$ 重合,问题即解决.

证明 $\because$ $EC = BC$,$DC = FC$,$\angle DCE = \angle FCB$,

又 $\angle DCE = \angle FCB$,

$\therefore$ 把 $\triangle DCE \xrightarrow{(C,90°)} \triangle FCB$,$DE \perp FB$,$DE = FB$.

取 BD 的中点 O,连 OP,OQ,OR,OS.

显然 $OQ \parallel DE$,$OQ = \dfrac{1}{2}DE$,$OR \parallel BF$,$OR = \dfrac{1}{2}BF$.

那么 $OQ \perp OR$,$OQ = OR$.

同理可证 $OP \perp OS$,$OP = OS$.

又 $\angle POR = \angle QOS$,$\therefore$ 把 $\triangle POR \xrightarrow{(O,90°)} \triangle SOQ$,$PR \perp QS$,$PR = QS$.

说明 如果本题在线段 PQ,QR,RS,SP 上各取其中点,组成一个四边形,则此四边形一定是正方形.请读者自证.

例 10 如图 20-12,已知 P 是正方形 $ABCD$ 内一点,$\angle PAB = \angle PBA = 15°$.求证:$\triangle PDC$ 是一正三角形.

分析 本题图形呈对称形,故欲证 $\triangle PDC$ 为正三角形,只须证得 $\angle PDC = 60°$ 或 $\angle ADP = 30°$.

已知 $\angle PAB = \angle PBA = 15°$,$PA = PB$.故把 $\triangle APB \xrightarrow{(P,\angle APB)} \triangle EPA$,连 DE.那么 $\angle BAE = 30°$,$\angle DAE = 60°$,则 $\triangle ADE$ 是正三角形.

于是只要证得 $\triangle ADP \cong \triangle EDP$,$\angle PDC$ 便为 $60°$.

证明 $\because$ $\angle PAB = \angle PBA$,$PA = PB$,

$\therefore$ 把 $\triangle APB \xrightarrow{(P,\angle APB)} \triangle EPA$,$PB$ 落在 PA 位置.

则 $\angle PAE = \angle PBA = 15°$,$\angle BAE = 30°$,$\angle DAE = 60°$.

连 DE,又 $AE = BA = AD$,

$\therefore \triangle ADE$ 为正三角形,$\angle ADE = 60°$.

又从 $AD=ED$，$PA=PE$，$PD=PD$，得$\triangle ADP\cong\triangle EDP$.

那么$\angle ADP=\angle EDP=\frac{1}{2}\angle ADE=30^\circ$，

$\therefore\angle PDC=60^\circ$，$\triangle PDC$ 为正三角形.

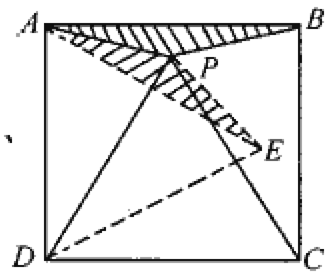

图 20-12

例 11 如图 20-13：已知 O 是锐角$\triangle ABC$ 内一点，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^\circ$，而 P 是$\triangle ABC$ 内任一点，求证 $PA+PB+PC\geqslant OA+OB+OC$.

分析 6 条线段不便于比较大小，我们通过旋转分别将求证不等式的左、右两边连接起来.

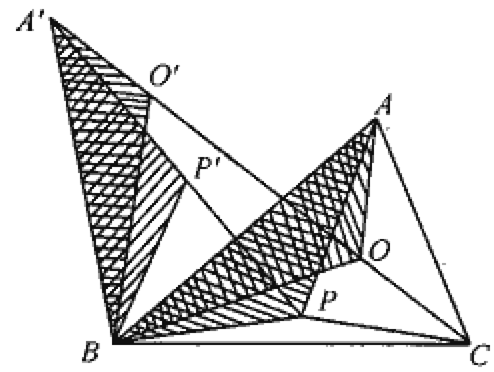

图 20-13

证明 将$\triangle ABO$，$\triangle ABP$ 绕点 B 按逆时针方向旋转 60°，到$\triangle A'BO'$，$\triangle A'BP'$，连 $O'O$，$P'P$，则$\triangle BOO'$与$\triangle BPP'$都是正三角形，$O'O=OB$，$PP'=PB$.

因为$\angle BO'A'=\angle BOC=120^\circ$，所以，$A'$，$O'$，$O$，$C$ 四点共线. 有 $AP'+P'P+PC\geqslant A'C=A'O'+O'O+OC$，即 $PA+PB+PC\geqslant OA+OB+OC$.

例 12 如图 20-14，在正$\triangle ABC$ 内有一点 P，P 至三顶点 A，B，C 的距离分别为 a，b，c，求$\triangle ABC$ 的面积.

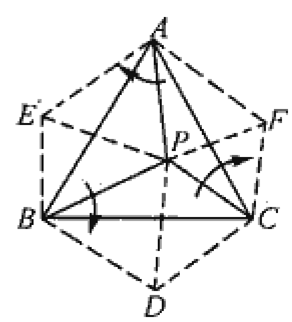

图 20-14

分析 欲求$\triangle ABC$ 的面积，因 AP，BP，CP 为已知，故可设法把 AP，BP，CP 移至一个三角形. 为此把$\triangle APC\xrightarrow{(A,60^\circ)}\triangle AEB$，$\triangle APB\xrightarrow{(B,60^\circ)}\triangle CDB$，$\triangle BPC\xrightarrow{(C,60^\circ)}\triangle AFC$.

显然，$S_{\text{六边形}AEBDCF}=2\cdot S_{\triangle ABC}$.

而 $S_{\text{六边形}AEBDCF}=S_{\triangle APE}+S_{\triangle BEP}+S_{\triangle BPD}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle CPF}+S_{\triangle FPA}$.

这六个三角形面积可求.

解 把$\triangle APC\xrightarrow{(A,60^\circ)}\triangle AEB$，$\triangle APB\xrightarrow{(B,60^\circ)}\triangle CDB$，$\triangle BPC\xrightarrow{(C,60^\circ)}\triangle AFC$，连 PD，PE，PF. $S_{\text{六边形}AEBDCF}=2\cdot S_{\triangle ABC}$.

而 $S_{\text{六边形}AEBDCF}=S_{\triangle APE}+S_{\triangle BEP}+S_{\triangle BPD}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle CPF}+S_{\triangle FPA}$.

$\triangle APE$，$\triangle BPD$，$\triangle CPF$ 是边长分别为 a，b，c 的正三角形.

那么$\triangle APE$ 的面积$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$\triangle BPD$ 的面积$=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$\triangle CPF$ 的面积$=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

$\triangle BEP$，$\triangle PCD$，$\triangle FPA$ 为由 a，b，c 三边组成的全等三角形，那么$\triangle BEP$ 的面积$=\triangle PCD$ 的面积$=\triangle FPA$ 的面积$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}$ 六边形 $AEBDCF$ 的面积 $=\frac{\sqrt{3}}{8}(a^2+b^2+c^2)+\frac{3}{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

说明 本题运用旋转法很特别.它把$\triangle ABC$分成的三个三角形,依次旋转置于$\triangle ABC$的各边旁.从而把求$\triangle ABC$的面积转化为求六边形$AEBDCF$的面积.这是值得鉴赏的方法.

[能力训练]

1.求证:设顶角及高一定的诸三角形中,以夹顶角之两边相等的三角形的面积最小.

2.试证:在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弧相等,所对的弦相等,所对的弦的弦心距相等.

3.如图 20-15,设斜边长为 l 的 Rt$\triangle ABC$ 绕着直角顶点 C 旋转 $90°$,使 AC 边落在 BC 的延长线上.试求两直角边各自形成的两扇形的面积之和.

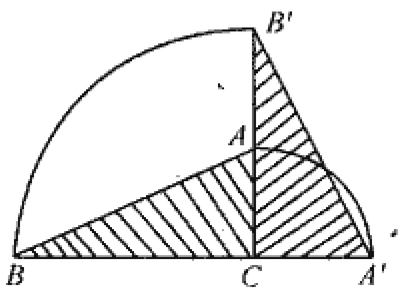

图 20-15

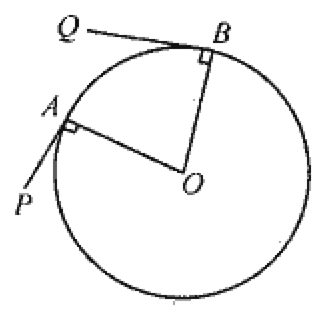

图 20-16

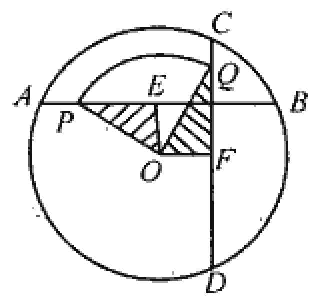

图 20-17

4.如图 20-16,设 AO,BO 为$\odot O$的半径,PA,QB 为分别过点 A,B 的切线.求证 PA 与 QB 的夹角等于$\angle AOB$.

5.如图 20-17,过$\odot O$内一定点 P 作任意弦,试证与此弦垂直相等的弦必过另一定点.

6.如图 20-18,已知 $ABCD$ 是矩形,$BC=3AB$.如果 M,N 是 BC 上的点,$BM=MN=NC$,求证:

$\angle DBC+\angle DMC=\angle DNC$.

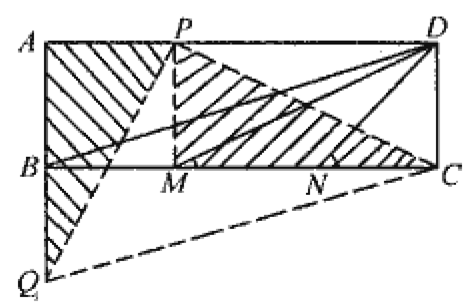

图 20-18

7.试从一平行四边形裁截下一个面积最大的正方形.

8.如图 20-19,设四边形 $ABCD$ 的三边 $AB=a,BC=b,CD=c,a,b,c$ 为定值.AD 边的长可以任意选取,用 x 来表示.试证:当 $ABCD$ 的面积有最大值时,x 必满足 $x^3-(a^2+b^2-c^2)x-2abc=0$.

9.设 P 为正$\triangle ABC$内一点,$PA^2=PB^2+PC^2$,求$\angle BPC$的大小.

10. 已知△ABC 中，$\angle A \geqslant 120°$，P 为△ABC 内一点，求证：$PA+PB+PC>AB+AC$.

11. 如图 20-20，如果圆内接凸五边形 $ABCDE$ 的所有内角都相等，试证它必定是一个正五边形.

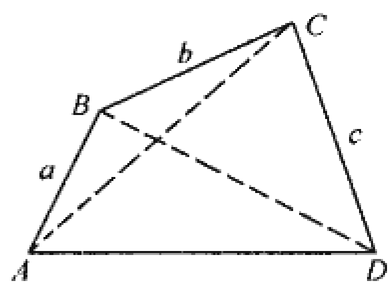

图 20-19

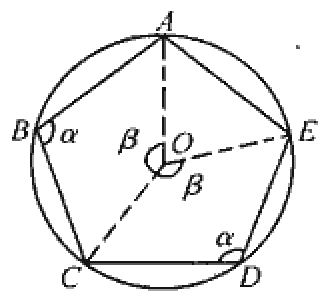

图 20-20

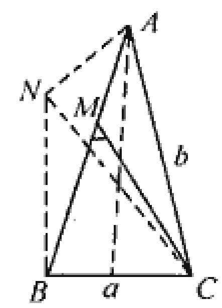

图 20-21

12. 如图 20-21，已知等腰△ABC 的顶角 A 为 $20°$，在 AB 上取 $AM=BC$. 连 MC，求$\angle BMC$ 的大小.