二十四、探索性问题

[竞赛要点]

探索性问题，一般由题设条件探索相应结论，或由给定题设探索应具备条件，它的一个明显特点是：问题答案不直接给出，需要我们自己去回答、探索和研究。探索性问题的结构和用语无统一模式，常用语："是否存在"、"试判断"、"试确定"、"试计算"、"分别探出"等.

[方法述要]

1.对"存在型"问题的探索，能掌握一般的解题步骤，即先假设结论存在，经过推理论证，若无矛盾，则肯定假设；若有矛盾，则否定假设.培养对数学问题广泛联想，积极探索，寻求规律，合理论证的解题能力.

2.对只给出条件，结论需要探究、归纳；或者根据确定的结论，分析，寻求所需条件一类的问题，能运用特殊与一般的辩证关系，数形结合、变换结论、分类讨论归纳、构建方程函数等常用数学思想和方法，有效地解决问题.

[赛题精析]

例1 如图 24-1，D,E 是$\triangle ABC$ 中 BC 边上的两点，$AD=AE$，要证明$\triangle ABE\cong\triangle ACD$，还应补充一个什么条件？试补充 6 个不同的条件，使每一个条件都能证明$\triangle ABE\cong\triangle ACD$.

解 根据全等三角形判定定理，要判定两个三角形全等，需要满足三个独立条件.本题中已知一对应边相等（$AD=AE$），又从这一已知中发现隐含了另一个已知条件，即$\angle ADE=\angle AED$，于是，再补充一个条件，可以使得$\triangle ABE\cong\triangle ACD$.例如，补充以下 6 个不同的条件：(1)$\angle BAD=\angle CAE$；(2)$\angle B=\angle C$；(3)$BD=EC$；(4)$AB=AC$；(5)$BE=CD$；(6)$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ACD}$.需要注意的是，补充的条件，尽可能不要和已知条件重复.如补充的一个条件是$\triangle ABD\cong\triangle ACE$，显然这个条件中包含了已知条件 $AD=AE$，所以这个补充条件是不妥的.

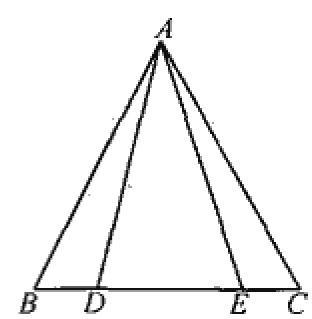


图 24-1

例2 如图 24-2，AB 为$\odot O$ 的直径，$AB=6$，P 为 AB 上的一点，$\frac{BP}{AP}=7+4\sqrt{3}$，过

点 P 作⊙O 的弦 CD，连结 AC，BC，设$\angle BCD = m\angle ACD$. 试问：是否存在正整数 m，使弦 CD 最短？若存在，求出 m 的值；若不存在，说明理由.

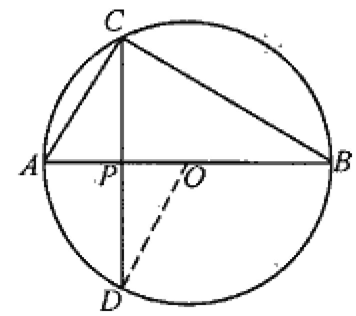


图 24-2

解 连 CD，若最短的弦 CD 存在，则 $CD\perp AB$. $\because AB = 6$，$\dfrac{BP}{AP}=7+4\sqrt{3}$，$\therefore BP=(7+4\sqrt{3})AP$，$AP+BP=6$，$AP=3-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$，$OP=3-(3-\dfrac{3}{2}\sqrt{3})=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OPD$ 中，$\cos\angle POD=\dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \angle POD=30^\circ$，$\angle ACD=15^\circ$. $\because AB$ 是直径，$\therefore \angle BCD=90^\circ-15^\circ=75^\circ$. $\therefore \angle BCD=5\angle ACD$. 即 $m=5$.

例 3 如图 24-3，设 P，Q 为线段 BC 上的两个定点，且 $BP=CQ$，A 为 BC 外一动点，当动点 A 运动到使$\angle BAP=\angle CAQ$时，$\triangle ABC$ 是什么三角形？并证明你的结论.

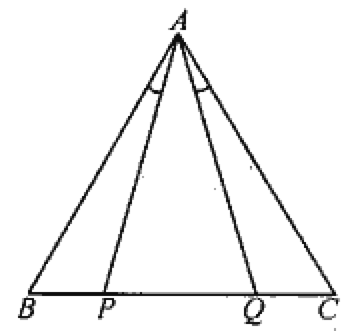


图 24-3

解 非常直观，猜想$\triangle ABC$ 是等腰三角形，于是只要证 $AB=AC$（或$\angle B=\angle C$）. 但直接运用全等三角形判定定理来证明$\triangle ABQ\cong\triangle ACP$（或$\triangle ABP\cong\triangle ACQ$），根据已知还缺少条件. 怎样充分运用已知，创造条件来证明图中未知线段、未知角的相等或两个三角形全等？这里采用如下的证明：$\because BP=CQ$，$\therefore S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ACQ}$，利用 $S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ 得 $AB\cdot AP=AC\cdot AQ$，又$\angle BAQ=\angle CAP$，$\therefore \triangle ABQ\backsim\triangle ACP$，而其对应边 $BQ=CP$，$\therefore \triangle ABQ\cong\triangle ACP$，$\therefore AB=AC$. 本题猜想不难，难在推理论证.

例 4 如图 24-4，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle A=90^\circ$，$AB\parallel CD$，$AB=3$，$DC=4$，$AD=8$. 试问：在线段 AD 上是否存在点 P，使得以 P，A，B 为顶点的三角形和以 P，D，C 为顶点的三角形相似？若不存在，说明理由；若存在，这样的点 P 共有几个？它们到点 A 的距离各为多少？

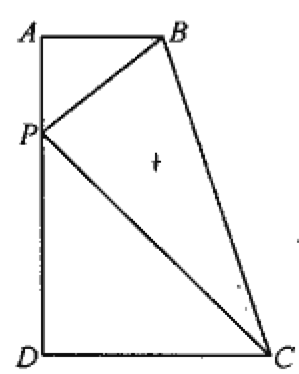


图 24-4

解 要分清以 P，A，B 为顶点的三角形和以 P，D，C 为顶点的三角形相似有几种情况. 由于$\angle A=\angle D=90^\circ$，所以若存在这样的点 P，也只可能是$\triangle APB\backsim\triangle DPC$ 或$\triangle APB\backsim\triangle DCP$，从而求出可能存在的点 P.

假定存在这样的点 P，设 $PA=x$.

(1)若有$\triangle APB\backsim\triangle DPC$，则$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{AB}{DC}$，$\dfrac{x}{8-x}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore x=\dfrac{24}{7}$；

(2)若有$\triangle APB\backsim\triangle DCP$，则$\dfrac{AP}{DC}=\dfrac{AB}{PD}$，$\dfrac{x}{4}=\dfrac{3}{8-x}$，$\therefore x=2$ 或 $x=6$.

以上两种情形的过程均可逆.

$\therefore$这样的点 P 共有三个,它们到 A 点的距离分别为$\frac{24}{7}$,2 和 6.

说明 数形结合,数形转换能使问题的直观性体现出来,有利于寻求简便的解题途径.

例 5 方程$\frac{x}{x-2}+\frac{x-2}{x}+\frac{2x+a}{x(x-2)}=0$只有一个实根,求满足条件的实数 a 的值及对应方程的根.

解 有些运算有一定的条件限制,有些问题本身就包含了多种情况,解题时必须进行分类考察.对于分式方程,应考虑分母不为零,为突破这一限制,去分母后要讨论.

原方程去分母后得:$2x^2-2x+4+a=0$(*)

要使原方程仅只有一个实根,分两种情况:方程(*)仅有一实根,且这根不等于 0 和 2;方程(*)有两个实根,但其中有一根是 0 或 2(原方程的增根).由此,得:

当 $\Delta=0$,即 $a=-\frac{7}{2}$时,方程(*)仅有一实根,$x=\frac{1}{2}$,是原方程惟一实根;

当 $\Delta<0$,即 $a<-\frac{7}{2}$时,方程(*)有根 0 或 2.若 $x=0$,则 $a=-4$,原方程另一根为 $x=1$;若 $x=2$,则 $a=-8$,原方程另一根为 $x=-1$.

综上所述,$a=-\frac{7}{2},-4,-8$.对应的方程的根为 $x=\frac{1}{2},1,-1$.

例 6 若方程 $x^2+2ax+b=0$ 的两实根在方程 $x^2+2ax+a-4=0$ 的两实根之间,试求 a,b 应满足的关系.

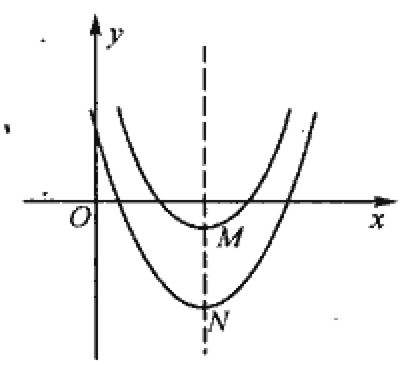


图 24-5

解 如能利用图形直观地显示两个方程的实根的位置,就更容易探究 a,b 之间的关系.由二次方程构造对应的二次函数 $y_1=x^2+2ax+b$,$y_2=x^2+2ax+a-4$.函数 y_1,y_2 形状相同.具有共同的对称轴.设 y_1,y_2 的顶点分别为 M,N,则方程 $x^2+2ax+b=0$ 两根在 $x^2+2ax+a-4=0$ 两根之间的条件是:M 的纵坐标不大于零且大于 N 的纵坐标.如图 24-5.而 $y_1=(x+a)^2-a^2+b$,$y_2=(x+a)^2-a^2+a-4$.故满足 $-a^2+a-4<-a^2+b\leqslant 0$,解得 $a-4<b\leqslant a^2$.所以 a、b 满足的关系为 $a-4<b\leqslant a^2$.

例 7 如图 24-6,AB 是$\odot O$ 的直径,C 在$\odot O$ 的半径 AO 上运动,$PC\perp AB$ 交$\odot O$ 于 E,PT 切$\odot O$ 于点 T,$PC=2.5$.(1)当 CE 正好是$\odot O$ 的半径时,$PT=2$,求$\odot O$ 的半径;(2)设 $PT^2=y$,$AC=x$,写出 y 关于 x 的函数解析式;(3)$\triangle PTC$ 是否可能变为以 PC 为斜边的等腰直角三角形?若能,请求出$\triangle PTC$ 的面积;若不

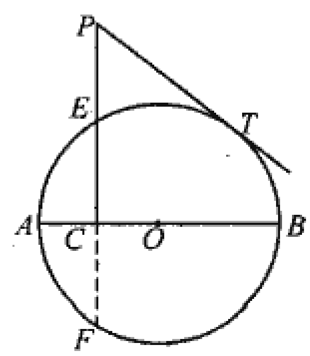


图 24-6

能请说明理由.

分析 (1)当 CE 正好是半径时,因为 PT 是切线,此时$\triangle PTC$ 为直角三角形,PT,PC 均已知,求半径条件已具备.(2)观察 PT 与 AC 所处位置,应能联想到切割线定理和相交弦定理.(3)要综合(1)、(2)两问探求.

解 (1)当 CE 是$\odot O$ 的半径时,点 C 与圆心 O 重合.又$\because PT$ 切$\odot O$ 于 T.

$\therefore PT\perp OT\Rightarrow\triangle POT$ 为 Rt△,又$\because PC=2.5,PT=2$,

$\therefore$半径 $OT=\sqrt{PO^2-PT^2}=\sqrt{PC^2-PT^2}=\sqrt{2.5^2-2^2}=1.5$.

(2)延长 PC 交$\odot O$ 于点 F,$\because PF\perp AC$,AB 是直径,$\therefore CE=CF$.

由相交弦定理,知 $AC\cdot CB=CF\cdot CE$,即 $CE^2=AC\cdot CB$.

由切割线定理,得 $PT^2=PE\cdot PF=(PC-EC)(PC+EC)=PC^2-EC^2$.

$\because AC=x$,$\therefore y=2.5^2-x(3-x)$,即 $y=x^2-3x+6.25(0\leqslant x\leqslant 1.5)$.

(3)设当点 C 在半径上运动到某一点时,$\triangle PTC$ 是以 PC 为斜边的等腰直角三角形,则有 $CT\perp PT$.又$\because PT$ 切$\odot O$ 于 T,$\therefore CT$ 过圆心 O,即 CT 是$\odot O$ 的半径.

由(1)知 $CT=1.5$,$\therefore PT=1.5$.

由(2)知 $CT^2=x^2-3x+6.25(0\leqslant x\leqslant 1.5)$.

所以有:$x^2-3x+6.25=1.5^2$,即 $x^2-3x+4=0$.

$\because\Delta=3^2-4\times4=-7<0$,$\therefore$此方程无解.

$\therefore$在$\odot O$ 直径上没有这样的点 C 使得$\triangle PTC$ 成为以 PC 为斜边的等腰直角三角形.

例 8 在直角坐标系中,如图 24-7 所示,点 O'的坐标为$(2,0)$,$\odot O'$与 x 轴交于原点 O 和点 A,又 B,C,E 三点的坐标分别为$(-1,0)$,$(0,3)$,$(0,b)$,且 $0<b<3$.(1)求点 A 的坐标和经过 B,C 两点直线的解析式;(2)当点 E 在线段 OC 上移动时(不与 O,C 重合),直线 BE 与$\odot O'$有哪几种位置关系?并求出每种位置关系时,b 的取值范围.

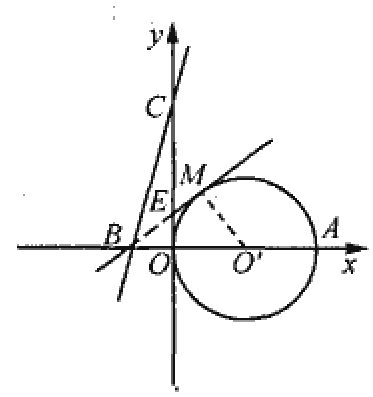


图 24-7

分析 第一问的难度不大,第二问我们知道有三种位置关系,其中最关键的位置关系是圆与直线相切,所以只要把直线与圆相切时的 b 值范围分析清楚,其他两种位置关系就容易知道了.

解 (1)根据已知,易得点 A 的坐标为 $A(4,0)$;设过 B、C 两点的直线函数式为 $y=kx+m$.$\because$直线过$(-1,0)$和$(0,3)$,把这两点代入函数得:$k=3,m=3$.$\therefore$过 B,C 两点的直线解析式为:$y=3x+3$.

(2)当点 E 在线段 OC 上移动时,直线 BE 与$\odot O'$有三种位置关系:相离、相切、相交,当点 E 在 OC 上移到某处时,恰使直线 BE 切$\odot O'$于点 M(如图所示),连结 $O'M$,

$\because BM$ 为$\odot O'$的切线,$\therefore O'M\perp BM$,且 $O'M=2$.

在 Rt$\triangle BMO'$中，$\because BO'=3, O'M=2$，$\therefore BM=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

$\because OE\perp OB, O'M\perp BM, \angle O'BM=\angle EBO$，

$\therefore$ Rt$\triangle BOE\backsim$Rt$\triangle BMO'$. $\therefore \dfrac{OE}{O'M}=\dfrac{BO}{BM}$. $\therefore OE=\dfrac{O'M\cdot BO}{BM}=\dfrac{2\times 1}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\because OE=b$，$\therefore b=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$ 当 $b=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$时，直线 BE 与$\odot O'$相切；

当$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<b<3$ 时，直线 BE 与$\odot O'$相离；

当 $0<b<\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$时，直线 BE 与$\odot O'$相交.

例 9 已知，如图 24-8，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，对角线 AC 与 BD 相交于 E，且 $AC\perp BD$，$S_{梯形ABCD}=36$，$S_{\triangle BCE}:S_{\triangle DCE}=2:1$.（1）求梯形 $ABCD$ 的两底长和高；（2）将此梯形置于直角坐标系中，使 AB 在 x 轴上，点 D 在 y 轴上，求经过 A、B、D 三点的抛物线的解析式；（3）判断点 C 是否在（2）中的抛物线上，并说明理由.

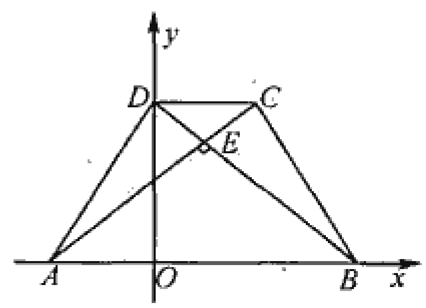


图 24-8

解 （1）在等腰梯形 $ABCD$ 中，易得$\angle EAB=\angle EBA$.

又$\because \angle AEB=90^\circ$，$\therefore \angle EBA=45^\circ$. $\therefore BE:DE=2:1$.

又$\because DE=EC, AE=BE$，而 $S_{梯形ABCD}=36$.

$\therefore S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ABC}=36$. 即 $\dfrac{1}{2}AC\cdot DE+\dfrac{1}{2}AC\cdot BE=36$.

又$\because DE=\dfrac{1}{3}BD=\dfrac{1}{3}AC, BE=\dfrac{2}{3}AC$.

$\therefore BD=AC=6\sqrt{2}$. $\therefore OD=OB=6, DC=4, AB=8$.

即梯形两底长分别为 4，8，高为 6.

（2）由（1）得，得 $A(-2,0)$，$B(6,0)$，$D(0,6)$. 设过 A、B、D 三点的抛物线解析式为 $y=a(x+2)(x-6)$，它过 $D(0,6)$. $\therefore a=-\dfrac{1}{2}$.

故过 A, B, D 三点的抛物线是 $y=-\dfrac{1}{2}(x+2)(x-6)$.

（3）点 C 在（2）中的抛物线上. 容易求得 $C(4,6)$代入 $y=-\dfrac{1}{2}(x+2)(x-6)$中成立.

即点 C 的坐标满足抛物线的解析式. $\therefore C$ 在抛物线上.

例 10 已知 AC，AB 是$\odot O$ 的弦，$AB>AC$.

(1)如图 24-9(1),能否在 AB 上确定一点 E,使 $AC^2=AE\cdot AB$,为什么?

(2)如图 24-9(2),在条件(1)的结论下延长 EC 到 P,连结 PB. 如果 $PB=PE$,试判断 PB 和$\odot O$ 的位置关系并说明理由.

(3)在条件(2)的情况下,如果 E 是 PD 的中点,那么 C 是 PE 的中点吗? 为什么?

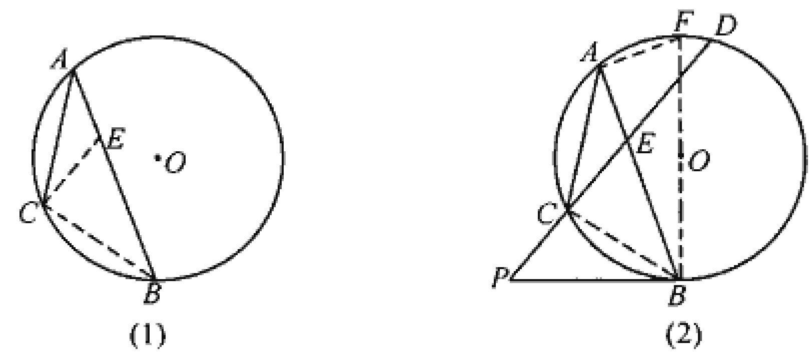


图 24-9

解 (1)能. 连结 BC,作$\angle ACE=\angle B$,CE 交 AB 于 E,

$\because$ $\angle A=\angle A$,$\angle ACE=\angle B$,$\therefore$ $\triangle ACE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore$ $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$. $\therefore$ $AC^2=AE\cdot AB$.

(2)PB 和$\odot O$ 相切.

证明 作直径 BF 交$\odot O$ 于 F,连结 AF、BC,

$\because$ $PB=PE$,$\therefore$ $\angle PEB=\angle PBE$.

$\because$ $\angle PEB=\angle A+\angle ACE$,

又$\because$ $\triangle ACE\backsim\triangle ABC$,

$\therefore$ $\angle A+\angle ACE=\angle A+\angle ABC=180^\circ-\angle ACB$,$\therefore$ $\angle PBE=180^\circ-\angle ACB$.

$\because$ $ACBF$ 为$\odot O$ 内接四边形,$\therefore$ $\angle AFB=180^\circ-\angle ACB$.

$\therefore$ $\angle AFB=\angle PBE$. $\because$ BF 为$\odot O$ 直径,

$\therefore$ $\angle BCF=90^\circ$. $\therefore$ $\angle AFB+\angle ABF=90^\circ$. $\therefore$ $\angle PBE+\angle ABF=90^\circ$.

$\therefore$ $BF\perp PB$. $\therefore$ PB 是$\odot O$ 的切线.

(3)C 是 PE 的中点.

证明 $\because$ PB 是$\odot O$ 的切线,$\therefore$ $PB^2=PC\cdot PD$.

$\because$ E 是 PD 中点,$\therefore PE=ED$.

而 $PE=PB$,$\therefore PD=2PB$.

$\therefore$ $PB=2PC$. $\therefore$ $PE=2PC$. $\therefore$ C 是 PE 中点.

例 11 已知:如图 24-10,$\angle ABC=30^\circ$,O 是 BA 上的一点,以 O 为圆心作圆与 BC 相切于点 D,交 BO 于点 E,连结 ED,F 是射线 OA 上的一个动点,过点 F 作 $FG\perp AB$ 于 F,交 BC 于点 G,$BD=\sqrt{3}$. 设 $OF=x$,四边形 $EDGF$ 的面积为 y.

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式,并写出自变量 x 的取值范围;

(2)当 x 为何值时,ED 将$\triangle BGF$ 的周长平分?

(3)若四边形 $EDGF$ 的面积为$\triangle BED$ 的面积的 5 倍,试确定 FG 所在的直线与$\odot O$ 的位置关系,并且说明理由.

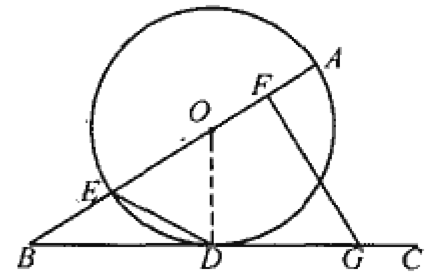


图 24-10

解 (1)欲建立四边形 $EDGF$ 的面积 y 与 $OF(x)$之间的函数关系式,关键在于将 $S_{四边形EDGF}$转化为 $S_{\triangle BFG}$与 $S_{\triangle BDE}$之差.

连结 OD.易知$\angle ODB=90^\circ$,从而 $OD=BD\cdot\tan\angle ABC=\sqrt{3}\cdot\tan30^\circ=1$. $OB=2OD=2$, $BE=1$.

$\therefore$ E 是 OB 的中点.

$\therefore$ $S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cdot BD\cdot OD)=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

又$\triangle BFG\backsim\triangle BDO$,$\therefore$ $\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle BDO}}=\left(\frac{BF}{BD}\right)^2$,易得 $S_{\triangle BFG}=\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)^2$.

$\therefore$ $y=S_{四边形EDGF}=S_{\triangle BFG}-S_{\triangle BDE}=\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{5\sqrt{3}}{12}$.其中,自变量 x 的取值范围是$x\geqslant0$.

(2)要使 ED 将$\triangle BGF$ 的周长平分,即 $EF+FG+DG=BE+BD=1+\sqrt{3}$.

而 $EF=1+x$,且在 Rt$\triangle BFG$ 中,可分别求出 $FG=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$, $BG=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

$\therefore$ $DG=BG-BD=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+2)-\sqrt{3}$.

$\therefore$ $1+x+\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)+\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+2)-\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$.

解得 $x=0$

(当 $x=0$ 时,ED 将$\triangle EGF$ 的周长平分).

(3)若 $S_{四边形EDGF}=5S_{\triangle BED}$,则有$\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}=5\times\frac{\sqrt{3}}{4}$.

解得 $x_1=1$, $x_2=-5$(不合题意,舍去).

$\therefore$ $OF=OD=1$,即为$\odot O$ 的半径.

又$\because$ $FG\perp AB$,$\therefore$ FG 所在的直线与$\odot O$ 相切.

例 12 如图 24-11,已知 O 是正方形 $ABCD$ 对角线 AC 上一点,以 O 为圆心、OA 的长为半径的$\odot O$ 与 BC 相切于 M,与 AB,AD 分别相交于 E,F.

(1)求证:CD 与$\odot O$ 相切;

(2)若正方形 $ABCD$ 的边长为 1,求$\odot O$ 的半径;

(3)对于以点 M、E、A、F 以及 CD 与$\odot O$ 的切点为顶点的五边形的五条边，从相等关系考虑，你可以得出什么结论？请给出证明.

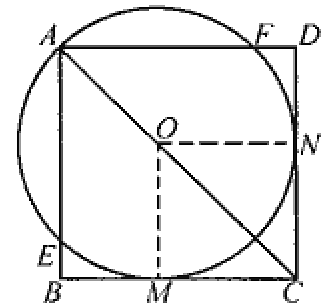


图 24-11

(1)证明 连结 OM，则 $OM\perp BC$. 过 O 作 $ON\perp CD$ 于 N.

$\because$ 点 O 在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上，

$\therefore$ $\angle ACB=\angle ACD=45^\circ$.

$\therefore$ $ON=OM$.

$\therefore$ CD 与$\odot O$ 相切于 N.

(2)解 设$\odot O$ 的半径为 R，则 $OM=R$.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 1，

$\therefore$ $AC=\sqrt{2}$，$OC=\sqrt{2}-R$.

在 Rt$\triangle OMC$ 中，$\because \sin\angle OCM=\dfrac{OM}{OC}$，$\therefore$ $\sin45^\circ=\dfrac{R}{\sqrt{2}-R}$.

解之，得 $R=2-\sqrt{2}$.

(3)解 对五边形 $MEAFN$ 的五条边，从相等关系考虑，有

①$AE=AF=MN$；②$EM=FN$.

证明如下：

①$\because \angle OMC=\angle ONC=\angle MCN=90^\circ$，$OM=ON$，

$\therefore$ 四边形 $OMCN$ 是正方形.

$MC=NC=R=2-\sqrt{2}$，$BM=DN=\sqrt{2}-1$.

在 Rt$\triangle MNC$ 中，$MN=\sqrt{2}R=2\sqrt{2}-2$.

$\because$ BC 切$\odot O$ 于 M，$\therefore$ $BM^2=BE\cdot BA$.

$\therefore$ $BE=\dfrac{BM^2}{BA}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$.

同理 $DF=3-2\sqrt{2}$.

$\therefore$ $AE=AF=1-(3-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$. $\therefore$ $AE=AF=MN$.

②Rt$\triangle EBM$ 和 Rt$\triangle PDN$ 中，

$\because$ $BE=DF$，$BM=DN$，$\angle B=\angle D=90^\circ$，

$\therefore$ $\triangle EBM\cong\triangle FDN$. $\therefore$ $EM=FN$.

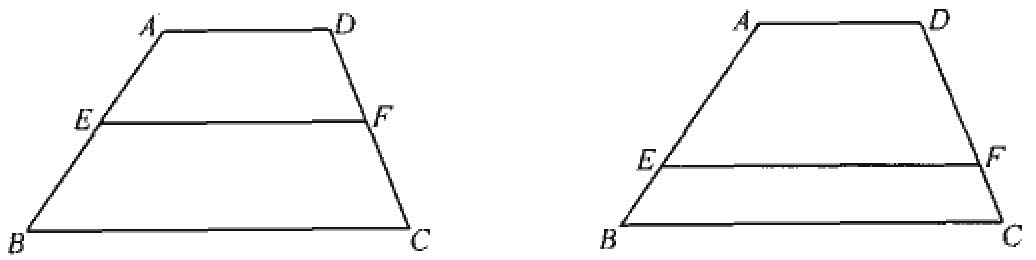
说明 本题第(3)小题是一道结论探索问题，它要求学生通过观察，探索出结论，再证明结论成立. 它能考查学生的多种能力，是近年来全国各地中考或竞赛试题中的热门题型.

[能力训练]

1. 已知：在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，点 E 在 AB 上，点 F 在 DC 上，且 $AD=a$，

$BC=b$.

(1)如图 24-12(1),如果点 E,F 分别为 AB,DC 的中点,求证:$EF\parallel BC$,且 $EF=\dfrac{a+b}{2}$;



(1) (2)

图 24-12

(2)如图 24-12(2),如果$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{DF}{FC}=\dfrac{m}{n}$,判断 EF 和 BC 是否平行,并用 a,b,m,n 的代数式表示 EF,请证明你的结论.

2.如图 24-13,已知二次函数 $y=mx^2+3(m-\dfrac{1}{4})x+4(m<0)$,与 x 轴交于 A、B 两点(A 在 B 的左边),与 y 轴交于点 C,并且$\angle ACB=90°$.

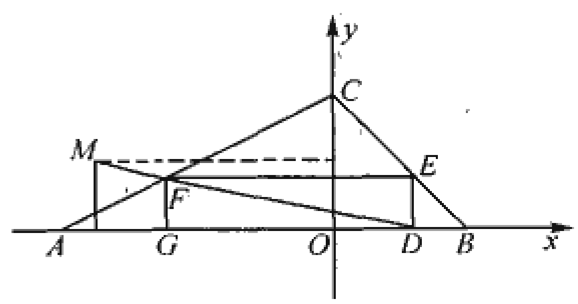


图 24-13

(1)求这个二次函数的解析式;

(2)矩形 $DEFG$ 的一条边 DG 在 AB 上,E、F 分别在 BC,AC 上,设 $OD=x(x>0)$,矩形 $DEFG$ 的面积为 S,求 S 与 x 的函数关系式;

(3)当矩形 $DEFG$ 的面积 S 最大时,连结对角线 DF 并延长到 M,使 $FM=\dfrac{2}{5}DF$,试判断此时点 M 是否在二次函数 $y=mx^2+3(m-\dfrac{1}{4})x+4$ 的图像上?请说明理由.

3.设$\{a_n\}$是首项为 1 的正项数列,且$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0(n=1,2,3,\cdots)$,求它的通项公式.

4.如图 24-14,E,F 分别为正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心,四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能的图形如何?请画出图形.

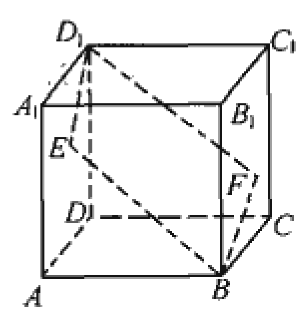


图 24-14

5.已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=kx+4$ 相交于 $A(1,m)$、$B(4,8)$两点,与 x 轴相交于原点及点 C.(1)求直线与抛物线的函数解析式;(2)在 x 轴上方的抛物线上是否存在点 D,使得 $S_{\triangle OCD}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle OCB}$?如存在,求出点 D;如不存在,说明理由.

6.若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 y 轴上的点 $C(0,2)$，且与 x 轴只有一个交点 A，又满足 $b+2ac=0$.另有直线 $y=x+m$ 过 A 点且与抛物线相交于 B 点，与 y 轴相交于 P 点.

(1)求直线和抛物线的解析式，并画草图；

(2)连结 AC、BC，试判断 $\triangle ABC$ 的形状；

(3)以 BC 为直径作⊙M，过 P 作直线 PN 切⊙M 于 N，并与过点 B 且平行于 y 轴的直线交于 Q，求 $PN\cdot PQ$ 的值.

7.已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 和直线 $y=ax+1$.

(1)求证：不论 a 取何值，抛物线与直线必有两个不同的交点；

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是抛物线与直线的两交点，点 P 为线段 AB 的中点，且点 P 的横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}$.试用 a 表示点 P 的纵坐标；

(3)设 A，B 两点的距离 $d=\sqrt{1+a^2}\,|x_1-x_2|$，试用 a 表示 d；

(4)过点 $C(0,-1)$ 作直线 l 平行于 x 轴，试判断直线 l 与以线段 AB 为直径的圆的位置关系，并说明理由.

8.已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边，抛物线 $y=x^2-2ax+b^2$ 交 x 轴于两点 M，N，交 y 轴于点 P，其中点 M 的坐标是 $(a+c,0)$.

(1)求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形；

(2)若 $\triangle MNP$ 的面积是 $\triangle NOP$ 的面积的 3 倍，

①求 $\cos C$ 的值；

②试判断 $\triangle ABC$ 的三边长能否取一组适当的值，使以 MN 为直径的圆恰好过抛物线 $y=x^2-2ax+b^2$ 的顶点？如能，求出这组值；如不能，说明理由.

9.如图 24-15，AB 为半圆的直径，O 为圆心，$AB=6$，延长 BA 到 F，使 $FA=AB$.若 P 为线段 AF 上一个动点（P 点与 A 点不重合），过 P 点作半圆的切线，切点为 C，作 $CD\perp AB$，垂足为 D.过 B 点作 $BE\perp PC$，交 PC 的延长线于点 E.连结 AC、DE.

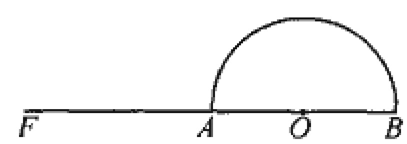


图 24-15

(1)判断线段 AC，DE 所在直线是否平行，并证明你的结论；

(2)设 AC 为 x，$AC+BE$ 为 y，求 y 与 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围.

10.已知一个二次函数的图像经过 $A(-1,0)$、$B(0,3)$、$C(4,-5)$ 三点.

(1)求这个二次函数的解析式及其图像的顶点 D 的坐标；

(2)这个函数的图像与 x 轴有两个交点，除点 A 外的另一个交点设为 E，点 O 为

坐标原点．在$\triangle AOB$，$\triangle BOE$，$\triangle ABE$和$\triangle BDE$这四个三角形中，是否有相似三角形？如果有，指出哪几对三角形相似，并加以证明；如果没有，要说明理由．

11．如图24-16，四边形$AOBC$是菱形，点B的坐标为$(4,0)$，$\angle AOB=60^\circ$，点P从点A开始以每秒1个单位长度的速度沿AC向点C移动，同时，点Q从点O开始以每称a $(1\leqslant a<3)$个单位长度的速度沿射线OB向右移动．设$t(0<t\leqslant 4)$秒后，PQ交OC于点R．

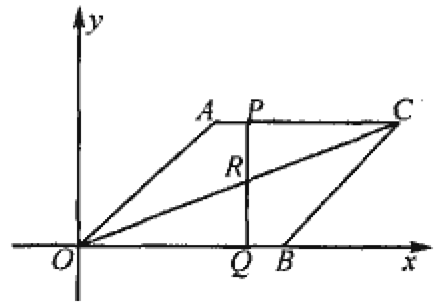


图24-16

(1)当$a=2$，$OR=8(2\sqrt{3}-3)$时，求t的值及经过P,Q两点的直线的解析式；

(2)当a为何值时，以O,Q,R为顶点的三角形和以O,B,C为顶点的三角形能够相似？当a为何值时，以O,Q,R为顶点的三角形和以O,B,C为顶点的三角形不能够相似？请给出结论，并加以证明．

12．《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过800元的部分不必纳税，超过800元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额	税率
不超过500元的部分	5%
超过500元至2000元的部分	10%
超过2000元至5000的部分	15%
……	……

某人一月份应交纳此项税款26.78元，则他的当月工资、薪金所得介于

A．800元～900元　　B．900～1200元

C．1200元～1500元　　B．1500～2800元