竞赛之窗

2014 年上海市初三数学竞赛

中图分类号:G424.79　文献标识码:A　文章编号:1005－6416(2015)04－0019－05

【说明】解答本试卷可使用科学计算器.

一、填空题(每小题 10 分,共 80 分)

1. 化简:$\dfrac{a^3-a^2b-ab^2+b^3}{a^2-2|ab|+b^2}=$______.

2. 若$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{z}=a,\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{x}=b,\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}=c$,则$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=$______.

3. 已知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,$AB/\!/CD,AB=6,CD=16$. $\triangle ACE$ 为直角三角形,$\angle AEC=90°,CE=BC=AD$. 则 AE 的长为______.

4. 方程

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=2\ 014$$

的非负整数解(x,y,z)有______组.

5. 在$\triangle ABC$中,已知$\angle ABC=44°$,D为边 BC 上的一点,满足 $DC=2AB$,$\angle BAD=24°$. 则$\angle ACB$的大小为______.

6. 在直角坐标平面 xOy 上,由不等式组

$$\begin{cases}|x|\leqslant 2,\\ |y|\leqslant 2,\\ \big||x|-|y|\big|\leqslant 1\end{cases}$$

确定的区域面积为______.

7. 使得关于 x 的方程

$$a^2x^2+ax+1-13a^2=0$$

有两个整数根的所有正实数 a 为______.

8. 设$2\ 014^2$的所有正约数为 $d_1,d_2,\cdots,d_k$. 则

显然,在 300 个单位中,T 时间内事故发生不少于 4 的概率居然等于 0.815 0(它几乎接近 1),换言之,该事件发生的可能并不小,这也许超乎人们的想像,但它是千真万确的(数学计算不会欺骗人).

再来看一个更简单、通俗的例子.

袋子中有 a 个黑球,b 个白球. 现从袋中摸球. 若第一次摸出黑球后放回袋中,求第二次仍然摸出黑球的概率.

设 A 为第一次摸出黑球的事件,B 为第二次摸出黑球事件. 则不难算出

$$P(A)=\frac{a}{a+b},$$

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{a}{a+b}.$$

显然,第二次摸到黑球的概率与第一次摸到黑球的概率相同.

这个例子说明:若第一次发生了某事件,第二次再发生的可能与之相同.

以上两例多少可以解释为何小概率事件接连发生的概率并不小的这一事实.

这个事实也警示人们,当某事故发生后,要提高警惕,严防类似事故再起.

参考文献:

[1] 钟开莱. 初等概率论[M]. 北京:人民教育出版社,1980.

[2] 吴振奎 等. 高等数学解题全攻略[M]. 哈尔滨工业大学出版社,2013.

$$\frac{1}{d_1+2\,014}+\frac{1}{d_2+2\,014}+\cdots+\frac{1}{d_k+2\,014}$$

$=$ ______.

二、解答题(共 70 分)

9. (15 分)解关于 x 的方程

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=(a+1)\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

10. (15 分)如图 1,在凸四边形 $ABCD$ 中,已知$\angle ABC+\angle CDA=300°$,$AB\cdot CD=BC\cdot AD$.证明:$AB\cdot CD=AC\cdot BD$.

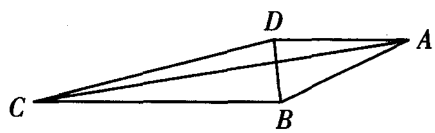

图 1

11. (20 分)已知边长为 a 的正方形 $ABCD$的内部有 n 个圆,每个圆的面积均不大于 1,且与正方形 $ABCD$ 的边平行的直线均至多与一个圆相交. 证明:这 n 个圆的面积之和小于 a.

12. (20 分)证明:(1)可以将全体正整数分成三组 A_1、A_2、A_3,使得对每一个整数 $n\geqslant15$,在 A_1、A_2、A_3 的每一组中均能取出两个不同的数,其和为 n.

(2)将全体正整数任意分成四组 A_1、A_2、A_3、A_4,则存在整数 $n\geqslant15$,在 A_1、A_2、A_3、A_4 中一定有一组 A_i,在 A_i 中不存在两个不同的数,其和为 n.

参 考 答 案

一、**1.** $\begin{cases} b, & a=0,b\neq0;\\ a+b, & ab>0;\\ \dfrac{(a-b)^2}{a+b}, & ab<0;\\ a, & a\neq0,b=0.\end{cases}$

$$原式=\frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{|a|^2-2|a||b|+|b|^2}$$

$$=\frac{(a-b)^2(a+b)}{(|a|-|b|)^2}$$

$$=\begin{cases} b, & a=0,b\neq0;\\ a+b, & ab>0;\\ \dfrac{(a-b)^2}{a+b}, & ab<0;\\ a, & a\neq0,b=0.\end{cases}$$

2. 8.

注意到,

$$b+c-a=\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}\right)-\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{z}\right)$$

$$=\frac{2z}{y}.$$

类似地,$c+a-b=\dfrac{2x}{z}$,$a+b-c=\dfrac{2y}{x}$.

故$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$=\frac{2z}{y}\cdot\frac{2x}{z}\cdot\frac{2y}{x}=8.$$

3. $4\sqrt{6}$.

如图 2,过 A 作 $AF\perp CD$ 于点 F. 则 $DF=5$,$CF=11$.

设 $CE=BC=AD=x$.

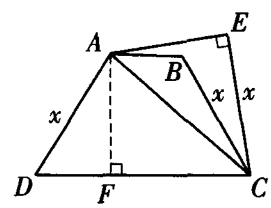

图 2

于是,$AC^2=x^2+AE^2$,

$AC^2=AF^2+11^2=x^2-5^2+11^2$.

故 $x^2+AE^2=x^2-5^2+11^2$

$\Rightarrow AE^2=96\Rightarrow AE=4\sqrt{6}$.

4. 27.

原方程可变形为

$(x+1)(y+1)(z+1)=2\,015=5\times13\times31$.

若 x、y、z 均为正整数,则有 $1\times2\times3=6$ 组解;

若 x、y、z 中有一个为零,另两个为正整数,则有 $3\times6=18$ 组解;

若 x、y、z 中有两个为零,一个为正整数,则有 3 组解;

故原方程有 $6+18+3=27$ 组非负整数解.

5. 22°.

易知，$\angle ADC=44^\circ+24^\circ=68^\circ$.

如图 3，作射线 AK，使 $\angle DAK=68^\circ$，且与 DC 交于点 K.

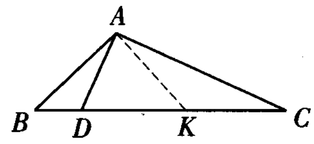

图 3

则 $AK=DK$.

由 $\angle AKD=180^\circ-2\times68^\circ=\angle B$，知 $AK=AB$.

故 $DK=AB$.

因为 $DC=2AB$，所以，

$KC=AB=AK$，$\angle C=\frac{1}{2}\angle AKD=22^\circ$.

6. 12.

显然，区域既关于 x 轴对称，又关于 y 轴对称. 因此，可先假定 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$.

由 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant2,\\0\leqslant y\leqslant2,\\-1\leqslant x-y\leqslant1\end{cases}$ 画出区域在第一象限（包括坐标轴）的部分，再对称作出整个区域，如图 4.

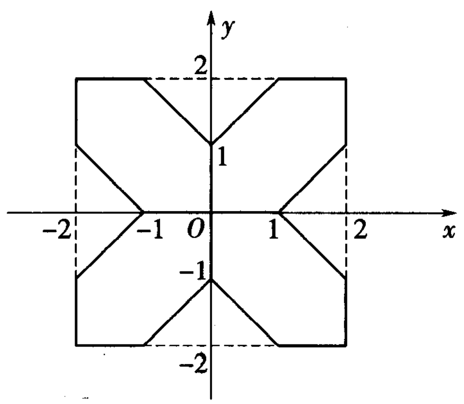

图 4

所求区域的面积是边长为 4 的正方形面积减去八个腰长为 1 的等腰直角三角形面积，即 $4^2-8\times\frac{1}{2}=12$.

7. 1、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$.

设两个整数根为 α、β. 则由 $\alpha+\beta=-\frac{1}{a}$ 为整数，知正数 $a=\frac{1}{n}$（n 为正整数）.

于是，原方程可写成

$x^2+nx+n^2-13=0$.

由 $\Delta=n^2-4(n^2-13)=52-3n^2\geqslant0$

$\Rightarrow n^2\leqslant\frac{52}{3}$.

因此，n 可取 1、2、3、4.

当 $n=1$ 时，原方程为 $x^2+x-12=0$，有两个整数根；

当 $n=2$ 时，原方程为 $x^2+2x-9=0$，无整数根；

当 $n=3$ 时，原方程为 $x^2+3x-4=0$，有两个整数根；

当 $n=4$ 时，原方程为 $x^2+4x+3=0$，有两个整数根.

从而，a 可取 1、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$.

8. $\frac{27}{4\ 028}$.

注意到，$2\ 014^2=2^2\times19^2\times53^2$.

于是，$2\ 014^2$ 的正约数有 $(2+1)^3=27$ 个，即 $k=27$.

不妨设 $1=d_1<d_2<\cdots<d_{27}=2\ 014^2$.

从而，$d_id_{28-i}=2\ 014^2(i=1,2,\cdots,27)$.

则 $\frac{1}{d_i+2\ 014}+\frac{1}{d_{28-i}+2\ 014}$

$=\frac{d_i+d_{28-i}+2\times2\ 014}{d_id_{28-i}+2\ 014(d_i+d_{28-i})+2\ 014^2}$

$=\frac{1}{2\ 014}$.

故 $\frac{1}{d_1+2\ 014}+\frac{1}{d_2+2\ 014}+\cdots+\frac{1}{d_{27}+2\ 014}$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{d_1+2\ 014}+\frac{1}{d_{27}+2\ 014}\right)+\right.$

$\left(\frac{1}{d_2+2\ 014}+\frac{1}{d_{26}+2\ 014}\right)+\cdots+$

$$\left(\frac{1}{d_{27}+2\ 014}+\frac{1}{d_1+2\ 014}\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\times 27\times\frac{1}{2\ 014}=\frac{27}{4\ 028}.$$

二、9. 由已知得

$$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x-\sqrt{x}\geqslant 0,\\ x+\sqrt{x}\neq 0\end{cases}\Rightarrow x\geqslant 1.$$

原方程等价于

$$x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}=(a+1)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1-\sqrt{x-1}=a+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{x-1}=a \qquad ①$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x-1}=\frac{1}{a}. \qquad ②$$

由 x 的取值范围知

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\geqslant\sqrt{1}+\sqrt{1-1}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\geqslant 1$$

$$\Rightarrow 0<a\leqslant 1. \qquad ③$$

此时，①+②得

$$2\sqrt{x}=a+\frac{1}{a}\Rightarrow x=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2.$$

将 $x=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2$ 代入式①，并结合式③得

$$\text{左边}=\frac{a^2+1}{2a}-\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-1}$$

$$=\frac{a^2+1}{2a}-\frac{1-a^2}{2a}=a=\text{右边}.$$

所以，$x=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2$ 为原方程的解.

综上，当且仅当 $0<a\leqslant 1$ 时，方程有解

$$x=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2.$$

10. 如图 5，作正△BCE，联结 DE.

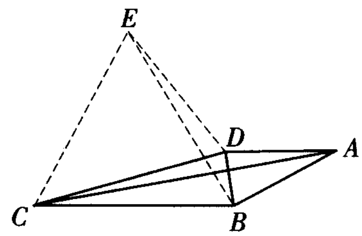

图 5

由∠ABC+∠CDA=300°，得

∠BAD+∠BCD=360°−300°=60°.

于是，∠DCE=60°−∠BCD=∠BAD.

又由题设知

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}\Rightarrow\frac{AB}{CE}=\frac{AD}{CD}.$$

则△ABD∽△CED

$$\Rightarrow\frac{AB}{CE}=\frac{AD}{CD}=\frac{BD}{ED},\angle ADB=\angle CDE.$$

于是，∠BDE=∠ADC.

故△BDE∽△ADC

$$\Rightarrow\frac{BD}{BE}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow AC\cdot BD=BC\cdot AD$$

$$\Rightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BD.$$

11. 设第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个圆的直径为 d_i. 则该圆的面积 $S_i=\frac{\pi}{4}d_i^2$.

由题设知 $S_i\leqslant 1$.

若 $d_i>1$，则 $S_i\leqslant 1<d_i$；

若 $0<d_i\leqslant 1$，则 $S_i=\frac{\pi}{4}d_i^2\leqslant\frac{\pi}{4}d_i<d_i$.

故 $S_1+S_2+\cdots+S_n<d_1+d_2+\cdots+d_n$. ①

如图 6，将这 n 个圆垂直投影到边 AB 上，得到长为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的 n 条线段，由于与正方形 $ABCD$ 的边平行的直线至多与一个圆相交，于是，

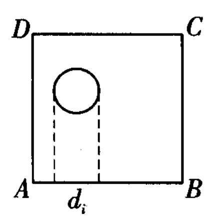

图 6

这 n 条线段除端点外两两不相交. 从而,

$$d_1+d_2+\cdots+d_n\leqslant AB=a. \quad ②$$

结合式①、②得

$$S_1+S_2+\cdots+S_n<a.$$

12. (1)将全体正整数分成如下三组:

$A_1=\{1,2,3,3\times3+3,3\times4+3,\cdots\}$,

$A_2=\{4,5,6,3\times3+2,3\times4+2,\cdots\}$,

$A_3=\{7,8,9,3\times3+1,3\times4+1,\cdots\}$.

下面证明:对每一个整数 $n\geqslant15$,在 A_1、A_2、A_3 的每一组中均能取出两个不同的数,其和为 n.

对于整数 $n\geqslant15$,可写成 $3k+4$、$3k+5$、$3k+6(k\geqslant3)$ 中的一种,即可表示成 A_1 中两个不同数的和;也可写成 $3k+6$、$3k+7$、$3k+8(k\geqslant3)$ 中的一种,即可以表示成 A_2 中两个不同数的和;又可写成 $7+8$、$7+9$ 或 $3k+8$、$3k+9$、$3k+10(k\geqslant3)$ 中的一种,即可表示成 A_3 中两个不同数的和.

(2)**证法 1** 用反证法.

若不然,则存在一种将全体正整数分成四个组 A_1、A_2、A_3、A_4 的一种分法,使得对每一个整数 $n\geqslant15$,A_i $(i=1,2,3,4)$ 中均存在两个不同的数,其和为 n.

将 A_1、A_2、A_3、A_4 中小于或等于 23 的数组成的数组分别记为 B_1、B_2、B_3、B_4,则 B_1、B_2、B_3、B_4 中数的个数和为 23,并且对每个 $i(i=1,2,3,4)$,15,16,$\cdots$,24 这十个数均为 B_i 中两个不同数的和,故 B_i 中至少有五个数(因为四个数两两不同的和至多六种可能).从而,B_1、B_2、B_3、B_4 中有一个恰有五个数(否则,B_1、B_2、B_3、B_4 中数的个数和大于或等于 $4\times6=24>23$).

不妨设 B_1 有五个数,记 $B_1=\{a,b,c,d,e\}$. 则 A_1 中的两个不同数的和表示 15,16,$\cdots$,24 恰为 B_1 中五个数的两两和. 于是,

$$4(a+b+c+d+e)=15+16+\cdots+24,$$

即 $$4(a+b+c+d+e)=195,$$

矛盾.

证法 2 用反证法.

若不然,则存在一种将全体正整数分成四个组 A_1、A_2、A_3、A_4 的一种分法,使得对每一个整数 $n\geqslant15$,$A_i(i=1,2,3,4)$ 中均存在两个不同的数,其和为 n.

若 15,16,$\cdots$,20 能表示成 $a+b$(a、b 均为正整数,$a\neq b$)的形式,则 a、b 均不超过 19.

在 1,2,$\cdots$,19 中,由抽屉原理,知存在某个 A_i(不妨设为 A_1),它至多含有这 19 个数中的四个数,记 A_1 中不超过 19 的四个数为 a、b、c、$d(a<b<c<d)$. 则 a、b、c、d 的两两和为 15、16、17、18、19、20.

故 $a+b=15,a+c=16$,

$b+d=19,c+d=20$,

$\{a+d,b+c\}=\{17,18\}$.

所以,$d-a=4$.

由 $d-a$ 为偶数,知 $a+d$ 为偶数.

因此,$a+d=18$.

从而,$b+c=17$.

于是,$a=7,b=8,c=9,d=11$.

由于 A_1 不含 1,故 21 不能表示成 A_1 中两个不同数的和,矛盾.

(熊 斌 顾鸿达 李大元 刘鸿坤 叶声扬 命题)